Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Informatica
I prova di valutazione in itinere a.a. 2007/08

1. Il 30 % dei dipendenti di un'azienda che produce software sono laureati e di questi l' 80 % occupa la posizione di dirigente. Tra i non laureati il 10 % occupa la posizione di dirigente. Si estrae a caso un dipendente dall'elenco dell'organico di questa azienda.
(i) Qual è la probabilità che esso sia laureato? e che sia un dirigente?
(ii) Sapendo che è stato estratto un dirigente, qual è la probabilità che questo sia in possesso di laurea?

2. Da un mazzo regolare di carte napoletane si effettuano delle estrazioni senza reinserimento.
(i) Calcolare la probabilità che le prime due estrazioni forniscano un asso ed una carta diversa da un asso, **esattamente** in qest'ordine.
(ii) Calcolare la probabilità che le prime due estrazioni forniscano due assi.
(iii) Se X rappresenta il numero di assi ottenuto in tre estrazioni senza reinserimento, trovare la distribuzione di X, ovvero $P(X = k),\ k = 0, 1, 2, 3$ e calcolare $P(1 < X \leq 3)$.
(iv) Se a ciascun asso viene attribuito il valore di 1 euro ed alle altre carte il valore di 0.1 euro, sia Z il valore totale in euro delle tre carte estratte senza reinserimento; calcolare $E(Z)$.
(v) Supponiamo di effettuare ora tre estrazioni di carte dal mazzo **con reinserimento** e si denoti con Z_1 il valore totale in euro delle carte estratte. Qual è la relazione tra $E(Z)$ e $E(Z_1)$? Quanto vale $Var(Z_1)$?

3. Daniele getta ripetutamente un dado perfetto: sia M il numero di lanci necessari ad ottenere per la prima volta un punteggio < 3. Francesco invece lancia una moneta truccata in modo che *Testa* esca con probabilità $\frac{2}{3}$ in ogni lancio: sia N il numero di lanci necessari ad ottenere *Testa* per la prima volta.
(i) Trovare le leggi di M ed N e calcolare $E(M), E(N)$. Si può ritenere che N ed M siano v.a. indipendenti? Spiegare...
(ii) Calcolare $P(M - 5N < 0)$ e $P(\min(M, N) = 2)$.
(iii) Si lancia ora un'altra moneta truccata in modo che in ogni lancio esca *Testa* con probabilità $1.2 \cdot 10^{-3}$. Se si effettuano 3000 lanci, stimare la probabilità che il numero di *Teste* uscite sia ≥ 4.

Soluzioni della I prova di valutazione in itinere a.a. 2007/08

1. (i) Indichiamo con E_1 l'evento "il dipendente è un dirigente" e con E_2 l'evento "il dipendente è laureato". Occorre calcolare $P(E_1)$ e $P(E_2)$. Dai dati del problema, risulta $P(E_2) = 0.30$ e $P(E_2^C) = 0.70$, mentre, per la formula delle probabilità totali si ha:

$$P(E_1) = P(E_1|E_2)P(E_2) + P(E_1|E_2^C)P(E_2^C) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.7 = 0.31$$

(ii) Occorre calcolare $P(E_2|E_1)$; per il teorema di Bayes si ha:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1|E_2)P(E_2)}{P(E_1)} = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.31} = \frac{24}{31}$$

2. (i) Sia A_i l'evento "all' i-esima estrazione esce un asso"; risulta $P(A_1) = 4/40 = 0.1$ Occorre calcolare $P(A_1 \cap A_2^C) = P(A_2^C|A_1)P(A_1)$ e sostituendo le quantità note si trova per la probabilità cercata il valore $\frac{36}{39}\ \frac{1}{10} = \frac{12}{130}$.
(ii) Occorre calcolare $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{3}{39}\ \frac{1}{10} = \frac{1}{130}$.
(iii) X risulta una v.a. ipergeometrica di parametri $(3, 4, 36)$. Dunque

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{36}{3-k}}{\binom{40}{3}}, \ k = 0, 1, 2, 3.$$

