Dinamica 1 (Dinamica del punto)

giovedì 27 febbraio 2025 17:47

In questa lezione andiamo ad introdurre i concetti fondamentali della meccanica (basi della dinamica). In questa branca si studia il moto dei **corpi puntiformi** (collocabile in un punto dello spazio). La dinamica nasce da questa osservazione : <u>chi fa variare la velocità? E quali sono le cause che provocano ciò?</u>. Quindi si parla di dinamica quando voglio collegare le variazioni di stato di moto di un corpo in un sistema a chi le genera. Osservazione : sono le interazioni tra sistemi , quelle che producono variazioni di moto di un corpo. Quindi cominciamo questa trattazione andando a vedere una grandezza fisica che esprime e quantifica l'interazione tra sistemi fisici : la **forza**. Andiamo quindi a fare un breve riassunto :

1. Le interazioni tra sistemi fisici portano ad un cambiamento della velocità , i quali cambiamenti sono dovute alle FORZE :
   a. $\vec{F}$ (forza)
   b. La quale grandezza fisica è un vettore
   c. **Questa grandezza fisica esprime l'azione dovuta ad interazione tra sistemi**
      i. Quindi sembrerebbe che la variazione di stato di moto sia proporzionale all'azione generata all'interazione tra sistemi (Newton)
      ii. $\vec{a} \propto \vec{F}$ $\rightarrow$ solo per OI (osservatori inerziali)
2. Esiste una classe di osservatori inerziali per i quali "un corpo non soggetto ad azione di forze non varia la sua velocità" , il quale prende il nome di **principio di inerzia**
3. <u>Equilibrio tra forze</u> -> il principio di inerzia è condizione sufficiente ma non necessaria affinché non vari la velocità .

Quindi riassumendo il tutto e facendo le seguenti considerazioni si arriva al secondo principio della dinamica :

Per un OI, $\vec{F}$ e la conseguente $\vec{a}$ impressa al corpo
- stessa dir. e verso
- sono proporzionali $\Rightarrow$ cost. di prop. : m (massa inerziale)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Dinamica 2 (Massa inerziale e validità della seconda legge di Newton)

giovedì 27 febbraio 2025 19:06

Facciamo un riepilogo:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m}$$

Dove ricordiamo che la massa inerziale (m) è uno scalare puro . La quale è proprietà intrinseca e ne caratterizza l'effetto della forza applicata. Quindi la definiamo come la proprietà / caratteristica che i sistemi hanno per poter volere variare il loro stato di moto. In altri termini : **esprime la capacità che i sistemi hanno di opporsi al volere/potere variare il loro stato di moto**. Quindi m misura **l'inerzia** : **propensione che i corpi hanno di variare il loro stato di moto** . Nota : la seconda legge di newton vale solo per osservatori inerziali. In questa forma si nota che m si suppone costante. Quindi andiamo a fare un breve riepilogo:

1. Il primo principio definisce per chi vale il secondo principio (osservatori inerziali)
2. Nella formula sopra , per F si intende come la risultate delle forze applicate in quel sistema : quindi in generale F coincide con la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono sul sistema
   a. $\vec{F} \equiv \vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i$

Dinamica 3 (Equilibrio)

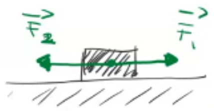
domenica 2 marzo 2025 12:35

Per un osservatore inerziale osserviamo che se nessuna forza agisce sul corpo , non vi è accelerazione (lo stato di moto del corpo non cambia) . Ma il viceversa è vero (accelerazione nulla implica che non ci sono forze)?? **Chiaramente la risposta è no!!** Quindi questa osservazione porta a definire **l'equilibrio** : (accelerazione nulla) .

$$\underline{\text{Equilibrio}}$$
$$\vec{a} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Vediamo un esempio :

ES



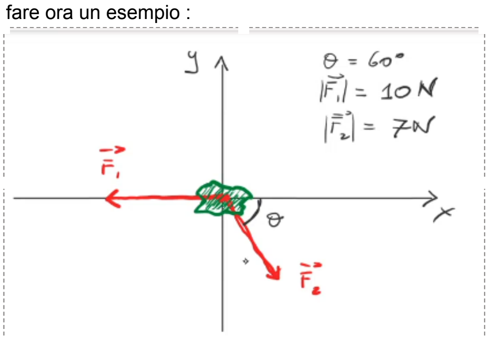
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Tornando all'equilibrio si hanno due tipi :

1. Statico nel quale sia accelerazione e velocità sono nulle
2. Dinamico nel quale l'accelerazione è nulla ma velocità non nulla

Se il moto non cambia o non ci sono forze (primo principio della dinamica) oppure la risultante delle forze è nulla (secondo principio della dinamica).

Andiamo a fare ora un esempio :



Dove "N" intende l'unità di misura chiamata Newton .

$$\left.\begin{aligned}[m] &= kg \\ [\vec{a}] &= m/s^2\end{aligned}\right\} \; [\vec{F}] = kg\, m/s^2 = [N]$$

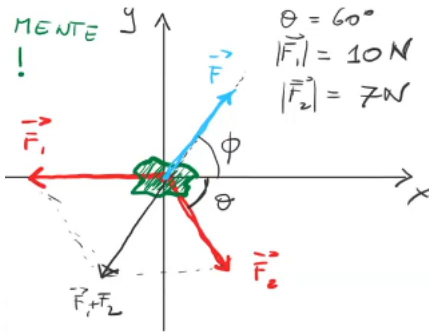
Quindi il problema è il seguente: dato il <u>corpo inizialmente fermo</u> quale forza (F) dobbiamo applicare perché il corpo rimanga fermo ?

