

# גלים אור ואופטיקה

11 במרץ 2025

## תוכן העניינים

7	<b>1 הרצאה 1 (5.11)</b>	1
7	מבוא .....	1.1
7	פיתוח משווהת הגל .....	1.2
8	פתרון משווהת הגל .....	1.3
10	<b>2 הרצאה 2 (7.11)</b>	2
10	הפתרון ומסקנות .....	2.1
10	סיכום הגדלים .....	2.1.1
10	מהירות פזה .....	2.1.2
11	פתרונות נוספים למשווהת הגלים .....	2.1.3
11	קשר שיפוע ומהירות רוחבית .....	2.1.4
11	לינאריות .....	2.1.5
12	תנאי שפה .....	2.2
12	נסיון כושל .....	2.2.1
13	תנאי שפה - קצה קשור .....	2.2.2
13	תנאי שפה - טבעת חופשית .....	2.2.3
13	תנאי שפה - גבול .....	2.2.4
15	<b>3 הרצאה 3 (12.11)</b>	3
15	עכבה (Impedance) .....	3.1
16	אנרגייה הנישאת ע"י מיתר .....	3.2
16	צפיפות אנרגיה .....	3.2.1
17	האנרגיה במחזור .....	3.2.2
18	<b>4 הרצאה 4 (14.11)</b>	4
18	התאמת עכבות בין תוכנים - מתאם רביע גל .....	4.1
20	גל מרוסן .....	4.2
20	פיתוח ראשוני .....	4.2.1

21	עכבה של מיתר מרוסן	4.2.2	
22	גלים עומדים	4.3	5
22	gal חזר ווצר gal עומד	4.3.1	
22	מיתר סופי וקונטיזיה	4.3.2	
<b>24</b>	<b>הרצתה 5 (19.11)</b>		
24	עוד גלים עומדים: תנאי שפה שונים	5.1	
24	קצחות חופשיים	5.1.1	
24	קצת חופשי וקצת קשור	5.1.2	
26	גלי קול בגזים	5.2	
26	פיתוח	5.2.1	
<b>27</b>	<b>הרצתה 6 (21.11)</b>		6
27	גלי קול ("גלים אקוסטיים") בנו	6.1	
27	פיתוח	6.1.1	
28	מסקנות הפיתוחה	6.1.2	
29	גדלים אקוסטיים	6.2	
29	מהירות הקול	6.2.1	
29	השווה ל מהירות התרמית	6.2.2	
30	תדריות שמע	6.2.3	
30	מהירות קול במוצקים/נוזלים	6.2.4	
31	תנאי שפה לגלי קול	6.3	
31	צינור פתח/סגור	6.3.1	
<b>32</b>	<b>הרצתה 7 (26.11)</b>		7
32	שיעור כיף עם דני ושון (תאוריה מוזיקלית)	7.1	
32	תאוריות פורייה - ייצוגים שונים	7.2	
<b>34</b>	<b>הרצתה 8 (28.11)</b>		8
34	טוררי פורייה	8.1	
34	מציאת המקדים	8.1.1	
34	דוגמה - gal רבובעי	8.1.2	
36	מחזור למרחב במקום בזמן	8.1.3	
37	הערה על מחזוריות	8.1.4	
37	פורייה בגלים עומדים - תנאי חתלה	8.1.5	
38	משפט רוחב הפס (Bandpass Theorem)	8.2	
<b>40</b>	<b>הרצתה 9 (3.12)</b>		9
40	הערה על קוונטיטים	9.1	
41	אפנון אותות (modulation)	9.2	
42	מבוא קטן לטרנספורם פורייה	9.3	

<b>43</b>	<b>10 הרצתה 10 (5.12)</b>
43	טרנספורם פורייה 10.1
44	העשרה (לא בשיעור) - משפט רוחב הפס 10.1.1
46	חברות גלים נעים (Traveling Wave Packet) 10.2
46	סכום 2 גלים - פעימות 10.2.1
47	סכום גלים רבים 10.2.2
48	מציאת משווהת הגל מיחס הנפיצה 10.3
48	דוגמה 10.3.1
48	טיזר למכניקה קוונטית - משווהת שרדינגר 10.3.2
50	העשרה (לא בשיעור) - עוד קוונטים 10.3.3
<b>51</b>	<b>11 הרצתה 11 (10.12)</b>
51	מערכת מיתר עם קפיצים 11.1
51	משווהת הגל (קלין גורדון) 11.1.1
51	תדרות קיטעון וגל נעלם 11.1.2
52	מנהור של גל (tunneling) 11.1.3
53	גלים אלקטромגנטיים (EM Waves) 11.2
53	פיתוח משווהת גל אלקטромגנטי ממשוואות מקסול 11.2.1
<b>54</b>	<b>12 הרצתה 12 (12.12)</b>
54	גלים אלקטромגנטיים 12.1
54	המשך המשך 12.1.1
55	תכונות של גלים א"מ 12.1.2
58	וקטור פוינטינג - אנרגיית גל א"מ 12.1.3
59	תנע של גל א"מ 12.1.4
<b>60</b>	<b>13 הרצתה 13 (17.12)</b>
60	גלים א"מ בתחום חומר 13.1
60	שדה חשמלי בחומר 13.1.1
60	שדה מגנטי בחומר 13.1.2
62	משוואות מקסול בתחום חומר מבודד 13.1.3
63	משווהת גלים במוליך 13.1.4
<b>64</b>	<b>14 הרצתה 14 (19.12)</b>
64	גלים א"מ בחומר (עם זרם) 14.1
64	ריסון חלש ( $\sigma << \omega$ ) 14.1.1
65	ריסון חזק ( $\sigma > \omega$ ) 14.1.2
66	אימפダンס לגלים א"מ 14.1.3
67	גלים מישוריים בכיוונים שונים 14.2
67	וקטור הגל 14.2.1
67	מעבר גל מישורי דרך גבול מישור 14.2.2

69	.....	3 חוקי האופטיקה הגאומטרית	14.2.3
70	.....	הזרה מלאה	14.2.4
<b>71</b>	<b>(24.12) 15 הרצאה</b>	<b>15 משוואות פרנל</b>	<b>15.1</b>
71	.....	<i>(Fresnel Equations)</i>	
71	.....	פיתוח	15.1.1
72	.....	זווית ברוסטר	15.1.2
<b>74</b>	<b>(26.12) 16 הרצאה</b>	<b>16 קירינה של מטען מואץ</b>	<b>16.1</b>
74	.....	- נוסחת <i>Larmor</i>	
77	.....	<b>16.2 פיזור תומסון</b>	<b>(Thomson Scattering)</b>
77	.....	שטח חתך של אלקטرون	16.2.1
78	.....	ג' אלקטرونים	16.2.2
78	.....	דוגמה - קורונה של המשם	16.2.3
79	.....	דוגמה - קירינת רקע קוסמית ( <i>CMB</i> )	16.2.4
80	.....	פלזמה	16.3
<b>81</b>	<b>(31.12) 17 הרצאה</b>	<b>17 גלים עומדים בשני ממדים</b>	<b>17.1</b>
81	.....	חזי מישר	17.1.1
81	.....	תעללה (קונטיזציה בכיוון אחד)	17.1.2
83	.....	מרובע (קונטיזציה ב2 הכיוונים)	17.1.3
<b>84</b>	<b>(2.1) 18 הרצאה</b>	<b>18 גלים עומדים בתלת ממד</b>	<b>18.1</b>
84	.....	תעללה (קונטיזציה ב2 כיוונים)	18.1.1
84	.....	תיבה (קונטיזציה ב3 כיוונים)	18.1.2
85	.....	קיינית גוף שחור	18.2
85	.....	מבוא	18.2.1
86	.....	צורת הספקטרום עבור גודל/קטן	18.2.2
86	.....	חוק סטפן-בולצמן	18.2.3
87	.....	חוק ווין	18.2.4
87	.....	דוגמה	18.2.5
<b>88</b>	<b>(7.1) 19 הרצאה</b>	<b>19 אופטיקה גאומטרית</b>	<b>19.1</b>
88	.....	עדשה כדורית דקה	19.1.1
<b>90</b>	<b>(9.1) 20 הרצאה</b>	<b>20 מצלמה</b>	<b>20.0.1</b>
90	.....	אופטיקה גלית	20.1
91	.....	ניסוי יאנג	20.1.1

<b>93</b>	<b>21 הרצאה 21 (14.1)</b>
93 . . . . .	21.1 סריג החהבכות . . . . .
94 . . . . .	21.1.1 שימוש - הפרזה ספקטרלית . . . . .
<b>96</b>	<b>22 הרצאה 22 (16.1)</b>
96 . . . . .	22.1 עקיפה (diffraction) . . . . .
99 . . . . .	22.2 סריג עקיפה . . . . .
<b>100</b>	<b>23 הרצאה 23 (21.1)</b>
100 . . . . .	23.1 עקיפה דרך מפתח דו מימי ותלת מימי . . . . .
<b>102</b>	<b>24 הרצאה 24 (23.1)</b>
102 . . . . .	24.1 עקרון פרמה . . . . .
104 . . . . .	24.1.1 דוגמה: עידוש כבידתי . . . . .
105 . . . . .	24.2 גלי מים . . . . .
<b>107</b>	<b>25 הרצאה 25 (28.1)</b>
107 . . . . .	25.1 פיתוח . . . . .
109 . . . . .	25.2 קירובים . . . . .
109 . . . . .	25.2.1 מים عمוקים . . . . .
109 . . . . .	25.2.2 מים רדודים . . . . .
<b>110</b>	<b>26 הרצאה 26</b>
110 . . . . .	26.1 יחס נפיצה לגלי מים . . . . .
110 . . . . .	26.1.1 פיתוח . . . . .
113 . . . . .	26.1.2 מסקנות . . . . .

קורס ב-2024 של פרופ' דני מעוז.  
רשימות ע"י אילאי ilayw1@mail.tau.ac.il (אם יש טעות, מזמינים לכתוב לי ועדכן כshawcl).  
במהלך הקורס דני משתמש בהדגמות (אנימציות) מהאתר הבא: <https://www.acs.psu.edu/drussell/.demos.html>

# 1 הרצאה 1 (5.11)

## 1.1 מבוא

מהו גל? אין הגדרה חד משמעית, אך בערך: הפרעה שנעה ו/או מתפשטה למרחב וזמן (לא נכון עבור גלים עומדים אף על פי שניתן לחושב עליהם כڪום של גלים נעים).

דוגמאות לגלים הם: גלי קול (באוויר), אור (גלים אלקטромגנטיים), קול במים (לדוגמה במיתר), גלים במים, גלי הסתברות קוונטית, גלי כבידה.

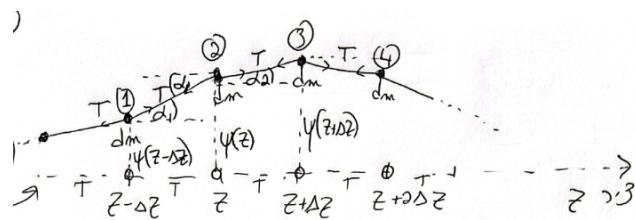
בקורס נזכיר את הפיזיקה והמתמטיקה של גלים מסוימים, חלקם צוינו לעיל.

## 1.2 פיתוח משווה הגל

### המערכת

נפתח את המתמטיקה של גלים במיתר (מיתר מתח אינסופי) בתחום גבול הרצף של אינסוף אוטילטורים הרמוניים מצומדים.

נתחיל מלהציג את המיתר בתחום אוסף מסות  $dm$  לאורך ציר  $z$  כך שכל 2 מסות נבדלות למרחק אופקי  $\Delta z$ , וביניהן קבוע  $\alpha$  (כל הקפיצים זהים). נסמן את הסטייה הרוחבית של מסה מסוימת מנק' המנוחה ב- $(z)\psi$ , וכוח המתיחות  $T$  (למעשה כוח הקפיצים) בין המסות - תכוף נראה שהמתיחות קבועה. נסמן את הזווית בין האופק למיתר בנקודה מסויימת בה. מטרתנו: למצוא את משווה התנועה של המסות, משווה דיפרנציאלית עבור  $(z)\psi$ .



### מתיחות קבועה

נבעז הנחה:  $\Delta z \ll \Delta\psi$  (בנוסף  $\alpha \ll 1$ ). ככלומר אנחנו פותרים רק עבור תנודות עם שיפור זעיר. אורך המיתר בין 2 מסות עוקבות הוא:

$$l = \frac{\Delta z}{\cos \alpha} \approx \frac{\Delta z}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} \approx \Delta z \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \approx \Delta z$$

כאשר השתמשנו בפיתוח טילור  $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$  ו-  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ .  
מכך נובע ש  $T$  קבוע, כי כל הקפיצים זהים וכמו כן התארכותם זהה כי  $l = \Delta z = const$ .

**אין תנועה אורכית (ניוטון II בציר אורך)**  
 ההנחה גם מובילה אותנו להוניה כוחות כוחות אורכיים (בכיוון  $z$ ) ולכן הונחה תנועה אורכית של המסתה (ולתאך רק תנועה רוחבית) - לפי ניוטון:

$$m\ddot{z} = F_z = T \cos(\alpha_2) - T \cos(\alpha_1) \stackrel{\cos \alpha \approx 1}{\approx} T - T = 0$$

**פיתוח המשווה (ניוטון II בציר רוחבי)**  
 נשים לב ש  $\frac{dm}{dz} \sin \alpha_1 \approx \frac{\Delta \psi(z+dz)}{\Delta z}$  ובדומה  $\tan \alpha_1 = \frac{\Delta \psi(z)}{\Delta z}$ . לכן מחוק שני  $\mu$  צפיפות מסה אורכית (אך  $\mu \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \approx dm \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T \sin(\alpha_2) - T \sin(\alpha_1) \approx T \left[ \frac{\Delta \psi(z + \Delta z)}{\Delta z} - \frac{\Delta \psi(z)}{\Delta z} \right]$

**גבול הרץ' ומשוואת הגלים**  
 כך שמתקבלת בגבול הרץ'  $0 \rightarrow \Delta z$ , משווהת הגלים הלא דיספרטיבית (בשימוש נבין את משמעותו של השם):

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

ל- $c$  ממדים של מהירות, ואכן בהמשך נראה ש- $c$ -היא מהירות תנועת הגל. זהה משווהה דיפרנציאלית חילקית: לינארית, מסדר שני, הומוגנית (אין איבר לא הומוגני  $f(z, t)$ ) ועם מקדים קבועים. מאפייניהם אלה מזכירים את אפייניות המ"ר עבור אוסילטור הרמוני.

### 1.3 פתרון משווהת הגל

מצאנו דמיון בין משווהת הגל למד"ר אוסילטור הרמוני, לה היה פתרון מסווג  $\psi(t) = D e^{i\omega t}$ . לכן ננחש פתרון

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= D e^{i(\omega t - kz)} \\ \text{or} \\ \psi(z, t) &= A \cos(\omega t - kz + \phi) \end{aligned}$$

כאשר  $k$  קבוע אנלוגי ל- $\omega$  אך עברו המרחב  $z$  בזמן  $t$ , אשר נקרא מספר הגל (אין קשר לקבוע הקפיז, הסימן הזהה מקרי). בהצבה מתקבל:

$$-\underline{\omega^2 A \cos(\omega t - kz + \phi)} = -c^2 k^2 \underline{A \cos(\omega t - kz + \phi)}$$

כלומר זה פתרון בתנאי שמתקיים הקשר הבא:

$$\boxed{\omega = \pm ck}$$

זה נקרא **יחס הנפייצה**.

אם מסתכלים ( $\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \phi)$ ) רק על  $t$  כאשר  $z$  קבוע או להפוך, נקבל שמתקיים מחזור בזמן  $T$  עבור  $\omega T = 2\pi$ , מהJOR במרחב  $\lambda$  (אורך הגל) עבור  $k\lambda = 2\pi$ , כלומר,

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T}, \quad k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

ואכן המהירות המתקבלת הינה

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = c$$

## 2 הרצאה 2 (7.11)

### 2.1 הפטرون ומסקנות

#### 2.1.1 סיכום הגדרים

לסיכום:

+ תדרות זוויתית, זמן מהзор, ותדרות

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu$$

+ מספר הגל, אורך גל

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

+ מהירות הפואה

$$v_\phi = c = \frac{\omega}{k} = \nu\lambda$$

#### 2.1.2 מהירות פואה

(ב המשך להרצאה קודמת)

ניתן לחוש על זה בדרך נספת: באיזה מהירות צופה צריך לנوع ימינה על מנת "רכוב על הגל"? קלומר על מנת לראות פואה קבועה. נדרש שינוי  $z$  בזמן  $t$  ויתקיים

$$\omega t - kz = \omega(t + \Delta t) - k(z + \Delta z) \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \boxed{c = v_\phi}$$

נגידר את  $v_\phi$  מהירות הפואה.

ההנחתה הסינוסואידלית של פונקציית הגל נעה לכיוון החויבי ב מהירות  $c$  ו-  $\psi_+(z, t) = De^{i(\omega t - kz)}$  הוא גל שנע בכיוון החויבי. באופן דומה, נוכל לקבל ש-  $\psi_-(z, t) = De^{i(\omega t + kz)}$  הוא גל שנע בכיוון השילילי. בכל אחד מהמקרים ראיינו  $\frac{\omega}{k} = \pm c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ , ובפרט, מהירות הפואה תלולה בתכונות המיתר ולא בתכונות הגל  $(D, \omega, k)$ .

### 2.1.3 פתרונות נוספים למשוואת הגלים

$$\psi = A \cos(\omega t \pm kz + \phi) = A \cos k(ct \pm z + \phi')$$

כלומר  $\psi$  היא במשתנה אחד של  $(ct \pm z)$  ( $\psi$  אין לה תלות ב- $t$  בלבד או ב- $c$  בלבד, אלא רק ב- $z$  בלבד). ולמעשה, כל פונקציה  $f(x)$  גיירה פעמיים היא פתרון למשוואת הגל עבור  $\psi(z, t) = f(ct \pm z)$ . קל לראות זאת בגוירה ושימוש בכלל השורשה (בגוירה לפי  $t$  נקבל פקטורי  $\pm c$  פעמיים מכלל השורשה).

### 2.1.4 קשר שיוף ו מהירות רוחבית

מתקיים קשר בין שיוף ומהירות רוחבית בגל נוע:

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm c \frac{\partial \psi}{\partial z}}$$

שיוף המיתר בכל נקודה  $z$ .  
 $c$  מהירות התקדמות ההפרעה לאורך המיתר.  
 $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  מהירות רוחבית של נקודה במיתר.

### 2.1.5 לינאריות

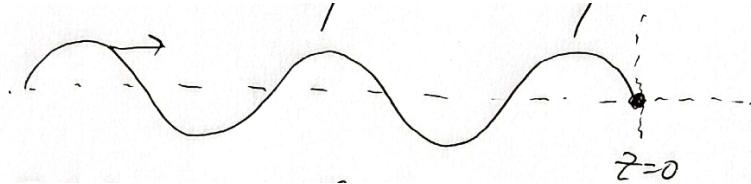
משוואת הגלים היא לינארית. על כן כל קומבינציה לינארית של פתרונות היא גם פתרון. בפרט עבור 2 פונקציות גזירות פעמיים, נקבל שהפונקציה הבאה היא פתרון: (סופרפוזיציה)

$$f(ct - z) + g(ct + z)$$

## 2.2 תנאי שפה

### 2.2.1 גסיוון כושל

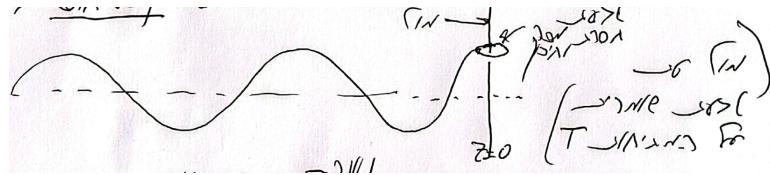
כעת נבחן מיתר עם תנאי שפה. בפרט, מעבר גל דרך גבול, החזרה והעברה. נדמיין מיתר חצי אינסופי  $[-\infty, z]$ . ב- $z = 0$  המיתר מעוגן/קשרו כנ שטני השפה הוא  $\psi(t, z = 0) = 0$  לכל  $t$ .



איך נראה הפתרון עבור תנאי השפה הזה? ידוע לנו ש  $\psi$  פתרון אם  $\psi = Ae^{i(\omega t - kz)}$  כעה יש גם תנאי שפה של הפתרון קיימים:

$$0 = \psi(t, z = 0) = Ae^{i\omega t} \Rightarrow A = 0$$

התקבל כמובן שאין גל! כמובן לא ניתן שנכוון. נבחן מערכת אחרת, שבה הקצה יכול לנوع באופן חופשי - הקצה הקשור לטבעת הסרת מסה על מוט חסר חיכוך, באופן זה נשמרת המתייחסות.



מכך שהיא הסרת מסה נובע ששקל הכוחות עליה מתאפס מהוק שני של ניוטון. על כן שקול הכוחות מתאפס בכל ציר ובפרט לאורך הציר, ככלומר בכיוון הרוחבי - זהו תנאי השפה החדש.

$$F_z = -T \sin \alpha \approx -T \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

אך שוב ונקבל בגזירה  $!A = 0$

כשאנחנו שולחים גל, אנחנו יודעים מנסיון שהוא חוזר! משמע, לא קיבלנו שלא ניתן גל במערכת כזו, אלא שלא ניתן גל שמהירותו רק בכיוון אחד - צריך לאפשר קיום של גל שנע בכיוון הפוך, "גל מוחזר".

### 2.2.2 תנאי שפה - קצה קשור

נאפשר קיום גל מוחזר - נציב את תנאי ההתחלה עבור הפונקציה הבאה:

$$\psi(z, t) = A e^{i(\omega_i t - k_i z)} + B e^{i(\omega_R t + k_R z)}$$

כאשר  $i$  מסמל incident (הgal המגיע) ו-reflected (הgal המוחזר).  
עבור תנאי השפה של  $\psi(t, 0) = 0$  קיבל

$$A e^{i\omega_i t} + B e^{i\omega_R t} = 0$$

קבוצה בת'  $\{\psi_{\omega \in \mathbb{R}_+}\}$  ולכן זה יתכן רק אם  $\omega_i = \omega_R$ , ומכך נובע (באמצעות יהס הנפייצה) ש- $k_i = k_R$ . יתר על כן, מתקיים אמפליטודה gal המוחזר זהה gal המקורי אך בכיוון ההפוך.  
נגידו מקדם החזרה (Reflection Coefficient)  $R = \frac{A_R}{A_i}$   
במקרה זהה התקבל  $R = -1$ .

### 2.2.3 תנאי שפה - טבעת חופשית

שוב נעבד עם אותה הפונקציה, אך הפעם נציב את תנאי השפה  $\frac{\partial \psi}{\partial z}|_{z=0} = 0$ .

$$\psi(z, t) = A e^{i(\omega_i t - k_i z)} + B e^{i(\omega_R t + k_R z)}$$

תנאי השפה גורר, באופן דומה:

$$-i A k_i e^{i\omega_i t} + i B e^{i\omega_R t} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \omega_i &= \omega_R \\ k_i &= k_R \\ A &= B \end{aligned}$$

במקרה זה  $R = \frac{A_R}{A_i} = 1$

### 2.2.4 תנאי שפה - גבול

icut נתאר תנאי שפה בין שני תחומים,  $0 < z < L$ ,  $c_k = \sqrt{\frac{T}{\mu_k}}$  עבור  $k \in \{1, 2\}$ , בהם שני מיתרים עם תכונות שונות, אך מתיחות זהה. נסמן את פונקציית gal בכל אחד מהם  $\psi_L$  ו- $\psi_R$  ( $R, L$ ) עבור ימין ושמאל, כאשר  $c_1$  בצד שמאל. אז תנאי השפה הם

$$\psi_L(0, t) = \psi_R(0, t)$$

כיוון שהמיתרים קשורים, ובנוסף הכוח מתאפס על נקודת החיבור (היא חסירה מסה).

$$T \sin \alpha_1 = T \sin \alpha_2 \Rightarrow \frac{\partial \psi_L}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{\partial \psi_R}{\partial z} \Big|_{z=0^+}$$

כלומר התנאי הוא שאין "שפיץ" ב- $z = 0$  אלא המעבר חלק.

נניח שיש גל נכנס (incident) גל חזר (reflected) וגל מעבר (transmitted).

$$\psi_L(z, t) = A e^{i(\omega_i t - k_i z)} + B e^{i(\omega_R t + k_R z)} \quad \psi_R(z, t) = C e^{i(\omega_T t - k_T z)}$$

לפי תנאי השפה הראשון,  $A e^{i\omega_i t} + B e^{i\omega_R t} = C e^{i\omega_T t}$  ובנוסף

$$(*) A + B = C$$

מייחס הנפיצה  $k_i = k_R$  אך הטענה אינה מתקינה עבור  $c$  שונה שם. ולפי תנאי השפה השני,

$$(**) -k_L A + k_L B = -C k_R$$

מ- $(*)$  נקבל  $\text{(**)}$

$$A(k_R - k_L) + B(k_R + k_L) = 0$$

משמעות מקדם ההחזרה

$$R = \frac{B}{A} = \frac{k_L - k_R}{k_L + k_R} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

כasher השתמשנו ב- $\frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\frac{\mu}{T}}$   
נדיר גם את מקדם ההעברה

$$T = \frac{A_T}{A_i} = \frac{C}{A} = 1 + \frac{B}{A} = 1 + R = 1 + \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

שוב נציג ש- $\omega$  של הגל לא יכול להשתנות בגבול  $z = 0$  עקב הרציפות (תנאי השפה הראשון), אך  $k$  ולכן גם כן יכולים להשתנות.

### 3 הרצתה 3 (12.11)

בסוף שיעור שעבר מצאנו ביטויים עבור מקדמי ההחזרה וההעברה (ספציפית עבור המערכת של 2 מיתרים מחוברים בקשר). לדוגמה, אם היינו מחליפים את נק' החיבור בטבעת חסרת מסה תנאי התחלה היו משתנים):

$$R = \frac{k_L - k_R}{k_L + k_R} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$$

$$T = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

#### 3.1 עכבה (Impedance)

נדיר את העכבה "בערך": יחס בין משהו אנלוגי לכוח מוחזר בכל נקודה בתווך נשא הגל, לבין המהירות הרוחבית של אותה הנקודה.

עבור מיתר, נגדיר את העכבה:

$$z = \frac{F_{\text{ניצב}}}{v_{\text{ניצב}}} = \left| \frac{T \frac{\partial \psi}{\partial z}}{\frac{\partial \psi}{\partial t}} \right|$$

ראינו שפתרון של משוואת הגלים מקיים  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm c \frac{\partial \psi}{\partial z}$  ולכן מתקיים

$$\boxed{z = \frac{T}{c} = \sqrt{T\mu} = \mu c}$$

בכל אחד מהיצוגים ניתן לראות שזו הຕונה של התווך נשא הגל, ולא של הגל עצמו.

בשילוב גם כן מגדרים עכבה,

$$\frac{\text{Force}}{\text{Velocity}} = \frac{V}{I} = R = z$$

התנגדות במעגל  $AC$ , עכבה במעגל  $DC$ . לפי הקשר שהגדכנו, מתקיים

$$\boxed{R = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}, \quad T = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}}$$

## 3.2 אנרגיה הנישאת ע"י מיתר

### 3.2.1 צפיפות אנרגיה

צפיפות האנרגיה הקינטית לאורך המיתר הינה

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2$$

עבור צפיפות האנרגיה הפוטנציאלית, ראיינו שאורך כל קטע במיתר הוא  $l = \frac{\Delta z}{\cos \alpha} \approx \Delta z \left( 1 + \frac{\omega^2}{2} \right)$  (בפיתוח משווהת הגל).

