Esercizi e calcoli con densità bidimensionali continue

Svolgere gli esercizi 2b.2, 2b.3, 2b.4, 2b.5, 2b.6, 2b.7, 2b.8, 2b.9, 2b.10, 2b.11, 2b.12, 2b.13

$\triangleright$ **Esercizio 2b.2** Siano X, Y e Z tre v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $[0, 1.]$ Trovare la densità della v.a. $W = X + Y + Z$.

$\triangleright$ **Esercizio 2b.3** Un punto è scelto a caso nel piano con densità :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Sia $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ la distanza del punto scelto dall'origine. i) Trovare la legge di Z; ii) qual è la probabilità che il punto si trovi fuori del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1?

$\triangleright$ **Esercizio 2b.4** Sia Y una v.a. con legge esponenziale di parametro X, ove X è una v.a. con legge Gamma di parametri α e λ. Qual è la legge di Y? Esiste finita $E(Y)$? in caso affermativo, quanto vale? Qual è la densità condizionale di X dato $Y = y$? Quanto valgono, infine, $E(X|Y = y)$ e $Var(X|Y)$?

$\triangleright$ **Esercizio 2b.5** Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta $f(x, y)$. Calcolare la densità della v.a. $Z = Y/X$.

$\triangleright$ **Esercizio 2b.6** Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta $f(x, y)$. Calcolare la densità della v.a. $Z = XY$.

$\triangleright$ **Esercizio 2b.7** Siano X e Y indipendenti di leggi $\Gamma(\alpha, \lambda)$ e $\Gamma(\beta, \mu)$, rispettivamente. Trovare la legge di $Z = \frac{X}{X+Y}$.

$\triangleright$ **Esercizio 2b.8** Siano $X, Y \sim N(0, 1)$ e indipendenti. Trovare la legge di $Z = \frac{X^2}{X^2+Y^2}$.

$\triangleright$ **Esercizio 2b.9** Siano X e Y v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro λ. Trovare la legge di $Z = \frac{X}{X+Y}$.

$\triangleright$ **Esercizio 2b.10** Siano X, Y v.a. indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro λ. Trovare la legge di $Z = \frac{X^2}{X^2+Y^2}$.

$\triangleright$ **Esercizio 2b.11** Siano $X \sim N(0, 1)$ e $Y = X + W$, dove $W \sim N(0, \sigma^2)$ ed è indipendente da X. Calcolare: i) la legge di Y e la legge congiunta di Xe Y; ii) $E(X|Y = y)$; iii) sia $\sigma^2 = 0.1$; se si osserva il valore $y = 11/20$, quanto vale $P(1/4 < X < 3/4|Y = 11/20)$?

$\triangleright$ **Esercizio 2b.12** Siano X, Y v.a. indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro λ. Trovare la densità di $Z = \frac{X-Y}{X+Y}$.

$\triangleright$ **Esercizio 2b.13** Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta
$f(x, y) = x + y$ per $0 < x < 1$; $0 < y < 1$. Calcolare la densità della v.a. $Z = Y/X$.

▷ **Esercizio 2b.2**
Ricordiamo la formula per la densità di $Z = X + Y$, con $X,\ Y \geq 0$:

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^{+\infty} f(x, z - x)dx$$

dove $f(x, y)$ è la densità congiunta di X e Y. Se le v.a. X e Y sono indipendenti, si ottiene la formula di *convoluzione*:

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^{+\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx$$

dove f_X e f_Y rappresentano, rispetivamente, la densità di X e quella di Y.
Tornando all'enunciato dell'esercizio, siano X, Y e Z v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $[0, 1]$, e poniamo $W = U + Z$ con $U = X + Y$. Ovviamente W assume solo valori in $[0, 2]$, ovvero la sua densità ha per supporto tale intervallo. Dalla formula di convoluzione applicata a X e Y, segue che U ha densità *a triangolo*:

$$f_U(u) = \begin{cases} u & \text{se } u \in [0, 1] \\ 2 - u & \text{se } u \in [1, 2] \end{cases},$$

il cui grafico è riportato in Figura 2.