SOLUZIONE :

Per avere il corpo fermo , andiamo a ricordare l'equilibrio :

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

Quindi graficamente si arriva a questa soluzione :



Mentre ora andiamo a vederlo per componenti :

$$\begin{cases} -F_1 + F_2 \cos\theta + F\cos\phi = 0 \\ F\sin\phi - F_2 \sin\theta = 0 \end{cases}$$

Dove la prima equazione rappresenta la caratterizzazione del moto lungo asse X , mentre la seconda lungo asse Y. Perché entrambe sono uguali a 0? I**n quanto per la condizione che il corpo rimanga fermo , l'accelerazione deve essere nulla.**

$$\vec{a} = 0 \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{cases}$$

Andiamo ora a risolvere il nostro sistema di due equazioni in due incognite :

$$\begin{cases} -F_1 + F_2 \cos\theta + F\cos\phi = 0 \\ F \operatorname{sen}\phi - F_2 \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -F_1 + F_2 \cos\theta + F_2 \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\phi} \\ F = F_2 \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\phi} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\phi = \dfrac{F_2 \cos\theta}{F_1 - F_2 \cos\theta} = 0{,}933.. \\ F = F_2 \operatorname{sen}\theta / \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = 43° \\ F = 8{,}9\ N \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y \quad \begin{cases} F_x = F\cos\phi = 6{,}5\ N \\ F_y = F \operatorname{sen}\phi = 6{,}1\ N \end{cases}$$

Dove alla fine una volta calcolato il valore , si va a vedere / caratterizzare il moto lugo gli assi .

Dinamica 4 (Ripasso + quantità di moto)

martedì 4 marzo 2025   09:40

Facciamo un breve riepilogo : facciamo una precisazione su principio di inerzia / prima legge dinamica , ovvero in quanto la prima della dinamica **non** è una e vera propria legge : è più una sorta di principio (non deve essere dimostrato) . Quindi il primo principio dice ciò : **le interazioni tra sistemi generano forze** (causa variazione moto di un corpo) sempre e solo se si parla di **osservatori inerziali (vale seconda legge di Newton)**. <u>Ricordiamo inoltre che nella seconda legge : F=mxa , la F viene intensa come risultante delle forze applicate a quel corpo.</u> Mentre la massa è una grandezza fisica introdotta per quantificare **l'inerzia** di un corpo : <u>la capacità che un corpo ha di opporsi alla variazioni di stato di moto quando sono sottoposti a forze esterne.</u> Inoltre ricordiamo anche che la massa inerziale (m) **è uno scalare** (un numero la quantifica in maniera esaustiva) , l'accelerazione **è un vettore** ed anche la forza **è un vettore**. Quindi la seconda legge di Newton mette in relazione due vettori (forza e accelerazione) attraverso uno scalare m -> **legge vettoriale.** Torniamo ora anche all'**equilibrio** statico e dinamico : in dinamica si ha equilibro se il sistema che ha <u>accelerazione 0 -> velocità 0 (statico)</u> , ma se <u>accelerazione 0-> velocità !=0 (possibile movimento del corpo ma non varia il suo stato di moto)</u>->**la velocità non varia né in modulo né in direzione né in verso**. Andiamo ora a vedere la seconda legge di Newton in modo più generale : poniamoci una domanda : **quali sono le azioni necessarie per produrre/variare una variazione di moto di un corpo? La condizione necessaria à la conoscenza del moto** (viene descritto/dipende dalla velocità). **Inoltre anche la massa fornisce informazioni.** Quindi il possibile legame tra velocità e massa di un corpo prende il nome di **quantità di moto di un corpo**.

$$\boxed{\vec{p} \triangleq m\vec{v}}$$

La quale ricordando la seconda legge di Newton e riscrivendola in termini di variazioni di velocità nell'unita di tempo :

$$\left(\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

Si arriva alla seguente ridefinizione della forza :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Attenzione però (<u>forma differenziale</u>): la seconda legge di Newton riscritta cosi **vale anche per corpi a massa non costante** . Se invece sono determinato a determinare le cause delle variazioni dello stato di moto che osservo (<u>problema diretto</u>) si riesce a determinare l'azione prodotta su quel corpo in quell'istante :

$$\text{Moto} \quad \vec{p} \Rightarrow \vec{F}$$

Inversamente : posso conoscere istante per istante la forza che agisce su un corpo ricavando la variazione di quantità di moto ? Si

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)\,dt \xrightarrow[\Delta t \text{ finito}]{\text{su}} \int_{\vec{p}(0)}^{\vec{p}(t)} dp = \int_0^t \vec{F}(t)\,dt \Rightarrow \underset{\boxed{\text{IMPULSO}}}{\vec{J}} = \underbrace{\int_0^t \vec{F}(t)\,dt}_{\text{azione in un tempo finito } t} = \Delta\vec{p}$$

