

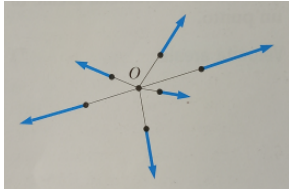
# Gravitazione 1 (Forze centrali)

martedì 25 marzo 2025 15:30

Andiamo ora studiare una la **gravitazione ovvero una forza centrale**. Ma cos'è una **forza centrale**? Per forza centrale si intende una forza agente in una certa regione dello spazio caratterizzata da:

1. In un qualunque punto, la sua direzione passa sempre per un punto fisso O (centro della forza)
2. Il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro fisso O
3. Se il modulo della Forza che agisce sul corpo è maggiore di 0 allora si ha forza **repulsiva**, altrimenti di ha forza **attrattiva**

In dettaglio:



In generale: se in una porzione di piano, agisce una forza (funzione della posizione), si ha una modifica dello spazio stesso e si ha un cosiddetto **campo di forza**. Andiamo a vedere in dettaglio: applichiamo il teorema del momento angolare al moto di un punto materiale soggetto ad una forza centrale prendendo come polo di riferimento il centro di forza:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \hat{u}_r \times F(r) \hat{u}_r = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{costante}$$

**Quindi in un campo di forze centrali il momento angolare (rispetto al centro della forza) si conserva:**

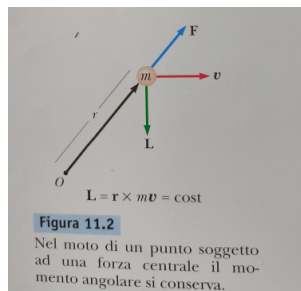


Figura 11.2

Nel moto di un punto soggetto ad una forza centrale il momento angolare si conserva.

Ma ricordandoci che L è sempre ortogonale al piano contenente la componente della velocità tangenziale e contenente il raggio, e se è costante si ha che il piano è fisso, quindi sia la velocità tangenziale ed il raggio devono essere nel piano: quindi il moto del punto è generalmente curvilineo:

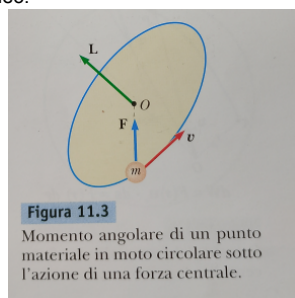


Figura 11.3

Momento angolare di un punto materiale in moto circolare sotto l'azione di una forza centrale.

Ricordandoci il moto curvilineo:

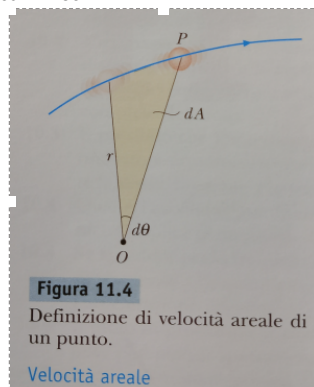


Figura 11.4

Definizione di velocità areale di un punto.

Velocità areale

E studiando le componenti :

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times m (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m \vec{v}_\theta \rightarrow \vec{r} \times \vec{v}_r = 0$$

$\Downarrow$

*sono paralleli*

$$\vec{L} = m r \vec{v}_\theta = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$\vec{v}_\theta = \omega \vec{r}$   
 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

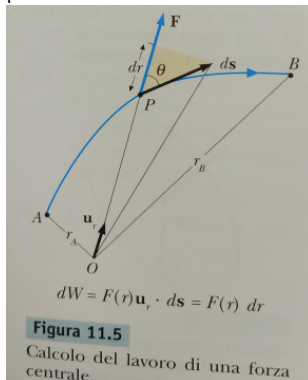
Ma ricordandoci che il punto P percorre traiettoria in un tempo infinitesimo descrivendo un arco , con una determinata rapidità detta **velocità areale** si ha : la traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo che la velocità areale sia costante :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m}$$

*è costante*  
*chiusa*

$$T = \frac{2m}{L} A$$

Una domanda sorge spontanea : **le forze centrali sono conservative? Assolutamente si**



Quindi andando a vedere il lavoro compiuto dal punto per percorrere l'arco di traiettoria :

$$\vec{W} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \int_A^B \vec{F}(r) \hat{u}_r ds \Rightarrow \int_A^B \vec{F}(r) dr \cos 0^\circ$$

$$\Rightarrow \int_A^B \vec{F}(r) dr \Rightarrow \vec{F}(r_B) - \vec{F}(r_A)$$

E siccome il lavoro è dato dalla variazione di una funzione delle coordinate -> allora si è in presenza di forze conservative ; inoltre ricordiamoci che la funzione f è l'opposto dell'energia potenziale.