על כן ההतארכות בכל רגע נתון היא  $\Delta l = \Delta z \frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{2} \Delta z \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2$ .  $W = T \Delta l = \frac{1}{2} T \Delta z \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2$  העובודה שהתבצעה נגד כוח הקפיץ היא

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2$$

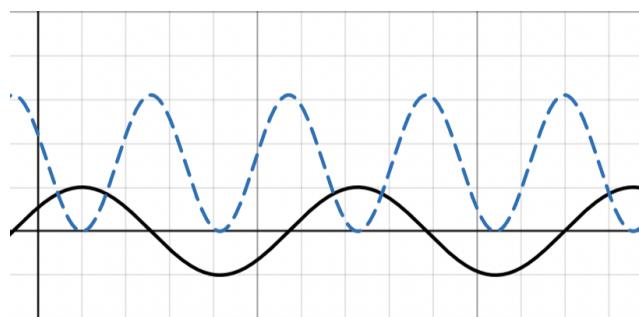
סה"כ צפיפות האנרגיה שהתקבלה

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, t) &= \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{z}{2c} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{z}{c} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \mu \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

פונקציה מסווג  $\psi = f(ct \pm z)$  היא פתרון של משוואת הגל כיון שהיא פונקציה של  $ct \pm z$  בלבד. אך גם לאחר גזירה לפי  $t$  פעמיים,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  היא פונקציה של  $ct \pm z$  בלבד, ולכן האנרגיה בעצמה היא פתרון למשוואת הגל. התקבל שצפיפות האנרגיה מתנהגת כגל נuu! ואף באותו הכיוון ובאותה מהירות כמו גל ההסתה הרוחבית. האינטראפטציה הפיזיקלית היא שהגל נושא אליו את האנרגיה.

לדוגמה, עבור גל סינוסואידלי:

$$\psi = A \cos(\omega t - kz) \Rightarrow \mathcal{E}(z, t) = \mu \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz)$$



אכן ניתן לראות שבמקרים המיתר (בשחור), אשר בדיק משנה את כיוון מהירותו ולכн  $0 = v$ , וגם אינו מתח כיוון ששייפעו אופקי להלוטין, האנרגיה היא אפס (בכחול).  
בנקודות הצומת (היכן שההסתה משיווי המשקל היא אפס) מתקבלת אנרגיה מקסימלית.

### 3.2.2 האנרגיה במחזור

נוח להסתכל על גודלים מסוימים על פני מחזור בזמן.  
נגיד  $\langle \mathcal{E} \rangle_\tau$  צפיפות האנרגיה המוצעת לאורך זמן  $\tau$ .  
עבור גל סינוסואידלי, מתקבל:

$$\langle \mathcal{E} \rangle_\tau = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \frac{z}{c} \omega^2 A^2$$

כאשר השתמשנו ב-  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2}$   
באופן כללי בפיזיקה, מגדירים שטף דרך נקודת להיות צפיפות של דבר  $\times$  קצב תנועת הדבר.  
שטף האנרגיה שעובר דרך נקודת מיתר, או ההספק דרך נקודת, הינו:

$$\langle P \rangle_\tau = c \langle \mathcal{E} \rangle_\tau = \frac{1}{2} z \omega^2 A^2$$

כאשר מיחזות ניתן לראות  $[\mathcal{E}] \cdot [v] = \frac{[E]}{[x]} \cdot \frac{[x]}{[t]} = \frac{[E]}{[t]} = [P]$   
עוד נוסחה שcolaה המתקבלת היא

$$\langle P \rangle_\tau = \left\langle z \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle$$

## 4 הרצתה 4 (14.11)

### 4.1 התאמת עצבות בין תווים - מתאם רביע גל

נרצה למצוא מערכת שעבורה עברת כל האנרגיה בגבול בין 2 מיתרים. נניח יש שני מיתרים עם עצבות  $z_1, z_2, z_3$ . נקשרו אותם באמצעות מיתר שלישי עם עצבה  $z$ . נניח שהחיבורים הינם חיבור בין  $z = l > 0$  ו-  $z = z_1, z_2, z_3$ . גנסה למצוא דרישת על  $z$  שתיתן מעבר אנרגיה מקסימלי.

נכתב פתרון עבור כל אחד מהמיתרים:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A_1 e^{i(\omega t - k_1 z)} + B_1 e^{i(\omega t + k_1 z)} \\ \psi_2 &= A_2 e^{i(\omega t - k_2 z)} + B_2 e^{i(\omega t + k_2 z)} \\ \psi_3 &= A_3 e^{i(\omega t - k_3 z)}\end{aligned}$$

ארבעת תנאי השפה הינם:

(1) רציפות:

$$\begin{aligned}\psi_1(0, t) &= \psi_2(0, t) \\ \psi_2(l, t) &= \psi_3(l, t)\end{aligned}$$

(2) שקול כוחות אפס על נק' החיבור:

$$\begin{aligned}T \frac{\partial \psi_1}{\partial z}|_0 &= T \frac{\partial \psi_2}{\partial z}|_0 \\ T \frac{\partial \psi_2}{\partial z}|_l &= T \frac{\partial \psi_3}{\partial z}|_l\end{aligned}$$

קיבלונו 4 משוואות עבור הנעלמים הידועים הינם  $k_i$  גלי  $l, z_1, z_2, z_3, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3$  (מספרי הגל נ נתונים ע"י יחס הנפיצה  $c = \frac{\omega}{k}$ ).  
נדרוש שיחס ההספק המועבר וההספק הנכנס יהיה 1:

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{\langle P \rangle_{out}}{\langle P \rangle_{in}} = \frac{\left\langle z_3 \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle}{\left\langle z_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle} = \frac{\frac{1}{2} z_3 \omega^2 A_3^2}{\frac{1}{2} z_1 \omega^2 A_1^2} = \frac{4 \frac{z_1}{z_3}}{\left( \frac{z_1}{z_3} + 1 \right)^2 \cos^2 k_2 l + \left( \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} \right)^2 \sin^2 k_2 l}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהתנאי השפה (לא נבע את הגזירה והאלגברה בהרצאה כדי להסוך זמן). על מנת שערך היחס יהיה אחד, נדרוש  $\frac{z_1}{z_3} = \frac{z_2}{z_3} = l = \frac{\lambda_2}{4} = \frac{\pi}{2k_2}$ . כך איבר הקוסינוס יתבטל והסינוס יהיה שווה אחד, ונקבל

$$\frac{\langle P \rangle_{out}}{\langle P \rangle_{in}} = \frac{4 \frac{z_1}{z_2} \frac{z_2}{z_3}}{\left( \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} \right)^2} = \frac{4 \left( \frac{z_1}{z_3} \right)^2}{4 \left( \frac{z_1}{z_3} \right)^2} \leq 1$$

נסכם - כל האנרגיה עברה בהיותן עכבה שהיא השורש הגומטרי של העכבות האחרות, ועובי גבול שהוא רבע מאורך הgal :

$$\boxed{z_2 = \sqrt{z_1 z_3} \\ l = \frac{\lambda_2}{4}}$$

אכן התקבל שכל האנרגיה עוברת, ובפרט אין גל חזר. לחיבור מהסוג שביצענו (המייתר המחבר  $z_2$ ) קוראים מתחם רביע גל - זה דבר מאד נפוץ.

דוגמא מגלים א"מ ואופטיקה: כאשר גלי אור עוברים דרך חדשה, מתבצע שינוי בתווך ועל כן ישנו גל חזר. אך אם נצפה את הגבול (שפת העדשה) בצייפוי בעל התכונות שמצאנו לעיל (עכבה שהיא שורש גומטרי של עכבת האויר והעדשה, ועובי שהוא רבע מאורך הgal הנכנס), יוכל להעביר את כל האור דרך העדשה ולהימנע מגל חזר.

## 4.2 גל מרוסן

### 4.2.1 פיתוח ראשוני

במערכות פיזיקליות אמיתיות תמיד יש כוחות ריסון הגורמים לאיבוד אנרגיה, דיסיפציה. נדמיין שהמיתר נמצא נזול צמיג, כך של כל קטע במיתר  $\Delta z$  בנוסף לכוח המהווים (הקפיצי) ישנו כוח מרוסן  $F = -\beta \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Delta z$ . משווהת הגלים אשר התקבל ממערכת זו (עלינו לשנות את הפיתוח המקורי כדי לכלול את כוח זה) תהיה

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ונכל להגיד  $\mu/\beta = \gamma$  ולקבל

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

ננסה שוב פתרון מסוימו הסוג  $\psi = D e^{i(\omega t - kz)}$ . נקבל את הקשר

$$-\omega^2 + i\gamma\omega = -c^2 k^2$$

יש לשים לב שעדיין הגדרנו  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  אך כבר לא מתקיים יחס הנפיצה  $\frac{\omega}{k} \neq c$ . יחס הנפיצה החדש שמתקיים הינו

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{i\gamma}{\omega}}$$

(זכרו שפונקציית הגל בפועל היא הרכיב המשמי  $(Re)(\psi)$ . נחלק למספר מקרים, כמו שתמיד נעשה עבור ריסון.

(1) ריסון חלש:  $\frac{\gamma}{\omega} << 1$ .  
 $k \approx \pm \frac{\omega}{c} \left( 1 - \frac{i\gamma}{2\omega} \right) = \pm \frac{\omega}{c} \mp i \frac{\gamma}{2c} = a + bi$   
 בגבול זה מתקיים היחס  $a^2 + b^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  כלומר פונקציית הגל הינה

$$\psi = D e^{bz} e^{i(\omega t - az)}$$

כמובן שהפתרון הפיזיקלי הוא עבור  $b < 0$ .

(2) ריטון חזק:  $\frac{\gamma}{\omega} >> 1$

בגבול זה מתקבל  $k \approx \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{-\frac{i\gamma}{\omega}} = \pm \sqrt{\frac{\gamma\omega}{2c^2}} (1 - i) = a + bi$ .  
במקרה זה מתקיים  $|a| = |b|$ . אורך הדעיכה הוא  $\frac{1}{b} = \frac{\lambda}{2\pi} \sim \frac{\lambda}{6}$ , כלומר הדעיכה תתרחש במהלך מעבר של שישה מחזורי.

#### 4.2.2 עכבה של מיתר מרוסן

נמצא את העכבה עבור מיתר מרוסן:

$$z = \left| \frac{T \frac{\partial \psi}{\partial z}}{\frac{\partial \psi}{\partial t}} \right| = \frac{TikDe^{i(\omega t - kz)}}{i\omega De^{i(\omega t - kz)}} = T \frac{k}{\omega}$$

עד כאן זה זהה לפתרון עבור גל חופשי, אך יחס הנפיצה אינו זהה: עבור גל מרוסן בritisון חזק, נקבל

$$z(\omega) = \frac{Tk}{\omega} = \frac{T(a + ib)}{\omega} = \frac{T}{c} \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega}} (1 - i)$$

עבור מיתר שחלק ממנו חופשי והחלק השני בתוך הנזול הצמיג, נקבל החזרה:

$$R = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{1 - \frac{z_2}{z_1}}{1 + \frac{z_2}{z_1}} = \frac{1 - (1 - i) \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega}}}{1 + (1 - i) \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega}}} \approx -1$$

בגבול הריסון החזק התקבלה החזרה מלאה.

”חדרה לעומק עור“: התופעה שגל מרוסן דועך מהר, בעוד במהלך מעבר שישית אורך גל  $6\lambda$ .

## 4.3 גלים עומדים

### 4.3.1 גל חוזר יוצר גל עומד

עבור מיתר חצי אינסופי הקשור בקצתו  $z = 0$ , נתאר גל נע בכיוון החובבי

$$\psi_i = A \cos(\omega t - kz + \phi)$$

ולגל הנע בכיוון השלילי (עלור קצה הקשור ראיינו  $R = -1$ )

$$\psi_r = -A \cos(\omega t + kz + \phi)$$

מתקיים במיתר סופרפוזיציה של שני הגלים:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_i + \psi_r = A [\cos(\omega t - kz + \phi) - \cos(\omega t + kz + \phi)] \\ &= 2A \sin(\omega t + \phi) \sin(kz) \end{aligned}$$

התקבלת ”הפרדה משתנים“.

באופן דומה בכתב מרוכב,

$$\psi = Ae^{i(\omega t - kz)} - Ae^{i(\omega t + kz)} = Ae^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = -2iAe^{i\omega t} \sin(kz)$$

בלינק הבא ניתן לראות אנימציה של גל עומד. בצבע אדום הגל העומד, ובכחול/ירוק שני הגלים המרכיבים אותו וונעים בכיוונים הפוכים:

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standing\\_Wave\\_Sum.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standing_Wave_Sum.gif)  
לגל עומד ישנו ”נקודות צומת“ שבו  $\psi = 0$  לכל  $t$ . אלו הן נקודות האפס של  $\sin(kz)$ , כלומר  $z = \frac{n\pi}{k}$  עבור  $n \in \mathbb{Z}$ .

למעשה בכל מצב של החזרה מלאה מקצה הקשור או חופשי  $|R| = 1$  יוצר גל חוזר עם אמפליטודה זהה ולכן יהיה גל עומד (ראיינו עבור  $R = 1$ , עבור  $R = -1$  זה ממש דומה).

### 4.3.2 מיתר סופי וקונטינואיזציה

נוסיף תנאי שפה נוספת, עיגון המיתר ב-  $L = z$ .

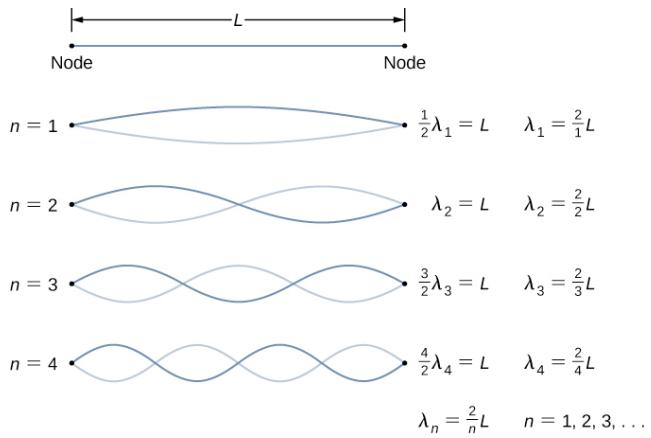
$$\psi(L, t) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

כלומר יהיה אפשרו בORITY סופי  $[0, L]$ . רק גלים שאורכי הגל שלהם הם  $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$ . חופה זו נקראת קוונטיזציה - כבר לא מתאפשר רצף ערכים של  $k$  אלא רק ערכים בדידים  $k_n$ .

אOPEN התנודה היסודי מתקיים עבור  $z = 0, k = \frac{\pi}{L}, n = 1$ , וAIN לו צמתים בלבד  $L, z = 0$ .

אOPEN התנודה הבאה  $n = 2$  נותן צומת נוספת ב-  $\frac{L}{2}$ .

כך כל פעם יתווסף צומת נוספת, כאשר המרחק בין צמתים קבוע לכל OPEN תנודה.



גם  $\omega$  יקבל ערכים בדידים, ובדומה התדרות  $\nu_n = ck_n = \frac{cn\pi}{L}$ . כל התדרים  $\nu_n$  הם כפולות של תדרות היסוד  $\nu_1 = \frac{c}{2L}$ .

## 5 הרצתה 5 (19.11)

שיעור בעבר, בחנו מיתר עם תנאי שפה שונים החזרה מלאה. התקבל שני הגלים הנעים בכיוונים הפוכים (ובעל האמפליטודה הזזה) יוצרים גל עומד (הפרדה משתנים בין מקום וזמן). כאשר הוספנו תנאי שפה נוסף (עיגון ב- $L$ ) ( $z = L$ ) התקבלה קוונטייזציה של הגלים העומדים.

הדגמה: <https://www.acs.psu.edu/drussell/demos/superposition/superposition.html>

### 5.1 עוד גלים עומדים: תנאי שפה שונים

#### 5.1.1 קצחות חופשיים

תנאי שפה אפשרי נוסף, הוא קצה או שני קצחות חופשיים. ראשית, נדמיין מיתר חצי אינסופי עם קצה חופשי ב- $z = 0$ , עליו גל (ראשית ידוע האמפליטודות והות משיעור קודם):

$$\psi = \psi_i + \psi_r = A [e^{i(\omega t - kz)} + e^{i(\omega t + kz)}] = 2Ae^{i\omega t} \cos(kz)$$

יתקבלו צמתים (נק' בהן  $\psi = 0$  עבור  $t$  כל  $kz = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$  לכל  $n \in \mathbb{Z}$ ). מתנאי השפה נובע (נכחו משווה כוחות בציר רוחבי, ונזכר שהקצה חסר מסה) כי:

$$T \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

שוב התקבלה אותה התוצאה, קוונטייזציה. בנוסף, השיפוע בקצחות הוא אפס.

#### 5.1.2 קצה חופשי וקצה קשור

נדמיין מיתר עם צד אחד חופשי וצד אחד קשור.

$$\psi = \psi_i + \psi_r = 2A \sin(\omega t + \phi) \sin(kz)$$

(הפעם סינוס עקב הקצה הקשור ב-0). עבור  $R = 1$  ( $R = -1$  אשר גורר  $R = -1$   $\Rightarrow z = 0$  קוסינוס ו-1 סינוס, כיון  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ,  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  שאם  $z = L$  הצד החופשי):

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=L} \propto \cos(kL) \Rightarrow k_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2L} \Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n - 1}$$

ב- $1 = n$  נכנס רק רביע אורך גל בין הקצאות. ב- $2 = n$  נכנס חצי אורך גל, וכך בכל  $1 + n \mapsto n$  יתרוסף רביע אורך גל.

התדרות המתקבלת מקיימת

$$\nu_n = (2n - 1) \nu_1$$

כלומר רק כפולות אי זוגיות של תדרות היסוד.

галים עומדים על מיתר סופי (תנאי שפה בשני הקצאות שונות מהזויה מלאה של גל נע) מתוארים ע"י משפחת פונקציות

$$\psi_n = A_n \cos(\omega_n t + \phi) v_n(z)$$

כאשר  $v_n$  נקראת "פונקציה עצמית". היא פונקציה סינוסואידלית עם מספר גל  $k_n$  ואורך גל  $\omega_n/c = k_n$  נקבעים רק ע"י הגאומטריה של תנאי השפה ( $\omega_n$ ).

## 5.2 גלי קול בגזים

gal קול, בניגוד לגל במיתר, הוא גל אורך. התנועה אינה לאורך ציר רוחבי כלשהו כמו במיתר, אלא ישנו גל להען/עפיפיות אשר נוע באוויר, וכל התנועה מתרחשת בכיוון האורכי.  
<https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves-intro/waves-intro.html>  
ראו אנימציה (בתחתית העמוד):  
יש לשים לב שהליך התווך (לדוג' אויר) אינם נעים מצד אחד לשני, אלא מבצעים תנודות סביב מקום התחלה, וההפרעה נעה לאורך התווך.

### 5.2.1 פיתוח

תמיד על מנת לקבל תנודות/התנהגות גלית צריכה ותמד. בגזים הקשיות באה לידי ביטוי בתכונה דחיסות

$$\kappa \equiv -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$$

כאשר  $p$  הלחץ. מילולית:  $\alpha$  נותן את הירידה היחסית בנפח ליחידת הגדלה הלחץ (לכן סימן המינוס).  
נדמיין צינור בעל שטח חתך  $A$ , וצирו מתלכד עם ציר  $z$ .  
ברגע  $t$  מסוים ישן מחייצות בנקודות  $z$  ו- $z + \Delta z$ , וביניהן גז.  
ברגע  $t + \Delta t$  נזוי המחייצות ל- $\psi(z + \Delta z)$  ו- $\psi(z)$  בהתאם.  
נמשיך את הפיתוח בהרצאה הבאה - נראה מה קורה לאחר שמסיררים את המחייצות.

## 6 הרצאה 6 (21.11)

### 6.1 גלי קול ("גלים אקוסטיים") בגז

#### 6.1.1 פיתוח

נזכיר: בשיעור שעבר הגדרנו את הדחיסות

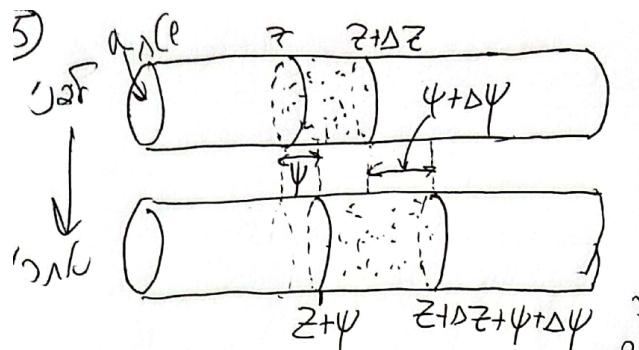
$$\kappa \equiv -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \stackrel{\rho=m/V}{=} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$$

כאשר המשוואה  $p = \rho T$  ( $\rho$  = חיקבע ע"י, משווהת המצב של הגז (שנלמדה בקורס טרמודינמיקה). ישנו מוקדם דחיסות שונה עבור תהליכי איזותרמים (טמפרטורה קבועה), אדיابتית (אין מעברי חום) וכו'.

נדמיין צינור בעל שטח חalk  $A$ , וצирו מתלכד עם ציר  $z$ .

ברגע  $t$  מסוים יישן מהיצות בנקודות  $z$  ו- $z + \Delta z$ , וביניהן גז.

ברגע  $t + \Delta t$  נזין מהיצות ל- $\psi + \Delta \psi$  ו- $\psi + \Delta \psi$  בהתאם.



מה הנפה בין המיצות לפני ואחרי ההסתה שלחה?

בהתחלת:  $V_f = a(\Delta z + \Delta \psi)$ . לאחר הוזזה:  $V_i = a\Delta z$

$$\text{כלומר השינוי היחסי בנפה: } \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{\Delta \psi}{\Delta z}$$

השינויי בלחץ המתkeletal מקיימים (בגבול 0):

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \rightarrow -\frac{1}{\Delta p} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$\psi$  הוא העתק של חליקון ממצב שיווי משקל.  
נדיר סטיה של הלחץ בנקודה  $z$  ממצב שיווי משקל:

$$\psi_p(z) \equiv \Delta p$$

הפרש הלוחן על 2 צידי הנפה בין המהיצות הוא

$$\Delta\psi_p = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Delta z$$

כעת ”נסיר את המהיצות“<sup>1</sup> ונרשום את משווהת התנועה של נפה הגז.

$$\rho a \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \stackrel{II}{=} \Delta F \stackrel{F=pA}{=} -a \Delta \psi_p = \frac{a}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Delta z$$

## 6.1.2 מסקנות הפיתוח

כלומר התקבלה אותה משווהת גלים (”לא דיספרטיבית“):

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}$$

הפעם בתפקיד הקבוע (שראינו שהוא מהירות הפזה בሪבוע) התקבל

$$\boxed{c^2 = \frac{1}{\kappa \rho}}$$

\*  $\psi$  הסטה של כל חלקיק - מקיים את משווהת הגלים כמו תנודות רוחניות בミתר.  
על כן שוב כל פונקציה  $z = f(ct \pm z)$ , וכך גם כל צורך לינארי של פתרונות הוא פתרון כי המשווהה לינארית והומוגנית.

\* גם הלוחן מקיים את אותה משווהת הגלים ( $\frac{\partial \psi}{\partial z} = -f'(ct \pm z)$  וכפל בסקלר לא משנה כפי שנאמר):

$$\boxed{\psi_p(z) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial z}}$$

\* גם הצפיפות מקיימת את אותה משווהת הגלים (נדיר  $\rho$ ,  $\psi_\rho \equiv \Delta \rho$ ):

$$\boxed{\psi_\rho(z) = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial z}}$$

\* גל קול בגז הוא גל של העתק להץ וצפיפות, שמקיים את משווהת הגלים הלא דיספרטיבית עם מהירות פaza  $c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}}$ .

<sup>1</sup> בפועל: אנחנו מבצעים תהליך פיתוח מקביל לזה שביצענו עבור המיתר - במקום לבחון קבועים מוחברים, הפעם אנחנו מקרבים את האז בטור אוסף חללי נפה המופרדים במחיצות, ובוחנים מה מתרחש לאורך מקטע זמן  $\Delta t$  - ומכך מסיקים את משווהות התנועה.

## 6.2 גדים אקוסטיים

### 6.2.1 מהירות הקול

נחשב את מהירות הקול בתנאים סטנדרטיים. עלינו לחלק את  $\kappa$  ו- $\rho$ .

כפי שצווין, עבור גז נתון להגדר דחיסה איזותרמית  $\kappa_T$  (דחיסה בטמפרטורה קבועה) ודחיסה אדיابتית  $\kappa_S$  (דחיסה באנטרופיה קבועה, אין מעברי חום  $dQ = 0 \iff dS = \frac{dQ}{T} = 0$ ).

כיוון שאורך גל קול מסדר גודל של מטר  $1m \sim \lambda$  וזמן המזהור  $s^{-2} \sim \tau$ , אין זמן לחום לעبور ממוקם למקום. על כן הדחיסה אדיابتית.

לפי משוואת המצב של גז אידיאלי  $p = nk_B T = n \frac{N}{V} p = \frac{C_p}{C_V} \gamma \propto V^{-\gamma}$  כאשר  $\gamma$  המקדם האדיابتתי, יחס קיבולי החום בלחץ ונפח קבוע.

מתקיים  $\gamma = \frac{5}{3}$  עבור גז מונואטומי, ו- $\gamma = \frac{7}{5}$  עבור גז דו-אטומי (עם אופני תנועה לא מעוררים). באוויר  $O_2, N_2$  מולקולות דו-אטומיות.  $V$  היא פונקציה של  $p$  בלבד, על כן,

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = -\frac{1}{V \frac{dp}{dV}} \stackrel{p \propto V^{-\gamma}}{=} \frac{1}{\gamma V^{-\gamma}} = \frac{1}{\gamma p}$$

(ב2 המעברים האחרונים יש שוויון ולא רק  $\propto$  כי קבוע הפרופורציה זהה, בידקו זאת).  
כלומר התקבל

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

כאשר הנימוק למעבר האחרון  $\frac{p}{\rho} = \frac{k_B T}{m}$  ולכן  $p = nk_B T = \frac{\rho}{m} k_B T$ .  $k_B = 1.4 \cdot 10^{-3} \frac{J}{K}$  מסת פרוטון  $m_p = 28m_p$ ,  $32m_p$  בulti מסה  $O_2, N_2$  לבסוף בהצגה, מתקבלת מהירות הקול.

$$c_{\text{קול}} = 340 m/s$$

### 6.2.2 השוואת מהירות התרממית

מהירות תרממית (המהירות המומוצעת של המולקולות בגז) של מולקולות אוויר בטמפרטורה  $T \sim 300K$

$$\frac{1}{2}mv_T^2 = U = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \approx c_{\text{קול}}$$

כלומר מהירות הקול באוויר היא בקירוב מהירות של מולקולות אוויר הנעות באקרואיות (ללא גל).

### 6.2.3 תדריות שמע

תדריות של שמע אדם  $\nu$  הן בטווח  $20kHz$  עד  $20Hz$ .

$$\text{אורך הגל } \frac{c}{v} = \text{ שמען מתכבר } 18m \text{ עד } 18mm.$$

הצליל "לה" במוזיקה זה  $\nu = 440Hz$ .

עיצורים בדיבור  $\nu \sim 1kHz$ .

### 6.2.4 מהירות קול במוניים/נווילים

גם בננווילים ומוניים יש גלים אקוסטיים שמתנהגים אותו הדבר  
מעבר מים:

$$c \approx 1400 \frac{m}{s}$$

## 6.3 תנאי שפה לגל קול

### 6.3.1 צינור פתוח/סגור

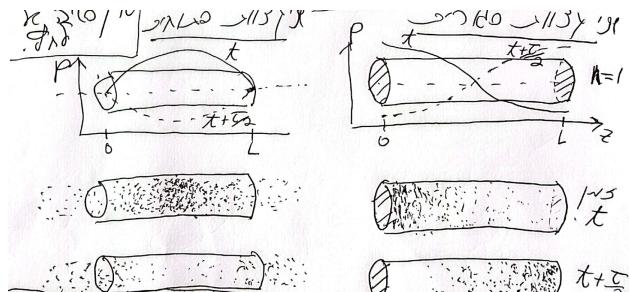
נוסיף לצינור הגז תנאי שפה. צינור פתוח או סגור בקצה, מה זה אומר?