Questa relazione viene chiamata **teorema dell'impulso** : quantifica azione che la forza sviluppa agendo su un corpo agendo su intervallo di tempo definito :

$$\boxed{\vec{J} = \int_0^t \vec{F}(t)\,dt = \Delta\vec{p}}$$

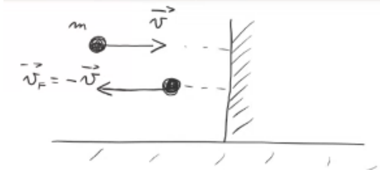
Andiamo a fare un breve riepilogo :

1. L'impulso J esprime azione della forza nel tempo finito che produce una variazione di quantità di moto . <u>Nota J è vettore.</u>
2. Se la massa è costante ed usando il teorema dell'impulso :
   a. $\text{Se } m = \text{cost} \Rightarrow \vec{J} = m\Delta\vec{v} \quad \text{volendo } \vec{J} = m(\vec{v}_f - \vec{v}_{in})]$
3. Usando il principio d'inerzia : la variazione della quantità di moto è nulla (**conservazione della quantità di moto**)
   a. $\vec{F}_R = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p} = 0 \quad (\text{conservazione della quantità di moto})$
   b. Il quale rappresenta <u>estensione del principio di inerzia</u>
4. Se la forza è costante :
   a. $\vec{J} = \Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F}(t)\,dt \xrightarrow{\text{Se } \vec{F} = \text{cost}} \boxed{\Delta\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t}$

5. Se conosco la quantità di moto , o meglio la variazione di moto (si suppone un effetto medio):

   a. $$\vec{F}_m = \frac{1}{\Delta t} \underbrace{\int_0^{t'} \vec{F}(t)\,dt}_{\Delta \vec{p}} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Vediamo ora un esempio :



$$v = 2\ m/s$$
$$m = 0{,}05\ kg$$
$$\Delta t = 10^{-3}\ s$$

DOMANDA: qual è stata la Forza media che ha agito sul corpo (palletta) per produrre questo suo cambiamento di moto?

SOLUZIONE:

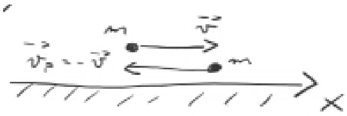
$$\vec{J} = \underbrace{\int_0^{t} \vec{F}(t)\,dt}_{\vec{F}_m \Delta t} = \Delta \vec{p} = \underbrace{m \Delta \vec{v}}_{= m(\vec{v}_F - \vec{v})} \Rightarrow \vec{F}_m \Delta t = -2m\vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_m = -\frac{2m\vec{v}}{\Delta t}}$$

Quindi il vettore F_m ha stessa direzione di v , ma verso opposto . Per quanto riguarda il modulo invece si ha che :

$$|\vec{F}_m| = \frac{2mv}{\Delta t}$$

E facendo i calcoli si ha che è uguale a 200 N.

Andiamo ora a vederlo per componenti (asse y ed asse z non interessano -> moto unidimensionali) :



Il quale lungo x :

lungo x $$F_{m_x} \Delta t = m[\underbrace{(-v)}_{v_{F_x}} - \underbrace{v}_{v_{in_x}}] \Rightarrow F_{m_x} = -2mv/\Delta t$$

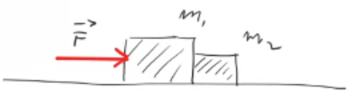
$$\vec{F}_m = \left.\begin{cases} F_{m_x} = -\frac{2mv}{\Delta t} \\ F_{m_y} = 0 \\ F_{m_z} = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_m = -\frac{2mv}{\Delta t}\hat{u}_x}$$

Dinamica 5 (Terza legge Newton -> principio azione / reazione)

martedì 4 marzo 2025 11:33

- <u>Questa legge va a studiare i corpi come generatori di movimenti e non passivi (primo e secondo).</u> Questo principio dice che : **dati due corpi interagenti (corpo in grado di produrre azione su altro) 1 e 2 , la forza F_{12} (forza con cui corpo 1 agisce su 2) , è uguale in modulo e direzione , ma opposta in verso a quella esercitata da 2 a 1 F_{21} : $F_{12}=(-F_{21})$**.

Andiamo ora a vedere un esempio:



$m_1 = 3kg$
$m_2 = 2kg$

Descriviamo ora le equazioni, usando la terza legge di Newton :

$$\begin{cases} \text{Su } m_2 & \vec{F}_2 = \vec{F}_{12} \\ \text{Su } m_1 & \vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{F}_{21} \end{cases} \xRightarrow{\text{III l. di N.}} \vec{F}_1 = \vec{F} - \vec{F}_2$$

Mentre usando la seconda :

$$\text{II l. di N.} \begin{cases} \vec{F}_1 = m_1 \vec{a} \\ \vec{F}_2 = m_2 \vec{a} \end{cases} \Longrightarrow \left(\vec{F}_2 = \frac{m_2}{m_1} \vec{F}_1 \right.$$

Quindi facendo il sistema di due incognite :

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \vec{F} - \vec{F}_2 \\ \vec{F}_2 = \frac{m_2}{m_1} \vec{F}_1 \end{cases}$$

Arrivando alla seguente conclusione (vedendo interazione mutua tra i corpi):

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F} \\ \vec{F}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{F}_2| = 4,8\ N \\ |\vec{F}_1| = 7,2\ N \end{cases}$$

Dinamica 6 (Esercizi vari)

martedì 4 marzo 2025 14:25

DATI:

$R = 1\ m \qquad \vec{\alpha} = \text{cost} \qquad |\vec{\alpha}| = 0,40\ rad/s^2$

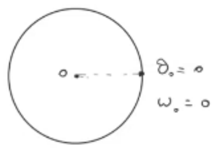
E dobbiamo trovare :

1) t_F per un giro

2) $\vec{v}_F$

3) $\vec{a}_F$

SOLUZIONE:



Passando ai calcoli :

lunedì 22 marzo 2021 12:33

$$\begin{cases} \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega(t) = \alpha t \end{cases} \quad \begin{cases} \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ v(t) = \alpha R t \end{cases} \xrightarrow{\theta_F = 2\pi} \begin{cases} \boxed{t_F = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} = 5.6\ s} \\ v_F = \sqrt{4\pi\alpha}\ R = 2.24\ m/s \end{cases}$$

$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{R}|$

Quindi per rispondere al punto 2 : calcolo il vettore e ricordiamo che la componente normale è nulla :

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{v}_F = \sqrt{4\pi\alpha}\ R\ \hat{u}_T \\ &\text{con} \quad |\vec{v}_F| = 2.24\ m/s \end{aligned}}$$

Invece per rispondere al punto 3 : andiamo a vedere che accelerazione ha entrambe le componenti (sia quella normale che quella tangenziale) :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$\vec{a}_F = \alpha R\ \hat{u}_T + 4\pi\alpha R\ \hat{u}_N$$

$$|\vec{a}_F| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = 5.04\ m/s^2$$

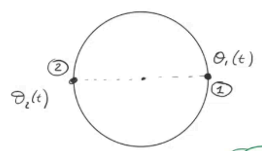
Esercizio 2:

lunedì 22 marzo 2021 12:46

Velocità angolari costanti

(1) ① raggiunge ② dopo 2 giri $\Rightarrow$ v_1 ?

$(v_2 = 40 km/h)$



$$\begin{cases} \theta_1(t) = \omega_1 t \\ \theta_2(t) = \pi + \omega_2 t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \theta_1(t^*) = 4\pi \\ \theta_2(t^*) = \pi + 4\pi\frac{\omega_2}{\omega_1} \end{cases}$$

$$\theta_1(t^*) = \omega_1 t^* = 4\pi \Rightarrow t^* = \frac{4\pi}{\omega_1}$$

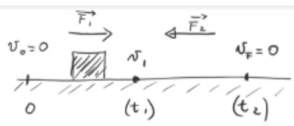
$$\Rightarrow \boxed{4\pi = \pi + 4\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

$\Downarrow \quad \omega = v/R$

$$\boxed{v_1 = \frac{4}{3}v_2 = 53.3\ km/h}$$

Esercizio 3 (impulso):

$$\vec{F} = d\vec{P}/dt \qquad \vec{J} = \int_0^t \vec{F}(t)\,dt = \Delta\vec{P}$$



Sapendo che $|\vec{F_1}| = 16N$, $t_1 = 3s$, $t_2 = 9s$

- Determinare F_2

SOLUZIONE:

$\boxed{\text{tratto} \quad 0 \le t \le t_1}$ $\quad \vec{J}_1 = \int_0^{t_1} \vec{F}_1\, dt = \Delta \vec{p} \xrightarrow{\vec{F}_1 = cost} \vec{F}_1 t_1 = m \vec{v}_1$

$\Delta \vec{p} \rightarrow m(\vec{v}_1 - 0)$

$\boxed{\text{tratto} \quad t_1 \le t \le t_2}$ $\quad \vec{J}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2\, dt = \Delta \vec{P}_{t_1, t_2} \Longrightarrow \vec{F}_2 (t_2 - t_1) = -m \vec{v}_1$

Quindi :

$$\boxed{\vec{F}_2 = -\frac{t_1}{t_2 - t_1} \vec{F}_1}$$

dove $|\vec{F}_2| = 8N$

dir $\rightarrow$ di $\vec{F}_1$

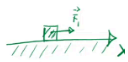
verso $\rightarrow$ opposto a $\vec{F}_1$

Facendo lo steso ragionamento , ma considerando le accelerazioni :

lunedì 22 marzo 2021 13:16

① $\boxed{0 \le t \le t_1}$ $\quad \vec{F}_1 = m \vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_1 = \vec{F}_1 / m \rightarrow \boxed{\vec{v}(t_1) = \vec{v}(0) + \int_0^{t_1} \vec{a}_1(t)\, dt}$

$\vec{a}_1 \begin{cases} a_{1x} = F_{1x}/m = F_1/m \\ a_{1y} = 0 \\ a_{1z} = 0 \end{cases}$ $\quad v_x(t_1) = v_x(0) + \int_0^{t_1} a_{1x}\, dt$, con $v_x(t_1) = v_1$, $v_x(0) = 0$, $a_{1x} = F_1/m$



$\Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{F_1}{m} t_1}$

② $t_1 \le t \le t_2$ $\quad \vec{a}_2 \begin{cases} a_{2x} = F_{2x}/m \\ a_{2y} = 0 \\ a_{2z} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_x(t_2) = v_x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a_{2x}\, dt$, con $v_x(t_2) = 0$, $v_x(t_1) = v_1$, $a_{2x} = F_{2x}/m$