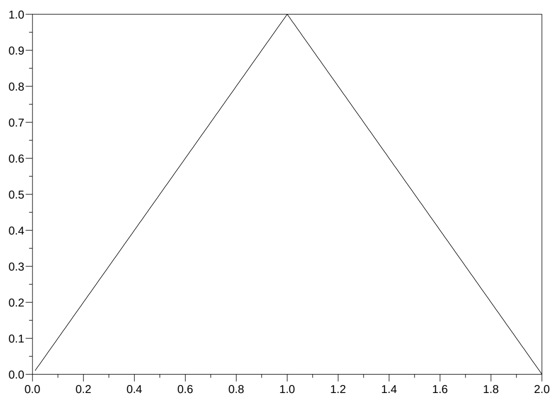
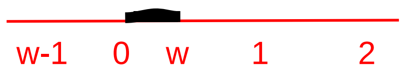


Figura 2: grafico della densità della somma di due v.a. indipendenti e uniformi in $[0, 1]$

Dalla formula di convoluzione applicata a U e Z si ottiene la densità di W :

$$f_W(w) = \int_0^{+\infty} f_U(u) f_Z(w-u)du = \int_0^2 f_U(u)\mathbf{1}_{[w-1,w]}(u)du$$

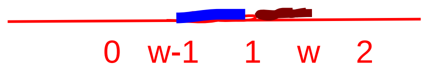
Occorre esaminare diversi casi:
(i) se $w < 0$, allora l'integrale sopra è evidentemente nullo poiche' [w-1,w] non interseca [0,2]
(ii) se $w \in [0,1]$, l' integrale sopra vale



$$\int_0^w udu = \frac{w^2}{2}$$

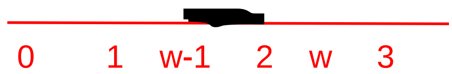
(iii) se $w \in [1,2]$, l'integrale sopra vale

$$\int_{w-1}^1 udu + \int_1^w (2-u)du = \ldots = -w^2 + 3w - \frac{3}{2}$$



(iv) se $w \in [2,3]$, l'integrale sopra vale

$$\int_{w-1}^2 (2-u)du = \ldots = \frac{9}{2} - 3w + \frac{1}{2}w^2$$



(v) se $w > 3$, l'integrale sopra è nullo. poiche' [w-1,w] non interseca [0,2]
Riassumendo, abbiamo ottenuto:

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{w^2}{2} & \text{se } w \in [0,1] \\ -w^2 + 3w - \frac{3}{2} & \text{se } w \in [1,2] \\ \frac{1}{2}w^2 - 3w + \frac{9}{2} & \text{se } w \in [2,3] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il grafico di $f_W(w)$ è riportato in Fig. 3.

▷ **Esercizio 2b.3**
La v.a. Z è non negativa.
(i) Per $z \geq 0$, si ha:

$$P(Z \leq z) = P(\sqrt{X^2+Y^2} \leq z) = \int\int_{\{x^2+y^2 \leq z^2\}} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy$$

Passando a coordinate polari, l'integrale diventa:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \rho d\rho \frac{1}{2\pi} e^{-\rho^2/2} = 1 - e^{-z^2/2}$$

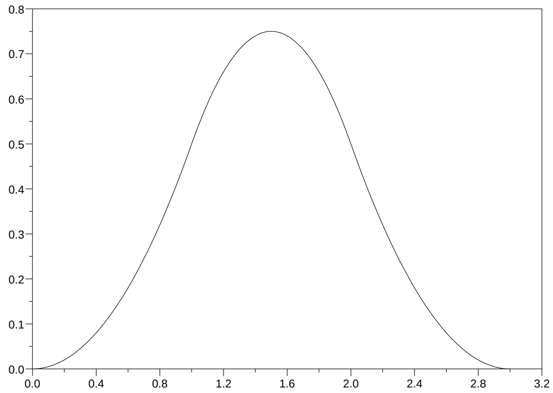


Figura 3: grafico della densità della somma di tre v.a. indipendenti e uniformi in $[0, 1]$

La densità di Z è allora:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} P(Z \leq z) = \begin{cases} ze^{-z^2/2} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(ii) La probabilità richiesta è $P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - [1 - e^{-1/2}] = e^{-1/2}$.