**קצתה סגור:**  $\psi(z=0) = 0$ , אך אין אילוץ על  $\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{\kappa}$  ( $\psi$  זהו אותו תנאי שפה כמו עבור קצתה קשור).

**קצתה פתוחה:**  $\psi(z=0) = 0$ , אין סטייה מלחץ אטמוספרי ( $\Delta p = 0$  ולכן  $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ ) ( $\psi$  זהו

אותו תנאי שפה כמו עבור טבעת הסרת חופשית בקצתה מיתר).

להלן איור של הצליפות והלחץ עבור צינור בעל 2 קצנות סגורים, וצינור בעל 2 קצנות פתוחות:



בהתאם למשוואות שכתבנו.

**אתנהתא עם דני:** איך חיליל רועים עובד? (גל עומד עם אילוץ "קצתה פתוחה/סגור" בכל אחד מהחורים). מה קורה כשנושפים מעל בקבוק? (תנאי שפה פתוח בצד אחד וסגור בשני - קוונטיציה).

## 7 הרצאה 7 (26.11)

### 7.1 שיעור כיף עם דני ושותן (תאוריה מוזיקלית)

התחלנו בהדגמה של גלי קול על אש. בתוכנית: שיעור יוונית, ודני מגן בגיטרה. היום נלמד על מעט תאוריה מוזיקלית, לא רלוונטיות ל מבחן. ידוע שבמיטר  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ . ככל שהמתיחות גדולה יותר  $c$  גדול יותר, ומתקיים:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{ck_n}{2\pi} = \frac{cn}{2L}$$

על כן כאשר נעה את המתיחות התדרות עולה (ונשמע שהצליל "עולה"). אנשים גילו שכאשר יש יחס פשוט ( $\frac{6}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$ , וכו') בין תדרויות הצלילים זה "נשמע טוב". פיתגורס בנה סולם של צלילים (סדרת צלילים) אשר בו כל הצלילים בנויים על תדר יסוד כלשהו, כך שכל תדר חלקי תדר היסוד הוא שבר פשוט. בזמןו האמיןו שקיימים רק מספרים רציונליים. אז הגיע היפוסוס, מתלמידי פיתגורס, והראה הוכחה ש $\sqrt{2}$  הוא אי רציונלי (לא האמין לו, אז באופן טבעי הטבעו אותו). כיום משתמשים בכיוון מסוונה... מהולך ליחסים קבועים של  $2^{1/12}$  (ישנם 12 צלילים באוקטבה, שהוא מכפלה של 2).

### 7.2 תאוריות פורייה - ייצוגים שונים

הרעין של פירוק פורייה: ל淮南 פונקציה ולכתווב אותה כסכום (לרוב אינסופי) של סינוסים וкосינוסים. זה דומה לרעיון של טור טילור, שם אנו מתארים פונקציות כטור חזקות (רק במקום חזקות, סינוס וкосינוס).

ראינו שככל פונקציה  $f(x)$  היא פתרון למשוואת הגלים עבור  $z = ct \pm kz$  (או  $x = \omega t \pm kz$ ).

**פונקציה מהזורה:** פונקציה  $\psi$  שעבורה קיים  $0 < \tau <$  כך שלכל  $t$  מתקיים  $\psi(t) = \psi(t + \tau)$ . נגידר תדרות יסודית  $\omega_f = \frac{2\pi}{\tau}$ .

**טור פורייה:** (בהצגות שונות)

$$\begin{aligned} \psi(t) &= A_0 + A_1 \cos(\omega_f t + \phi_1) \\ &\quad + A_2 \cos(2\omega_f t + \phi_2) \\ &\quad \dots + A_n \cos(n\omega_f t + \phi_n) \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

ניתן באופן שקול (המעבר כרגיל, באמצעות זהות טריגונומטרית) לכתוב סכום של סינוסים וкосינוסים:

$$\psi(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_f t) + b_n \sin(n\omega_f t)]$$

ושוב באופן שקול, עם אקספוננטים:

$$\begin{aligned}
 \psi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{e^{in\omega_f t} + e^{-in\omega_f t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega_f t} - e^{-in\omega_f t}}{2i} \right] \\
 &= \underbrace{A_0}_{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{a_n - ib_n}{2} \right)}_{c_n} e^{in\omega_f t} + \underbrace{\left( \frac{a_n + ib_n}{2} \right)}_{\bar{c}_n = c_{-n}} e^{-in\omega_f t} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_f t}
 \end{aligned}$$

**לא הוכחנו שהדבר אפשרי** (שהטור מתכנס אל הפונקציה). נניח שהדבר אפשרי ונמצא את הקבועים המתאיםים  $c_n$ .

הערה לא במסגרת הקורס (למחנינים, דני לא הזיר): אם מסונים  $S_N \psi = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega_f t}$ , או חמץ מתקיים  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\tau (\psi(x) - S_N \psi(x))^2 dx = 0$  (כלומר האינטגרל של טור פורייה מתכנס לאינטגרל של  $\psi$ , זה נקרא התכנסות  $L_2$ ) אך לא תמיד יש התכנסות נקודתית (התכנסות של הפונקציה עצמה). תנאי מספיק להתכנסות זה  $\psi$  גזירה ברציפות.

**אורתוגונליות פונקציות הרמוניות:**  
נדיר מכפלה פנימית  $e^{in\omega_f t} \langle f, g \rangle = \frac{1}{\tau} \int f \bar{g} dx$ . או קבוצה אורתונורמלית:

$$\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} e^{in\omega_f t} e^{-im\omega_f t} dt = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} e^{i(n-m)\omega_f t} dt = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

## 8 הרצאה 8 (28.11)

### 8.1 טורי פורייה

#### 8.1.1 מציאת המקדמים

תהי פונקציה  $\psi(t)$  עם מחזור  $\tau$  אשר ניתנת לייצוג ע"י טור פורייה. נגידר  $\omega_f = \frac{2\pi}{\tau}$ .

$$\boxed{\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_f t}}$$

נבעצע מכפלה פנימית עם  $e^{im\omega_f t}$  עבור  $m \in \mathbb{Z}$  כלשהו ל<sup>2</sup> האגפים:

$$\int_{-\tau}^{\tau} \psi(t) e^{-im\omega_f t} dt = \langle \psi, e^{im\omega_f t} \rangle = \int_{-\tau}^{\tau} c_0 e^{-im\omega_f t} dt + c_1 \int_{-\tau}^{\tau} e^{i\omega_f t} e^{-im\omega_f t} dt + \dots$$

כאשר  $\int_{-\tau}^{\tau}$  מסמן אינטגרל  $\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau}$ . מהאורתוגונליות של  $\{e^{in\omega_f t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  נובע שבאגף ימין נותר רק  $c_m$ . קלומר מצאנו את המקדמים:

$$\boxed{c_m = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \psi(t) e^{-im\omega_f t} dt}$$

#### 8.1.2 דוגמה - גל ריבועי

להלן דוגמה לפירוק פורייה של גל ריבועי. בפרט, פונקציה עם מחזור  $\tau$  שערכה  $H$  חלק מהזמן ( $f$ ) ו-0 אחריו. נגידר אותה על  $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$ :

$$\psi(t) = \begin{cases} H & |t| < \frac{f\tau}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ועל שאר הישר הממשי  $\mathbb{R}$  ניקח את המשכיה המחזורית שלה (הגדרנו מחזור יחיד וכיוון שהיא מחזורית זה מספיק כדי להציג אותה על כל  $\mathbb{R}$ ).

נחשב את מקדמי הפורייה שלה:

בהתעלמות מהגבול.

$$c_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \psi(t) e^{-in\omega_f t} dt = \frac{1}{\tau} \int_{f\tau/2}^{-f\tau/2} H e^{-in\omega_f t} dt = \begin{cases} fH & n=0 \\ \frac{H}{n\pi} \sin(nf\pi) & n \neq 0 \end{cases}$$

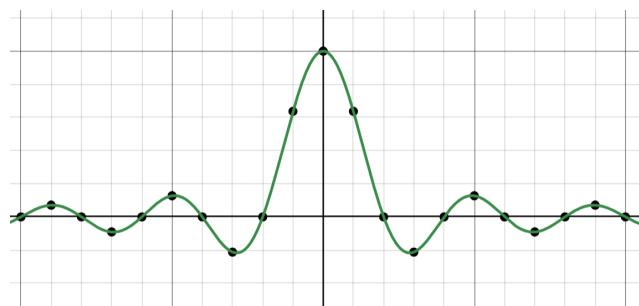
לדוגמא, עבור  $f = \frac{1}{2}$  חצי מזמן  $H$  חזי מהזמן  $(0)$ , נקבל מקדמים:

$$\begin{aligned} c_{-1} &= c_1 = \frac{H}{\pi} \\ c_{-2} &= c_2 = 0 \\ c_{-3} &= c_3 = -\frac{H}{3}\pi \\ &\vdots \end{aligned}$$

או באופן כללי:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{H}{2} \\ c_{2n} &= 0 \\ c_{2n+1} &= (-1)^n \frac{H}{(2n+1)\pi} \end{aligned}$$

המקדמים  $c_n$  מייצגים את ספקטרום התדריות שמרכיבות את הפונקציה  $\psi(t)$ . אם נציב אותם על גרף, זה נראה כך (בציר האופקי  $n$ , בציר האנכי  $c_n$ )



הספקטרום יצא סימטרי  $c_n = c_{-n}$ . זה אומר שהפирוק כולל רק איברי קוסינוס - ביצוג עם פונקציות  $\cos, \sin$ .

$$\psi(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_f t) + b_n \sin(n\omega_f t)]$$

עבור פונקציה זוגית: מקבלים  $c_n = c_{-n}$ , וכפי שראינו  $b_n = 0$ , וממשיים  $(Im(c_n) = 0)$ .  
 עבור פונקציה אי-זוגית: מקבלים  $c_n = -c_{-n}$ ,  $a_n = 0$ ,  $(Re(c_n) = 0)$ .

אם נצייר את הסכומים החלקיים עבור הגל הריבועי שלנו

$$S_N \psi = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega_f t} = \sum_{n=-N}^N 2(-1)^n \frac{H}{(2n+1)\pi} \cos((2n+1)\omega_f x)$$

נקבל: (ראו לינק)  
<https://www.desmos.com/calculator/jbkzwwapfb>

ניתן גם להשתמש בפורייה כדי לחשב טורים! לדוגמה, בהצבת  $0 = x$  ומעבר אגפים:

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(לא טריוויאלי לחשב את הטור באגף ימין ללא פורייה...)

### 8.1.3 מהזור למרחב במקום בזמן

עד כה מצאנו טור פורייה לפונקציה מהזורת בזמן.  
 גם לפונקציה מהזורת במרחב ניתן למצוא את טור פורייה (מתמטית, אין הבדל):

$$\psi(z + \lambda) = \psi(z)$$

מגדירים באופן דומה  $k_f = \frac{2\pi}{\lambda}$ , מחשבים את המקדים באמצעות

$$c_n = \frac{1}{\lambda} \int_z^{z+\lambda} \psi(z) e^{-ink_f z} dz$$

ומתקבל שטור פורייה הינו

$$\psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ink_f z}$$

#### 8.1.4 הערכה על מחזוריות

ניתן לבצע פירוק פוריה גם לפונקציה שאינה מחזורי - נבחר מהJOR ז' (או  $\lambda$ ) ונבצע עליו פירוק פוריה. הפונקציה שתתתקבל מהטור היא המשכה הממחזרית של הפונקציה בקטע זה.

#### 8.1.5 פוריה בגלים עומדים - תנאי התחלה

ראינו שבמערכת עם גלים עומדים יכולים יכולים להתקיים רק אופני תנודה עם מספרי גל שהם כפולות של מספר גל יסוד כלשהו  $k_f$  (ברוב המערכות שהתעסקנו איתן קיבלנו  $\frac{\pi}{L} = k_f$ ).

$$k_n = nk_f$$

כעת נוכל ל取חת תנאי התחלה שרירותים לmiteר סופי באורך  $L$  - נניה נתון  $\psi(t=0, z)$ , צורת המיתר ב- $t=0$ . נוכל לבצע פירוק פוריה על  $(0, z)$  ונקבל טור של גלים עומדים:

$$\psi(0, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nk_f z), \quad k_f = \frac{\pi}{L}$$

<sup>3</sup>

כל אופן תנודה מתנודד בתדריות שלו,  $\omega_n = ck_n$ . נוסיף להם את התלות בזמן ונקבל את הדינמיקה של המערכת!

$$\psi(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nk_f z) \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

ראו הדוגמה:

<https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/Pluck-Fourier/Pluck-Fourier.html>



©2012, Dan Russell

<sup>3</sup>ספציפית בדוגמה פה, אנחנו מתעסקים בגל הקשור ב-2 צדדי. אז איןפה איבר חופשי כי  $\psi(z=0) = 0$  ויש רק סינוסים כי  $1 = R$ , אבל ניתן לבצע את התהליך הזה לכל מערכת - ניקח תנאי התחלה, נפתח אותו כטור פוריה, ונוסיף לתולות זמן כדי לקבל טור של גלים עומדים שמקיימים את משוואת הגל וכמו כן את תנאי התחלה.

## 8.2 משפט רוחב הפס (Bandpass Theorem)

**הגדרה:** רוחב הפס הספקטורי (bandwidth) הוא הפרש התדריות בין השיא של הספקטרום לבין המיקום שבו מתאפס לראשונה.

**דוגמא:**  
נחזיר לפולס הריבועי שבו דנו קודם. חישבנו את מקדמי פורייה

$$c_0 = H, \quad c_n = \frac{H}{n\pi} \sin(nf\pi)$$

כל  $n$  מתאים לתדרות  $f$ .  
 $n = \frac{\omega}{\omega_f} \iff \omega \equiv \omega_n = n\omega_f$   
 נוכל לכתוב

$$c(\omega) = \frac{H\omega_f}{\pi\omega} \sin\left(\frac{\omega}{\omega_f} f\pi\right)$$

אורך כל אינטראול שערך הפונקציה הוא  $H$  הינו  $\Delta t = f\tau = \frac{f \cdot 2\pi}{\omega_f}$ .  
 לכן נוכל לכתוב, בהצבת  $\frac{\Delta t}{2} = \frac{f\pi}{\omega_f}$

$$c(\omega) = \frac{H\omega_f}{\pi\omega} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)$$

シア הספקטרום של הגל הריבועי הינו  $\omega_{max} = \frac{2\pi}{\Delta t}$ , והמקום בו מתאפס לראשונה הוא  $\omega_0 = 0$ . על כן, רוחב הפס הספקטורי עברו הגל הריבועי:

$$\Delta\omega_0 = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

**משפט רוחב הפס:** (ידעו גם בთור עקרון אי הוודאות)  
 מתקיים  $\Delta\omega_0\Delta t = 2\pi$ , או באופן 쉬ו  $\Delta\omega_0\Delta t = 1$ .  
 עבור פולסים מצורעות אחרות (לא גל ריבועי)  $\Delta\omega_0\Delta t$  אינם מוגדרים היטב אך תמיד מתקיים

$$\Delta\omega_0\Delta t \sim 1$$

**הסבר:**  
 ככל שהפולס צר יותר ( $\Delta t$  קטן) צריך תחום תדרים גדול יותר כדי לבנות אותו.  
 למשל על מנת ליצור פולס  $\delta$  בזמן ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) נדרש תחום אינסופי של תדריות.

לעומת זאת פולס עם תדריות אחת ( $\Delta\nu = 0$ ) או רכו אינסופי  $\infty \rightarrow \Delta t$ .

דוגמה:

אם אנחנו שומעים צליל באורך זמן מסוים, או ספקטרום התדריות הנחוץ על מנת לבנות אותו מקיים  $\Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta t}$ . אם הצליל קצר מדי, רוחב הפס גדול מדי וקשה להזות את התדרות.

## 9 הרצאה 9 (3.12)

### 9.1 הערה על קוונטיים

בסוף שיעור שעבר ראיינו את משפט רוחב הפס, אשר קובע כי  $2\pi \Delta t \sim 2\pi \Delta z \sim 1$  או באופן שקול  $\Delta t \sim \Delta z$ . כמו כן ראיינו שני תון לבצע פירוק פורייה לא רק עבור אותו מוחזוריים בזמן, אלא גם אותן מוחזוריים במרחב. מכאן נקבל ממשפט רוחב הפס, בדיקת אותו האופן,

$$\boxed{\Delta k \Delta z \sim 2\pi}$$

למשפט רוחב הפס (נקרא גם עקרון אי הוודאות של הייזנברג) יש חשיבות גדולה במכניקת קוונטית, אשר נלמד סמסטר הבא - למעשה, ניתן לגור את כל המכנית הקוונטית מעקנון זה. (במכנית הקוונטית החלקיקים יש אופי גלי, لكن תקף שם משפט רוחב הפס).

הקשר בין מספר הגל (או אורך הגל) של חלקיק לתנועתו, נקרא קשר דה ברולוי:

$$p = \hbar k$$

כאשר  $\hbar$  קבוע פלאנק המצוצם. בהצבת  $\Delta p = \hbar \Delta k$  נקבל

$$\Delta p \Delta z \geq h$$

וודאות במקום באה על חשבון וודאות בתנועה, ולהפוך - "לא ניתן לדעת את מיקומו וגם את מהירותו של חלקיק". אם יודעים טוב מאד את מיקום החלקיק או יהיה אי וודאות רבה בתנועתו, ולהפוך.  
עוד קשר, שראיינו ביחסות פרטיט:

$$E = h\nu$$

ממנו נסיק באופן דומה

$$\Delta E \Delta t \geq h$$

מסתבר שישנם תהליכיים החלקיים אשר לכארה מפרים אנרגיה - זה מותר עבור טווח זמן קצר די אשר מאפשר זאת, עקב אי הוודאות באנרגיה (モთר הפתת אנרגיה בגודל  $\Delta E$  רק בזמן  $t \sim \frac{h}{\Delta E}$ ).

## 9.2 אפנון אותות (modulation)

נניח אנחנו רוצים להעביר אות כלשהו  $M(t)$  עם פירוק פוריה  $c_n$ . אפנון אמפליטודה ( $AM$ ) היא שיטה להעביר את אות זה. נניח שאורך האות  $\tau$ , אז  $\frac{2\pi}{\omega_f} = \tau$ . נכפיל את האות בgel בעל תדרות גדולה בהרבה מתדרות היסוד  $\omega_f$ . ככלומר

$$\psi(t) = M(t) \cos(N\omega_f t) = M(t) [e^{iN\omega_f t} + e^{-iN\omega_f t}]$$

כאשר  $1 < N$ . כתה הגל המקורי  $M$  "מקודד" על אמפליטודה הגל החדש  $\psi$ . נבצע פירוק פוריה על  $\psi$  (נסמן את המקדים  $c'_n$ ):

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau M(t) [e^{iN\omega_f t} + e^{-iN\omega_f t}] e^{-in\omega_f t} dt \\ &= \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau M(t) [e^{-i(n-N)\omega_f t} + e^{-i(n+N)\omega_f t}] dt \\ &= c_{n-N} + c_{n+N} \end{aligned}$$

קיבלונו 2 עותקים של ספקטרום התדרים המקורי  $c_n$ , מועתקים ל- $N$ . כך נוכל להעביר תחנות שונות ברדיו עבור  $N$ -ים שונים. עבור  $N$  מסוים התקבל ספקטרום התדרים המקורי רק מועתק שמרכזו ב- $N$  (ו- $-N$ ) - על מנת שלא תהיה חפיפה בין תחנות רדיו שונות, יש להקצתה לכל תחנה רוחב פס מסוים בנוסף. מהתדר המועבר  $(t)$ psi נקבע ניתן לשזר את הגל המקורי  $M(t)$  (ברשותנו את ספקטרום התדרים שלו).

נניח אנחנו רוצים להעביר סדרה של ביטים (0 או 1) בתווך גל ריבועי  $\psi$  שערכו  $A$  כאשר אנחנו רוצים להעביר 1 ו- $-A$ . כשאנו רוצים להעביר 0. על מנת להעביר את המידע בקצב של  $s/100Mb$ , צריך שכל פולס (כל בית) יהיה ברוחב  $\Delta t < 10^{-8}s$ . משפט רוחב הפס, מתקיים  $\Delta t > \frac{1}{\Delta\nu} \sim 10^8 Hz$ , כלומר צריך רוחב פס של  $10^8 Hz$  על מנת להעביר בקצב שביקשנו. אם 2 אנשים ירצו להעביר במקביל בקצב כזה, נצטרך רוחב פס כפול על מנת שהתדריות לא ייחיפו. טווח התדרים האפשרי בטלפון סלולרי הוא  $10^6 Hz$ . למשל עבור חיבור אופטי, טווח התדרים  $10^{14} Hz = 10^6 c$ . ככלומר ניתן לכלול  $10^6$  משתמשים שונים כל אחד עם  $\Delta\nu = 10^8 Hz$ .

### 9.3 מבוא קטן לטרנספורם פורייה

ראינו ש $\Delta t$  רוחב הפולס מכתיב את רוחב הפס  $\omega$  ( $\text{על פי } \frac{2\pi}{\Delta t} \sim \Delta$ ), זמן המזהור  $\tau$  מכתיב את תדרות היסוד (על פי  $\omega_f = \frac{2\pi}{\tau}$ ).

מה יקרה אם נגדיל את  $\tau$  פי 2?  $\omega_f$  יקטן באותו הפקטור. כיוון שרוחב הפס נשמר קבוע, כדי להרכיב את אותן תדרות פוי 2 תדריות (אנחנו סוכמים סינוסים טהורים בתדרויות  $\omega_f$ ). בפרט אם  $\omega_f$  קטן פי 2, אז פי 2 תדרים נכנסים בטוח  $\omega$  ( $\Delta$ ).

אם ניקח  $\infty \rightarrow \tau$  נקבל ש-0 →  $\omega$ . במקומות סכום בדיק  $\sum_n c_n e^{in\omega_f t}$  בגבול הרצוף נקבל טרנספורם פורייה!

## (5.12) 10 10 הרצתה

### 10.1 טרנספורם פורייה

פיתחנו טור פורייה עבור פונקציה בעלת מחזור  $\tau$ . במטרה לפתח טור פורייה לפונקציה  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  שאינה מחזורת, ניקח  $\tau$  ונראה מה קורה בגבול הרצת.

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_f t}, \quad c_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \psi(t) e^{-in\omega_f t}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_f}{2\pi} = \frac{\omega}{n \cdot 2\pi} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{d\omega}{2\pi}$$

מתקובל

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

ובפרט נגדיר  $(\tilde{\psi}(\omega))$  שלוקה את מקומם של המקדמים  $c_n$  בתור ספקטרום התדרים.  
טרנספורם פורייה:

$$\tilde{\psi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$$

טרנספורם פורייה הפוך:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

בספרים מסוימים משתמשים בפקטור  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  פעמיים כדי שהכיוונים יהיו סימטריים.

### 10.1.1 העשרה (לא בשיעור) - משפט רוחב הפס

נגיד את רוחב הפס  $\Delta \omega$  בטור השונות (variance) של  $\omega$  בgal  $\tilde{\psi}$ , ואת רוחב הפולס  $\Delta t$  בטור השונות של  $t$  בגל המקורי  $\psi$ :

$$(\Delta\omega)^2 = \sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |\tilde{\psi}(\omega)|^2 d\omega$$

$$(\Delta t)^2 = \sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |\psi(t)|^2 dt$$

וניתן להוכחה שמתקדים

$$\sigma_\omega^2 \sigma_t^2 \geq c$$

כאשר  $c$  קבוע.

**הוכחה:**

בלי הגבלת הכלליות ניתן לקחת  $0 = \langle \omega - \langle \omega \rangle \rangle = \langle \omega' - \omega - \langle \omega \rangle \rangle$  ובודמה  $\langle t' - \langle t \rangle \rangle = 0$  ע"י החלפת משתנה  $\omega' = \omega - \langle \omega \rangle$  מטעקים במרחב  $L_2$ , מרחב הפונקציות שהאינטגרל של הריבוע שלו סופי -

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty$$

נניח שהגל מנורמל, כלומר  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$  (לכן באינסוף בהכרח  $\psi$  מתאפס). באינטגרציה בחלקים מתקיים

$$1 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{d}{dt} (|\psi(t)|^2) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| t \frac{d}{dt} (|\psi(t)|^2) \right| dt$$

$$\text{מתקיים } \left| \frac{d}{dt} |\psi(t)|^2 \right| = |\psi \bar{\psi}' + \psi' \bar{\psi}| \leq 2 |\psi| |\psi'|$$

$$1 \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |t| |\psi(t)| |\psi'(t)| dt = 2 \langle |t\psi(t)|, |\psi'(t)| \rangle$$

כאשר כזכור אנו משתמשים במכפלה הפנימית במכפלה קובע כי  
אי שוויון קושי שורץ קובע כי

$$\langle a(t), b(t) \rangle \leq |a(t)| |b(t)| = \sqrt{\langle a(t), a(t) \rangle \langle b(t), b(t) \rangle}$$

(למשל עבור מכפלה סקלרית זה ברור  $|a \cdot b| \leq |a| |b|$ ). נשתמש בו ונקבל

$$1 \leq |t\psi(t)| |\psi'(t)| = \sqrt{\left( \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(t)|^2 dt \right)}$$

1. אנהנו ממש קרובים. הגורם השמאלי הוא בדיקת  $\sigma_t^2$ .  
 טרנספורם פורייה של נגזרת מקיים  $\mathcal{F}\{\psi'(t)\} = i\omega \mathcal{F}\{\psi(t)\}$  (קל להראות באינטגרציה בחלקים).
2. טרנספורם פורייה משמר נורמה:  $|\psi(t)| = |\tilde{\psi}(\omega)|$  (לא נוכחה).  
 מהשילוב של השניים מתקבל ש-. כלומר  $|\psi'(t)| = |\omega \tilde{\psi}(\omega)|$ .

$$1 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\tilde{\psi}(\omega)|^2 d\omega \right) = \sigma_t^2 \sigma_{\omega}^2$$

## 10.2 חבורת גלים נעים (Traveling Wave Packet)

ניישם את הרעיון של פירוק  $\psi(z)$  או  $\psi(t)$  לרכיבים הרמוניים, עבור גלים נעים.

### 10.2.1 סכום 2 גלים - פעימות

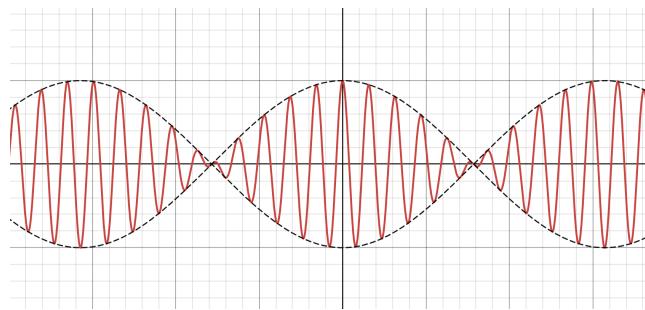
נתחיל מסכום של שני גלים נעים. נניח שיש להם אותה אמפליטודה:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= a \cos(\omega_1 t - k_1 z) \\ \psi_2 &= a \cos(\omega_2 t - k_2 z)\end{aligned} \Rightarrow \psi = \psi_1 + \psi_2$$

נשתמש בזיהות טריגו' של סכום קוסינוסים, ונקבל

$$\psi = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}z\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}z\right)$$

אם  $\omega_2 \approx \omega_1$  (אך אינם שווים), אז הגורם הראשון בעל מקדים זעירים. נקבל מכפלה של גל עם תדרות גדולות, וגל עם תדרות נמוכות, מעין מעטפת אמפליטודה:



לחותפה זו קוראים "פעימות" - סופרפויזיציה של גלים בעלי תדר דומה יוצרת גל מהסוג הנראה לעיל. נחשב את מהירות הפעזה של הגל הפנימי (בעל התדרות הגבוהה) ושל הגל החיצוני.

$$v_\phi = \frac{(\omega_1 + \omega_2)/2}{(k_1 + k_2)/2} \stackrel{\omega_i = ck_i}{=} \frac{\omega}{k} = c$$

הגל הפנימי נעה באותה מהירות פaza  $c$  כמו מרכיביו.

$$v_g = \frac{(\omega_1 - \omega_2)/2}{(k_1 - k_2)/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

התקבל פעמים (*group velocity*)  $v_g$  נקראת מהירות החבורה (group velocity). אך אין זה במקרה תמיד.  $v_g = c$  (או  $v_\phi = c$ ) והן אינן בהכרח שוות.  $v_\phi = \frac{\omega}{k}$

## 10.2.2 סכום גלים רבים

הפעם נחבר גלים נוספים ריבים בעלי מספרי גל שונים  $k$ , ולכל אחד תדרות  $\omega(k)$ . נרכיב אותם עם משקלים ופאות ע"פ ספקטרום פורייה מסוים:

$$\psi(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} c(k) e^{i(\omega(k)t - kz)} dk$$

כאשר מחוץ לתוחם  $c(k)$ ,  $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$  מתאפס (ספקטרום התדריות בתחום לאיזור זה).