$\Rightarrow \frac{F_{2x}}{m}(t_2 - t_1) = -v_1 \Longrightarrow F_{2x} = -\frac{t_1}{(t_2 - t_1)} F_1 = -8N$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_2 = -\frac{t_1 F_1}{(t_2 - t_1)} \hat{u}_x}$

Dinamica 7 (Forze e moto)

martedì 4 marzo 2025 15:18

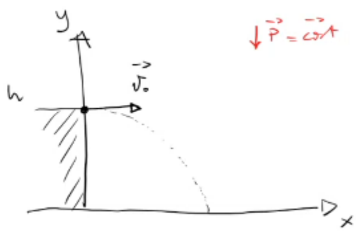
Andiamo a vedere un esempio :

1. Massa puntiforme di 6kg con legge oraria :
   a. $\vec{r}(t) = (3t^2-6t)\hat{u}_x - 4t^3\hat{u}_y + (3t+2)\hat{u}_z$
   b. Quale è la Forza che agisce sul corpo ?
      i. $\begin{cases} a_x = d^2x/dt^2 = 6\ m/s^2 \\ a_y = -24t \\ a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = 36\hat{u}_x - 144t\hat{u}_y$
      ii. **Ricordando che accelerazione è la derivata seconda dello spostamento**

Vediamo ora una particolare forza costante : la **FORZA PESO** . Questa forza è il prodotto tra una massa costante ed una forza costante , diventando anche lei costante.

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{cost}$$

<u>La quale è una forza che provoca un moto uniformemente accelerato.</u> Andiamo a studiare i vari casi :

1. F=0->a=0-> MRU (moto rettilineo uniforme)
2. F=costante->a=costante-> MUA (moto uniformemente accelerato)
   a. Esempio :
      i. 

      ii. Andiamo a studiare il moto lungo gli assi:
         1. lungo y $\quad \vec{F}_y = \vec{P} = \vec{cost} \Rightarrow \boxed{y(t) = h - \frac{1}{2}at^2}$

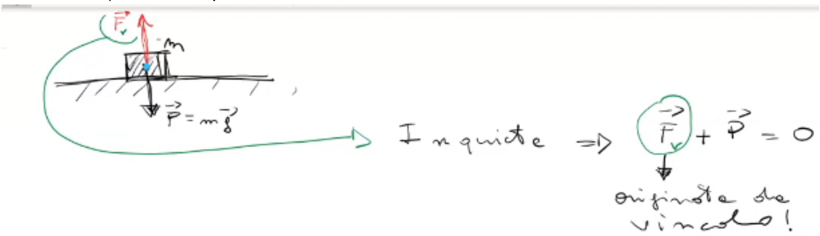
            lungo x $\quad \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = v_0 t}$
3. Applichiamo il secondo principio della dinamica e scomponiamo accelerazione :
   a. $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{dv}{dt}\hat{u}_T + m\frac{v^2}{R}\hat{u}_N$

      $\vec{F}_N \neq 0 \longrightarrow$ moto curvilineo
4. $F=F_n$ con il raggio di curvatura costante -> FORZA CENTRIPETA (verso il centro)

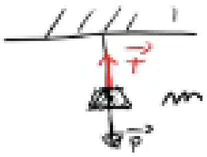
Dinamica 8 (Vincoli)

martedì 4 marzo 2025 16:44

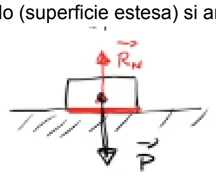
Per vincolo si intende un sistema la cui presenza produce delle limitazioni al cosiddetto moto libero (moto previsto in base all'azione di forze note che interagiscono con quel corpo).Vediamo un esempio : un oggetto poggiato sul pavimento. Questo oggetto è normalmente sottoposto alla forza peso (centripeta) , ma rimane in equilibrio grazie alla seconda legge di Newton : <u>per un osservatore inerziale</u> se il corpo non ha moto (accelerazione nulla) la risultante delle forze deve essere zero (o non ci sono forze oppure la risultante delle forze è nulla) . Quindi si parla di **reazione vincolare** :



Andiamo ora a vedere i vincoli (sistemi che producono deviazioni dal moto libero previsto) di contatto che possono essere puntiformi o superficiali. Nel primo caso si è nella seguente situazione :



Mentre nel secondo (superficie estesa) si arriva a :



Un tipo di vincolo siffatto produce effetti lungo la direzione ortogonale al contatto tra le due superfici ed effetti lungo la direzione parallela alle superfici. Ognuno di questi effetti viene studiato in modo separato dall'altro. Facciamo un riepilogo :

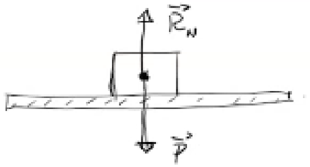
1. Un vincolo è una limitazione del moto libero
2. I vincoli si manifestano con delle forze (chiamate Reazioni vincolari)
3. Si manifestano in presenza di altre forze , quindi si parla di reazione
4. In meccanica questi vincoli sono di contatto puntiforme e/o superficie.
5. Per quello che riguarda quelli di contatto con superficie estesa sono prodotti ortogonali alla superficie di contatto ed effetti paralleli alla superficie di contatto.
6. I vincoli quindi producono forza di reazione vincolare che può essere normale al piano (contatto) R_n oppure quelle parallele al piano di contatto $F_{a\ (a=\text{attrito})}$ le quali si distinguono se il corpo è in quiete (attrito statico) oppure agiscano su corpo in moto (attrito dinamico)

Dinamica 9 (Forza di reazione normale)

martedì 4 marzo 2025 17:19

Questa forza chiaramente è prodotto dalla reazione vincolare. Questa forza viene indicata così : R_n oppure N.