Quindi

$$P(1 < X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{\binom{4}{2}\binom{36}{1}}{\binom{40}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{36}{0}}{\binom{40}{3}} =$$

$$= \frac{220}{38 \cdot 20 \cdot 13} = 0.022\ .$$

(iv) Si ha $Z = 1 \cdot X + (3 - X) \cdot 0.1 = 0.9 \cdot X + 0.3$, da cui $E(Z) = 0.9E(X) + 0.3$. Siccome $E(X) = 3 \cdot 0.1 = 0.3$ (ricordando la media di una v.a. ipergeometrica), si ottiene $E(Z) = 0.9 \cdot 0.3 + 0.3 = 0.57$.
(v) Se le carte si estraggono dal mazzo con reinserimento, si ha ora che $X \sim B(3, 0.1)$, pertanto $E(X) = 3 \cdot 0.1 = 0.3$, come prima; invece $E(X^2) = 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.27$. Si ottiene anche, come prima, $E(Z_1) = E(Z) = 0.57$. Per la varianza di Z_1 si ha:

$$Var(Z_1) = E(Z_1^2) - E^2(Z_1) = E(0.81X^2 + 0.54X + 0.09) - (0.57)^2 =$$

$$= 0.81 \cdot 0.27 + 0.54 \cdot 0.3 - (0.57)^2 = 0.0558\ .$$

3. (i) M ed N sono istanti di primo successo in una serie di prove indipendenti e di Bernoulli in ciascuna delle quali la probabilità del successo vale, rispettivamente, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Dunque si ha:

$$P(M=k)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k=1,2,\dots$$

e

$$P(N=h)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}, h=1,2,\dots$$

Risulta $E(M)=\frac{1}{3}^{-1}=3$ e $E(N)=\frac{2}{3}^{-1}=\frac{3}{2}$. Si può ritenere che M ed N siano indipendenti, in quanto i risultati di un esperimento aleatorio non influenzano quelli dell'altro esperimento aleatorio.

(ii) Si ha $P(M-5N<0)=1-P(M-5N\geq 0)$; calcoliamo prima $P(M\geq 5N)$. Risulta:

$$P(M\geq 5N)=\sum_{k=1}^{\infty}P(M\geq 5k, N=k)$$

e per l'indipendenza di M ed N, tale probabilità è

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(M\geq 5k)P(N=k)$$

Ricordando che per una v.a. $X\sim Geom(p)$ risulta $P(X\geq h)=(1-p)^h$, siccome $M-1\doteq X$ è geometrica di parametro $\frac{1}{3}$, si ottiene $P(M\geq 5k)=P(M-1\geq 5k-1)=(1-1/3)^{5k-1}$. Riprendendo il calcolo di prima:

$$P(M\geq 5N)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{5k-1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=....=3\left(\frac{1}{1-2^5/3^6}-1\right)=0.1377 \ .$$

ed infine $P(M-5N<0)=1-P(M\geq 5N)=1-0.1377=0.8623$.

Si ha poi:

$$P(\min(M,N)\geq k)=P(M\geq k)P(N\geq k)=[(1-1/3)(1-2/3)]^{k-1}=(2/9)^{k-1}$$

Allora:

$$P(\min(M,N)=k)=P(\min(M,N)\geq k)-P(\min(M,N)\geq k+1)=$$

$$=(2/9)^{k-1}-(2/9)^k=\frac{7}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}$$

e per $k=2$ tale probabilità vale $\frac{14}{81}$.

(iii) Il numero Z di *Teste* uscite in 3000 lanci della moneta ha distribuzione binomiale di parametri $(3000, 1.2\cdot 10^{-3})$. Siccome la probabilità del successo in ogni prova è molto piccola $(1.2\cdot 10^{-3})$, possiamo usare l'approssimazione di Poisson, ottenendo cosi' $P(Z=k)\approx P(Y=k)$, dove Y ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda=np=3000\cdot 1.2\cdot 10^{-3}=3.6$. Pertanto, siccome $P(Y=k)=e^{-3.6}(3.6)^k/k!, k=0,1,...$, si ottiene

$$P(Z\geq 4)=1-P(Z=0)-P(Z=1)-P(Z=2)-P(Z=3)$$

$$\approx 1-e^{-3.6}(1+3.6+(3.6)^2/2+(3.6)^3/6)=0.4847$$