$\triangleright$ **Esercizio 2b.4**
Si ha:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} xe^{-xy} & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

La densità congiunta di (X, Y) è:

$$f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-(\lambda+y)x} & \text{se } x \geq 0, \; y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora, la densità di Y è la seconda marginale di (X, Y), ovvero:

$$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} dx \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-(\lambda+y)x}.$$

Moltiplicando e dividendo per $\Gamma(\alpha+1)/(\lambda+y)^{\alpha+1}$, la formula sopra si riscrive:

$$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\lambda+y)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} dx \frac{x^{(\alpha+1)-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \, e^{-(\lambda+y)x} (\lambda+y)^{\alpha+1} =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\lambda+y)^{\alpha+1}}$$

poiché l' integrale vale 1, essendo la funzione integranda la densità di una v.a. con distribuzione $\Gamma(\alpha+1, \lambda+y)$. Dunque, siccome $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, si ottiene per $y \geq 0$:

$$f_Y(y) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+y)^{\alpha+1}}$$

$E(Y)$ esiste finito se e solo se

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\lambda^\alpha y}{(\lambda+y)^{\alpha+1}}\ dy < +\infty$$

il che è vero se $\alpha > 1$.
Integrando per parti, si ottiene:

$$E(Y) = \alpha\lambda^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{y}{(\lambda+y)^{\alpha+1}}\ dy = \ldots = \frac{\lambda}{\alpha-1}.$$

Si ha inoltre, per $x \geq 0$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{(\lambda+y)^{\alpha+1} x^\alpha e^{-(\lambda+y)x}}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{(\lambda+y)^{\alpha+1} x^\alpha e^{-(\lambda+y)x}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

che è la densità di una legge $\Gamma(\alpha+1, \lambda+y)$. Ricordando la formula per la media e la varianza di una v.a. con distribuzione Gamma, si trova $E(X|Y) = \frac{\alpha+1}{\lambda+y}$ e $Var(X|Y) = \frac{\alpha+1}{(\lambda+y)^2}$

▷ **Esercizio 2b.5**
Se $X \neq 0$ e $Z = Y/X$, si ottiene:

$$P(Z \leq t) = \begin{cases} P(Y \leq tX) & \text{se } X > 0 \\ P(Y \geq tX) & \text{se } X < 0 \end{cases}$$

Allora, se $f(x,y)$ denota la densità congiunta di (X,Y) :

$$P(Z \leq t) = \int\int_E f(x,y)dxdy + \int\int_F f(x,y)dxdy$$

Dove E ed F sono gli isiemi indicati in figura 4.

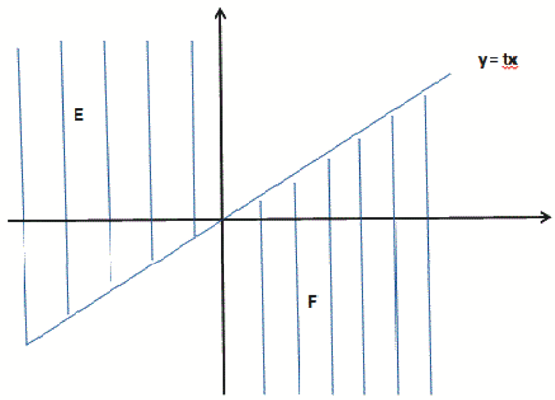


Figura 4

Dunque:

$$P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{tx}^{+\infty} f(x,y)dy + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{tx} f(x,y)dy.$$

Derivando tale espressione rispetto a t, si ottiene la densità di Z :

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{0} dx\ (-xf(x,tx)) + \int_{0}^{+\infty} dx\ (xf(x,tx)) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x,tx)dx.$$

▷ **Esercizio 2b.6**

Denotiamo come al solito con $f(x,y)$ la densità congiunta di (X,Y). Posto $Z = XY$, calcoliamo $P(Z \leq t)$; consideriamo i due casi.

(i) $t \geq 0$

$$P(XY \leq t) = \int\int_{E_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{E_2} f(x,y)dxdy + \int\int_{Q_1 \cup Q_2} f(x,y)dxdy$$

ove E_1, E_2, Q_1 e Q_2 sono gli insiemi indicati in figura 5.