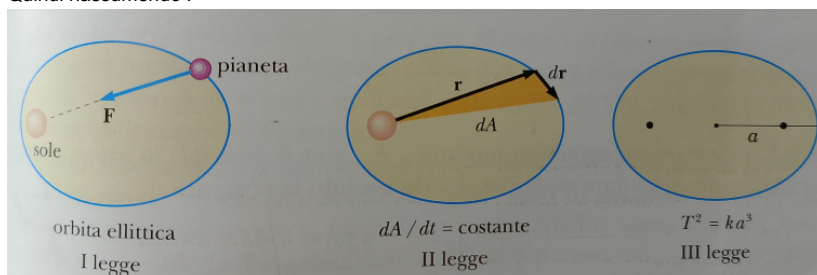
## Gravitazione 2 (Forza gravitazionale)

martedì 25 marzo 2025 17:10

► Prima di vedere questa forza, andiamo a vedere un po' di storia: si parte dal 1540 con Copernico e la sua teoria eliocentrica per arrivare al 1600/1620 con Keplero e la teoria geocentrica. La prima diceva che il sole era il corpo celeste attorno al quale si svolgeva il moto dei pianeti; mentre la seconda dice che è la terra il corpo celeste intorno al quale ruotano i pianeti. Quindi assumendo corretta la teoria di Keplero andiamo a vedere le tre leggi da lui formulate:

1. I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei due fuochi
2. La velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive l'orbita, è costante
3. Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse

Quindi riassumendo:



Quindi basandosi su queste tre leggi si arriva alla **teoria della gravitazione universale**: l'orbita di un pianeta essendo certamente ellittiche, possono comunque essere approssimate come circolari, quindi essendo che non vi è velocità tangenziale, ma solo centripeta, si ha che la velocità areale è costante. Quindi in dettaglio:

$$\vec{F} = m \underbrace{v^2}_{Q_c} r = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r \Rightarrow 3^a \text{ legge} \Rightarrow \vec{F} = \frac{G \pi^2}{k} \frac{m}{r^2}$$

Quindi la forza esercitata dal sole sui pianeti, che incurva la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Nel caso della terra e del sole si ha che:

$$\vec{F}_{ST} = \frac{G \pi^2}{k_T} \frac{m_T}{L^2} = \frac{G \pi^2}{k_S} \frac{m_S}{r^2} = \vec{F}_{TS} \quad \left. \begin{array}{l} \text{azione reazione} \\ \text{di Newton} \end{array} \right\}$$

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2} \rightarrow \frac{G \pi^2}{m_T k_S} = \frac{G \pi^2}{m_S k_T}$$

Quindi supponendo che questa legge valga per qualunque pianeta, anche se sconosciuti, si arriva alla **legge di gravitazione universale**: date due masse qualsiasi, di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende dal prodotto delle masse e inversamente dal quadrato delle distanze. Quindi riassumendo e dando dei valori alla costante universale (gamma) ed alla massa della terra:

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \quad m_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Dato che tra la massa gravitazionale nella legge di gravitazione universale e quella inerziale della seconda legge di Newton ( $F=ma$ ) non sono uguali, andiamo a vedere la relazione che intercorre:

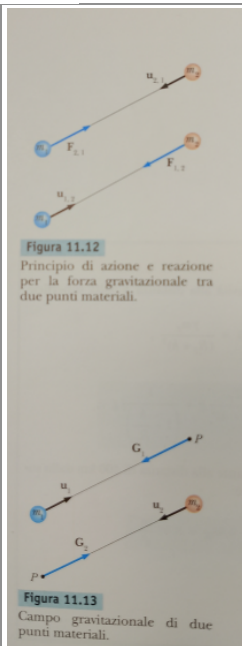
$$m_I \vec{g} = \gamma \frac{m_{T,G} m_g}{r^2_T} \Rightarrow \vec{g} = \gamma \frac{m_{T,G}}{r^2_T} \frac{m_g}{m_I}$$