Andiamo a vedere in dettaglio con l'esempio dell'ascensore:



Studiamolo il fenomeno lungo le componenti : solo asse y.

1. Caso 1 (ascensore fermo) : accelerazione nulla oppure moto a velocità costante si ha che $\mathbf{R_n}$**-mg=0->** $\mathbf{R_n}$**=mg** , quindi si ha che l'effetto del vincolo genera una forza uguale in direzione ed opposta in verso.
2. Caso 2 (ascensore sale) : accelerazione diretta verso l'alto ed accelerazione è uguale a g e si ha $\mathbf{R_n}$**-mg=ma** (applicando il secondo principio di Newton) -> $\mathbf{R_n}$**=m(g+a)** . Quindi la componente normale della forza di reazione deve essere in grado di produrre accelerazione di stesso verso ma direzione opposta .
3. Caso 3(ascensore scende): accelerazione diretta verso il basso e si ha $\mathbf{R_n}$**-ma=-ma->** $\mathbf{R_n}$**=m(g-a)** . Da notare che accelerazione è minore di g!
4. Caso 4(caduta libera) : l'accelerazione è uguale a –g : il piano scende in caduta sotto effetto forza peso . Quindi ho $\mathbf{R_n}$**-mg=-mg->** $\mathbf{R_n}$**=0**
5. Caso 5 (spinto verso il basso): accelerazione in modulo maggiore di g : **nessun contatto -> nessuna reazione vincolare**

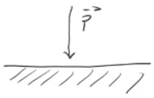
Dinamica 10 (Forza peso)

martedì 4 marzo 2025 18:10

Questa forza viene descritta così:

$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$

La quale forza è costante. Vediamo ora delle proprietà facendo un riepilogo :

1.  $|\vec{P}| = |m\,\vec{g}| \longrightarrow |\vec{g}| \cong 9{,}81\ m/s^2$
2. Notiamo che g dipende sia dalla latitudine e da altitudine (in genere vengono trascurati) ,quindi trattiamo g come una costante!
3. <u>Per peso si intende la forza peso</u> (modulo di una forza e non di una massa). Si esprime in Newton (non in kg)

Dinamica 11 (Forze attrito statico e dinamico)

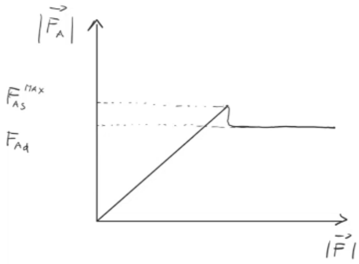
martedì 4 marzo 2025 19:01

Andiamo a vedere un esempio pratico :

$\downarrow \vec{P} = m\vec{g}$

Assumiamo che $\vec{F} \equiv \vec{F}_{//}$ parallela al piano

Si osserva che :

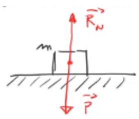


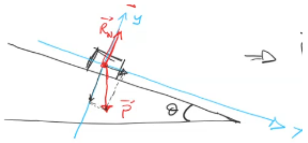
Dove notiamo la seguente cosa : sul corpo inizialmente fermo applico una forza via via crescente. Finché tale forza non è superiore a quella di attrito statico massima F_{as}^{max} il corpo non si muove , ma dopo che la forza supera questo valore il corpo si comincia a muovere , ma comunque è soggetto ad una forza che si oppone al movimento : la forza di attrito dinamica F_{ad}^{max} .

Vediamo ora 3 casi possibili :

1. Quiete :
   a. finché $\longrightarrow$ $F \leqslant F_{As}^{max} = \mu_s R_N$
   b. Quindi la forza di attrito statico è proporzionale al modulo della reazione normale , attraverso un coefficiente di proporzionalità μ_s **, il quale rappresenta il coefficiente di attrito statico**
   c. Quindi in quiete deve essere che accelerazione è pari a 0
   d. $\boxed{\vec{F}_{As} = -\vec{F}}$
2. In moto :
   a. da quando $\longrightarrow$ $|\vec{F}| > F_{As}^{max}$
   b. Qui la forza che si oppone al moto è quella di **attrito dinamico (verso opposto)**
   c. $\Rightarrow$ in moto $\vec{F}_{Ad} = -\mu_d R_N \hat{u}_v$
   d. **Dove μ_d rappresenta coefficiente di attrito dinamico**
   e. $\vec{F}_{Ad}$ orientata come $-\vec{v}$
   f. • $|\vec{F}_{Ad}|$ non dip. dalla sup. di contatto S'
   g. $|\vec{F}_{Ad}|$ non dip. da $|\vec{v}|$

Nota : $\mu_d < \mu_s$. Entrambi i coefficienti che dipendono da una superficie o dall'altra, ma da composizione delle superfici. Quindi sono coefficienti caratteristici dell'accoppiamento tra due particolari superfici che sono a contatto.
Si parla di F_a Radente se si parla di entrambi i casi : quiete e moto ed è una forza che si oppone alla direzione del moto ed altra si oppone alla direzione che il moto avrebbe se (statica) se venisse prodotto sotto questa forza : questa forza si oppone al moto relativo tra i piani. Andiamo ora a vedere degli esempi :

1. Piano inclinato senza attrito :
   a. 

   $\Rightarrow \vec{R}_N + m\vec{g} = 0 \Rightarrow |\vec{R}_N| = mg$
   b. Attenziono però al piano : è orizzontale
2. Piano inclinato:
   a. 