אם הגלים הם לא דיספרטיביים, כלומר מתקיים  $c(k) = ck$ , אז מכובן שככל הרכיבים עליהם אנו סוכמים ינוו ב מהירות  $c$ , וכך גם המעטפת תנועה ב מהירות  $c$  כולם יתקיימים  $v_g = c$ .

לעתים גלים יכולים להיות דיספרטיביים, ואז יהיה לנו קשר  $\omega(k)$  אחר. אנו טוענים כי באופן כללי

$v_g = \frac{d\omega}{dk} _{k=k_0}$
$v_\phi = \frac{\omega}{k}$

כאשר  $k_0$  מספר הגל עבורו  $c(k)$  מקסימלי (הקשר השני  $\frac{\omega}{k} = v_\phi$  כבר ידוע). הערה: אכן עבור הקשר  $ck = ck$  שמשני מוגדים  $v_g = v_\phi$  כפי שראינו.

نוסף את  $\omega$  סביבה הנקודה  $k_0$ :

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk}|_{k_0} (k - k_0) + \dots$$

: נציג ב  $\psi(z, t)$

$$\psi(z, t) = e^{i(\omega(k_0) - k_0 \omega'(k_0))t} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} c(k) e^{ik(\omega'(k_0)t - z)} dk$$

אנו רואים שככל המרכיבים התלויים בזמן יצאו מהאנטגרל, כך שהתקבלה מכפלת של גורם התקלי בזמן, עם סכום גלים הרמוניים שכולם ב מהירות  $\omega'(k_0)$ , ובפרט  $v_g = \omega'(k_0)$ .

אם  $\omega$  דיספרטיבי משמע  $\frac{d\omega}{dk} = v_\phi$  תלוי ב- $k$  - לכל מרכיב ספקטרלי יש מהירות פאה שונה. על כן חבורת הגלים תנסה צורה עם הזמן, תוך כדי התקדמות ב מהירות החבורה (*dispersion*).  $v_g = \omega'(k_0)$ .

הערה: יש לשים לב  $\omega(k) = \frac{d\omega}{dk}(k)$  זו מהירות של חבילת גלים בעלת ספקטרום תדרים צל סביב  $k$  כלשהו. על כן מוצדק פיתוח טילור סביב הנקודה.

## 10.3 מציאות משווהת הגל מיחס הנפיצה

### 10.3.1 דוגמה

יחס הנפיצה בדרך כלל נושא אותו המידע כמו משווהת הגלים. ניתן מתווךיחס הנפיצה להגעה למשווהת הגלים שליה ייחס נפיצה זה. עד כה על מנת למצוא ייחס נפיצה הנחנו גל סינוסואידלי  $D e^{i(\omega t - kz)} = \psi$ . בזירה לפי הזמן קיבלנו  $\partial_t \psi = \omega^2 \psi - i k^2 \psi$  ואו  $\partial_t^2 \psi = \omega^2 \psi - i k^2 \psi - \partial_z^2 \psi = -k^2 \psi$ . אם היינו ממשיכים היינו מקבלים  $c = \pm \omega/k$   $\psi = i k^3 \psi \partial_z^3 \psi$  וכו. מהשוון בין הנזרות השקנו ש- $\psi$  פתרון רק אם  $\omega(k) = ak - bk^3$  בכוון הפוך, נניח שיש לנו ייחס נפיצה דיספרטיבי, למשל  $\psi = i \partial_t \psi + k^3 \psi$  מלהנחה שgal סינוסואידלי פותר את משווהת הגל, מתקיים  $\omega(k) = ak - bk^3$  (כפי שראינו לעיל). בהצבה ביחס הנפיצה מתקבל

$$-i \partial_t \psi = a(i \partial_z \psi) - b(-i \partial_z^3 \psi) \Rightarrow -\partial_t \psi = a \partial_z \psi + b \partial_z^3 \psi$$

### 10.3.2 טיזר למכניקה קוונטית - משווהת שרדינגר

געיג בדרך זו למשווהת גלים עבור חלקיק, במסגרת מכניקה קוונטית. עבור חלקיק עם אנרגיה  $E$  שנע בפוטנציאלי  $V(z)$  עם תנע  $p$ , מתקיים משימור אנרגיה

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(z)$$

קשר זה ברולי עבור התנע וקשר איינשטיין עבור אנרגיה נתונים לנו:

$$\begin{aligned} p &= \hbar k \\ E &= \hbar \omega \end{aligned}$$

בהצבה, נקבל ייחס נפיצה עבור גל המתאר חלקיק קוונטי:

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} + V(z)$$

היא לא לינארית ועל כן דיספרטיבית. כמו קודם, מתקיים  $\omega \psi = -k^2 \psi - i \partial_t \psi$  על כן:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + V(z)\psi$$

זו היא המשוואה של שרדינגר!

### 10.3.3 העשרה (לא בשיעור) - עוד קוונטיים

הgalim שפותרים את משואה זו הם גלים של ציפיות הסתרויות - נניח  $\psi(t, z)$  פתרון של משואה של שרדינגר. אז ההסתברות למצא את החלקיק בקטע  $[z_1, z_2]$  בזמן  $t$  היא

$$P = \int_{z_1}^{z_2} |\psi|^2 dz$$

או באופן שקול  $\frac{dP}{dz} = |\psi|^2$ . התabcות galim שפוטרים את משואה של שרדינגר היא (בנ' היתר) הגורם לモזרות הקוונטית, לדוגמה בניסוי 2 הסדקים.

משואה של שרדינגר היא משואה קוונטית, אך כיוון שהשתמשנו בקשר הקלאסי  $E = \frac{p^2}{2m} + V$  היא אינה נכונה עבור מהירותים יחסותיות. אם היינו רוצים שתיהיה יחסותית, ניתן להשתמש בקשר  $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ . נציב בו את  $E = \hbar\omega, p = \hbar k$  ונקבל משואה קוונטית יחסותית, שנראית משואה קלין גורדון. משואה זו מתארת חלקיקים בעלי סpin 0 (חלקיק היגס):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + m^2 \psi = 0$$

לעומת משואה של שרדינגר, האינטראקטיה הפיזיקלית של galim הפוטרים משואה זו אינה גלי ציפיות הסתרות (ציפיות הסתרות המשויכת לה אינה תמיד חיובית כפי שהיינו מצפים מהסתברות). פתרונותיה נקראים שדות קוונטיים. לעתים מגדירים אופרטור דלאמברט  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  כך שמשואה הלא דיסרפטיבית נכתבה  $0 = \psi$ , ומשואה קלין גורדון נכתבה  $0 = \psi + m^2$ . כאשר מתקנים את משואה קלין גורדון להיות לינארית (ובעלת ציפיות הסתרות חיובית) מקבלים את משואה דיראק, משואה המתארת אלקטרונים (ופרמיונים באופן כללי). מפתרוניותה מסיקים את קיום אנטיביון!

## 11.11 הרצתה 11 (10.12)

### 11.1.1 משוואת הגל (קלין גורדון) מינימלית

#### 11.1.1.1 משוואת הגל (קלין גורדון)

נדמיין מיתר, אליו מוחברים קבועים רוחביים המרשנים את תנועתו ("מזרן חד מימדי"). הקבועים מרווחים אופקית במרחב  $\Delta z$  אחד מהשני, והסתטיה מסווג משקל של המיתר היא  $\psi$  כרגיל. ישנו כוח מוחזיר  $f = -\sigma \Delta z \psi$  ( $\sigma$  הקשיות ליחידה אורכית  $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ ). על כן:

$$\mu \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Delta z - \sigma \Delta z \psi \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \sigma \psi = 0}$$

בחלוקת  $\Delta z$  מתתקבלת משוואת גלים. ניתן למצוא ממנה את יחס הנפיצה, מתקבל שהוא דיספרטיבי:

$$\omega^2 = \frac{T}{\mu} k^2 + \frac{\sigma}{\mu} := c^2 k^2 + \omega_c^2$$

כרגיל ניתן לסמך  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  וכמו כן נסמן  $\omega_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$ . זהה משוואת קלין גורדון (הופיעה בעשרה בשיעור קודם).

### 11.1.2 תדרות קיטעון וגל נעלם

ל- $\omega_c$  קוראים **תדרות קיטעון**, כיון שאין  $k$  עבורי  $\omega_c < \omega$ : זהה התדרות הזוויתית המינימלית האפשרית במערכת. מה יקרה אם מעוררים במערכת גל במתדרות  $\omega_c < \omega$ ? (תדרות "אסורה").

מייחס הנפיצה, מספר הגל הינו

$$k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} = i\kappa$$

כאשר הגדרנו  $\kappa$  החלק המדומה של  $k = Im(k)$ .

$$\psi = Re(D e^{i(\omega t - kz)}) = e^{-\kappa z} \cdot Re(D e^{i\omega t})$$

זה כבר לא גל נוע, אלא גל עומד דווקא - "gal nullem" ("evanescent wave"). רכיב דמיוני של  $k$  נותן דעיכה למרחב. מערכת כזו יכולה לשמש כמסנן (פילטר) שאינו מעביר גלים נעים בעלי תדרות  $\omega_c < \omega$ . כלומר גלים בתדרות גבוהה יכולים להתקיים, אך גלים בתדרות נמוכה דווקא.

### **11.1.3 מנהור של גל (tunneling)**

נדמיין מערכת שבה מקטע קצר של תווך דיסרפסיבי, ומשני צדדיו תווך לא דיסרפסיבי.

אם התדיירות של הגל נמוכה מתדיירות הקיטועון, ראיינו שהגל ידעך במרחב בתווך הדיסרפסיבי. לעיתים כשהתווך מאוד דק ביחס למרחק הדיעיכה האופייני של הגל שדוועך, הגל מצלה לחדור אותו ולצאת מהצד השני שלו ולהמשיך ממש כרגיל. לתופעה זו קוראים מנהור.

תופעה דומה קורה גם עברו גלי חלקיקים קוונטיים - כך אפילו אם לחלקיק אין מספיק אנרגיה כדי לה策ות מחסום פוטנציאלי כלשהו, הוא בכל זאת יכול להגיע לצד השני. באמצעות תופעה זו מתרחש היתוך גרעיני בליבת המש.

## 11.2 גלים אלקטרומגנטיים (EM Waves)

עד עכשיו דיברנו על מערכות שהן חד מימדיות מבניתן כיוון התקומות הגל. מבחינה הגדל המתנדנד דנו בגלים חד מימדיים - הסחה אורכית כמו גל קול, או רוחבית כמו במיתר, וכמו כן דנו בגלים אפס מימדיים (פונקציית הלחץ/צפיפות בגל קול). עברו גלים אלו, בזמן מסוים הייתה פאזה מסוימת ב-z מסוים ( $\omega t - kz$ ).  
ב尤ור מממד אחד, נגיד ראת "חויטת הגל" (*wavefront*) - אוסף הנקודות שבהן לגל יש את אותה הפאזה. לעומת הגל על פני המים, חוותות הגל הן אדוות המים, צורתן טבעות קונצנטריות. כאשר נהיה מספיק רוחקים מהמקור, חוותות הגל תהיה אפקטיבית מישורית - גל צזה, שהחוויות שלו הן קווים (או מישורים) מקבילים (במרחב אורך גל) נקרא גל מישורי.

### 11.2.1 פיתוח משוואת גל אלקטרומגנטי ממשוואות מקסואל

נשזור אך מושוואות מקסואל ברייך נקבל שכל רכיב של השדה החשמלי  $E$  והמגנטי  $B$  מקיימים את משוואת הגלים הלא דיספרטיבית, עם  $c$  מהירות האור (נשותש ביחידות *CGS*):  
משוואת מקסואל לפי הסדר: חוק גאוס, "אין מונופוליים מגנטיים", חוק פאראדי, וחוק אמפר עם תיקון מקסואל:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

ברייך, ללא מטענים או זרים ( $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$ ) מושוואות מקסואל המתקבלות הן:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

נפעיל על חוק פאראדי קרל  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$  ב-2 האגפים (נחליף את סדר הגזירה ונשותש בזיהות וקטורית)

$$\nabla \left( \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \nabla^2 \mathbf{E} \right) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

סה"כ התקבל

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

(נכיר, לפלייאן של וקטור הוא  $(\nabla^2 \mathbf{E}) = (\nabla^2 E_x, \nabla^2 E_y, \nabla^2 E_z)$ . כלומר שלושה מושוואות גלים לא דיספרטיביות, אחת עבור כל רכיב קרטזי!)

## 12.12 הרצתה 12

### 12.1 גלים אלקטרומגנטיים

#### 12.1.1 המשך

בשיעור האחרון לחתנו את משוואות מקסול ברייך:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

לקחנו קREL של חוק פארדי (משווהה 3) וקייםנו משווהת גלים על כל אחד מהרכיבים הקרטזים של השדה החשמלי:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

כלומר באופן מפורש, מתקיים:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

ובאופן דומה עבור  $y$ ,  $z$ .  
כמו כן, ניתן לבצע אותו פיתוח ולקבל שגם השדה המגנטי מקיים את משווהת הגלים:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

כך סה"כ יש 6 משווהות גלים (3 עבור רכיבי השדה החשמלי, ו-3 עבור המגנטי).  
כשמקסול פיתח את משווהה זו במקור, הוא עבד ב-*MKS* (ולא *CGS* כמוונו), וקיים במקום  $\frac{1}{c^2}$ , פקטורי  $\mu_0 \epsilon_0$ . הוא חישב מספרית וקיים ערך קרוב לערך שהוא ידוע עבור מהירות האור! מכך הוא הסיק שהאור הוא גם תנודה/גל באיזושהו תוווי, לו הוא קרא לאתר (*ether*).

כמובן ידוע לנו שלאחר מכן תורת היחסות הפרטיה את קיומו של האתר, בניסוי מייקלסון מורלי.  
הפתרונות של משווהות אלה אינן תנודות בתוווי, אלא גלים שמתתקדים ברייך.

## 12.1.2 תכונות של גלים א"מ

עבור גלים מישוריים, אין תלות של  $\mathbf{E}$  או  $\mathbf{B}$  ב- $y$ ,  $x$  (נניח שהם נעים בכיוון  $\hat{z}$ ). על כן מוחוק גאוס נסיק:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

כלומר ידוע שהשدة כולה קבועה לאורך ציר  $y$ ,  $x$ , אך יתר על כן, הרכיב השווה בכיוון התקדמות הגל ( $E_z$ ) קבוע בכל המרחב (גם בכיוון  $z$ ). בדיק באותה הצורה,

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

בנוסף, מוחוק פאראדיי וחוק אמפר,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} &= (\nabla \times \mathbf{E})_z = \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial x}}_0 - \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial y}}_0 = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= (\nabla \times \mathbf{B})_z = \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial x}}_0 - \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial y}}_0 = 0 \end{aligned}$$

כלומר: הרכיבים  $B_z, E_z$  קבועים במרחב וגם בזמן. כל הדינמיקה מתרחשת בכיוון המאונך ל התקדמות הגל - **אלקטرومגנטי הוא גל רוחבי** (*transverse*).

נשתמש בחוק פאראדיי שוב, עבור שאר הרכיבים:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} &= (\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} &= (\nabla \times \mathbf{E})_x = \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} \end{array}}$$

יש פה סימטריה בין הנגורות. הקשר הזה מזכיר לנו את הקשר בין הנגורות שקיבנו בשיעורים הראשונים,  $\psi = \pm c \partial_z \psi$ .

נסובב את מישור  $xy$  (סיבוב סביב ציר  $z$ ) כך ש- $x$  יהיה כיוון  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} E_y &= 0 \\ \mathbf{E} &= E \hat{x} \end{aligned}$$

נקבל מכך ש- $0 = \frac{\partial B_x}{\partial t}$ , כלומר בשדה המגנטי אין שינוי בזמן (או במרחב) בשדה החשמלי. נאמר שאם הוא קבוע אז אין לו רכיב גלי, ואפקטיביתו הוא אפס (כלומר זהו שדה מגנטי חיצוני שאינו קשור לגל).  
לכן  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$  אין רכיב בכיוון  $\mathbf{E}$ , או באופן שקול, **השדה המגנטי והחשמלי מאונכים**:

$$\boxed{\mathbf{B} \perp \mathbf{E}}$$

נרצה לאפיין לא רק את כיוון השדות אלא גם את גודלם  $E, B$ . נניח גלים נעים סינוסואידליים:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0,x} \sin(\omega_E t - k_E z) & (\omega_E = ck_E) \\ B_y &= B_{0,y} \sin(\omega_B t - k_B z) & (\omega_B = ck_B) \end{aligned}$$

כאשר יחס הנפיצה נובע ממשוואת הגל כרגיל (מדובר במקרה של דיסרפסיבית ולכן  $\omega = ck$ ).  
מהצבה ב- $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}$  (שהסקנו מהוק פארדי) מתקבל שבכל זמן ובכל נקודה במרחב, מתקיים:

$$-k_E E_{0,x} \cos(\omega_E t - k_E z) = -\frac{\omega_B}{c} B_{0,y} \cos(\omega_B t - k_B z) \quad \forall t, z$$

זה יתכן רק אם התדריות זהות ואין הפרש פאזה,  $k_E = k_B, \omega_E = \omega_B$  (נסמן מעכשו).  
נקבל

$$(*) E_{0,x} = B_{0,y}$$

ואם באופן דומה נניח שהשדה החשמלי בכיוון  $y$ , נקבל שוב שמאונכים. נציב גלים סינוסואידליים

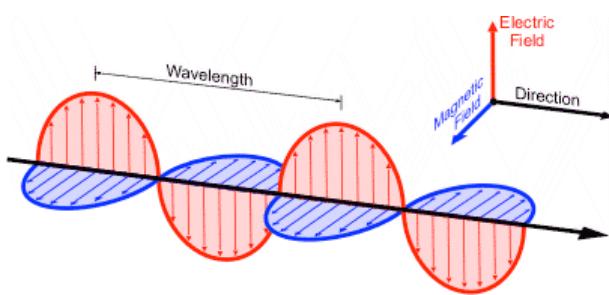
$$\begin{aligned} E_y &= E_{0,y} \sin(\omega t - kz) \\ B_x &= B_{0,x} \sin(\omega t - kz) \end{aligned}$$

ונקבל

$$(*) E_{0,y} = -B_{0,x}$$

מ- $(*)$  ומהעובדת ש- $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$  נסיק שמתקיים הקשר:

$$\boxed{\mathbf{B} = \hat{z} \times \mathbf{E} \iff \hat{z} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|}}$$



הערה: באIOR לעיל, שבתח כבר ראתם בעבר, מצויר “גל אחד”, אבל יש לזכור שבעצם ייש עותק זהה של גל זה לכל  $x, y$  (יש שדה חשמלי ומגנטי בכל המרחב, וראינו שהם קבועים בכיוונים  $x$  ו- $y$ ).

### 12.1.3 וקטור פוינטינג - אנרגיית גל א"ם

מהו שטף האנרגיה  $\mathbf{S}$  (אנרגיה ליח' זמן דרך שטח בגודל יחידה בכיוון  $\hat{S}$ ) שיוצאה מאייזור סגור בו קיימים שדות  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  שימושיים בזמן? האנרגיה ליחידה נפח (מקלאסית 2):

$$u = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi}$$

משימור אנרגיה, מתקיים (כמזה האנרגיה היוצאת מנפח מסוים שווה למינוס השינוי באנרגיה בנפח זה)

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV$$

ולכן מתקבלת משווהות רציפות

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0}$$

ממנה נוכל למצוא את  $\mathbf{S}$  וקטור פוינטינג:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{8\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) = -\left( \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})) \\ &= \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}}$$

למשל, עבור גלים סינוסואידליים בכיוון  $\hat{z}$ , ( $E_0 = B_0$ )

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \sin(\omega t - kz) \\ B_y &= B_0 \sin(\omega t - kz) \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) \hat{z}$$

כאשר נבצע ממוצע על פני מזמן  $I = \frac{2\pi}{\omega} \tau$  נקבל שעוצמת הקרינה הא"מ (*Intensity*, נסמן  $I$ ) היא:

$$I_z = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \langle \sin^2(\omega t - kz) \rangle_\tau = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

לדוגמא, שטף האנרגיה שmagיע "לכדה" א' מהמשמש (לעתים נקרא "קבוע המשמש") הוא

$$\frac{cE_0^2}{4\pi} = |\mathbf{S}| = f_\odot = 1.4 \frac{kW}{m^2} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{4\pi f_\odot}{c}} = 600 \frac{V}{m}$$

#### 12.1.4 תנע של גל א"מ

נדון בשאלת: כיצד גל א"מ יכול להעביר תנע ואנרגיה למטענים חשמליים שהוא חולף על פניו?

נדמיין חלקיק במנוחה בעל מטען  $q$  ומסה  $m$ , תחת שדות  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  מאונכים.  
הפתרון הקלסי: תחילה הוא מאיין עם  $\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m}$  עקב השדה המגנטי בלבד - אך יש לו מהירות ולכן יתקבל כוח נוסף בכיוון הניצב לתנועה  $\mathbf{B} \times \mathbf{v} = q\mathbf{v}$  מתקיים לפטור.

הפתרון היחסי: שטף התנע (נקרא גם לחץ קרינה) ערכו  $P = \rho_p c$  - צפיפות תנע  $\times$  מהירות = שטף התנע. מיחסות פרטית, עבור פוטון מתקיים  $(E = h\nu) |p| = \frac{E}{c}$ , לכן צפיפות התנע של גל א"מ היא  $\rho_p = \frac{u}{c}$ .  
כלומר לחץ הקרינה  $P$  הינו צפיפות האנרגיה:

$$P = \rho_p c = u = \frac{|\mathbf{S}|}{c}$$

## 13.12 הרצתה 13 (17.12)

### 13.1 גלים א"מ בתוך חומר

#### 13.1.1 שדה חשמלי בחומר

איך גלים א"מ מתחנאים בתוך חומר? נפתח את משוואות מקסול בתוך החומר ונגיע למשוואת הגלים האלקטרומגנטיים בתוך חומר.

נדמיין קבל (שבין קצוטויי חומר כלשהו) המחבר למקור מתח כך שצפיפות המטען המשתנית על קצוטות הקבל היא  $\pm \sigma_f$ . בקבל נוצר שדה חשמלי  $D = 4\pi\sigma_f$  (עבור  $f$ ,  $D$  עבור  $p$ ) זה השדה "החיצוני" החופשי. האטומים/מולקולות של החומר בתוך הקבל יעברו קיטוב/פולרייזציה. כל מולקולה תהפרק לדיפול, נניה בעל אורך  $x$  ומטען  $q \pm q$ , כך שמומנט הדיפול

$$\mathbf{p} = qx(\text{הוקטור } x \text{ פונה מהטען } -q \text{ – אל המטען } +q).$$

קייטוב החומר יוצר שדה חשמלי בכיוון ההפוך מהשדה המקורי  $D$ . גודלו  $b$  עבור  $\sigma_b = 4\pi\sigma_f$ , השדה שנוצר עקב המטען שבחומר).

נסמן  $N_q$  מספר המטענים. מתקיים:

$$4\pi\sigma_b = 4\pi \frac{N_q q}{A} \frac{x}{x} = 4\pi \frac{N_q}{V} |p| = 4\pi P$$

סימנו  $P = n_q p$  צפיפות הקיטוב, כאשר  $n_q = \frac{N_q}{V}$  מספר המטענים ליחידה נפח. כך סך השדה החשמלי בחומר הוא

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} - 4\pi\mathbf{P}$$

נהוג להגדיר עבור כל חומר את הסופטביליות החשמלית  $\chi_e$ , כך ש- $\mathbf{P} = n_q \mathbf{p} = \chi_e \mathbf{E}$  (הוא מدد לכמה החומר ניתן לקיטוב – ביענו הנהה שיש קשר ביןاري בין  $\mathbf{P}$  ו- $\mathbf{E}$ ). נגדיר בנוסף את  $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$  המגדם הדיאלקטרי של החומר. כך מתקבל במעבר אגפים

$$\boxed{\mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}}$$

#### 13.1.2 שדה מגנטי בחומר

באופן דומה עבור שדה מגנטי, נדמיין מתח הפעול על סליל ובתוך הסליל חומר כלשהו. נניה השדה החיצוני הוא  $\mathbf{H}$ , אז נקבל שהמגנטות של החומר  $\mathbf{M}$  הוא

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

כאשר  $\chi_m$  סופטביליות מגנטיות (שוב הנהנו קשר ביןاري בין השדה החיצוני והשדה הנוצר בחומר).

כך מתקבל שטח השדה הוא

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = (1 + 4\pi\chi_m) \mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

כאשר  $\mu$  נקרא הפרמאביליות המגנטית של החומר.

הערה: שמו לב  $D = \varepsilon E$  זה קשר בין השדה הסופי  $E$  לשדה החיצוני  $D, H$ , וכך גם  $\mu H$  זה קשר בין השדה הסופי  $B$  לשדה החיצוני  $H$ , אך בסדר הפוך - השדות במרחב  $E, B$  והשדה החיצוני, אך הסדר הפוך במשוואות -  
כלומר  $\mu, \varepsilon$  משחקים תפקידיים הפוכים אחד מהשני.

### 13.1.3 משוואות מקסול בתחום חומר מבודד

עדין מתקיים  $\rho = 0, J = 0$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

מתכליות משוואות הגל על השדות  $(E, B)$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}}$$

מתכליות מהירות הפזה של גל א"מ בתחום חומר היא

$$\boxed{v_\phi = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\mu \varepsilon}}$$

כאשר הגדרנו את  $n$  מוקדם השבירה של החומר, המקיים  $.n = \frac{c}{v}$

מה הקשר בין השדות של הגל הא"מ  $(E, B)$  בתחום החומר?  
רכיב  $x$  של חוק פאראדי נוטן

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (CGS)$$

אם נציב במשואה זו פתרונות סינוסואידליים:

$$\begin{aligned}E_x &= E_{0x} e^{i(\omega t - kz)} \\ B_y &= B_{0y} e^{i(\omega t - kz)}\end{aligned}$$

נקבל את הקשר:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}, \quad kE_0 = \frac{\omega}{c} B_0 \Rightarrow \boxed{B_0 = nE_0}$$

$(MKS)$   $B_0 = \frac{n}{c} E_0$  או

#### 13.1.4 משוואת גלים במוליך

נראה מה קורה בחומר עם מוליכות  $\sigma$  ( $J = \sigma E$ ) (נניח שהוא אוחמי). חוק אמפר בנוכחות זרם הוא:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

(הציבנו את  $H, D$  והחזירנו את האיבר עם  $J$ ). נعبر ליחיות MKS

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{J} \\ &\stackrel{o_{hm}}{=} \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\sigma \mathbf{E} \end{aligned}$$

על מנת למצוא את משוואת הגל ניקח שוב קרל של חוק פארדי.