$m_g$ : massa gravitazionale  
 $m_I$ : massa inerziale

## Gravitazione 3 (Campo gravitazionale+ energia potenziale + momento angolare)

martedì 25 marzo 2025 18:06

Andiamo ora a studiare la legge di gravitazione universale in termini vettoriali :



Quindi partendo dalla legge di gravitazione :

$$\vec{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_{1,2}$$

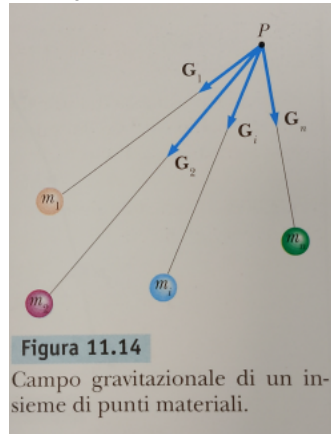
$$\vec{F}_{1,2} = \left( -\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_{1,2} \right) m_2 ; \quad \vec{F}_{2,1} = \left( -\gamma \frac{m_2}{r^2} \hat{u}_{2,1} \right) m_1$$

↓  
**Campo gravitazionale**

$$\vec{G}_1 = -\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_1 ; \quad \vec{G}_2 = -\gamma \frac{m_2}{r^2} \hat{u}_2$$

$$\vec{F}_{1,2} = m_2 \vec{G}_1 ; \quad \vec{F}_{2,1} = m_1 \vec{G}_2$$

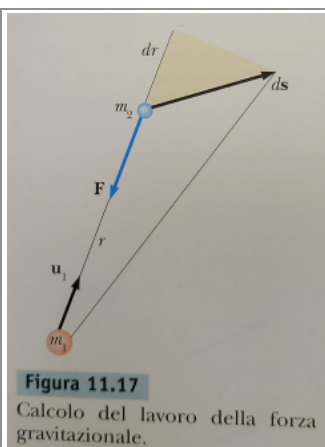
Le quali formule sono valide per masse puntiformi oppure per masse sferiche ed in questo caso anche il campo è a simmetria sferica . In un contesto più generale (a più punti) si ha che :



Quindi la formula del campo gravitazionale G diventa :

$$\vec{G}(P) = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i = \sum_{i=1}^n \left( -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \hat{u}_i \right)$$

Per quanto riguarda invece l'energia potenziale e ricordandoci il teorema della conservazione dell'energia meccanica si ha che :



Quindi il lavoro vale (che non dipende dalla traiettoria ma solo dalle posizioni iniziali e finali):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_{1,2} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{W} = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\gamma m_1 m_2 \left( -\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) \Rightarrow \vec{E}_{P,A} - \vec{E}_{P,B}$$

$$\vec{E}_P = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Notiamo che il segno negativo dipende dal fatto che la forza di gravitazione è attrattiva.

Vediamo ora un esempio :

**ESEMPIO 11.6** Satelliti terrestri

Un satellite artificiale di massa  $m = 10^3$  kg descrive un'orbita circolare intorno alla terra. Calcolare, in funzione del raggio  $r$  dell'orbita, la velocità, il periodo, l'energia meccanica, la forza gravitazionale, in particolare per  $r$  poco maggiore del raggio della terra  $r_T$ . Estendere i calcoli al caso di un satellite geostazionario (cioè con periodo eguale a 24 ore). Determinare infine il lavoro necessario per portare il satellite da un'orbita di raggio  $r_1$  a un'orbita di raggio  $r_2 > r_1$ . Ricordiamo che  $m_T = 5.98 \cdot 10^{24}$  kg,  $r_T = 6.38 \cdot 10^6$  m,  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/kg s<sup>2</sup>.