Allora:

$$P(XY \leq t) = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{t/x}^{0} dyf(x,y) + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{0}^{t/x} dyf(x,y)$$

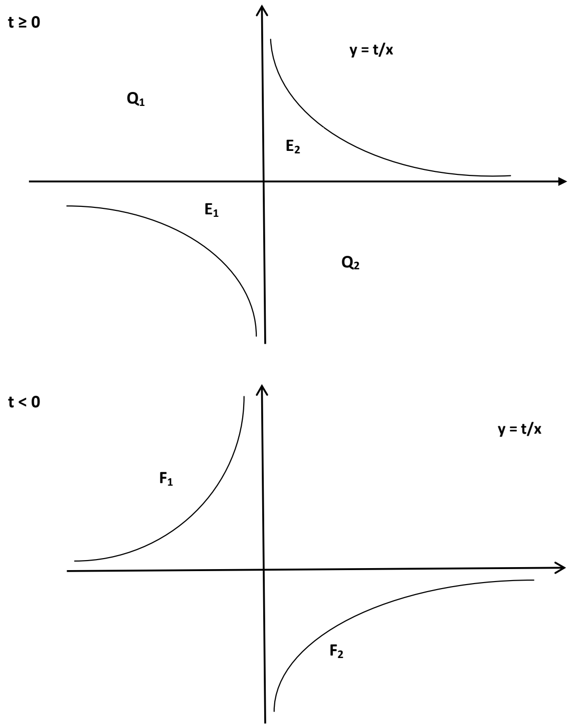


Figura 5

$$+\int\int_{Q_1\cup Q_2} f(x,y)dxdy$$

Si osservi che l'integrale doppio esteso a $Q_1 \cup Q_2$ non dipende da t. Derivando rispetto a t si ottiene la densità di $Z = XY$ per $t \geq 0$:

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{0} dx \left[-f\left(x, \frac{t}{x}\right)\frac{1}{x}\right] + \int_{0}^{+\infty} dx \left[f\left(x, \frac{t}{x}\right)\frac{1}{x}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dx \ .$$

(ii) $t < 0$

$$P(XY \leq t) = \int\int_{F_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{F_2} f(x,y)dxdy$$

(v. figura 5).
Allora:

$$P(XY \le t) = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{t/x}^{+\infty} dy f(x,y) + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{t/x} dy f(x,y)$$

Derivando rispetto a t si ottiene la densità di $Z = XY$ per $t < 0$:

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{0} dx f\left(x, \frac{t}{x}\right) \cdot \frac{(-1)}{x} + \int_{0}^{+\infty} dx f\left(x, \frac{t}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dx \ .$$

Concludendo, per ogni $z \in (-\infty, +\infty)$ la densità di $Z = XY$ è:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx \ .$$

▷ **Esercizio 2b.7**
I procedimento
Siccome $X, Y > 0$, si ha $0 < \frac{X}{X+Y} < 1$. Sia $Z = \frac{X}{X+Y}$ e $0 < z < 1$, allora:

$$P(Z \le z) = P\left(\frac{X}{X+Y} \le z\right) = P(X \le z(X+Y)) = P\left(Y \ge \left(\frac{1-z}{z}\right) X\right)$$

Dunque:

$$P(Z \le z) = \int\int_E f(x,y) dx dy$$

ove $f(x,y)$ è la densità congiunta di (X, Y) e E è l'insieme indicato in figura 6.

Poiché X e Y sono indipendenti e $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta, \mu)$, risulta:

$$f(x,y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\mu y}.$$

Riprendendo il calcolo dell'integrale doppio di sopra:

$$P(Z \le z) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \int_{(1/z-1)x}^{+\infty} \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\mu y} dy.$$

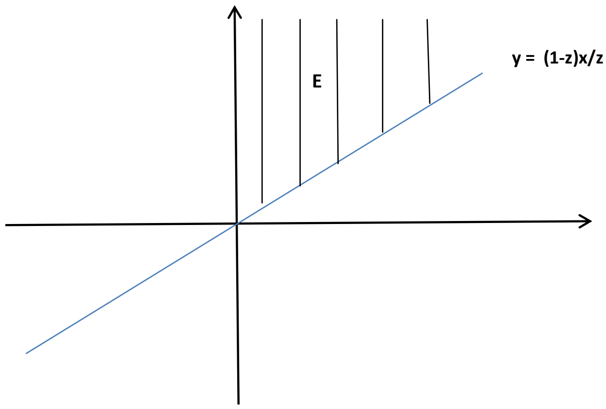


Figura 6

Derivando rispetto a z, si ottiene la densità di Z :

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} P(Z \le z) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \cdot \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta)} \left[(1/z-1)\, x\right]^{\beta-1} e^{-\mu(1/z-1)x} \frac{x}{z^2} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha \mu^\beta}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{z^2} \int_0^{+\infty} dx e^{-x[\lambda+\mu(1/z-1)]} x^{\alpha-1} (1/z-1)^{\beta-1} x^{\beta-1} \qquad (*)$$