   $\Rightarrow$ i

b. Che andando a studiarlo nel sistema di coordinate e lungo gli assi:

c. $\boxed{\vec{R}_N + m\vec{g} = m\vec{a}}$ calcolare R_N e a

d. lungo y $\quad -mg\cos\theta + R_N = 0$

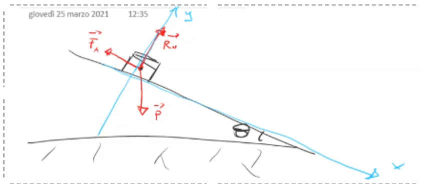
e. In quanto il corpo non si allontana dall'asse y -> accelerazione 0 . Quindi per il secondo principio della dinamica, si ha il prodotto m*a =0

f. lungo x $\quad mg\,\text{sen}\,\theta = ma$

g. Quindi il risultato è il seguente :

h. $\begin{array}{l} \text{lungo y} \\ \text{lungo x} \end{array} \begin{cases} -mg\cos\theta + R_N = 0 \\ \cancel{m}g\,\text{sen}\,\theta = \cancel{m}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_N = mg\cos\theta \\ a = g\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

3. Piano inclinato con forze attrito :

a. 

b. Quindi dati massa in movimento , μ_d, angolo teta determinare il modulo dell'accelerazione e della reazione normale al piano

c. II L. di N. $\Rightarrow \boxed{\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_A = m\vec{a}}$

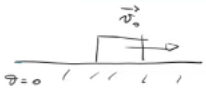
d. Andiamo ora ad introdurre il sistema di coordinate

e. $\begin{array}{l} y \\ x \end{array} \begin{cases} -mg\cos\theta + R_N = 0 \\ mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_d R_N = ma \end{cases}$

f. Quindi risolvendolo si arriva a

g. $\begin{cases} R_N = mg\cos\theta \\ a = g(\text{sen}\,\theta - \mu_d\cos\theta) \end{cases}$

4. Piano inclinato con angolo nullo e velocità iniziale non nulla e pari a v_0. Dopo quanto tempo si ferma? (MUA->moto uniformemente accelerato)

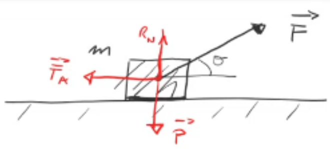
a. 

b. Il quale andandolo a studiare nel sistema di coordinate

c. $v_x(t) = v_0 - \mu_d g t$

$0 = v_0 - \mu_d g t_F \Rightarrow \boxed{t_F = \dfrac{v_0}{\mu_d g}}$

5. Reazione normale al piano e risultanti parallela e normale

a. 

b. Determinare il modulo della forza affinché il moto sia rettilineo uniforme (velocità costante -> accelerazione =0)

c. $\boxed{\vec{F} + \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_A = 0}$

d. Il quale considerandolo in un sistema di assi coordinati

e. $\begin{array}{l} y \\ x \end{array} \begin{cases} F\,\text{sen}\,\theta + R_N - mg = 0 \\ F\cos\theta - \mu_d R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F = \dfrac{\mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d\,\text{sen}\,\theta}}$

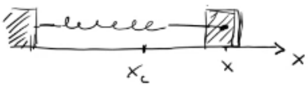
f. Nota :

g. Se $\theta = 0 \Rightarrow F = \mu_d mg$

Dinamica 12 (Forza elastica + moto armonico)

giovedì 6 marzo 2025 14:53

Questa forza viene identificata come F_e. È caratterizzata dai seguenti punti :

1. Direzione della forza : è diretta verso un punto c di posizione l_c
2. Il modulo è proporzionale a il modulo di delta l , dove delta l è il vettore differenza tra la posizione del punto che è sottoposto ad azione forza (l) e la posizione del centro verso il quale il puto è spinto/richiamato
   a. Modulo $|\vec{F}_e| \propto |\Delta\vec{\ell}|$ dove $\Delta\vec{\ell} = \vec{\ell} - \vec{\ell}_c$ e $\vec{\ell}$ posizione del punto materiale
   b. $\Rightarrow \vec{F}_e = -k\Delta\vec{\ell}$
3. **Di solito in questo moto consideriamo come generatrice di questa forza la <u>molla elastica</u>(molla ideale) in quanto riesce a produrre/generare forza elastica di richiamo che ha forma lineare rispetto a delta l e secondo perché viene considerata come molla priva di massa**.
4. Quindi in generale e scomponendolo lungo il sistema di riferimento "solito"
   a. $\vec{F}_e = -k\Delta\vec{\ell}$ S.d.c.
      $F_{ex} = -k\Delta x = -k(x-x_c)$
      $F_{ey} = -k\Delta y = -k(y-y_c)$
      $F_{ez} = -k\Delta z = -k(z-z_c)$
   b. Generalmente si studia lungo una sola e certa direzione (moto unidirezionale) e centro di oscillazione 0
   c. Quindi si va a studiare il moto così:
      i. 