**Soluzione** Le formule da utilizzare, tutte già viste, sono:

$$F = \gamma \frac{m m_T}{r^2} = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{m_T}{r}}, \quad T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma m_T}}$$

$$E_m = -\gamma \frac{m m_T}{2r}$$

Numericamente,  $\gamma m_T = 3.99 \cdot 10^{14}$  m<sup>3</sup>/s<sup>2</sup> e quindi:

$$v = \frac{2 \cdot 10^7}{\sqrt{r}} \text{ m/s}, \quad T = 3.14 \cdot 10^{-7} r^{3/2} \text{ s}$$

Con riferimento alla terza legge di Keplero  $T^2 = k r^3$ ,  $k = 9.87 \cdot 10^{-14}$  s<sup>2</sup>/m<sup>3</sup>.

Questi risultati non dipendono dalla massa del satellite, mentre ne dipendono forza ed energia meccanica:

$$F = 3.99 \cdot 10^{14} \frac{m}{r^2} = \frac{3.99 \cdot 10^{17}}{r^2} \text{ N}$$

$$E_m = -2 \cdot 10^{14} \frac{m}{r} = \frac{-2 \cdot 10^{17}}{r} \text{ J}$$

Per un'orbita con raggio di poco superiore al raggio terrestre, ad esempio per un satellite con distanza dalla superficie terrestre dell'ordine di 100 km, poniamo in prima approssimazione  $r = r_T$  e troviamo, ricordando che  $g = \gamma m_T / r_T^2$ :

$$v = \sqrt{g r_T} = 7.91 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 28500 \text{ km/h}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_T}{g}} = 5.05 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 84 \text{ minuti}$$

$$F = mg = 9.81 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$E_m = -\frac{1}{2} m g r_T = -3.14 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Nel caso del satellite geostazionario il periodo è fissato,  $T = 24 \text{ ore} = 8.64 \cdot 10^4 \text{ s}$  e si deduce il raggio dell'orbita

$$r = \left( \frac{T}{3.14 \cdot 10^{-7}} \right)^{2/3} = 4.23 \cdot 10^7 \text{ m} = 42300 \text{ km}$$

11.6 Moto di un corpo sottoposto alla forza gravitazionale: soluzione generale

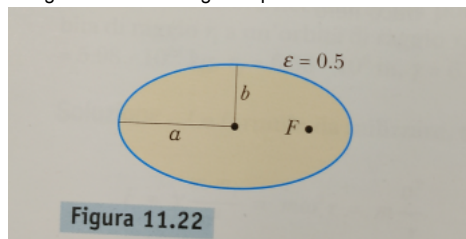
287

av un'altezza di circa 36000 km dalla superficie terrestre. Infine, nel passaggio da un'orbita ad un'altra l'energia meccanica del satellite varia e quindi il lavoro necessario, fornito da una forza non conservativa, è

$$W = \Delta E_m = E_{m2} - E_{m1} = \gamma \frac{m m_T}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 2 \cdot 10^{17} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{ J}$$

Vogliamo riassumere, per concludere, la situazione cinematica e dinamica del satellite in orbita circolare. L'accelerazione, soltanto centripeta e dovuta alla forza di gravità, vale  $g(r) = \gamma m_T / r^2$ , essa forma un angolo di  $\pi/2$  con la velocità; entrambe, velocità e accelerazione, sono costanti lungo l'orbita. Si può dire che il satellite è in caduta libera, ma a causa delle condizioni iniziali l'orbita di equilibrio è circolare (caduta continua, ma senza mai avvicinarsi alla terra). Qualsiasi oggetto all'interno del satellite risente della stessa accelerazione e si ha quella situazione, detta impropriamente di assenza di peso, già descritta nell'esempio 5.5.

Infine vediamo l'energia e momento angolare per le orbite ellittiche :



Due parametri importanti di un'ellisse sono l'eccentricità e l'area:

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} ; \quad A = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

$0 < \epsilon < 1$   
 $a = b \rightarrow$  da ellisse a circonferenza

Mentre momento angolare ed energia :

$$L^2 = \gamma \frac{m^2 M}{m + M} a (1 - \epsilon^2) ; \quad E_m = -\gamma \frac{m M}{2a}$$

$$T = 2\pi \frac{m M}{m + M} \frac{A}{L} = 2\pi \frac{m M}{m + M} \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}}{L}$$

introducendo  $L^2$  nella formula

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma(m+M)} a^3 = \frac{K}{\gamma(m+M)} \rightarrow 3^a \text{ legge di Keplero}$$

$2.98 \cdot 10^{-14} \text{ s}^2/\text{m}^3$