Ponendo $\lambda' = \lambda + \mu(1/z-1)$, la quantità sopra si scrive:

$$\frac{\lambda^\alpha \mu^\beta}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{z^2} (1/z-1)^{\beta-1} \int_0^{+\infty} dx e^{-\lambda' x} x^{\alpha+\beta-1} =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha \mu^\beta}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{z^2} (1/z-1)^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\lambda')^{\alpha+\beta}} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda')^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-\lambda' x} x^{\alpha+\beta-1} dx.$$

Si noti che l'ultimo integrale vale 1, poiché la funzione integranda è una densità $\Gamma(\alpha+\beta, \lambda')$, pertanto si ottiene per $0 < z < 1$:

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\lambda^\alpha \mu^\beta}{[\lambda + \mu(1/z-1)]^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{\beta-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\lambda^\alpha \mu^\beta}{[\lambda + \mu(1/z-1)]^{\alpha+\beta}} \; z^{-2} z^{-(\beta+1)} (1-z)^{\beta-1}.$$

In particolare, se $\lambda = \mu$, si ottiene:

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\lambda^{\alpha+\beta}[1+1/z-1]^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{z^{-2}(1-z)^{\beta-1}}{z^{\beta-1}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}$$

che è una densità Beta(α,β). Pertanto, se X e Y sono indipendenti e $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$, allora $Z = X/(X+Y) \sim Beta(\alpha,\beta)$.

II procedimento
Ora calcoleremo la densità di Z facendo uso di un cambio di variabili. Ricordiamo prima il procedimento generale, poi lo applicheremo al nostro caso particolare.

Sia $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un diffeomorfismo di classe C^1, che manda (x,y) in (u,v), ovvero una trasformazione regolare e invertibile, con $(u,v) = g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$, cioé:

$$\begin{cases} u = g_1(x,y) \\ v = g_2(x,y) \end{cases}$$

oppure, usando la trasformazione inversa, $(x,y) = g^{-1}(u,v)$:

$$\begin{cases} x = (g^{-1})_1(u,v) = h_1(u,v) \\ y = (g^{-1})_2(u,v) = h_2(u,v) \end{cases}$$

Supponiamo che g_i e $h_i,\ i = 1,2$ siano di classe C^1 e che $det(J_{g^{-1}}) \neq 0$, dove $J_{g^{-1}}$ è la matrice Jacobiana della trasformazione inversa, definita da:

$$J_{g^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora il vettore aleatorio $(U,V) = g(X,Y)$ ottenuto dal vettore aleatorio (X,Y) mediante la trasformazione g che soddisfa le condizioni di sopra; si può dimostrare che la densità del vettore (U,V) è data da:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(h_1(u,v), h_2(u,v)) \cdot |det(J_{g^{-1}}(u,v))| \qquad (**)$$

dove $f_{(X,Y)}$ è la densità di (X,Y). La densità marginale di U si ottiene integrando $f_{(U,V)}(u,v)$ per $v \in (-\infty,+\infty)$, mentre la marginale di V si ottiene integrando $f_{(U,V)}(u,v)$ per $u \in (-\infty,+\infty)$.

Ritorniamo al caso dell'esercizio, dove $Z = X/(X+Y)$. Consideriamo il cambio di variabili:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \frac{x(1-z)}{z} \end{cases}$$

(si noti che l'espressione per y è ottenuta dalla formula $z = x/(x+y)$, dove alle v.a. X e Y sono stati sostituiti i loro valori generici x, y); inoltre, in questo caso risulta $u = x$ e $v = z$, ovvero le nuove variabili sono (x, z)). La matrice Jacobiana della trasformazione inversa è:

$$J_{g^{-1}}(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-z}{z} & -\frac{x}{z^2} \end{pmatrix}$$

e, calcolando il determinante, si ottiene $|det J_{g^{-1}}(x,z)| = \frac{|x|}{z^2}$. Quindi, per la (**), la densità del vettore aleatorio (X, Z) è:

$$f_{(X,Y)}\left(x, \frac{x(1-z)}{z}\right) \cdot \frac{|x|}{z^2}.$$

Infine, la densità di Z (seconda marginale) è:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}\left(x, \frac{x(1-z)}{z}\right) \cdot \frac{|x|}{z^2} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{x}{z^2} \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta)} \left(x(1/z-1)\right)^{\beta-1} e^{-\mu x(1/z-1)} dx$$

che coincide con l'espressione (*) precedentemente trovata, dalla quale segue la forma finale di f_Z.