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \right) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

כך שהתקבל המשוואת הגלים:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}$$

שכבר ידוע לנו שהיא משוואת גלים עבור גל מרושן. נניח גל  $E_x = E_{0x} e^{i(\omega t - kz)}$ . ובהצגה נקבע יהס נפיצה:

$$-k^2 = -\mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \Rightarrow \boxed{k^2 = \mu\epsilon\omega^2 \left( 1 - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)}$$

כשהמוליכות גבוהה נקבל ריסון חזק וגלים אלקטромגנטיים לא יכולים לחדר כלל - כך עובדת מראה (ובאופן כללי זו הסיבה שמתכוות מחרוזות אור).

## 14 (19.12) הרצתה 14

בשיעור שעבר ראיינו את הקשרים  $D, H$  השdots החופשיים/חיצוניים, ומשוואת מקסול בחומר הין (כאשר  $\rho = 0$ ):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{J}\end{aligned}$$

או עבור מוליך, ביחידות  $MKS$ , משוואת פאראדי הופכת ל-

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \sigma \mathbf{E}$$

כאשר הצבנו את חוק אוהם  $J = \sigma E$  ( $\sigma \neq 0$ ) מוליכות החומר).

שם התקבלה משוואת הגל הבאה (לקחנו רוטור של פאראדי):

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

ש망ארת גלים מרוסנים (ראו הרצתה 4).  
הצבנו  $E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$  והתקבל יחס הנפיצה

$$k^2 = \mu \varepsilon \omega^2 \left( 1 - \frac{i\sigma}{\omega \varepsilon} \right)$$

כעת נבחן את המקרים השונים של ריסון (חלש, חזק, קריטי).  
עוצמת הריסון כמובן נקבעת ע"י הרכיב המdomה.

### 14.1 גלים א"מ בחומר (עם זרם)

#### 14.1.1 ריסון חלש ( $\sigma << \varepsilon \omega$ )

בגבול זה יחס הנפיצה הוא

$$k = \sqrt{\mu \varepsilon} \omega \sqrt{1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}} \approx \sqrt{\mu \varepsilon} \omega \left( 1 - \frac{i\sigma}{2\omega \varepsilon} \right) \equiv a + bi$$

כasher gadrono  $\omega$   $\omega = \frac{1}{\delta} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$  (וaino chlii b'tadirot!).  
 Zohi bli'ah b'chomer m'boud - l'k'l chomer yish molikhot  $\sigma$ , ak am hoa m'boud hi'a ma'od k'tana (v'oz acen matk'im  $\omega < < \sigma$ ).  
 Matk'el shechomer m'boud yish bli'ah la-zinah shel galim a'm.

הערה: h'cowna b'mrakh d'ui'ah ofiyini hi'a h'mrakh  $z$  ck sh-

$$E_x(z) = \frac{E_x(0)}{e} e^{\pm \frac{1-i}{2} z}$$

$$k = \pm (1 - i) \sqrt{\frac{\mu \omega \sigma}{2}} \equiv a + ib \quad (|a| = |b|)$$

zeh gal nu um mrakh d'ui'ah

$$\delta = \frac{1}{b} = \frac{1}{Im(k)} = \frac{1}{Re(k)} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \frac{\lambda}{2\pi} \approx \frac{\lambda}{6}$$

Kra'ano l'tof'ah zo u'mek ur/ur, *skin depth*, שmrakh d'ui'ah c'shishit ma'orach gal.

h'mshmu'ot h'fizy'kli't: casher molikhot  $\sigma$  gdolah (h'chomer molik' ma'od) oz gal ha'm do'uk aksp'ononc'ialit v'cmut v'la chodor l'homer. oz mashtdr um h'idu' shlnu, shb'molik' ain shde h'shamli E.

ldogma, molikhot shel n'hotot hi'a  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$  v'  $\sigma_{copper} = 6 \cdot 10^7 \frac{1}{\Omega m}$  ck shubora, batdr  $z$   $\omega$  u'mek h'chd'ira hoa  $\delta = 10mm$   $\delta = 10^{-8}m$   $\omega = 10^{14}Hz$   $\omega = 100\text{\AA}$   $10^{14}Hz$  oz t'dr shel a'or n'r'ah - l'k'n matk'ot hn m'berikot, yish h'zor shel ha'or, v'cmut v'ain bli'ah cel.

### 14.1.3 אימפダンס לגלים א"מ

במעגלי זרם חשמלי כפי שלמדונו, האימפダンס/עכבה היא  $z = \frac{V}{I}$  (bihidotot) ( $\Omega = \frac{Volt}{Amper}$ ).  
בגלים אלקטרומגנטיים נגידר את העכבה באופן אנלוגי. נניח שהשدة החשמלי מוקטב בכיוון  $x$ . אז נגידר:

$$z = \left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \mu \left| \frac{E_x}{B_y} \right|$$

וגם פה היחידות הן (עבור MKS)  $\cdot \frac{[E_x]}{[H_y]} = \frac{[V/m]}{[A/m]} = [\Omega]$   
או ב- CGS, האימפダンס חסר יחידות  $\cdot \frac{[sV/m]}{[Gauss]} = [1]$

קיילנו שבירק  $z_0 = \mu_0 \stackrel{CGS}{=} 1 |E_x| = |B_y|$  ולכן האימפダンס של הריק

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 3 \times 10^8 \frac{cm}{s} = 120\pi\Omega \approx 380\Omega$$

בחומר מבודד קילנו  $n = \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \left| \frac{B_y}{E_x} \right|$  ולכן

## 14.2 גלים מישוריים בכיוונים שונים

### 14.2.1 וקטור הגל

על מנת להרחב ל 3 מימדים את אפשרות התקדמות הגל (עד כה בחנו גלים מישוריים, אשר נעים בכיוון יחיד) נגידר את וקטור הגל  $\mathbf{k}$  (*wave vector*). נסביר את הרעיון: נניח גל מישורי המתקדם בכיוון  $\hat{u}$ . בכל מקום  $\mathbf{r}$  במישור פאזה קבועה, מתקיים  $\mathbf{r} \cdot \hat{u} = \text{const.}$  (בדומה לכך שמקודם, עברו גל הנע בכיוון  $z$ , במישור פאזה קבועה התקיים  $\mathbf{r} \cdot \hat{z} = z = \text{const.}$  קלומר לקחנו  $\mathbf{r} \cdot \hat{u} \mapsto z$ , ולכן בגל הרמוני במקום  $z$  יופיע  $\mathbf{r} \cdot \hat{u} = k\hat{u}$ . נגידר את וקטור הגל:

$$\boxed{\mathbf{k} = k\hat{u}}$$

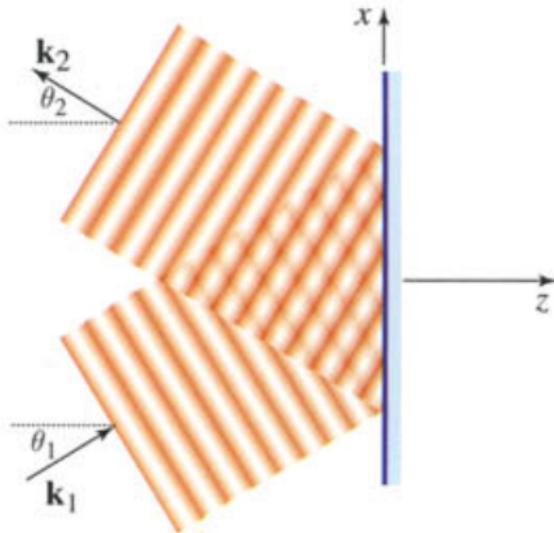
וקטור שכיוונו הוא כיוון תנועת הגל המישורי, וגודלו הוא מספר הגל  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . בתיאור זה גל הרמוני מישורי הוא

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{or} \quad \psi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

ואכן בהצבת  $\hat{z} = k\hat{u}$  מתקבלים הגלים שהתעסקנו איתם לפני כן.

### 14.2.2 מעבר גל מישורי דרך גבול מישור

נניח גל מישורי שעובר בגבול מישור עם  $z$  קבוע (מישור  $xy$ ). בכל צד של הגבול תועך שונה, נניח עם מקדמי שבירה  $n_i, n_t, n_r$ . נסובב את מישור  $xy$  כך של- $i$ - $\mathbf{k}$  הגל הפוגע (*incident*) לא יהיה רכיב בכיוון  $y$ :  $\mathbf{k}_i = (k_x, 0, k_z)$ . נסמן  $\mathbf{k}_r$  וקטור הגל של המוחזר (*reflected*), ובדומה  $\mathbf{k}_t$  עבור הגל העובר (*transmitted*). נסמן את זוויות הפגיעה החזירה ומעבר  $\theta_i, \theta_r, \theta_t$  (באירור להלן  $(k_i = k_1, k_r = k_2)$



נכתוב את פונקציות הגל:

$$\begin{aligned}\psi_L(\mathbf{r}, t) &= \psi_i + \psi_r = A_i \cos(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + A_r \cos(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}) \\ \psi_R(\mathbf{r}, t) &= \psi_t = A_t \cos(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})\end{aligned}$$

נניח שבעבר בגבול **צרי** להתקיים תנאי רציפות:

$$(\psi_i + \psi_r)_{z=0} = (\psi_t)_{z=0}$$

ולכן, **צרי** להתקיים לכל  $x, y, t$

$$A_i \cos(\omega t - [k_{ix}x]) + A_r \cos(\omega t - [k_{rx}x + k_{ry}y]) = A_t \cos(\omega t - [k_{tx}x + k_{ty}y])$$

זה יכול להתקיים רק אם התדרויות  $\omega$  (מקדמי  $t$ ) השונות הן זהות, כמו כן מקדמי  $x$  זהים ומקדמי  $y$  זהים:

$$(1) \omega_i = \omega_r = \omega_t$$

$$(2) k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

$$(3) 0 = k_{ry} = k_{ty}$$

זה תנאי הכרחי לפתרון, אך לא תנאי מספק. צריך להתקיים בנוסף (כעת נצמצם את  $\cos$ )

$$(4) A_i + A_r = A_t$$

מקשרים אלו מתקבלים חוקי האופטיקה הגאומטרית.

### 14.2.3 חוקי האופטיקה הגאומטרית

מקשר (3) מתקבל שלושת וקטורי הגלים נמצאים במישור  $zx$ .

(1) וקטורי הגלים (*הפגיעה המוחזר והמעבר*) כולם באותו מישור (מישור זה נקרא מישור הפגיעה או *plane of incidence*).

מקשר (2) נובע כלומר  $|k_i| \sin \theta_i = |k_r| \sin \theta_r$ ,  $k_{ik} = k_{rx}$  נעים באותו תווך עם אותו  $\omega$ , ולכן  $\sin \theta_i = \sin \theta_r$ , כלומר  $|k_i| = |k_r| = \frac{\omega}{c}$ .

**חוק ההחזרה:**  $\boxed{\theta_i = \theta_r}$  (2) זווית הפגיעה וההזרה זהות.

לבסוף מקשר (2) שוב  $|k_i| \sin \theta_i = |k_t| \sin \theta_t$ , ולכן  $k_{ix} = k_{tx}$  באותו כללי אין בהכרה באותו התווך.

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{|k_t|}{|k_i|} = \frac{\lambda_i}{\lambda_t} = \frac{c_i}{c_t} = \frac{n_t}{n_i}$$

(כאשר השתמשנו בקשרים  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ,  $c_i = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$ ,  $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$ ) (3) **חוק סnell:** מתקיים

#### 14.2.4 הזרה מלאה

נראה את  $k_{tz}$  (רכיב הווקטור של הגל המועבר, במנוחה  $(\mathbf{k}_t = (k_{tx}, 0, k_{tz})$ ) של הגל הפוגע בהסתמך על חוק סNEL והקשרים שקיבלנו. מתקיים

$$k_{tz}^2 = |k_t|^2 - k_{tx}^2 = |k_i|^2 \left( \frac{n_t}{n_i} \right)^2 - k_{ix}^2 = |k_i|^2 \left[ \left( \frac{n_t}{n_i} \right)^2 - \sin^2 \theta_i \right]$$

ולכן

$$k_{tz} = |k_i| \sqrt{\left( \frac{n_t}{n_i} \right)^2 - \sin^2 \theta_i}$$

מהירות הפזה ב-2 התווכים הן  $v_i < v_t < n_t$  או באופן שקול  $v_i = \frac{c}{n_i}$ ,  $v_t = \frac{c}{n_t}$ . אם  $\sin \theta_i > \frac{n_t}{n_i}$  נניח נקבל  $k_{tz}$  מודומה!

$$k_{tz} = i\kappa_{tz}, \quad \kappa_{tz} = |k_i| \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left( \frac{n_t}{n_i} \right)^2}$$

ואז פונקציית הגל המועבר היא

$$\psi(x, z, t) = Re [e^{i(\omega t - k_{tx}x - k_{tz}z)}] = e^{-\kappa_{tz}z} Re [e^{i(\omega t - k_{tx}x)}]$$

זהו גל נע בכיוון  $x$  (ולא  $z$ !) אשר דועך בכיוון  $z$ . יש לו מהירות גדולה מאשר שהיא לו בתווך המקורי

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_{tx}} = \frac{\omega}{k_{ix}} > \frac{\omega}{\sqrt{k_{ix}^2 + k_{iz}^2}} = c_i$$

אם יש גבול נוסף העובר לתווך המקורי במרחק קצר מספיק מהגבול הראשון, נקבל מההור.

## 15 (24.12) הרצאה 15

תזכורת: בהרצאה האחרונה בחנו את התנאיות של גל א'ם מישורי הפוגע בגבול מישורי - השתמשנו בתנאי רציפות בגבול והתקבלו גל חזר ועובר שמקיימים את 3 חוקי האופטיקה.  
נבדוק עכשו ספציפית עבור גלים א'ם מהו תנאי הרציפות עבור האמפליטודות של הגלים מעבר דרך גבול מישורי.

### 15.1 המשוואות פרנל (Fresnel Equations)

#### 15.1.1 פיתוח

באופן כללי, חוק פאראדי ואמפר בהצגת האינטגרלית (עם  $J = 0$ ):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}$$

נניח גבול מישורי בין 2 תווים שונים. ידוע לנו מקלאסית 2 שחוק פאראדי ואמפר נתונים לנו (בבחירה מסלול אינטגרציה מלביי סביב הגבול המישורי) תנאי רציפות על השדות:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel,1} &= \mathbf{E}_{\parallel,2} \\ \mathbf{H}_{\parallel,1} &= \mathbf{H}_{\parallel,2} \end{aligned}$$

כאשר האינדקס מסמן על איזה צד של הגבול המישורי מדובר (נדגיש, אין זרם או מטען במישור).  
נניח גל פוגע  $k_i$  בזווית  $\theta$ , גל חזר  $k_r$  בזווית  $\theta$  (מחוק ההחזרה), וגל עובר  $k_t$  בזווית  $\phi$ . CUT נפריד למקרים לפי כיוון השדה החשמלי:

- (1) מקוטב בכיוון מקביל למישור הפגיעה<sup>4</sup>
- (2) מקוטב בכיוון מאונך למישור הפגיעה

ראשית נטפל במקרה (1) - נניח קיטוב כך ש-  $E_i$  מקביל למישור הפגיעה, והוא  $H_i$  מאונך אליו ומצביע "מחוץ לדף".  
נניח ש-  $E_r$  גם בתוך המישור כך ש-  $H_r$  מצביע "לתוך הדף" (בהכרח התהפק כיוון  $H$  כדי שהמכפלה הוקטורית של  $E$  ו-  $H$  תיתן את הכוון הנכון של וקטורי הגל של הגל החזר). נניח גם ש-  $E_t$  במשור הפגיעה ו-  $H_t$  מצביע "מחוץ לדף".

נדרוש את תנאי הרציפות שמצאנו לעיל עבור השדות, ב-  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} E_i \cos \theta + E_r \cos \theta &= E_t \cos \phi \\ H_i - H_r &= H_t \end{aligned}$$

ונכל לקשר בין 2 המשוואות באמצעות העכבה  $(H_y = \frac{E_x}{z})$  ונקבל

<sup>4</sup>תזכורת: זהו המישור שבו נמצאים שלושת וקטורי הגל  $k_i, k_r, k_t$  ולא מישור הגבול.

$$E_i \cos \theta + E_r \cos \theta = \frac{z_2}{z_1} \cos \phi (E_i - E_r)$$

ולבסוף, מקדמי הعبرה והחזרה הם

$$R_{\parallel} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{z_2 \cos \phi - z_1 \cos \theta}{z_2 \cos \phi + z_1 \cos \theta} \quad T_{\parallel} = \frac{E_{t,\parallel}}{E_{i,\parallel}} = \frac{2z_2 \cos \theta}{z_2 \cos \phi + z_1 \cos \theta}$$

הערה: שימושו לב שם כל התנועה מתרחשת בהד מימד,  $\theta = \phi = 0$ , מקבלים את אותן מקדים כמו בגבול בין 2 מיתרים קשורים.

באופן דומה, אם הפעם השדה החשמלי מוקוטב בכיוון מאונך למשור הפגיעה (כלומר מקרה (2)), נקבל

$$R_{\perp} = \frac{z_2 \cos \theta - z_1 \cos \phi}{z_2 \cos \theta + z_1 \cos \phi} \quad T_{\perp} = \frac{2z_2 \cos \phi}{z_2 \cos \theta + z_1 \cos \phi}$$

4 מקדים אלה (הזרה והعبرה של רכיב מקביל ומאונך למשור) הם (גרסה אחת) של **משוואות פרנל**:

לאחר הצבת חוק סגול  $\sin \phi = z_2 \sin \theta = z_1 \sin \theta$  במקדים ושימוש בזווית נתן לקבל גרסה נוספת:

$$R_{\parallel} = \frac{\tan(\phi - \theta)}{\tan(\phi + \theta)}, \text{ etc.}$$

או אם ניפטר מזווית הזרה ונבטא רק במנוחי זווית הפגיעה:

$$R_{\parallel} = \frac{\sqrt{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 - \sin^2 \theta} - \frac{z_2}{z_1} \cos \theta}{\sqrt{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 - \sin^2 \theta} + \frac{z_2}{z_1} \cos \theta} \quad R_{\perp} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 - \sin^2 \theta}}$$

### 15.1.2 זווית ברוסטר

בפגיעה אנכית,  $\theta = \phi = 0$  ומתקיים

$$R_{\parallel} = R_{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

למשל נסחף על מעבר מאוויר לזכוכית,  $R = -0.2$ . לעומת זאת,  $n_{\text{air}} \approx 1.5$ ,  $n_{\text{glass}} \approx 1$ . וקיים מוקדם החזרה  $-R = 1$ . כלומר, יש החזרה במעבר בין זכוכית לאוויר, ולכן ניתן לראות השתקפות בזכוכית. במקרה זה התקבל גם מינוס, כלומר היפוך פאזה של השדה החשמלי.

בפגיעה ב-90 מעלות מתקובל  $-1 = R_{\perp} = R_{\parallel}$ . כלומר כאשר הפגיעה כמעט מקבילה למישור הגבול מתקובלת החזרה מלאה. שימו לב שברכיב הניצב יש היפוך פאזה אך ברכיב המקביל אין.

כיוון ש- $R_{\parallel}$  פונקציה רציפה של  $\phi, \theta$ , איפשהו באמצעות בינה זווית 0 ל-90 יש זווית המכונה **זווית ברוסטר**  $\theta_B$  שבורה  $0 = R_{\parallel}$ , כלומר אם הגל הפוגע מקטוב במקביל למישור הפגיעה, לא תהיה החזרה כלל. ממשוואות פרנלי ניתן להסביר שזה מתקובל עבור זווית הפגיעה המיקיימת:

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

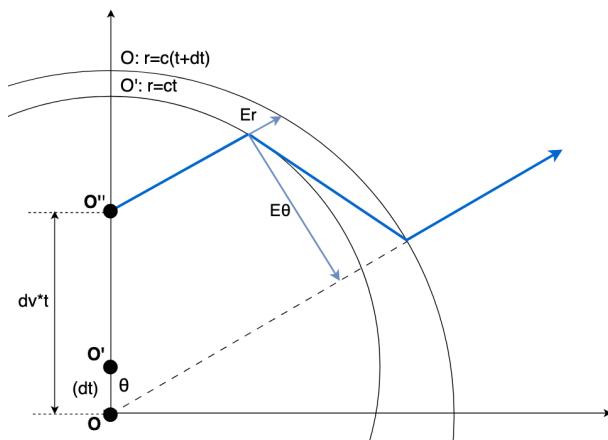
$$. T_{\parallel} = \frac{n_1}{n_2}$$

## 16 (26.12) הרצתה 16

עד כה לא דיברנו על מה יוצר גלים א"מ - בפיזיקה קלאסית (לא קוונטית), הדרך היחידה ליצור גלים אלקטромגנטיים היא להאיין מטענים. נאמר שטען מסוין מיין קורן (קרינה א"מ).  
כיצד החזרה והעברה (פיזור) ובלייה מתרחשים ברמה המיקרוסкопית? השדה החשמלי גורם למטענים קשורים או חופשיים להאיין. המטענים המואצים קורנים גלים א"מ בכיוונים שונים, על חשבון ההספק הא"מ הפוגע. נבחן זאת באופן כמותי.

### 16.1 קרינה של מטען מואץ - נוסחת Larmor

נניח שיש לנו מטען נקודתי נייח ב- $t=0$  ואנחנו נתונים לו תאוצה  $\ddot{z} = \frac{dv}{dt}$  במשך זמן  $dt$  כך שיגיע למהירות  $dv$ . נרצה למצוא מה מצב המערכת בזמן מאוחר יותר  $t$  כלשהו ( $t >> dt$ ).  
ראשית נבחן קו שדה בזווית  $\theta$  מהטען המקורי - הוא עדיין קיים אם נמצא בנקודה במרחק גדול מ- $c(t+dt)$  מהראשית, כיוון שהוא שומרת התקדמות האינפורמציה ה- $c$ . קו השדה באוטו הכוון, אך בזמן  $t$ , הספיק להגיע רק למרחק  $ct$  מנקודת סיום התאוצה (שוב, משיקולי קצב התקדמות האינפורמציה).  
מרציפות השדה החשמלי, יהיה קו שדה המחבר את 2 קווים אלה. נחלק את השדה  $E$  בתחום זה לרכיב רדייאלי ומשיקי ביחס למיקום הנוכחי של החלקיק, בזמן  $t$ :  $E_r, E_\theta$



באמצעות טריגונומטריה פשוטה, נוכל לקבל את הקשר הבא:

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{dv \cdot t \sin \theta}{cdt} = \frac{\ddot{z}}{c} t \sin \theta$$

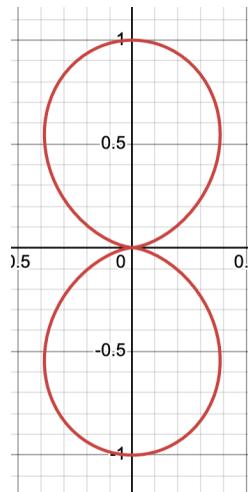
כמו כן ידוע  $t = \frac{r}{c}$ ,  $E_r = \frac{q}{r^2}$  ולכן

$$E_\theta = \frac{q}{rc^2} \ddot{z} \sin \theta$$

היו  $E_\theta \sim \frac{1}{r}$  ו-  $E_r \sim \frac{1}{r^2}$ , מספיק רחוק מהמקור  $E_\theta >> E_r$  ואפשר לה忽ם מהרכיב הרדילי. וקבל שדה משיקי להלוטין, מאונך לכיוון התפשטות - התוצאה היא גל א"מ כדור שמתפשט במהירות  $c$ .  
 (ראו אנימציה פה - <http://tapir.caltech.edu/~teviet/Waves/empulse.html>)  
 שטף האנרגיה של הגל האלקטרומגנטי שנוצר הוא בהתאם לוקטור פוינטינג:

$$\mathbf{S} = \frac{cE_\theta^2}{4\pi}\hat{r} = \frac{q}{4\pi r^2 c^3} \dot{z}^2 \sin^2 \theta \hat{r}$$

זהו **נוסחתה לרמ"ר עבור שטף האנרגיה של הגל**:  
 תבנית הקרינה ( $|\mathbf{S}(\theta)| \propto \sin^2 \theta$ ) נקראת "קרינת דיפול חשמלי":



זו הצורה שלפיה אפשר לראות איפה הקרינה הכוי חזקה (ማונך לכיוון תאוצת המטען) והכוי חלה (עם כיוון התאוצה).  
 נחשב אינטגרל של שטף האנרגיה על כל הכוונים:

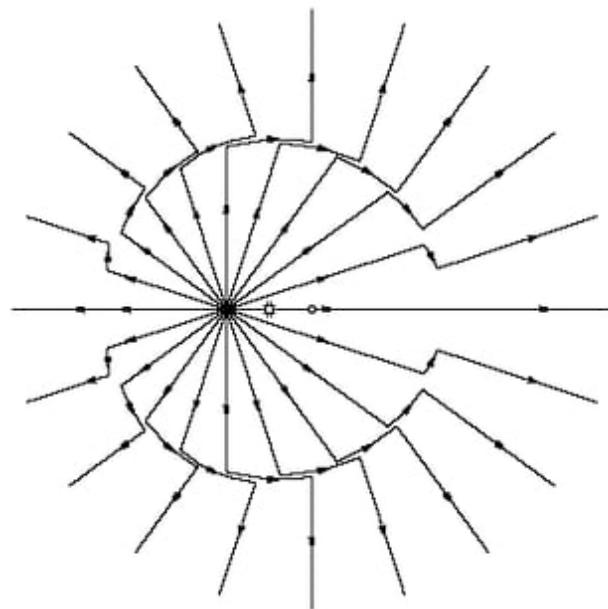
$$P = \int \int |\mathbf{S}(\theta)| r^2 d\Omega = \frac{q^2 \dot{z}^2}{4\pi c^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 d(\cos \theta) d\varphi}_{2\pi \left( \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{\theta} \right)_0^\pi = \frac{8\pi}{3}} = \frac{2 q^2 \dot{z}^2}{3 c^3}$$

כך שמתබול

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{z}^2}{c^3}$$

נסיק שהאנרגיה של הpolloס הא"מ נשמרת, כיון שש"כ ההספק דרך פניו כדור ברדיוס  $r$  לא תלוי ב- $r$  (כלומר האנרגיה רק מועברת ומחפשותה למרחב).

להלן האיוור שהווצג עבור קו שדה יחיד, אך עברו קו שדה רבים:



## 16.2 פיזור תומסון (Thomson Scattering)

### 16.2.1 שטח חתך של אלקטرون

עכשיו כשאנו מבינים<sup>5</sup> איך מטען מואץ קורן, נבחן אינטראקציה של גל א"מ עם מטען. נתחיל במקרה של פיזור קרינה א"מ על מטען חשמלי ייחודי - פיזור תומסון.

