

**Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Informatica**  
**I prova di valutazione in itinere a.a. 2006/07**

**1.** Una scatola contiene tre monete. Una ha due teste, la seconda è non truccata e la terza è una moneta sbilanciata che dà testa nel 75% dei casi. Si sceglie a caso una delle tre monete e la si lancia.

(i) Qual è la probabilità che esca testa? e che esca croce?

(ii) Sapendo che è uscita testa, qual è la probabilità che si tratti della moneta con due teste?

**2.** Un astuccio contiene gettoni verdi e blu.

(i) Vengono estratti a caso **con rimpiazzo** 4 gettoni: sia  $X$  il numero dei gettoni verdi estratti. Si sa che  $E(X) = \frac{8}{3}$ . Sono più numerosi i gettoni verdi o quelli blu? Calcolare  $P(X \geq 2)$ .

(ii) Si consideri ora una scatola che contiene 12 gettoni, tra blu e verdi, con la stessa proporzione del punto (i): si effettuano estrazioni **senza rimpiazzo** dalla scatola.

(a) Calcolare la probabilità che le prime due estrazioni forniscano un gettone blu e uno verde, **esattamente in quest'ordine** ;

(b) sia  $Y_4$  il numero dei gettoni verdi ottenuti in 4 di tali estrazioni, calcolare  $P(Y_4 \geq 2)$ ;

(c) se ciascun gettone verde vale 50 cent e ciascuno blu vale 1,00 euro, sia  $S$  la somma totale dei valori in euro dei gettoni estratti; quanto vale  $E(S)$ ?

**3.** Due roulette regolari vengono azionate più volte; sia  $T$  il numero di volte che occorre azionare la prima roulette per ottenere per la prima volta un multiplo di 12, ed  $S$  il numero di volte che occorre azionare la seconda roulette per ottenere per la prima volta un multiplo di 7 (si ricordi che una roulette regolare fornisce ad ogni azione un numero  $N \in \{0, \dots, 36\}$  con  $P(N = i) = p$ ,  $i = 0, 1, \dots, 36$ ).

(i) Trovare le leggi delle v.a.  $T$  ed  $S$  e calcolare  $E(T)$  ed  $E(-3T + 5S)$ . Si può ritenere che  $S$  e  $T$  siano v.a. indipendenti?

(ii) Calcolare  $P(T - 2S \geq 0)$ .

(iii) Si consideri una terza roulette, truccata in modo che sia uguale a  $q = 10^{-3}$  la probabilità che esca il numero 0, ogni volta che viene azionata. Se la si aziona 6000 volte e si indica con  $Z$  il numero delle volte che esce 0, calcolare  $P(Z \geq 2)$ .

## Soluzioni della I prova di valutazione in itinere a.a. 2006/07

1. Indichiamo con  $M_1, M_2, M_3$ , gli eventi che vengano estratte la prima, seconda e terza moneta, rispettivamente. Sia  $T$  l'evento: "il lancio della moneta estratta dà testa" e  $C$  l'evento: "il lancio della moneta estratta dà croce".

(i) Si ha:

$$P(T) = P(T|M_1)P(M_1) + P(T|M_2)P(M_2) + P(T|M_3)P(M_3)$$

Abbiamo

$$P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = 1/3,$$

inoltre  $P(T|M_1) = 1, P(T|M_2) = 1/2, P(T|M_3) = 3/4$ . Inserendo tali valori nella formula di sopra, si ottiene  $P(T) = \frac{3}{4}$ . Inoltre  $P(C) = 1 - P(T) = \frac{1}{4}$ .