▷ **Esercizio 2b.8**
Ricordiamo che se $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, si ha $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$. Quindi, se $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ e sono indipendenti, allora $U = X^2$ e $V = Y^2$ sono indipendenti ed hanno distribuzione $\Gamma(1/2, 1/2)$.
Pertanto, si può scrivere $Z = U/(U+V)$ con U e V indipendenti e con legge $\Gamma(1/2, 1/2)$.
Per l'Esercizio 2.67 con $\alpha = \beta = \lambda = \mu = 1/2$, si ottiene che la densità di Z è:

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma(1)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} z^{-1/2}(1-z)^{-1/2}, \ z \in (0,1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

che è una densità $Beta(1/2, 1/2)$.

▷ **Esercizio 2b.9**
Se $0 < z < 1$ e $Z = X/(X+Y)$, si ha:

$$P(Z \le z) = P\left(Y \ge \left(\frac{1-z}{z}\right) X\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_{(1/z-1)x}^{+\infty} dy\ \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} =$$

$$= \lambda^2 \int_0^{+\infty} dx e^{-\lambda x} \int_{(1/z-1)x}^{+\infty} dy e^{-\lambda y}.$$

Derivando rispetto a z, si ottiene la densità di Z :

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^2}{z^2} \int_0^{+\infty} dx\ e^{-\lambda x}\ x e^{-\lambda(1/z-1)x} = \frac{\lambda}{z} \int_0^{+\infty} dx\ \frac{\lambda x}{z}\ e^{-\lambda x/z}$$

Siccome l'integrale rappresenta la media di una v.a. esponenziale di parametro λ/z, esso vale z/λ. In conclusione, si ottiene:

$$f_Z(z) = \frac{\lambda}{z} \cdot \frac{z}{\lambda} = 1,\ z \in (0,1)$$

Dunque, $Z \sim Uni((0,1))$.

▷ **Esercizio 2b.10**
Se $0 < z < 1$ e $Z = X^2/(X^2 + Y^2)$, si ha:

$$P(Z \le z) = P(X^2 \le z(X^2 + Y^2)) = P\left(Y^2 \ge X^2 \left(\frac{1-z}{z}\right)\right) =$$

$$= P(Y \ge X\sqrt{1/z - 1})$$

(X e Y sono ≥ 0)

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_{x\sqrt{1/z-1}}^{+\infty} dy \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y}.$$

Derivando rispetto a z, si ottiene la densità di Z :

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} P(Z \le z) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} dx\ \frac{x}{z^2}\ \frac{e^{-\lambda x} e^{-\lambda x\sqrt{1/z-1}}}{2\sqrt{1/z-1}}$$

$$= \frac{\lambda}{2z^2}\ \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1-z}}\ \frac{1}{1+\sqrt{1/z-1}} \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda(1+\sqrt{1/z-1}) e^{-\lambda(1+\sqrt{1/z-1})x} dx$$

Siccome l'integrale rappresenta la media di una v.a. esponenziale di parametro $\lambda(1+\sqrt{1/z-1})$, esso vale $[\lambda(1+\sqrt{1/z-1})]^{-1}$. In conclusione, si ottiene:

$$f_Z(z) = \frac{\lambda}{2z^{3/2}}\ \frac{1}{\sqrt{1-z}}\ \frac{1}{1+\sqrt{1/z-1}}\ \frac{1}{\lambda(1+\sqrt{1/z-1})} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{1}{2z(1-z) + \sqrt{z(1-z)}}, \ 0 < z < 1.$$

▷ **Esercizio 2b.11**

(i) Per il Teorema di addizione di v.a. Gaussiane indipendenti, risulta $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 + 1)$.