נניח אלקטרון חופשי ב- $z = 0$  ומגע גל א"מ מישורי עם שדה (הגורם לתאוצה):

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t)$$

ידוע לנו שטען מואץ יוצר גל א"מ (קורן) - באמצעות נוסחת לרמור נחשב את בזמן  $t$  כלשהו את ההספק הא"מ של הגל הנוצר דרך כדור ברדיוס  $r$ :

$$P(t, r) = \frac{2e^2}{3c^3} \left[ \ddot{x}(t - \frac{r}{c}) \right]^2 = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} E_0^2 \cos^2 \left( \omega(t - \frac{r}{c}) \right)$$

התאוצה שהובילה לגיל הא"מ במרחק  $r$  התרחשה לפני  $\frac{r}{c}$  זמן, ולכן מופיע  $\ddot{x}(t - r/c)$  ולא  $\ddot{x}(t)$ . נקבל שההספק המפוזר ע"י האלקטרון הוא:

$$\boxed{\langle P \rangle_r = \frac{e^4 E_0^2}{3m^2 c^3}}$$

(שוב לא תלוי ברדיוס, כמצופה וכרצוי עבור שימור אנרגיה).  
ונכל לכתוב ביטוי זה בתוור

$$\langle P \rangle_r = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \frac{cE_0^2}{8\pi}$$

נשים לב שהגולם הימני הוא ההספק המוצע ליחיד שטח (מומוצע וקטורי פוינטינג,  $\langle |S| \rangle$ ). נוכל להסיק שהגולם השמאלי הוא שטח כלשהו, כיון שמכפלתם נותנת הספק. נשים לב בנוסף שלגודל  $\frac{e^2}{mc^2}$  ממדים של מרחק. נגיד  $r_0$  הרדיוס הקלאסי של האלקטרון, כך שקיים

$$\boxed{\frac{e^2}{r_0} = m_e c^2 \Rightarrow r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}}$$

---

<sup>5</sup> זו התקווה

נחשב על האלקטרון בתור כדור מטען בצפיפות מטען איחידה<sup>6</sup>, כך שאנרגיית המנוחה שלו שווה לאנרגיה האלקטרו-טטיטית של המטען שמרכיבים אותו (עד כדי פקטורי  $\frac{3}{5}$ ) וכך נקבל את ההספק המפוזר:

$$\langle P \rangle_\tau = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \langle |\mathbf{S}| \rangle$$

ונגדיר את חתך הפעולה של תומפסון:

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} r_0^2$$

קיים לנו שהספק הוא השטף כפול שטח זה  $\sigma_e$  - זה שטח החתך האפקטיבי שמהווה אלקטרון מבחינה פיזור גל א"מ. בכלל החלות ב- $m^{-2}$ , מתקיים  $\sigma_e < < \sigma_p$ , כלומר קרינה א"מ מתפזרת פי <sup>2</sup>(2000) יותר על אלקטרון מאשר על פרוטון.

### 16.2.2 גז אלקטרוניים

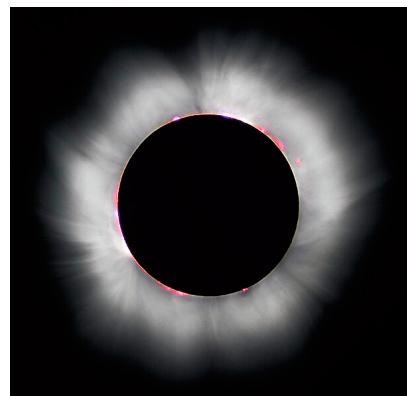
איזה חלק משטף S (הספק ליח' שטח) מפוזר ע"י גז אלקטרוניים בצפיפות  $n_e$  (חלקים ליח' נפח) לאורך דרך  $z$ ?  
נסתכל על צינור באורך  $z$  עם שטח חתך  $da$  המלא באלקטרונים בצפיפות  $n_e$ , ונבחן גל עם שטף אנרגיה  $S$  שעובר בגז.  
כל אלקטרון בנפרד מהוות מטרה עם שטח מטרה אפקטיבי  $\sigma_e$ .  
מספר האלקטרוניים מאחרוי שטח  $da$  הוא  $n_e z$ . גודל זה נקרא **צפיפות عمود** (*column density*). זה נותן לנו כמה "מטרות" יש ליחידת שטח, וכך שטחה המטרות ליחידת שטח הוא  $n_e z \sigma_e$ .

### 16.2.3 דוגמה - קורונה של השימוש

הקורונה של השימוש (השכבה החיצונית ביותר באטמוספורה השימוש) היא גז חם בטמפרטורה  $K = 10^6$ , מיונן עם מספר אלקטרוניים ליחידת נפח  $\sim 10^9 \frac{e}{cm^3}$ .  
עומקה הוא  $z \sim 10^{11} cm$ , ובצבה מתkowski  $= 10^{-5} \sigma_e n_e z \sim 10^{-10}$  מקרים רק בדרכו הקורונה מפוזרת הczyda ע"י האלקטרונים. لكن ניתן לראות אותה רק בליקוי חמה.

הערה: זה לא נכון! לפי הфизיקה המודרנית, התפלגות המסה והטען של האלקטרון היא לחולטי נקודתית. בכל זאת זה שימושי להגדיר את רדיוס האלקטרון.

מסתבר שעוד דרך לכתוב אותו היא  $a_0 \alpha^2 = r_0$  כאשר  $a_0$  המרחק בין הגרעין לאלקטרון באטום מימן ("רדיווס בוהר") ו-  $\alpha$  הוא ה- *fine structure constant*, קבוע שמכמת את עצמת האינטראקציה בין אלקטרונים ופוטונים.

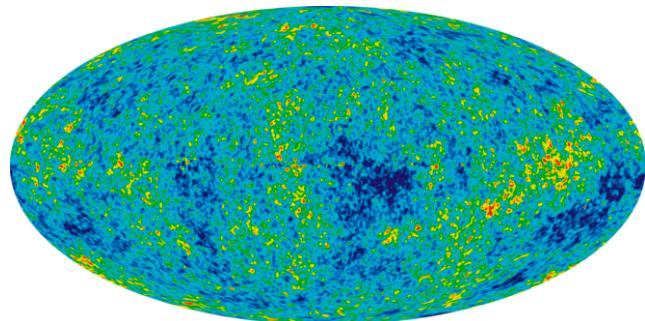


פיזור תומפסון אינו תלוי אורך גל ולכון הקורונה נראהית לבנה.

#### 16.2.4 דוגמה - קרינת רקע קוסמית (*CMB*)

אם מסתכלים רוחק, למרחק  $\sim D \cdot 10^9$  שנים אור (או יותר דיוק, לזמן בו היקום רק כנ- 400,000 שנה אחרי המפץ הגדול, בזמן זה עוד לא נוצרו כוכבים או גלקסיות), טמפרטורה היה  $\sim T$ . הגז מינן ולכון אור מרחק גדול יותר ( $> D$ ) עבר פיזור תומפסון על האלקטרונים, ולא מגיע אליוינו. האור ש מגיע מגז זה נקרא קרינת הרקע הקוסמית, ומסיבה זו לא ניתן לראות מעבר אליו. קרינת הרקע הקוסמית מכונה גם "משטה הפיזור האחרון".

להלן מפת חום קרינת הרקע הקוסמית:



### 16.3 פלזמה

ראינו הספק של גל א"מ המפוזר ע"י אלקטرون בודד או אוסף של אלקטرونים. כיצד נראה מעבר קרינה דרך פלזמה? (ג' של מטענים חופשיים).

נענה על התשובה במונחים של קיטוב  $P$ , סוספטיביליות  $\chi_e$ , מקדם השבירה  $n$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon$  ויחס הנפייצה ( $\omega$ ).  
נניח ג' אלקטرونים חופשיים (ויאנים חיוביים נייחים) בצפיפות  $n$ . ב-  $z=0$  עבר גל א"מ. עבר רכיב  $x$ :

$$\ddot{x} = -\frac{eE_x}{m} \cos(\omega t) \Rightarrow x(t) = \frac{eE_x(t)}{m\omega^2}$$

ונוצר מומנט דיפול מושרה בג' האלקטרונים ( $p = -ex(t)$ ) (מיнос כיוון שוקטור הדיפול מצביע מהמטען השלילי להחיובי),  
ואיפויות הקיטוב

$$\mathbf{P} = n_e \mathbf{p} = \underbrace{\frac{n_e e^2}{m\omega^2}}_{\chi_e} \mathbf{E}(t)$$

מתתקבלת סוספטיביליות שלילית  $\chi_e = -\frac{n_e e^2}{m\omega^2}$  - מקום שכאשר מפעילים שדה החשמלי אז הקיטוב יוצר שדה החשמלי  
בכיוון ההפוך (כך קיבלנו עבור חומרים דיאלקטריים) נוצר שדה החשמלי באותו הכיוון! השדה הדיפולי המושרה מתחזק ומתרוסף  
לשדה של הגל הא"מ.

נבחן את מקדם השבירה:

$$n^2 = \varepsilon\mu \approx \varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e = 1 - \frac{4\pi n_e e^2}{m\omega^2} \equiv 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

כאשר הגדרנו את תדריות הפלזמה:

$$\boxed{\omega_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m}, \quad \nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi}}$$

$$\text{מהקשר } n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \text{ נסיק את יחס הנפייצה:}$$

$$\omega = \frac{c}{n} k = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} k \Rightarrow \boxed{\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2}$$

זה אותו יחס הנפייצה שהתקבל ממשוואת קלין גורדון! הוא לא מאפשר גלים מתחת לתדריות הקיטוען  $\omega_p < \omega$ .

לדוגמא, יש פלזמה ביונוספירה - היא בגובה  $m \sim 100 km$ . יש שם צפיפות מטענים  $n_e \sim 3 \cdot 10^5 \frac{e}{m^3}$  ובהצבה מתתקבל  
שתדריות הפלזמה היא  $\omega_p \sim 31 MHz$ . משמע שלא ניתן מעבר של גלים בתדריות  $\omega_p < \omega$  דרך היונוספירה.  
למשל מנצלים את זה עבור שידורי רדיו. מכונין את האות לאטמוספירה, הוא מגיע ליאטמוספירה וחוזר וכך בזיגzag יכול  
לנוע סביב כדה"א.

## 17.1.2 הרצתה 17 (31.12)

### 17.1 גלים עומדים בשני מימדיים

ראינו בימיד אחד שתנאי שפה ייחד (מייתר חצי אינסופי) נותן גל מגיע וגל חוזר, שסכוםם הוא גל עומד  $\psi = \psi_i + \psi_r$ . לאחר מכן הוספנו תנאי שפה נוסף  $-L = z$  והתקבלה קוונטיזציה, אופני תנודה דיסקרטים עם  $k_n = \frac{n\pi}{L}$  ותדירות  $\omega_n = ck_n$  נקבע תהליך דומה ב-2 מימדיים.

#### 17.1.1 חצי מישור

נניח גבול מישורי  $z = 0$  וגל מישורי מגע  $k_i$  ומוחזר  $k_r$ . נניח שסיבת כלשי יש ההזורה מלאה. אז הגלים הם מהצורה

$$\begin{aligned}\psi_i &= e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} = e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} \\ \psi_r &= e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} = -e^{i(\omega t - k_x x + k_z z)}\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בחוק ההזורה ותנאי  $\psi_i + \psi_r|_{z=0} = 0$ . כעת אם נסכם אותם נקבל

$$\psi = \psi_i + \psi_r \propto e^{i(\omega t - k_x x)} \sin(k_z z)$$

כלומר הגל נעה בכיוון  $x$  עם מהירות פaza  $\frac{\omega}{k_x} = v_\phi$ , ועומד בכיוון  $z$ .  
ראו אנימציה: (<https://www.desmos.com/3d/gpnt132rh6>)

#### 17.1.2 תעלת (קוונטיזציה בכיוון אחד)

נסובב את הצירים כך שהגבול הוא  $x = 0$  (ללא סיבה טובה). אז הפונקציה שהתקבלה היא

$$\psi = e^{i(\omega t - k_z z)} \sin(k_x x)$$

נוסיף תנאי שפה  $\psi|_{x=a} = 0$  ונקבל  $\psi|_{x=a} = 0$  כאשר  $k_{x,\ell} = \frac{\ell\pi}{a}$ . זה נקרא מוביל גלים (waveguide) בכיוון שלמעשה הצבנו את הגל בין שני מישורים (מעין תעלת). עם ההזורה מלאה, קיבלנו תנוצה רק בכיוון התעלת. סיב אופטי הוא מוביל גלים.

نبטא את מספר הגל בכיוון  $z$  ( $k_z$ ):

$$\frac{\omega}{c} = |\vec{k}| = \sqrt{k_{x,\ell}^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\ell\pi}{a}\right)^2 + k_z^2} \Rightarrow k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c \ell}{\omega a}\right)^2}$$

נדרوش ש- $k_z$  ממשי ולכן  $1 < \frac{\pi c \ell}{\omega a}$ . לכן אפשריים אופני תנועה המקיים

$$\boxed{\ell \leq \frac{\omega a}{\pi c} = \frac{a}{\lambda/2}}$$

אם  $a > \lambda > 2a$  אז  $\ell < 0$  ובהכרח  $\psi = e^{i(\omega t - k_z z)} \cos(k_x x)$  כולם - לא יתכן ש gal עם אורך גל כזה יעבור בתעלת. אם הינו בוחרים תנאי שפה "חופשי" במקום "קשור", הינו מקבלים  $\psi = e^{i(\omega t - k_z z)}$ , ועבור  $\lambda > 2a$  עדין הינו מקבלים  $\ell = 0$  אך זה לא גורר  $\psi = e^{i(\omega t - k_z z)}$  אלא גל נע לאורך התעלת, שקבוע בכיוון  $x$  (אין תלות בכיוון זה).

בנוסף רק גלים עם  $\vec{k}$  שנע בזווית  $\theta$  מסוימות יכולים להתקיים:

$$\cos \theta_{i,\ell} = \frac{k_z}{|\vec{k}|} = \frac{\sqrt{|\vec{k}|^2 - k_x^2}}{|\vec{k}|} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \left( \frac{\pi \ell}{a} \right)^2}$$

אם  $1 < \frac{\pi c \ell}{\omega a}$  אז רק אופן תנועה יחיד יכול לנوع במוביל - מוביל כזה נקרא *single mode waveguide*.

### 17.1.3 מרובע (קונטיניזציה ב 2 כיוונים)

כעת נניח גל מישורי בתוך מרובע במישור  $xy$  במידים  $a \times b$  (עדין בדו מימד!), עם תנאי שפה  $\psi|_{\partial\Delta} = 0$ . נניח גם החזרה מלאה שוב. ההחזרים נתונים  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4$ . בסכימת ארבעת הגלים קיבל קונטיניזציה בכיוונים  $x, y$ :

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}, t) &= \Psi_{\ell,m} A \sin(k_{x,\ell} x) \sin(k_{y,m} y) e^{i\omega_{\ell,m} t} \\ k_{x,\ell} &= \frac{\ell\pi}{a}, \quad k_{y,m} = \frac{m\pi}{b}, \quad \omega_{\ell,m} = c |\vec{k}_{\ell,m}| \\ \ell, m &\in \{0, 1, 2, \dots\}\end{aligned}$$

כאשר מספר הגל הוא

$$|\vec{k}_{\ell,m}| = \sqrt{\left(\frac{\ell\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

ול- $\Psi_{\ell,m}$  סימון לאmplיטודה אופן התנודה.

יש פה אפשרות ל-“ניון” (*degeneracy*): אופני תנודה שונים בעלי אותה תדרות זוויתית  $\omega_{\ell,m}$  (כי בעלי אותו מספר גל  $|\vec{k}_{\ell,m}|$ ). זה מתאפשר כאשר  $\frac{a}{b}$  הוא מספר רציונלי. לדוגמה אם  $b = 2a$  מתקיים  $\omega_{22} = \omega_{14}$ .

## 18 (2.1) הרצתה 18

### 18.1 גלים עומדים בתלת מימד

#### 18.1.1 תעלת (קונטיזציה ב-2 כיוונים)

נדמיין כעת תעלת (מרובעת) בתלת מימד, שכיוונה  $z$ , וממדיה  $a \times b$  לאורך ציר  $x$ ,  $b$  לאורך ציר  $y$ .

$$\frac{\omega}{c} = |\vec{k}| = \sqrt{\pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] + k_z^2} \Rightarrow k_z = \sqrt{k^2 - \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]}$$

כמו במקרה של מוביל גל דו מימי, אם  $n, m$  גדולים מדי, יתקבל ש- $k_z$  דמיוני והgel לא יכול לhattakdm (יווצר גל נעלם).  
כלומר יש  $\omega_{m,n}$  מקסימלי כלשהו.<sup>7</sup>

#### 18.1.2 תיבת (קונטיזציה ב-3 כיוונים)

ניקח תיבת רביעי  $0 \leq x, y, z \leq a, b, c$  עם צלעות  $x, y, z$  עם תנאי השפה שהפונקציה מתאפסת על פני התיבה:

$$\Psi_{l,m,n} = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t + \phi)$$
$$k_x = \frac{l\pi}{a}, k_y = \frac{m\pi}{b}, k_z = \frac{n\pi}{c}$$

(זה בהצגה ממשית - כמובן כרגע ניתן גם להשתמש ב-  $e^{i\omega t}$  והפאה תשוויך ל-  $\tilde{A}$ -מרוכב).  
ראו אינטיציה: <https://www.youtube.com/watch?v=cAp3V6FWQ60>

---

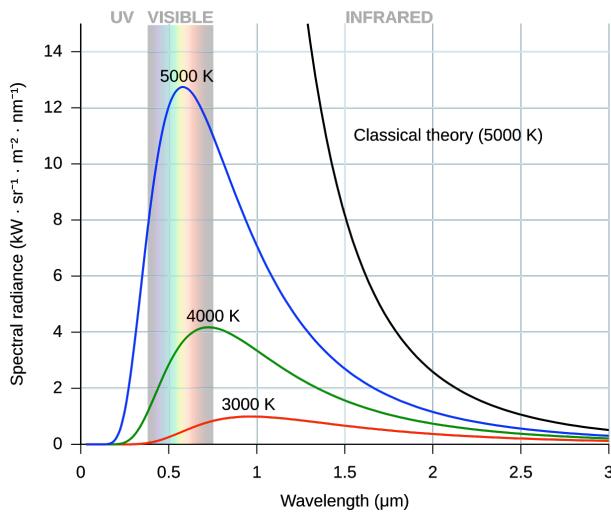
<sup>7</sup>קבוצת הזוגות  $m, n$  עבורם  $k_z \in \mathbb{R}$  סופית ולכן יש לקבוצת התדריות היזוטית המתאימות מקסימום  $\omega_{m,n}$

## 18.2 קרינה גוף שחור

### 18.2.1 מבוא

גוף שחור הוא גוף אשר פולט קרינה תרמית כאשר החומר והקרינה נמצאים בשינוי משקל תרמודינמי (NELMD את משמעות הדבר במכניקה סטטיסטית). גוף שחור בולע את כל הקרן, המגיע אליו.

כבר בסוף המאה ה-19 שמו לב שוגפים קורנים קרינה אלקטромגנטית (זה מוכך לנו מחיי היום יומ/סרטים - דברים חמימים אדומים - לדוגמה לבה). הקרן נפלטה בקצב תדריות/orכי גל. להלן תרשימים של עצמת הקרן המשויכת לכל אורך גל בקרן גוף שחור (התפלגות זו נקראת התפלגות/חוק פלאנק):



עבור טמפרטורות גבוהות יותר, נפלטים פוטונים באנרגיה גבוהה יותר, ככלmore א' גדול יותר ולכן אורך גל λ קטן יותר (ניתן לראות זאת בגרף לעיל). כך כshawרים נהיים חמימים די הם פולטים קרינה בתחום הנצפה, החל מאור אדום, ואז' כשותחמים עוד יותר נפלט גם אור צהוב, ואז' ירוק וכחול וכו'.

נדיר את  $U_\nu$  צפיפות האנרגיה ליחידה תדריות,  $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{Hz}}$ . מתקיים:

$$U_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

(זה הגרף שמוצג לעיל, עד כדי החלפת משתנה  $\frac{c}{\nu} = \lambda$  כי שם מוצגת צפיפות אנרגיה ליחידה אורך גל. ככלmore א'  $\nu = \frac{dE}{d\nu}$  עד כדי החלפת  $\nu = \frac{c}{\lambda}$  ו-  $U_\lambda = U_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} \stackrel{\nu=c/\lambda}{=} \frac{cU_\nu}{\lambda^2}$ ).  
ומתקיים  $U_\lambda = U_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} \stackrel{\nu=c/\lambda}{=} \frac{cU_\nu}{\lambda^2}$  - כמה קומבינציות שונות של  $n, m, l$ , קיימות אשר נותנת את אותו  $U$ ? שאלת זו מובילה לפקטור  $\frac{8\pi\nu^3}{c^3}$ , אשר קשור למספר האופנים של גלים "מ" עומדים בתוך קופסה (NELMD במכניקה סטטיסטית).  
היא ההסתברות למצוא פוטון בתדרות  $\nu$  (గל א' מ בתדרות המתאימה  $\nu = E/h$  (בחוור בטמ'  $T$  בשינוי משקל תרמודינמי עם הקרן בתוכו).

היסטורית, בהתחלה הגיעו רק לגורם פרופורציאוני  $\nu^{-2}$  ללא  $\frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$  - אך זו בעיה גדולה ("ultraviolet catastrophe"). פלאנק הוסיף את הגורם השני, אך מהסיבות הללו נכונות.

\* לא מוצפה להבין זאת לעומק בשלב זה - זה *למניקת סטטיסטית וקונטיניטים*. בכל מקרה, נרצה להשתמש בקשר זה.

### 18.2.2 צורת הספקטרום עבור $\nu$ גדול/קטן

$$\text{עבור } h\nu \ll k_B T, \text{ מתקבל}$$

$$\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \rightarrow \frac{h\nu}{\left(1 + \frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} = k_B T \Rightarrow U_\nu \approx \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$$

$$\text{עבור } h\nu >> k_B T$$

$$\frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \rightarrow \frac{1}{e^{h\nu/k_B T}} \Rightarrow U_\nu \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/k_B T} \sim e^{-h\nu/k_B T}$$

העוקמה  $U_\nu$  מוגדרת ע"י הטמפרטורה  $T$  בלבד ואוניברסלית לכל גוף שחור בטמפרטורה זו, ללא תלות בהרכב צפיפות או מבנה (בහינתן שהкриינה והחומר נמצאים בשיווי משקל תרמודינמי).

### 18.2.3 חוק שטפן-בולצמן

אנחנו מעוניינים בשטף האנרגיה מכל יחידת שטח של גוף שחור. היינו רוצים לומר שהשטף הוא הצפיפות  $f_\nu$  כפול המהירות  $c$ , אך בפועל יש פקטור גיאומטרי  $\frac{1}{4}$  (לא עקרוני).

$$f_\nu = \frac{cU_\nu}{4} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

נבע אינטגרציה על מנת למצוא את סך האנרגיה (לא *per* תדיות). סך צפיפות האנרגיה :

$$U = \int_0^\infty U_\nu d\nu = aT^4$$

כאשר  $a$  נקרא קבוע הקריינה, ומשוואה זו נקראת **חוק הקריינה**.

כמו כן סך השטף הוא:

$$f = \int_0^\infty f_\nu d\nu = \frac{c}{4} a T^4 = \sigma T^4$$

משוואה זו נקראת **חוק שטפן בולצמן**. הקבוע  $\sigma$  נקרא קבוע  $SB$ .  
המשמעותה מ-2- חוקים אלה: צפיפות האנרגיה ושטף האנרגיה של גוף שחור פרופורציונליים לטמפרטורה בחזקה 4.

#### 18.2.4 חוק ויין

נחפש את מקסימום התפלגות האנרגיה/השטיוף.

$$\frac{dU_\nu}{d\nu} = 0 \Rightarrow \nu_{max} = \frac{2.8k_B T}{h}$$

$$\frac{df_\lambda}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{max} = \frac{0.29cm \cdot k_B}{T} \propto \frac{1}{T}}$$

זהו **חוק ויין (wein)**. בשמש  $T = 5800K$  ומתקבל  $\lambda_{max} = 0.5\mu m$  - והוא אורך גל של אור ירוק.  
כלומר כאשר  $T$  גדול יותר הגל קטן - הקרןנה נהיית יותר כהולה! (כפי שצווין, גופים כחולים חמים יותר מגופים אדומים).

#### 18.2.5 דוגמה

- מה הספק האנרגיה שסה"כ מוקרך ע"י גוף שחור כדורי (כוכב, ננייה ברדיוס  $R_*$ ) בטמפרטורת פניו שטה  $T_*$ ? על פי חוק שטפן בולצמן, סך ההספק הוא  $L_* = \sigma T_*^4 \cdot 4\pi R_*^2$ .
- איך השטף אנרגיה מגיע למרחק  $d$  מהכוכב? משימור אנרגיה אותו ההספק יעבור בклиפה הcadoriaת ברדיוס  $d$ , ולכן השטף הוא  $\phi(d) = \frac{L_*}{4\pi d^2} = \sigma T_*^4 \left(\frac{R_*}{d}\right)^2$

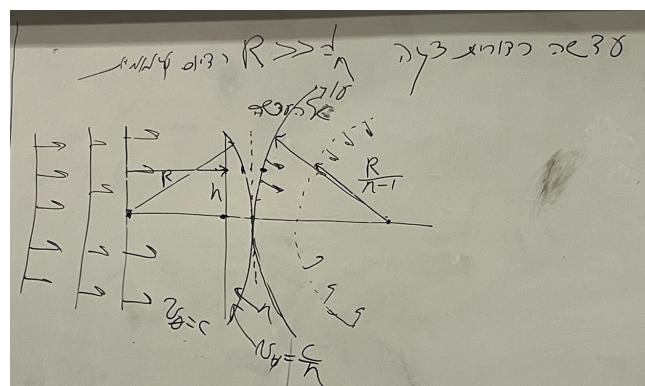
## 19 (7.1) הרצתה 19

### 19.1 אופטיקה גאומטרית

זהו קירוב לאופטיקה - בהמשך (בפרק הבא והאחרון של הקורס) נלמד אופטיקה גלית, שהיא תיאור יותר מדויק.  
אופטיקה: שינוי שיעורות חזיות גל בהשפעת "עדשה".  
 באופטיקה גאומטרית, כל קטע/אייזור בחזית גל מתואר ע"י קרן שניצבת לחזית הגל וכיוונה ככיוון וקטור הגל  $\vec{k}$ .

#### 19.1.1 עדשה כדורית דקה

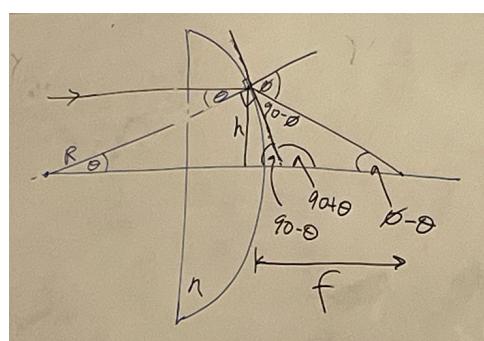
עדשה כדורית דקה היא עדשה המקיים  $d > R$ , כאשר  $d$  עובי העדשה ו- $R$  רדיוס העקמומיות.  
 עבור גל מישור המגיע לעדשה, לאחר מעבר בה החזית המשורית תהפוך לכדורית עם רדיוס עקמומיות  $\frac{R}{n-1}$  כאשר  $n$  מקדם השבירה של העדשה. מרכזו כדור זה נקרא מוקד העדשה.



למה זה קרה?

- מהירות האור קטנה יותר בתוך העדשה, ועל כן לחזקים השונים של הגל העוברים בעדשה לוקח זמן שונה לעبور את העדשה.

- חוק סnell במעבר מהעדשה של האוויר.



הزاوية המעניינת אותנו היא  $\theta - \phi$  כיוון שהעדשה דקה,  $\theta$  קטן. לכן גם  $\phi$  קטן (כי מקושרים ע"פ חוק סנל) ולכן מתקבל בקירוב

$$\sin \phi - \sin \theta \approx \phi - \theta \approx \sin(\phi - \theta)$$

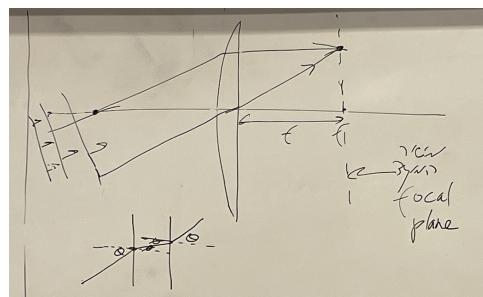
כמו כן חוק סנל קובלע

$$n \sin \theta \stackrel{\text{snell}}{=} \sin \phi \approx \sin(\phi - \theta) + \sin \theta$$

מגיאומטריה,  $\sin(\phi - \theta) = \frac{h}{f} - 1$  ו-  $\sin \theta = \frac{h}{R}$

$$n \frac{h}{R} = \frac{h}{f} + \frac{h}{R} \Rightarrow \boxed{f = \frac{R}{n-1}}$$

אין זה תלוי ב- $n$ , כך שכל הקרןנים יתכנסו לאוותה הנקודה במרחק  $\frac{R}{n-1}$  כפי שטענו. אכן חיצותות המגיעות במקביל כולן יגיעו למוקד הנקודתי. גל מישורי המגיע בזווית אחרת גם כן ייצור חזית כדורית מהתכנסת, עם אותו רדיוס עקומות  $f = \frac{R}{n-1}$ , אך לא על הציר האופטי, אלא על המשך הקרן שעוברת במרכז העדשה (שהזווית שלה לא משתנה לאחר המעבר בעדשה).



