Lezione 7 Algebra Booleana

domenica 15 ottobre 2023 10:53

Vediamo ora l'algebra alla base dei moderni calcolatori : l'algebra booleana :ovvero quell'algebra definita da George Boole che serviva per verificare la veridicità o la falsità di alcune espressioni in linguaggio naturali. Questa algebra poi è stata ripresa ed aumentata da Shannon , il quale la usa per studiare e progettare circuiti con relè . In dettaglio una funzione booleana si caratterizza cosi' :

S={0,1}	$f:\{0,1\} \mapsto \{0,1\}$ $y = f(x)$	$f:\{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Dove la prima colonna mostra il i valori che può assumere la variabile, la seconda il dominio della variabile, mentre l'ultima mostra il caso di multivariabile. Vediamo le proprietà:

Prodotto logico	*
Somma logica	+
Assiomi fondamentali	$\forall a, b \in S;\ a + b \in S;\ a \cdot b \in S$ (chiusura) $\exists 0 \in S \mid \forall a \in S, a + 0 = a; \exists 1 \in S \mid \forall a \in S, a \cdot 1 = a$ (elemento identità) $a + b = b + a$ (proprietà commutativa) $(a + b) + c = a + (b + c);\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (proprietà associativa) $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c);\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (proprietà distributiva) $\forall a \in S\ \exists \overline{a} \in S \mid a + \overline{a} = 1;\ a \cdot \overline{a} = 0$ (elemento inverso) $\lvert S \rvert = 2^n;\ n = 1,2,3, \cdots$ (cardinalità)
Legge dualità	Ottenuta scambiando + con * e 0 con 1
Idempotenza	A+a=a e a*a=a
Annichilatori funzionali	A+1=1 e a*0=0
Assorbimento	A+a*b=a e a*(a+b)=a
Teorema di De Morgan (permette la sostituzione di + e * in funzione degli altri due operatori)	$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ $\quad$ $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$

Andiamo a vedere ora come rappresentare le funzioni di commutazione : principalmente 3 possibili modi :

1. Forma tabellare (tabelle di verità):
   a. Ovvero espresse come una relazione tra le variabili di input e quelle di output : x=(x1,x2,....,xn)
   b.

x	x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

   c. In generale ogni funzione può essere espressa come :
   d.

Negazione

x_1	y
0	1
1	0

Somma logica

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Prodotto logico

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

   e. Vediamo ora quelli derivati : X-OR, NAND,NOR, X-NOR:

X-OR (somma modulo 2)

$$a \oplus b = \overline{a}b + a\overline{b}$$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$a \oplus b = b \oplus a$ (proprietà commutativa);
$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ (proprietà associativa);
$a \oplus a = 0$;
$a \oplus \overline{a} = 1$;
$a \oplus 1 = \overline{a}$;
$\overline{a} \oplus b = a \oplus \overline{b} = \overline{a \oplus b}$

NAND (not and)

$$a|b = \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$a|b = b|a$ (proprietà commutativa);
$a|1 = \overline{a}$;
$a|0 = 1$;
$a|\overline{a} = 1$;
$a|(b|c) \neq (a|b)|c$ (l'operatore non è associativo)

NOR (duale di nand) : negazione dell'or

$$a \downarrow b = \overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$a \downarrow b = b \downarrow a$ (proprietà commutativa);
$a \downarrow 1 = 0$;
$a \downarrow 0 = \overline{a}$;
$a \downarrow \overline{a} = 0$;
$a \downarrow (b \downarrow c) \neq (a \downarrow b) \downarrow c$ (l'operatore non è associativo)

<table>
<tr>
<td>X-NOR (somma modulo 2)
negazioe dell'X-OR</td>
<td>
<table>
<tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>y</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a \odot b = b \odot a$ (proprietà commutativa);
$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ (proprietà associativa);
$a \odot 1 = a$;
$a \odot \overline{a} = 0$;
$a \odot 0 = \overline{a}$;</td>
</tr>
</table>