Consideriamo ora la trasformazione $g : (X, W) \longrightarrow (X, Y)$ con

$$\begin{cases} X = X \\ W = Y - X \end{cases}$$

$$J_{g^{-1}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ |det J_{g^{-1}}| = 1$$

Allora, (v. Esercizio 2b.7, II procedimento) la densità congiunta di X e Y è:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-x)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-x^2/2} e^{-(y-x)^2/2\sigma^2}$$

(ii) Risulta:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma} e^{-x^2/2} e^{-(y-x)^2/2\sigma^2}}{\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2(\sigma^2+1)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma/\sqrt{\sigma^2 + 1}} \cdot e^{\frac{-(x - y/(\sigma^2+1))^2}{2\sigma^2/(\sigma^2+1)}}$$

che è una densità $\mathcal{N}\left(\frac{y}{\sigma^2+1}, \frac{\sigma^2}{\sigma^2+1}\right)$. Pertanto, $E(X|Y = y) = y/(\sigma^2 + 1)$.

(iii) Se $y = \frac{11}{20}$ e $\sigma^2 = 0.1$, risulta $X|Y \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{11}\right)$. Quindi, $P(1/4 < X < 3/4)|Y = 11/20) = P(1/4 < Z < 3/4)$ ove $Z \sim \mathcal{N}(1/2, 1/11)$. Dunque, la probabilità cercata è uguale a

$$P\left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{11}}} < \frac{Z - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{11}}} < \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{11}}}\right) = P\left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{11}}} < W < \frac{\frac{3}{4} - 1/2}{\sqrt{\frac{1}{11}}}\right),$$

dove $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$. In conclusione:

$$P(1/4 < X < 3/4)|Y = 11/20) = \Phi\left(\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{11}}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{11}}}\right) =$$

$$= \Phi(0.82) - \Phi(-0.82)$$

dove $\Phi(t) = P(W \leq t)$ è la funzione di distribuzione di una v.a. $\mathcal{N}(0,1)$. Per la simmetria della densità normale standard si ricava $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$, per cui la probabilità cercata è uguale a $\Phi(0.82) - (1 - \Phi(0.82)) = 2\Phi(0.82) - 1$; dalla tavola della distribuzione normale standard si ottiene $\Phi(0.82) = 0.7938$, per cui il risultato finale è $2 \cdot 0.7938 - 1 = 0.58$.

▷ **Esercizio 2b.12**

Risolviamo l'esercizio per $\lambda = 1$, ovvero supponiamo che X, Y siano indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro 1; ci proponiamo di trovare la densità di $Z = (X-Y)/(X+Y)$. Intanto, osserviamo che risulta $-1 < Z < 1$ quasi certamente.

I procedimento
Per $z \in (-1, 1)$ si ha:

$$P(Z \le z) = P\left(\frac{X-Y}{X+Y} \le z\right) = P\left(Y \ge \frac{X(1-z)}{1+z}\right) = \int\int_E e^{-x}e^{-y}dxdy$$

dove E è l'insieme indicato in figura 7.

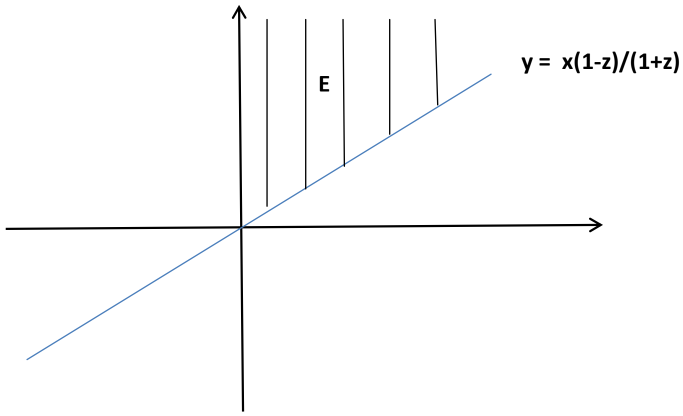


Figura 7

Allora:

$$P(Z \le z) = \int_0^{+\infty} dx \int_{x(1-z)/(1+z)}^{+\infty} dy e^{-x}e^{-y} =$$
$$= \int_0^{+\infty} dx e^{-x}\left(e^{-x(1-z)/(1+z)}\right) =$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-x(\frac{2}{1+z})}dx = \frac{1+z}{2}.$$

Derivando rispetto a z, si ottiene che la densità di Z è $f_Z(z) = 1/2$, per $-1 < z < 1$, ovvero $Z \sim Uni((-1, 1))$.