במילים אחרות: במקרה של חזית גל שלא מגיעה במקביל, המוקד כבר לא יהיה על הציר האופטי אלא על מישור המוקד (*focal plane*). ככה מתקבלים במצלמה עצמים שונים במקומות שונים על הגלאי, כי בעצם האור מגיע בזווית כלשהי ביחס לעדשה.

(שימוש לב: פה באיזור כיוון העדשה הפוך, אך מהסימטריה של חוק סנל מתקבל שאין הבדל במסלול).

## 20 (9.1) הרצאה 20

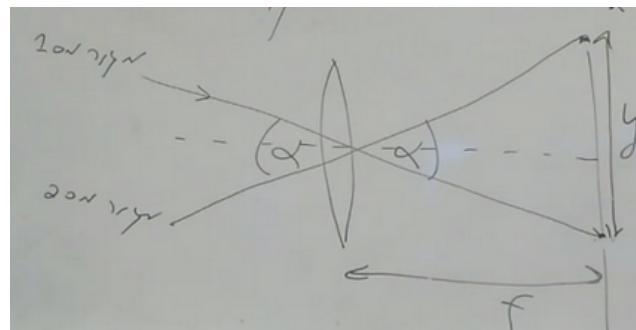
מצלמה היא עדשה המרכזת את הגלים המשוריינים למשטח מוקד שם נוצרת דמות שמרכזה בנקודה את השטף פוינטינג של כל גל, במקום שמתאים לכיוון  $\hat{k}$  שמןנו הגיע.

### 20.0.1 מצלמה

- מתארת לנו מקורות אוור שנמצאים בכיוונים שונים על ידי מקומות שונים בתמונה דו-מימדית.
- .(aperture) הגדים המשמעותיים במצלמה הם אורך המוקד (*focal length*)  $f$  ו-קוטר המפתח (*aperture diameter*)  $D$ .
- אורך המוקד קובע את הסקללה הזוויתית של התמונה במישור המוקד:

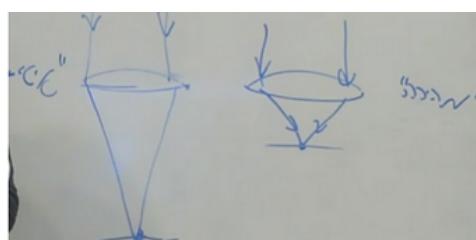
$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{y}{2}/f \Rightarrow \boxed{\frac{1}{f} = \frac{\alpha}{y}}$$

כלומר כמה רדיאנטים יש ביחיד אורך בתמונה. למשל בעין האנושית  $f \approx 3\text{cm}$ , ולכן  $\frac{20\text{deg}}{\text{cm}} \approx \frac{\text{rad}}{3\text{cm}}$  כל 20 מעלות ממופות לסנטימטר בראשית העין.



- קוטר המפתח  $D$  מתאר כמה מהזיהת הגל המשוריינת נתפסת ומרוכזת אל מישור המוקד.
- . $P_{point} = \vec{S} \cdot \vec{A} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$ , ואז ההספק שמתתקבל בנקודה על המישור הוא  $\vec{A}$
- נהוג להסתכל על יחס המוקד  $F = \frac{f}{D}$  שמתאר כמה העדשה ממקצת חזק/חלש.

עדשה " מהירה " פורשת את האור על פני שטח קטן יחסית וכן הספק גבוהה בכל נקודת. זה מאפשר להפיק תמונה עם זמן חשיפה נמוך. לעומת זאת עדשה איטית פורשת את האור על פני שטח גדול יחסית וכן הספק נמוך בכל נקודת. ככל מרمر חייבים זמן חשיפה ארוך כדי לקבל מספיק אנרגיה כדי להפיק את התמונה.



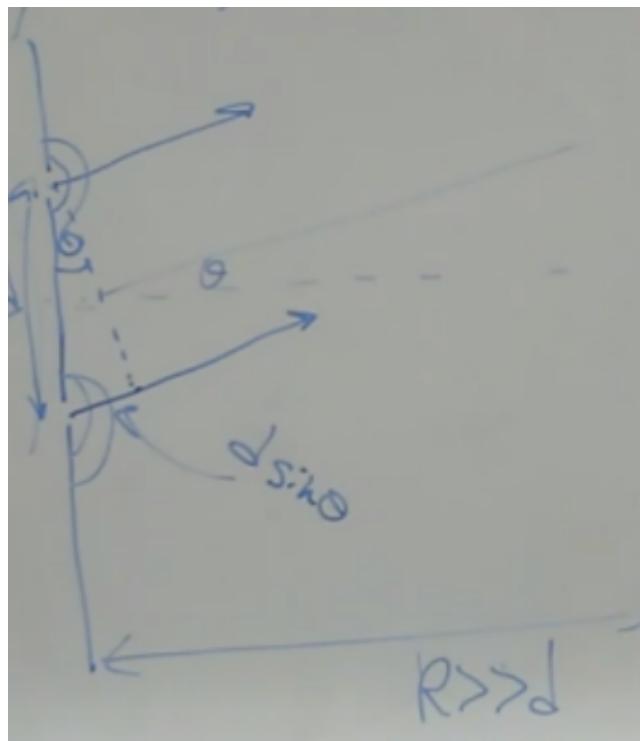
## 20.1 אופטיקה גלית

עליקון הויינס (Huygens) - ניתן ליצג גל מישורי כסכום רציף של גלים עם חזית חצי כדור, עם אמפליטודה שיורדת עם הזווית  $\theta$  מכיוון התקדמות - כל נקודה על חזית גל היא מקור לגלים כדוריים.

כל תופעת האופטיקה הגלית דורשת "קוהרנטיות" (coherence) בין מקורות של גלים: גלים קוהרנטיים הם גלים בעלי אותה תדירות והפרש פазה שלא משתנה בזמן.  
קשה מאוד ליצור גלים מקורות שונים שהיו בדיק זהים בפaza ותדירות, ולכן הדרך המعيشית העיקרית היא ליצור אותם מאותם מקור. למשל עם beam splitter, או באמצעות סדקים.

### 20.1.1 ניסוי יאנג

נבחן התאבכות של גלים מישוריים משני מקורות קוהרנטיים - גל מישורי פוגע בשני פתחים קטנים במרחק  $d$  (דבר אשר יוצר מקור גלים כדוריים בכל אחד מהפתחים). לאחר הפתחים ישנו מסך במרחק  $R >> d$ . נתבונן בקרניים (כמעט) מקבילות היוצאות מהפתחים אל המסך בזווית  $\theta$ , אשר מגיעות אל אותה נקודה על המסך:



כיוון שהגל מישורי הקרןיהם מתחילה באזזה. ממש, כדי להגיע לאותה נקודה, אחת מהן עושה מרחק  $d \sin \theta$  נוספת (ראו איור). נתבונן בגודל השדה על הנקודה במסך:

$$\begin{aligned} E(\theta) &= E_0 e^{i(\omega t - kR)} + E_0 e^{i(\omega t - kR - kd \sin \theta)} \\ &= E_0 e^{i(\omega t - kR)} (1 + e^{-ikd \sin \theta}) \end{aligned}$$

נסמן את הפרש הפазה  $\theta = kd \sin \delta$  ו諾חשב את העוצמה הממוצעת המחקבלת על המסך בנקודה זו:

$$\begin{aligned} I(\theta) &\sim |\langle E(\theta) \rangle_\tau|^2 = \langle E \cdot E^* \rangle_\tau = I_0 (1 + e^{i\delta}) (1 + e^{-i\delta}) \\ &= 2I_0 (1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \approx \boxed{4I_0 \cos^2 \left( \frac{kd}{2} \theta \right)} \end{aligned}$$

(כאשר בשלב האחרון הנחנו  $\theta$  קטן). קיבל תבנית התאבכות שעולה ויורדת בעוצמה - זה נקרא **פסי התאבכות**. מקסימום העוצמה מתקיים כאשר  $m\pi \in \mathbb{Z}$ . נקבע  $m$  ונקרא **סדר התאבכות**. כמובן זה שקול גם ל-

$\theta = \frac{2\pi m}{kd} = m\frac{\lambda}{d}$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d}$$

בעזרת נוסחה זו אפשר בקלהות לחשב את אורך הגל של קרן או ר בעזרת מידת זווית ההפרדה ומרקם החרייצים, בשימוש  $\Delta x = R\Delta\theta = \frac{R\lambda}{d}$ .

## (14.1) 21 21 הרצאה

### 21.1 סריג התאבכות

נימוח הרבה פתחים במקום רק 2 (נגדי  $N$  פתחים), עם מרחק  $d$  בין כל זוג פתחים עוקבים, כך שהמרחב מהראשון לאחרון הוא  $D = Nd$ .

נניח שוב מקור גלים מישוריים, כך שנקבל מכל פתח גלים כדוריים אשר יבצעו התאבכות בונה והורסת ביניהם. עבור שני סדקים צמודים, הפרש הפאזה הנוצר עבור קרניים היוצאים בזווית  $\theta$  הוא  $kd \sin \theta$  (כיוון שראיינו) הדרכים הוא  $d \sin \theta$ .

עבור כל שני סדקים עם  $n$  סדקים ביניהם, נקבל הפרש פאזה  $nkd \sin \theta$  (כיוון שהפרש הדרכים הוא  $-nd \sin \theta$  - אנחנו מניחים  $D << R$  ושהקרניים מגיעות לאותה הנקודה).  
השدة שיתקבל על המסך:

$$\begin{aligned} E &= E_0 [e^{i(\omega t - kR)} + e^{i(\omega t - kR - kd \sin \theta)} + \dots + e^{i(\omega t - kR - Nkd \sin \theta)}] \\ &\stackrel{\delta \equiv kd \sin \theta}{=} E_0 e^{i(\omega t - kR)} [1 + e^{-i\delta} + \dots + e^{-i(N-1)\delta}] \\ &\stackrel{\text{geometric series}}{=} E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{e^{-iN\delta} - 1}{e^{-i\delta} - 1} \\ &= E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{e^{-iN\delta} - 1}{e^{-i\delta} - 1} \cdot \frac{e^{iN\delta/2}}{e^{iN\delta/2}} \cdot \frac{e^{i\delta/2}}{e^{i\delta/2}} \\ &= E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{e^{i\delta/2}}{e^{iN\delta/2}} \frac{\sin(\frac{N\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})} \end{aligned}$$

כעת נחשב את העוצמה הממוצעת ונקבל

$$I(\theta) = \langle EE^* \rangle_\tau \Rightarrow I = I_0 \left( \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2$$

ואכן בהצבת  $N = 2$  ניתן לבדוק שמתקבלת התוצאה מניסוי יאנג.



כעת העוצמה היא מנה בין סינוס מהיר  $x \sin N$  וסינוס איטי  $\sin x$ . כשהסינוס במכנה מתאפס יתקבל מקסימום ראשוני.   
כלומר כאשר (מציבים את  $\delta$  ומתקבלים)

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$$

עבור  $m \in \mathbb{Z}$  (פעם שעבירה גם הנחנו  $\theta \approx \sin \theta \approx \pi/2$  אין זה הכרחי). במקסימום ראשוני כל הגלים בתארכות בונה,   
ומתקבלת עוצמה  $I = N^2 I_0$ .

ונרצה להציג את רוחב התבוניה שנוצרת. על כן נמצא את האפסים של  $I(\theta)$ . האפסים של  $I(\theta)$  מתקבלים עבור

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{N\delta}{2} = 0 &\Rightarrow \frac{Nkd \sin \theta}{2} = \frac{N\delta}{2} = n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \sin \theta &= \frac{2\pi n}{Nkd} = \frac{n\lambda}{Nd} \end{aligned}$$

האפס הראשון מתקבל עם  $n = 1$  - נגדיר את **חצי רוחב מקסימום ראשוני**:

$$\Delta(\sin \theta) \approx \boxed{\Delta\theta_{\text{width}} = \frac{\lambda}{Nd} = \frac{\lambda}{D}}$$

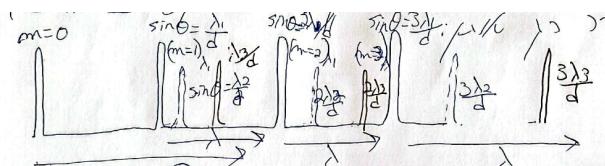
מכאן נובע שרוחב המקסימות קטן יותר ככל שרוחב כל הפתחים יחד  $D$  גדול יותר (מציר עיקרי רוחב הפס...).

### 21.1.1 שימוש - הפרדה ספקטרלית

סדרג התארכות הוא אמצעי שימושי להפרדה ספקטרלית של אור, ככלומר הפרדה לפי אורך הגל  $\lambda$ .  
נניח מעבירים דרך סרג התארכות אור לא Kohlrausch, המורכב מ-3 תדריות שונות, ולכן עם  $\vec{k}$  שונים,

$$|\vec{k}_1|, |\vec{k}_2|, |\vec{k}_3|, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

מעבירים את האור דרך סרג התארכות עם  $N$  פתחים ומרחק  $d$  בין כל זוג פתחים צמודים.  
אם  $N$  גדול, אז כמעט כל ההספק מרכז במקסימות ראשונית, ככלומר בכל סדר התארכות.  
על פי הקשר  $\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$  (אשר נותן את מיקומי המקסימות הראשונות) מתקבל שפרשנו אור עם אורך גל גדול יותר  
ל- $\theta$  גדול יותר - קיבלנו פרישה מרחבית לפי  $\lambda$ :



כושר ההפרדה הספקטראלי (*spectral resolution*) של הסריג יהיה הפרש המינימלי בין שני אורכי גל שונים להבחין בינויהם - ויתן להבחין בין שני מקסימום כאשר הפרש הזווית שלהם גדול מרוחבן. על כן הפרש אורכי הגל הקטן ביותר שהוא ניתן למדוד הוא עבור  $\Delta\theta = \theta_{\lambda_2} - \theta_{\lambda_1}$ .  
 כפי שנאמר זווית המקסימום היא  $\frac{m\lambda}{Nd}$ , והרוחב הוא  $\Delta\theta_{\text{width}} = \frac{\lambda}{Nd}$ . מתקבל

$$\frac{m}{d} (\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda}{Nd}$$

מגדירים את  $R$  הרזולוציה הספקטראלית בטור:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

כלומר סדר גובה יותר הוא בעל רזולוציה גבוהה יותר, וכך גם סריג בעל יותר חריצים.

לדוגמא: עבור סריג העברה עם  $N = 5,000$  פתחים ומסתכלים על על ספקטרום בסדר שני  $n = 2$ , אז הרזולוציה  $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{\lambda}{5000} = 0.05\text{nm}$ . אם רוצים לזהות תדרים בסביבה  $\lambda = 500\text{nm}$  אז ניתן לזהות אותם בהפרש  $R = 10,000$ .

## (16.1) 22 22 הרצאה

### 22.1 עקיפה (diffraction)

אפקט שלא התחשבנו בו עד כה זה שהעוצמה של כל סדר שמתකבל בסריג אמוריה לפחות ככל שמרתחקים מסדר  $0 = n$ . זה נובע מהתופעת העקיפה.

**עקיפה** - התאבכות בין חלקי חזית הגל שעוברים דרך מפתח בודד.

כעה נכליל את התוצאות שראינו עבור הרביה מתחתם קטעים מופרדים, לרצף של פתחים שיוצרים מפתח אחד גדול. נניח שהפתח נמצא על ציר  $x$  בקטע  $[-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}]$ , ובאופן דומה למועדם הנוכחים, אך הפעם, בגבול הרצף, באמצעות אינטגרל:

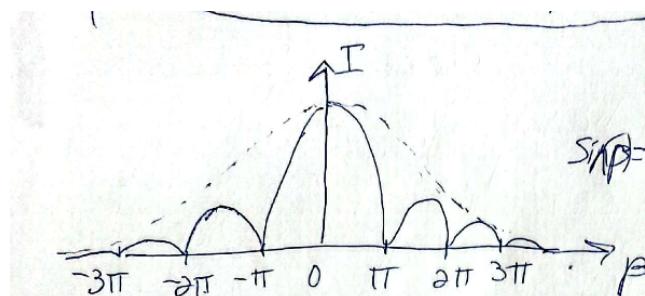
$$\begin{aligned} E &= \int_{-D/2}^{D/2} E_0 e^{i(\omega t - k(R - x \sin \theta))} dx = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \int_{-D/2}^{D/2} e^{ikx \sin \theta} dx \\ &= \frac{E_0 e^{i(\omega t - kR)}}{ik \sin \theta} \left( e^{i\frac{kD}{2} \sin \theta} - e^{-i\frac{kD}{2} \sin \theta} \right) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin\left(\frac{kD}{2} \sin \theta\right)}{\frac{kD}{2} \sin \theta} \end{aligned}$$

נגידו  $\beta(\theta)$  ונחשב את העוצמה המומוצעת בנקודה:

$$I(\theta) = \langle EE^* \rangle_\tau = \frac{D^2 E_0^2}{2} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

$$\Rightarrow I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

להלן איור של  $I$  כתלות ב- $\beta$ :



נרצה למצוא את חצי רוחב המקסימום, כמו קודם. האפס הראשון מתתקבל עבור  $\pi = \beta = \pi$ , ולכן מתקבל ש-

$$\frac{kD \sin \theta}{2} \approx \theta_0 \approx \frac{2\pi}{kD} = \frac{\lambda}{D}$$

כלומר, כל שהמפתח  $D$  גדול יותר, תבנית העקיפה צרה יותר.  
זה בדוק משפט רוחב הפס, והאינטגרל שהישבנו לעיל הוא טרנספורם פורייה של גל ריבועי!

כלומר, תמונה העקיפה שיוצר גל מישורי העובר דרך סדק היא ריבוע ספקטרום פורייה של הסדק.  
נדיר את פונקציית המפתח  $(x)$   $f$  שמתארת בכל נקודה כמה אחוז מוצמת האור כל חלק בפתח מעבר. למשל במקרה שלנו

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

או באופן כללי, תמונה העקיפה שיוצרת פונקציית מפתח  $(x)$   $f$  (לעתים נקראת פונקציית שקייפות) היא ריבוע ספקטרום פורייה שלה

$$I(\theta) = I_0 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik \sin(\theta)x} dx \right]^2$$

תיתכן גם  $f$  מרוכבת. במקרה זה היא מייצגת את הפאותה שאיתה מגיע הגל לפתח.  
לדוגמה, אם ישנו  $N$  אנטנות נקודתיות בהפרש פאותה  $\varepsilon$  ובמרחק  $d$  אחת מהשנייה, יהיה לנו  $nd) e^{inx}$ .

בכל מעבר של גלים דרך מפתחים, ליד מפתחים, או סביב מכשולים, תתרחש עקיפה. למשל בצלמה, מלבד האפקט ריכוז של האור המצלמה היא גםفتح ולכך חיבת להתרחש עקיפה בה. מהסיבה זו מה שהשכנו שהוא נקודת אור כshediveren על אופטיקה גיאומטרית יהיה בעצם חבנית עקיפה דו מימדית שמתואימה לצורה ולאופן ההעברה של העדשה.

לכל מצלמה/מכשיר אופטי **כשור הפרדה זוויתית מסוימת** (*angular resolution*). אם ניקח 2 מקורות עם זווית כלשהי ביןיהם  $\theta_1 - \theta_2 = \Delta\theta$  כדי להפריד ביניהם בצלמה צריים שרוחב הפיק הראשי בתבנית העקיפה לא יחפו עם הרוחב של השני.

כוכר רוחב הפיק הוא  $\frac{\lambda}{D}$  ולכן צריך להתקיים

$$\Delta\theta \geq \frac{\lambda}{D}$$

**גבול ההפרדה** (*diffraction limit*) של מכשיר אופטי הוא

$$\text{DL} = \frac{\lambda}{D}$$

שווהי הזווית המינימלית בין מקורות כך שניתן להפריד ביניהם בתמונה הנוצרת.

התמונה במישור המוקד של המצלמה תמיד תהיה קונבולוציה/מכפלה של האור המגיע עם תבנית העקיפה האופיינית למפתח - נראה זאת בקרוב.

עקיפה תתרחש גם מעבר ליד מحسום - למשל עבור פונקציית מפתח הפוכה זוו שהייתה לנו קודם:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}] \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

נקבל תוצאה דומה.

## 22.2 סריג עקיפה

ראינו תמונה התאבכות מסריג -  $N$  סדקים "נקודתיים" במרחק  $d$  זה מהז. כמו כן רأינו את תמונה העקיפה מפתח בוודך בעל רוחב  $D$ . במקרה, לכל סדק בסריג יש רוחב  $0 < D < d$  ואינו נקודתי בהחלט. לשזה על נקודה בכיוון  $\theta$  על המסך עקב סדק בוודך יש את חבנית העקיפה שמצאו,

$$|\vec{E}| = A \frac{\sin \beta}{\beta} e^{i(\omega t - kR)}, \quad \beta = \frac{kD \sin \theta}{2}$$

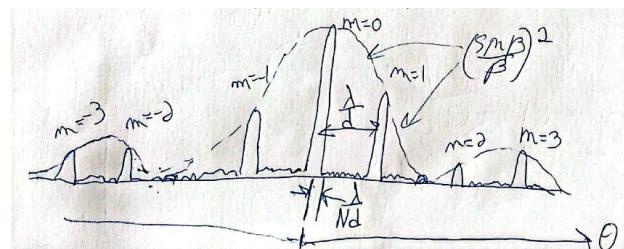
ושה"כ אם נסכום מכל הסדקים זההים נקבל:

$$\begin{aligned} |\vec{E}_{tot}| &\stackrel{\delta \equiv kd \sin \theta}{=} A \frac{\sin \beta}{\beta} e^{i(\omega t - kR)} (1 + e^{-i\delta} + \dots + e^{-i(N-1)\delta}) \\ &= A \frac{\sin \beta}{\beta} e^{i(\omega t - kR)} \frac{e^{i\delta/2}}{e^{iN\delta/2}} \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \end{aligned}$$

ובחישוב העוצמה מתקובל

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right)^2$$

כלומר, כמובטה, התמונה שהתקבלת במישור המוקד היא מכפלת תמונה התאבכות של סריג עם סדקים ברוחב 0, עם תמונה העקיפה של סדק בוודך ברוחב  $D$ . על כן קיבל שסדרי התאבכות של הסריג כבר לא בעוצמה שווה זה לזה (אלא דועכימ).



## 23 (21.1) 23 הרצתה

נעשה חזרה:

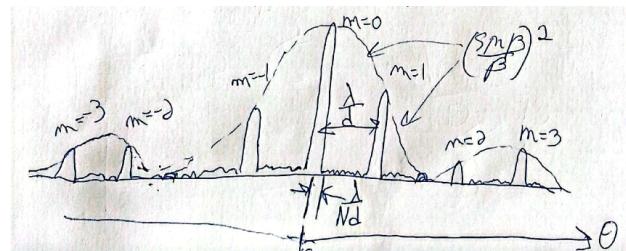
ראינו שיעור שעבור שעוצמת האור עבר סריג התאככות היא טרנספורם פורייה של פונקציית המפתח:

$$I(\theta) = I_0 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik \sin(\theta)x} dx \right]^2$$

ושעבור מערך סדקים בעלי עובי  $d$  במרחב  $d$  אחד מן השני, התקבלה

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right)^2, \quad \delta = kd \sin \theta, \quad \beta = \frac{kD \sin \theta}{2}$$

קיבלנו מקסימות בסדרים שונים, בעלות (חצי) רוחב  $\frac{\lambda}{Nd}$ , ומיקומן  $\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$  (הסדר).



כל שהמפתח האפקטיבי  $d \cdot N$  גדול יותר רוחב כל סדר קטן יותר, וגם רוחב המעתפת הדועכת קטן יותר.

מצלמת נקב היא מסך עם פתח בודד, ובמרחב מסויים ממנו ישנו מסך נוסף. גלי אור עוברים דרך הנקב, ומגיעים למסך לאחריו. לפני כן (באופטיקה גאותרטרית), הינו מתארים מערכת זו באמצעות קרני אור, והינו מצפים שתתקבל על המסך תמונה שגודלה כגודל הנקב - כתע ידוע לנו שתтворצ עקיפה.

דוגמה לשימוש בסריג עקיפה היא מערך טלסקופי אינטראפטורי.

מכל מקור נקודתי מתתקבלת תמונה העקיפה שמתאימה למערך הסדקים (שהיא הטרנספורם פורייה של פונקציית המפתח). ואז כפי שציינו כבר עבור סריג התאככות, תיווצר הפרדה עבור אורכי גל שונים, וכמו כן הפרדה עבור מקורות המגיעים מכיוונים שונים. כל מקור אור ייתן את אותה תמונה עקיפה על המסך, רק מזוזת, ולפי המיקומים השונים ניתן יהיה לשזהר את מיקומי המקורות (לא קל לפגעה את המיקומים המקוריים, אך זה אפשרי וזה שיטה שימושים בה, לדוגמה באסטרופיזיקה).

### 23.1 עקיפה דרך דוחה מימדי ותלת מימדי

נדמיין מפתח דו מימדי שצלעותיו  $b \times d$  (כולם מיקומו  $[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}] \times [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$ ) במישור  $xy$ . לפי עיקרונו הויחנס בכל נקודה במפתח יוצר מקור גלים כדוריים. אם כן נקבל בואפן דומה למקרה החד מימי

$$\begin{aligned}
I(\theta_x, \theta_y) &= \langle EE^* \rangle_\tau = \# \int_{x=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{ik(x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy \\
&= \# \left( \int_{x=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{ikx \sin \theta_x} dx \right) \left( \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{iky \sin \theta_y} dy \right)
\end{aligned}$$

כאשר  $\#$  מקודם קבוע. התקבלה מכפלה של האינטגרל שכבר פתרנו. על כן התוצאה:

$$I(\theta_x, \theta_y) = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \alpha = \frac{kd}{2} \sin \theta_x, \quad \beta = \frac{kb}{2} \sin \theta_y$$

אם נציג את וקטור הגל של הגל המגיע מהסדק, נשים לב שמתקיים  $\vec{k} = k(\sin \theta_x, \sin \theta_y)$  כך שלמעשה מה שהתקבל הוא:

$$I = I_0 \left[ \int \int f(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^2 \vec{r} \right]^2$$

שוב טרנספורם פורייה, דו מימדי הפעם.

בדומה לנוכן לדמיין סריג תלת מימי ונקבל שעוצמת האור המתקבלת (על משטח כדור רחוק, בקרוב קרוגיל) היא

$$I(r, \theta, \varphi) = I_0 \iiint f(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r}$$

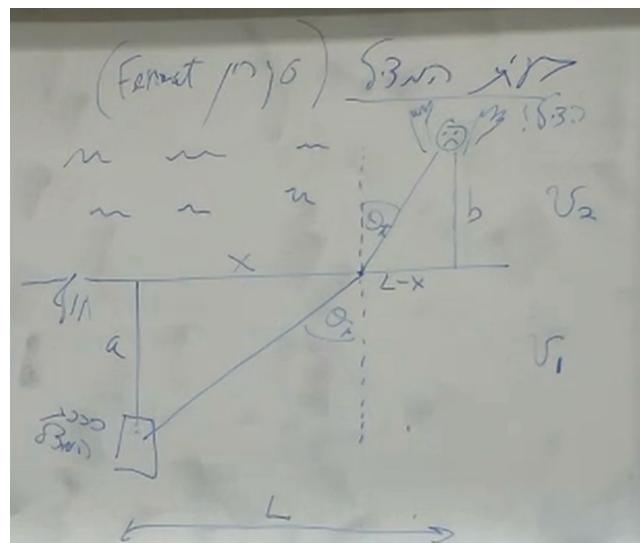
הערה: (נזהור לרגע לדו מימד) עבור מפתח בצורת עיגול נקבל תבנית עקיפה של פונקציות בסל.