(i) Per la formula di Bayes:

$$P(M_1|T) = \frac{P(T|M_1)P(M_1)}{P(T)} = \frac{1/3}{3/4} = \frac{4}{9} = 0.44.$$

2. (i) Se  $v$  è il numero di gettoni verdi e  $b$  il numero di gettoni blu nell'astuccio, si ha  $X \sim B(4, p)$ , ove  $p = \frac{v}{v+b}$  è incognita. Però sappiamo che  $E(X) = 4p = 8/3$ , dunque  $p = 2/3$ , cioè la proporzione di gettoni verdi è maggiore di quella dei blu. Risulta:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = \\ &= 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4 - \binom{4}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{9} = 0.88. \end{aligned}$$

(ii) La v.a  $Y_n$  ha distribuzione ipergeometrica di parametri  $(n, v, b)$ ; siccome  $v + b = 12$  e  $p = v/(v + b) = 2/3$ , si ha  $v = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$ , e  $b = 12 - 8 = 4$ ; inoltre  $E(Y_n) = np$ .

(a) Indichiamo con  $B_i$  l'evento che si ottenga un gettone blu nell' $i$ -esima estrazione, e con  $V_i$  l'evento che si ottenga un gettone verde nell' $i$ -esima estrazione,  $i = 1, 2$ . Allora:

$$P(B_1 \cap V_2) = P(V_2|B_1)P(B_1) = \frac{8}{33} = 0.24.$$

(b)

$$P(Y_4 \geq 2) = 1 - P(Y_4 = 0) - P(Y_4 = 1) = 1 - \frac{\binom{8}{0} \binom{4}{4}}{\binom{12}{4}} - \frac{\binom{8}{1} \binom{4}{3}}{\binom{12}{4}} = 0.934.$$

(c) Si ha  $S = 0.5 \cdot Y + (4 - Y) \cdot 1 = 4 - Y/2$  (euro).

Allora  $E(S) = 4 - E(Y)/2 = 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$  (euro).

3. (i) Siccome i multipli di 12 tra 0 e 36 sono 3 e i multipli di 7 tra 0 e 36 sono 5,  $T$  ed  $S$  sono istanti di primo successo in serie di prove di Bernoulli indipendenti, in cui la

probabilità del successo in ogni prova è  $p = \frac{3}{37}$ , rispettivamente  $q = \frac{5}{37}$ . Dunque,  $T$  ed  $S$  hanno distribuzione geometrica modificata di parametro  $p$  e  $q$ , rispettivamente. Pertanto:

$$P(T = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, \dots, \quad P(S = h) = q(1 - q)^{h-1}, \quad h = 1, \dots$$

Si ha  $E(T) = 1/p = \frac{37}{3}$  e  $E(S) = 1/q = \frac{37}{5}$ , dunque  $E(-3T + 5S) = -3E(T) + 5E(S) = -3 \cdot \frac{37}{3} + 5 \cdot \frac{37}{5} = 0$ . Le v.a.  $S$  e  $T$  possono ritenersi indipendenti.

(ii)

$$P(T - 2S \geq 0) = P(T \geq 2S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq 2k, S = k)$$

siccome  $S$  e  $T$  sono indipendenti, tale probabilità vale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq 2k)P(S = k)$$

Ora  $T - 1 = X$  ha distribuzione geometrica di parametro  $p$ ; ricordando che per una tale  $X$ , risulta  $P(X \geq h) = (1 - p)^h$ , si ha  $P(T \geq 2k) = P(T - 1 \geq 2k - 1) = P(X \geq 2k - 1) = (1 - p)^{2k-1}$ . Dunque, riprendendo il calcolo

$$\begin{aligned} P(T - 2S \geq 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{2k-1} P(S = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{2k-1} q(1 - q)^{k-1} = \\ &= \frac{q}{(1 - p)(1 - q)} \sum_{k=1}^{\infty} [(1 - p)^2(1 - q)]^k = \frac{q}{(1 - p)(1 - q)} \left( \frac{1}{1 - (1 - p)^2(1 - q)} - 1 \right) = \\ &= \frac{q(1 - p)}{1 - (1 - p)^2(1 - q)} \end{aligned}$$

(iii) Per l'approssimazione di Poisson, si ha  $P(Z = k) \approx P(W = k)$ , ove  $W$  ha distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda = nq = 6000/1000 = 6$ . Pertanto  $P(Z \geq 2) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) \approx 1 - P(W = 0) - P(W = 1) = 1 - e^{-6} - 6e^{-6} = 1 - 7e^{-6}$ .