II procedimento
Consideriamo la trasformazione $g : (X, Y) \longrightarrow (X, Z)$

$$\begin{cases} X = X \\ Z = \frac{X-Y}{X+Y} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X = X \\ Y = \frac{X(1-Z)}{1+Z} \end{cases}$$

con

$$J_{g^{-1}}(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-z}{1+z} & \frac{-2x}{(1+z)^2} \end{pmatrix}, \quad detJ_{g^{-1}}(x,z) = -\frac{2x}{(1+z)^2}$$

La densità congiunta di (X, Z) è allora:

$$f_{(X,Z)}(x,z) = e^{-x}e^{-x(1-z)/(1+z)}\frac{|2x|}{(1+z)^2} = e^{-x}e^{-x(1-z)/(1+z)}\frac{2x}{(1+z)^2},$$

per $x > 0$ e $-1 < z < 1$, altrimenti $f_{(X,Z)}(x,z) = 0$. Pertanto, la densità di Z è, per $-1 < z < 1$:

$$f_Z(z) = \int_0^{+\infty} dxe^{-x(1+\frac{1-z}{1+z})}\frac{2x}{(1+z)^2} = \frac{2}{(1+z)^2}\int_0^{+\infty} e^{-2x/(1+z)}xdx =$$

$$= \frac{2}{(1+z)^2}\frac{1+z}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+z}e^{-2x/(1+z)}xdx.$$

L'integrale è uguale alla media di una v.a esponenziale di parametro $2/(1+z)$, quindi esso vale $(1+z)/2$; pertanto:

$$f_Z(z) = \frac{2}{(1+z)^2}\frac{1+z}{2}\cdot\frac{1+z}{2} = \frac{1}{2}$$

cioé $Z \sim Uni((-1,1))$, come già trovato.

$\triangleright$ **Esercizio 2b.13**

Si ha:

$$P(Z \le z) = \int\int_{[0,1]^2\cap\{y\le zx\}}(x+y)\ dxdy$$

ove l'insieme $[0,1]^2 \cap \{y \le zx\}$ è indicato nella figura 8 (si noti che occorre differenziare il caso $0 \le z \le 1$ da quello in cui $z > 1$).

(i) $0 \le z \le 1$

$$P(Z \le z) = \int_0^1 dx\int_0^{zx}(x+y)dy = \int_0^1 dx(zx^2 + z^2x^2/2) = z/3 + z^2/6$$

(ii) $z > 1$

$$P(Z \le z) = \int_0^1 dy\int_{y/z}^1(x+y)dx = \int_0^1 dy\Big[x^2/2+yx\Big]_{y/z}^1 = \ldots = 1-\frac{1}{6z^2}-\frac{1}{3z}.$$

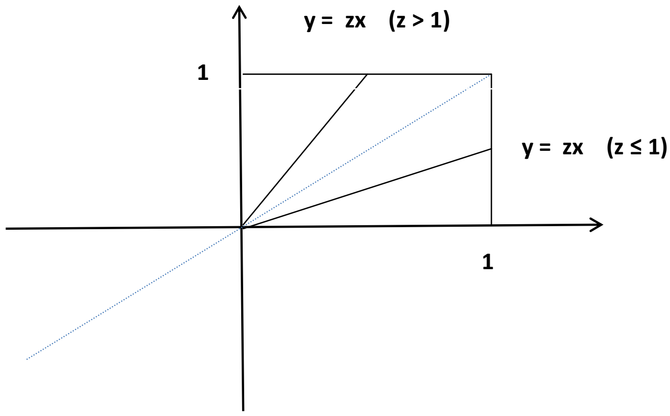


Figura 8

Derivando, si ottiene la densità di Z :

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z & \text{se } 0 \le z \le 1 \\ \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{3z^2} & \text{se } z > 1. \end{cases}$$

▷ **Esercizio 2b.14**
Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y} \mathbf{1}_{\{0<x<y\}}(x,y) =$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = \Big[-e^{-y} \Big]_x^{+\infty} = e^{-x}, \text{ se } x > 0.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-y} \mathbf{1}_{\{0<x<y\}}(x,y) =$$

$$= \int_0^y e^{-y} dx = y e^{-y}, \text{ se } y > 0$$

Inoltre, se $Z = Y - X$, risulta quasi certamente $Z \ge 0$ e, per $z \ge 0$:

$$P(Z \le z) = P(Y - X \le z) = \int \int_E e^{-y} \mathbf{1}_{\{0<x<y\}}(x,y) dx dy,$$