## (23.1) 24 24 הרצתה

### 24.1 עקרון פרמה

כהקדמה לעקרון פרמה, נדמיין את "בעיית המציג" - המציג יושב בחוף, ואדם טובע בים. במסלולו ממוקם מושבו על החוף, עד למיקום האדם בים, עליו לעבור חלקית בחוף וחלקית בים. אך מהירותו בים קטנה מאשר מהירותו בחוף, כדי להגיע אל האדם בזמן מינימלי, עליו לבצע מסלול כלשהו שאינו קו ישר. אם נסמן את  $x, L - x$  המרחק האופקי ו-  $a, b$  המרחק האנכית (ראו איור), אז המציג ירצה לבצע מינימזציה על הזמן:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + b^2}}{v_2}$$



נרצה למצוא את המינימום כתלות ב- $x$ . נגזר:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + b^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

מכאן נקבל

$$\frac{\sin \theta_i}{v_1} = \frac{\sin \theta_t}{v_2}$$

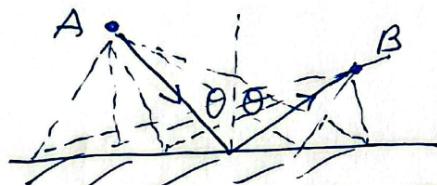
אך זה חוק סNEL! (לאחר הצבה  $v = \frac{c}{n}$ ) שהוא מצאנו ישירות ממשוואות מקסווול.

**עקרון פרמה:** כל גל ינוע במסלול שעבورو הזמן אקסטרמלי.

הערה 1: זה אקסטרמלי ולא בהכרח מינימלי, ואכן דרשו ב-“בעית המצליל” לעיל רק ש- $x$  יהיה אקסטרמלי.

הערה 2: זה עקרון וריאציה, בדומה לעקרון המילטון אשר קובע שהפעולה אקסטרמלית עברו המסלול הפיזיקלי.

ניתן גם למצוא את שאר עקרונות האופטיקה הגאומטרי (לדוגמה נטו להראות בהתקיים עקרון פרמה מתקיים חוק ההחזורה  $(\theta_i = \theta_r)$ .



מדוע עקרון זה מתקיים? כיצד הגל “יודע” היכן האקסטרומים? נוכל לדמיין את הגל כולו הגיע לנקודת מסויימת, למשל לאחר החזרה ממראה:

$$\psi = A e^{i\omega t} \sum_j e^{-ikR_j}$$

כאשר הסכום הוא סכום הת庵בות מהקרניים השונות מהמסלולים האפשריים השונים ( $R_j$  המהלך שעבר) - הצלפה ראה את סכום כל הת庵מות מכל המסלולים האפשריים. לכל מסלול נוכל למצוא מסלול קרוב נוסף  $\Delta\phi = -\pi$  שיבצע אותו הת庵ות הורסת - זאת כיון שעבור  $\lambda$  קטן  $k$  גדול ולכן נקבל שהאיבר  $e^{-ikR}$  מבצע אוסילציה בתדירות גבוהה מאוד.<sup>8</sup>

לעומת זאת, עבור מסלולים בסביבה של המינימלי בזמן - במקום שבו שווה  $\frac{dR}{dx} = 0$  (כלומר אקסטרום) מסלולים קרובים לא יבטלו אחד את השני בת庵ות הורסת: הבדל הפaza בין מסלולים שונים הוא

$$d\phi = k \cdot dR = k \frac{dR}{dx} dx \stackrel{\text{extremal}}{=} 0$$

ואכן מהסביר זה נדרש רק שהמסלול יהיה אקסטרמלי, ולא בהכרח מינימלי.

הערה (יעוזർ להבנה): להלן סרטון של veritasium אשר מסביר למה בפועל עקרון פרמה אינו עקרון נפרד מעקרון המילטון - הם אותו העקרון. בנוסף הסרטון חווורים על ההסבר לעיל ונותנים עבورو הדגמה (30:23 והלאה).

<https://www.youtube.com/watch?v=qJZ1Ez28C-A>

הסביר קצר: בקונטים מתייחסים לחומר בתור גל (ולא רק לאור), כך שנתקבל באמצעות הקשרים  $\omega = hf = \hbar f = \hbar \vec{k}$  פונקציית גל:

<sup>8</sup> קטן - הכוונה היא ביחס לגודל אופיני כלשהו של המערכת. אבל מה אם לא קטן ביחס למערכת? למשל המערכת מאד קטן? נקבל שהאפקט של הת庵ות פחות דרמטי (עבור  $\lambda$  קטן המסלול הפיזיקלי הוא יחיד ומתקבל מההת庵ות בונה וכל השאר מתרבים מההת庵ות הורסת). ואנו נקבל שהמסלול הוא לא יחיד - נקבל את המכנית הקונטיניטית.

$$\begin{aligned}\psi &= Ae^{i\phi(x,t)} = Ae^{i \int d\phi} = Ae^{i \int \vec{k} \cdot d\vec{x} - \omega dt} = Ae^{i \int (\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega) dt} = Ae^{\frac{i}{\hbar} \int (\vec{p} \cdot \vec{x} - E) dt} \\ &= Ae^{\frac{i}{\hbar} \int (\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \vec{x} - H) dt} = Ae^{\frac{i}{\hbar} \int L dt} = Ae^{iS/\hbar}\end{aligned}$$

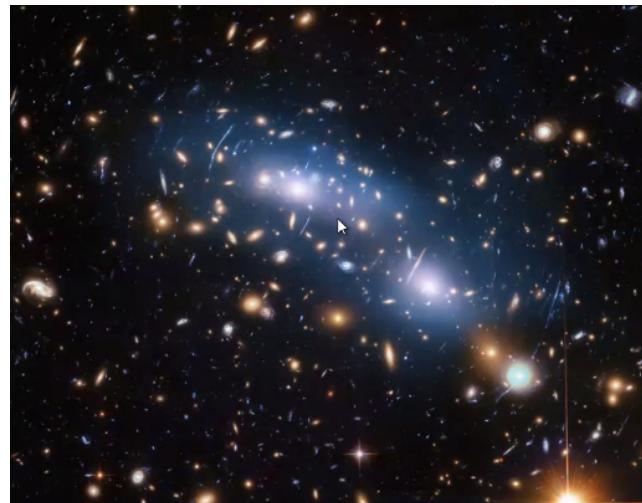
כלומר התקבל שהפאהה של גל קוונטי פרופורצionalית לפועלה. ראיינו לעיל שעקנון פרמה שקול לדרישה שהמסלול הפיזיקלי הוא זה שעבורו  $0 = d\phi = S/\hbar$ . אך כתה הראיינו  $S/\hbar = \phi$ , כך שהוא בדיק עקרון המילטון,  $0 = dS =$  מומלץ לראות מ-30 : 23 והלאה. יש בסרטון אפילו ניסוי שמראה שהאור באמת לוקח את כל המסלולים האפשריים, ו-“המסלול הפיזיקלי”, שאנחנו רואים מתקיים ע”י התארכות בונה.

### 24.1.1 דוגמה: עידוש כבידתי

שדה כבידה פועל מראש שבירה אפקטיבי שמקטינו את מהירות האור:

$$n \propto \phi = \frac{GM}{r}$$

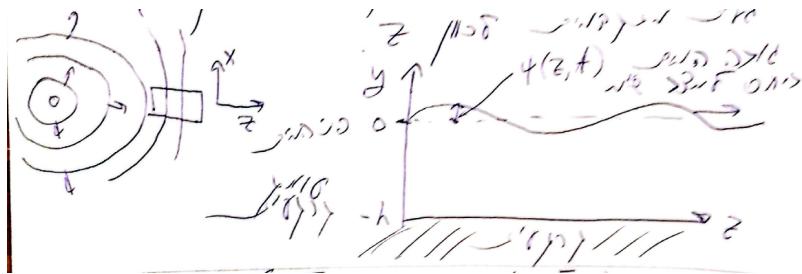
או עבר נקודות אקסטרומים בהגעת האור - נקודות זמן ההגעה אקסטרימי  $t = 0$  נראית אור:



בקודות אלה נוכל לראות את מקור האור שנמצא מאחוריו המסה שיצירת שדה הכבידה (בתמונה לעיל הוא “מרוחה” כיוון שמקור האור אינו נקודתי). האקסטרומות של  $t(\theta_x, \theta_y)$  כמובן נקבעות על פי התפלגות המסה.

## 24.2 גלי מים

כמו שבגלים א"מ הסתכלנו על גלים מישוריים רחוק מהמקור של גלים כדוריים (בתלת מימד), בಗלי מים נסתכל על גלים קווים, רחוק ממקור של גלים מעגליים (בדו מימד, כיון שאנחנו בוחנים את פני המים).  
למשל במישור  $zx$ , נבחן גל קווי הנע בכיוון  $z$  - נראה את גובה פני המים בכל נקודה עליה וירד מחוזרת, ללא תלות בכיוון  $x$ . נניח שעומק המים (ביחס לשינוי משקל) הוא  $h$ .



על מנת לקבל את הפיזיקה של גלי מים נניח מספר קירובים:

- המים בלתי דחיסים (ראינו בתרמו שהז נכוון בקירוב טוב מאוד)
- המים חסרי צמיגות (אפשר לנו להתחulum מריסון ומערבולות. מים חסרי צמיגות נקראים "מים יבשים")
- אמפליטודת המים קטנה  $h \ll A$  ו-  $\lambda \ll h$ .

כיון שהמים בלתי דחיסים, תנועת המים כשבוער גל לא יכולה להיות אנכית ( $y$ ) בלבד אלא בהכרח יש גם תנועת מים בכיוון אופקי ( $z$ ).  
כלומר גל מים הוא גל בעל רכיב רוחבי ונמ רכיב אורכי. על כן נגיד עבור כל חתיכת מים  $dm$  את  $\psi_y$  וגם  $\psi_z$  - השינויים ב- $z$ ,  $y$  משינויי משקל.

- (1)  $\psi_y, \psi_z$  שניהם נעים בתנועה הרמוני בתדריות  $\omega$  של הגל העובר, אשר נע בצורה  $\sim \cos(\omega t - kz)$
- (2) לאורך עמוד ( $z$ , קבועים) כל החלקים נעים ביחד  $\leftarrow$  הפאזה של  $\psi_z$ ,  $\psi_y$  לא תלואה ב- $y$  (אל האמפליטודה  $A_z$ )
- (3) יש הפרשה פאזה  $\frac{\pi}{2}$  בין  $\psi_y, \psi_z$  (מאפשר את אי הדחיסות) ולכן כל  $dm$  מבצע תנועה אליפטית/מעגלית
- (4) אין תלות ב- $z$  (אין דיסיפציה)

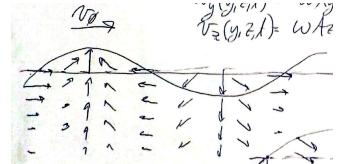
על סמך תכונות אלה אנו יכולים לבצע ניחוש ראשוני:

$$\begin{aligned}\psi_y(y, z, t) &= A_y(y) \cos(\omega t - kz) \\ \psi_z(y, z, t) &= A_z(y) \sin(\omega t - kz)\end{aligned}$$

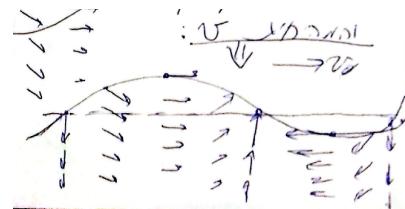
אכן  $\left( \frac{\psi_y}{A_y} \right)^2 + \left( \frac{\psi_z}{A_z} \right)^2 = 1$ , כל אלמנט נע באיליפסה סביב נקודת שוויי משקל בתדריות  $\omega$ .  
רכיבי מהירות המים בכל נקודה הם

$$\begin{aligned}v_y &\equiv \dot{\psi}_y = -\omega A_y(y) \sin(\omega t - kz) \\ v_z &\equiv \psi_z = \omega A_z(y) \cos(\omega t - kz)\end{aligned}$$

ונצייר את השדות. שדה הפעתקה  $\vec{\psi} = (\psi_z, \psi_y)$  הוא



ושדה המהירות/זרימה הוא



למרותSCP שכל אלמנט מים מבצע תנועה במסלול אליפטי סגור, שדה הזרימה הוא לא רוטציוני ( $\nabla \times v = 0$ ) - ברגע נתון אין קווי זרימה סגורים ועל כן  $\int d\vec{s} \cdot \vec{v}$  מתאפס על כל מסלול.

## (28.1) 25 25 הרצתה

### 25.1 פיתוח

נמשיך את הדיוון משבוע שuber:

על מנת למצוא את  $A_y(y), A_z(y)$  על מנת למצוא את  $A_y(y), A_z(y)$ .

1) משימור מסה, על כל משטח סגור  $S = \partial V$  השינוי במסה שמוכלת במשטח שווה לכמות המסה שנכנסה דרך המשטח. על כן:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV \stackrel{\text{conservation}}{=} - \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

זו היא משוואת הרציפות

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

2) מאי הדחיסות, הצפיפות קבועה  $\rho = \text{const}$ . בהצבה במשוואת הרציפות, נקבל ש-

$$\boxed{\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v} = 0}$$

(כי הנקנו שאין רכיב או תלות בכיוון  $x$ ).

3) אין צמיגות, ולכן אין כוחות גזירה/מערבולות. ככלומר

$$\boxed{\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = \nabla \times \vec{v} = 0}$$

וכפי שנאמר שיעור שuber, אינטגרציה על כל מסלול סגור בשדה המהירות יתן אפס. שיעור שuber הגנו ל nichosh של שדה ההתקפה של תנודות המים:

$$\begin{aligned} \psi_y(y, z, t) &= A_y(y) \cos(\omega t - kz) \\ \psi_z(y, z, t) &= A_z(y) \sin(\omega t - kz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y &\equiv \dot{\psi}_y = -\omega A_y(y) \sin(\omega t - kz) \\ v_z &\equiv \dot{\psi}_z = \omega A_z(y) \cos(\omega t - kz) \end{aligned}$$

ונציב את ויחסים אלה במשוואות הממוסגרות ונקבל:

$$\begin{aligned} \frac{dA_y}{dy} - kA_z &= 0 \\ \frac{dA_z}{dy} - kA_y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \frac{d^2A_y}{dy^2} = k^2 A_y \Rightarrow A_y = A'e^{ky} + B'e^{-ky}$$

עכשו נצטרך להשתמש בתנאי שפה על קركעית פני המים כדי לקבל את  $A'$ ,  $B'$ :  
נדרוש שעל פני המים יהיה גל הרמוני פשוט עם  $A$  פרמטר כלשהו, ושבקרקעית המים לא תיתכן תזוזה אנטית:

$$\begin{aligned} \psi_y(y=0, z, t) &= A \cos(\omega t - kz) \\ \psi_y(y=-h, z, t) &= 0 \end{aligned}$$

במצבה והילוץ  $A', B'$  נקבל

$$A_y(y) = A \frac{\sinh(k(h+y))}{\sinh(kh)} , \quad A_z(y) = A \frac{\cosh(k(h+y))}{\sin(kh)}$$

אם נתבונן ביחס האמפליטודה האנטית והאופקית נקבל

$$\frac{A_y}{A_z} = \tanh(k(h+y))$$

כלומר זה יחס אורכי הצלרים של האלייפסה שיוצר כל אלמנט מים בגל.  
+ אכן רואים שעבור  $-h \rightarrow y$  היחס הוא  $0 = \tanh(0)$ , כלומר אכן כפי שדרשנו את תנועה אנטית בקרקעית  $0$ .  
+ עבור  $y \rightarrow 0$  מקבל  $1 \approx \tanh(2hk) \approx A_y \approx A_z$  ולכן, ככל אלמנט מים מבצע תנועה (בקירוב) מעגלית.

סח"כ קיבלנו פתרון:

$$\begin{aligned} \psi_y(y, z, t) &= A \frac{\sinh(k(h+y))}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kz) \\ \psi_z(y, z, t) &= A \frac{\cosh(k(h+y))}{\sin(kh)} \sin(\omega t - kz) \end{aligned}$$

## 25.2 קירובים

### 25.2.1 מים עמוקים

נבדוק מה ההתנהגות בגבול של מים עמוקים, כלומר  $\lambda \ll h$ . נסתכל על התחום  $h <> |y|$  (קרוב לפני המים) תחת קירוב זה:

$$\sinh(k(h+y)) \approx \cosh(k(h+y)) \approx \frac{e^{kh}}{2}, \quad \sinh(kh) \approx \frac{e^{kh}}{2}$$

(כיון שעבור  $x$  גדול  $x \approx \frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx \frac{e^x}{2}$ ). בגבול זה נקבל:

$$\begin{aligned}\psi_y(y, z, t) &= Ae^{ky} \cos(\omega t - kz) \\ \psi_z(y, z, t) &= Ae^{ky} \sin(\omega t - kz)\end{aligned}$$

כזכור אנחנו רואים גלים שדוועcis אקספוננציאלית בכל שיורדים בעומק (כזכור ככל  $y$ - יותר שלילי). בעומק  $\lambda = -y$  מקבלים  $Ae^{-k\lambda} = Ae^{-2\pi} \approx \frac{A}{500}$  כדי להגיע לעומק שבו הגלים אינם מוגשים.

### 25.2.2 מים רדודים

נבדוק מה ההתנהגות בגבול של מים רדודים, כלומר  $\lambda \ll h$ . בקירוב זה מתקיים:

$$\begin{aligned}\psi_y(y, z, t) &= A(1 + \frac{y}{h}) \cos(\omega t - kz) \\ \psi_z(y, z, t) &= \frac{A}{kh} \sin(\omega t - kz)\end{aligned}$$

(כיון שעבור  $x$  קטן  $x \approx \sin(x) \approx x$ ,  $\cosh(x) \approx 1$ ). מתקבל:

$$\frac{\psi_y}{\psi_z} \leq kh \sim \frac{h}{\lambda} \ll 1$$

כזכור במים רדודים מתקבלת אותה ההתנהגות כמו אם היו קרובים לקרקעית, שבה הגל כמעט לגמרי אורכי ואין תנוצה בכיוון האנג'י  $\psi_z \ll \psi_y$ .

# 26 הרצאה 26

הרצאה אחרת!

## 26.1 יהס נפיצה לגלי מים

### 26.1.1 פיתוח

עבורם למערכת יהוס בה ניתן להשתמש בחוק ברנולי וממנו מסיקים יהס נפיצה לגלי המים.

שימור אנרגיה בזרמים (fluids) מבוטא ע"י חוק ברנולי (אשר נלמד בקורס תרמודינמיקה).  
חוק ברנולי קובע כי האנרגיה ליחידת מסה של נוזל היא קבועה לאורך קו זרימה, בתנאי ששدة הזרימה תלוי בזמן (זרימה למינארית).

נתבונן על קו זרימה שנמצא על פני המים ( $0 = y$ ) ונבדוק את סך הכל האנרגיה ליחידת מסה שנעה שם:

$$(*) E = \underbrace{\frac{p}{\rho}}_{\text{thermal}} + \underbrace{\frac{1}{2}v^2}_{\text{kinetic}} + \underbrace{V}_{\text{potential}}$$

נרצה להשתמש בחוק ברנולי, אך שדה הזרימה  $v_z$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  תלוי בזמן. כדי לעבור למצב ששדה הזרימה  $v_y$ ,  $v_z$  לא תלוי בזמן נעשה טנספורמציה למערכת יהוס שבה זה מתקיים - המערכת שנעה עם הגל,(Clomer) מערכת שנעה במתירות הפאות  $\frac{\omega}{k}$ .

$$z \mapsto z' = z - \frac{\omega}{k}t$$

מתקבל:

$$\begin{aligned}\psi_y(y, z') &= A_y(y) \cos(kz') \\ \psi_{z'}(y, z', t) &= A_{z'}(y) \sin(kz') - \frac{\omega}{k}t\end{aligned}$$

כאשר יש איבר נוסף לפני  $\psi$  כיוון שככל הליק מים בעצם נשאר מאחור כאשר אנחנו במערכת שנעה יחד עם הגל (כי בפועל כל אלמנט מים נשאר באותה סביבה כמו שהתחילה, רק ההפרעה היא זו שנעה).  
בנוסף מתקובלות המתירות:

$$\begin{aligned}v_y(y, z') &= \omega A_y(y) \sin(kz') \\ v_{z'}(y, z') &= \omega A_{z'}(y) \cos(kz') - \frac{\omega}{k}t\end{aligned}$$

כעת שshedeh הזרימה אינו תלוי בזמן, נפעיל את חוק ברנולי ונתבונן במרכיבים האנרגטיים של חבילת מים שנעה על קו זרימה (לשם כך נדרש למצוא את הלחץ, האנרגיה הקינטית, ואנרגיה פוטנציאלית ליחידת מסה ואז נוכל להציב ב(\*)).

בנוסף לנינוח שהחbillה נמצאת על פני המים (כלומר ב- $y = 0$ ) לשם הפשטות. בגובה זה המשוואות קצת יותר פשוטות:

$$\begin{aligned}\psi_y(y=0) &= A \cos(kz') \\ \psi_{z'}(y=0) &= A \coth(kh) \sin(kz') - \frac{\omega}{k} t\end{aligned}$$

לلحץ שמדובר החbillה יש שני מרכיבים. הראשון הוא הלחץ האטמוספרי (אנחנו על פני המים  $y = 0$  או אין להז נוסף מהמים). המרכיב השני מתח הפנים הפרופורנוני לעקומות הגל עם יחס פרופורצייה  $\sigma$ .

$$p = p_A - \sigma \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} = p_A + \sigma k^2 A \cos(kz')$$

(עבור מים  $\sigma \approx 0.073 \frac{N}{m}$  האנרגיה הקינטית).

$$\begin{aligned}v^2 &= v_y^2(0, z') + v_{z'}^2(0, z') \\ &= \omega^2 A^2 \sin^2(kz') + \left( \omega A \coth(kh) \cos(kz') - \frac{\omega}{k} t \right)^2\end{aligned}$$

לאחרפתיה סוגרים נוכל לבחון את שני המקרים - גם מים עמוקים  $kh << 1$  וגם במים רדודים  $kh >> 1$  וגם במקומות אחד בלבד לאפשר להזינה אחד מהאיברים ולקבל:

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{k} t \right)^2 - \frac{\omega^2 A}{k} \coth(kh) \cos(kz')$$

האנרגיה הפוטנציאלית ליחידת מסה היא פשוטה:

$$V = \frac{mg\psi_y}{m} = gA \cos(kz')$$

כך שהאנרגיה ליחידת מסה היא:

$$E = \frac{p_A}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho} k^2 A \cos(kz') + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{k} t \right)^2 - \frac{\omega^2 A}{k} \coth(kh) \cos(kz') + gA \cos(kz')$$

ולפי ברנולי היא קבועה לאורך קו זרימה  $'z$ . כלומר הנגזרת לפי  $'z$  היא אפס. זה יתכן רק אם סכום המקדמים של  $\cos(kz')$  יתאפס, כלומר:

$$\frac{\sigma}{\rho}k^2A - \frac{\omega^2 A}{k} \coth(kh) + gA = 0$$

וקיבלו כפוי שרצינו יהס נפיתה לגלי מים!

$$\boxed{\omega^2 = \left( gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) \tanh(kh)}$$

## 26.1.2 מסקנות

ביחס הנפיצה אנחנו רואים את הפיזיקה שמסבירה את הגלים. הכוחות המחזירים, אשר הם הבסיס של כל גל, הם שניים - את הראשון מזוהים בזוכת  $g$  שמופיע ביחס הנפיצה, והוא כMOVEDן כוח הכבידה אשר שואף להוריד את המיםchorה לגובה  $0 = y$ . הכוח השני הוא הכוח שקשור למתח הפנים  $\sigma$ , אשר שומר על הצורה של הגלים.

באילו תנאים כל אחד מהכוחות דומיננטי יותר?

השוינו ביניהם מתרחש כאשר ההשפעה שווה:  $gk = \frac{\sigma k^3}{\rho}$ . ככלمر מס' הגל הוא

$$k = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}$$

ואורך הגל הוא

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.073 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 1.7 \text{cm}$$

(1) כאשר המתח פנים שלוט נקבל אדוות.  
 אם אורך הגל קטן קטן  $\lambda << 1.7 \text{cm}$ , אז  $k$  גדול יותר, והאיבר  $k^3$  שלוט. ככלמר, בגלים קטנים מאוד הכבידה לא משמעותית והם נשלטים על ידי מתח הפנים. לגלים כאלה קוראים אדוות.  
 אלו גלים קצרים שאפשר לראות בשולחן נגדי. בגין האורך הקטן, הקירוב של מים עמוקים כמעט מיד חל  $h << \lambda$ , אז  $1 \approx \tanh(kh)$  ומקבל יחס נפיצה לאדוות:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}}$$

מכאן גם אפשר למצוא את מהירות הפעזה ומהירות החבורה של אדוות (נניח אורך גל  $1 \text{mm}$  ונציב ב-  $(\frac{\omega}{k}, \frac{d\omega}{dk})$ ):

$$v_\phi = 0.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_g = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

זו תואם את החוויה שלנו מהיומיום לגבי אדוות מים. מהירות הפעזה נמוכה ממהירות החבורה ולכן נראה שהגלים כאילו “נשארים מאחור”.

(2) כאשר הכבידה שלוטת נקבל גלים כבידתיים.  
 אם אורך הגל גדול יותר מהערך שמצאנו  $1.7 \text{cm} >> \lambda$ , אז  $k$  קטן, והאיבר  $k^3$  דועך הרבה יותר כך שהאיבר  $k$  שלוט. אם כן הכבידה היא הגורם הדומיננטי בגלים כאלה, ועל כן נקראים גלים כבידתיים (לא להתבלבל עם גלי כבידה של יחסות כללית).

+ אם המים عمוקים או שוב  $1 \approx \tanh(kh)$  ומתקיים יחס נפיצה לגלים כבידתיים:

$$kh >> 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{gk}$$

ומהירות הפaza והחברה המתקבלות (מעבר  $100\text{m} = \lambda$  גל מאד ארוך, שיכול להתקבל בים):

$$v_\phi = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \quad v_g = \dots$$

( מהירות החבורה החבורה כתרגיל לקוראים בבית... )

+ בגבול מים רדודים  $\lambda << h$  או מתקיים  $kh \approx 1$  יחס הנפיצה

$$kh << 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{ghk}$$

$$v_\phi = v_g = \sqrt{gh}$$

זה יחס נפיצה לינארי, כלומר לא דיספרטיבי.

ברוב השאלות בנושא גלי מים, ראשית נבין באיזה סוג גלים מדובר והאם ניתן לבצע הונחות. כלומר נבודק האם  $\lambda >> kh$  (גלי כבידה) או להפוך (אדמות), והאם ניתן להפוך (מים רדודים). משם יוכל להשתמש ביחס הנפיצה כדי להציג את הגדלים הרלוונטיים לשאלתך.

לסיום הקורס - שבירת גלים בחוף:

gal שמנגיא מאייזורعمוק ומתקרב לחוף (נכנס לאיזור של מים רדודים) הוא בעל מהירות  $v = \sqrt{gh}$  כפי שראינו לעיל. כיוון שהעומק  $h$  יהיה יותר ויותר קטן, זה אומר שהוא מאט. אבל כיוון שהאנרגיה חייבות להישמר, אם הגל מאבד אנרגיה קוינטית, זה אומר שהוא חייב לקבל אנרגיה אחרת כלשהי - אז הוא מקבל אנרגיה פוטנציאלית והאספקטודה של הגל גדלה. כלומר בשלב מסוים הקירוב שלנו כבר לא תקין (כפי הנקנו גלים בעלי אמפליטודה נמוכה). כאשר  $h \sim A$  הגל ישבר על החוף.

הדגמה של גלי מים: [https://www.youtube.com/watch?v=Nf-zRhXj\\_tk](https://www.youtube.com/watch?v=Nf-zRhXj_tk)

בצלחה במחנוי! ☺