      ii. E lungo gli assi (nel sistema di riferimento)
      iii. $\vec{F}_e$: $F_{ex} = -kx$, $F_{ey} = 0$, $F_{ez} = 0$
      iv. Dove x_c è nulla in quanto è stato scelto cosi (x_c=0)
      v. Per quanto riguarda l'accelerazione , <u>viene generata quando rilascio la molla in seguito a trazione/compressione della stessa</u>
         1. $\vec{a}$: $a_x = \ddot{x}$, $a_y = 0$, $a_z = 0$
         2. **Ricordando che l'accelerazione è la derivata seconda della posizione**
      vi. La quale legge quindi studiandola lungo asse x diventa
         1. lungo x $\quad F_{ex} = m a_x \Rightarrow \boxed{-kx = m\ddot{x}}$
   d. Quindi che tipo di moto è /verrà generato (**introduco w [pulsazione] -> si semplifica da differenziale ad armonico semplice**) :
      i. definendo $\omega \triangleq \sqrt{k/m} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$
      ii. <u>Mentre con la k si intende la costante elastica della molla</u>
      iii. <u>È un moto periodico</u> : dopo un tempo T si hanno gli stessi valori
      iv. moto periodico
      Dopo T stesse $\begin{cases}\vec{r}\\ \vec{v}\\ \vec{a}\end{cases} \underset{\text{dimostreremo}}{\Longrightarrow} \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m/k}}$ periodo
      v. il periodo è inversamente alla frequenza (numero di oscillazione al secondo)

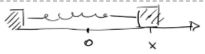
Andiamo ora a vedere le leggi orarie di questo moto: **hanno funzioni in forma di seno/coseno:**

Leggi orarie del moto armonico
$$\begin{cases} x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi) \\ v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Dove **A=ampiezza dell'oscillazione, w=pulsazione ,t=tempo e fi (fase iniziale) , mentre argomento del seno/coseno si chiama fase.** Quindi dalle soluzioni generali , <u>e conoscendo le</u>

condizioni generali, si arriva alle soluzioni particolari (valori iniziali di ampiezza e fase). vediamo un esempio :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$



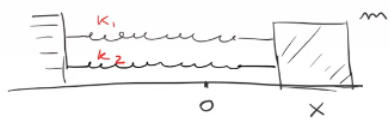
$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t+\phi) \\ v(t) = \omega A\cos(\omega t+\phi) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = A\sin\phi \\ 0 = \omega A\cos\phi \end{cases} \xrightarrow[\text{di valori soluz.}]{\text{2 coppie}} \begin{cases} x_0 = A \\ \phi = \pi/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = -A \\ \phi = -\pi/2 \end{cases}$$

Dove wt=0 in quanto c'è la condizione iniziale t=0

NOTA

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\pi/2) &= \cos\alpha \\ \operatorname{sen}(\alpha-\pi/2) &= -\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0\cos\omega t \\ v(t) = -\omega x_0 \operatorname{sen}\omega t \end{cases}$$

Andiamo a vedere un esempio:



$$k_1 = 0{,}8\ N/m \qquad k_2 = 0{,}4\ N/m \qquad m = 0{,}3\ kg \qquad \text{Determin.} \begin{cases} k_{eff} \\ T \\ \nu \end{cases}$$

Dove per k_{eff} si intende una sola molla che produce lo stesso effetto delle due molle in parallelo.

Quindi andando a studiare il moto come solito :

$$\boxed{\vec F_1 + \vec F_2 = m\vec a} \xrightarrow{\text{S.d.C.}} -k_1x - k_2x = m\ddot x \Rightarrow \boxed{\ddot x + \left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)x = 0} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

Quindi arrivando ai seguenti risultati :

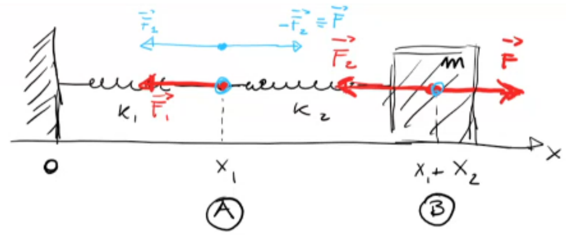
$$\begin{cases} k_{eff} = k_1 + k_2 = 1{,}2\ N/m \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_{eff}}} = 3{,}1\ s \\ \nu = 1/T = 0{,}3\ Hz \end{cases}$$

In generale (o meglio generalizzando il risultato a k molle):

Generalizzando
Per molle in //

$$\Rightarrow \boxed{k_{eff} = \sum_i k_i}$$

Similmente andiamo a vedere un esempio **con molle in serie :**

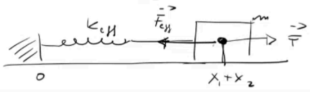


Studiamo il sist. in equilibrio con un $\vec F$

Quindi andando a studiarlo nel sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} \text{in } (A) \quad & \boxed{\begin{cases} -k_1x_1 + F = 0 \\ -k_2x_2 + F = 0 \end{cases}} \ (*) \rightarrow x_1 = F/k_1 \\ \text{in } (B) \quad & \phantom{\begin{cases} 0 \end{cases}} \qquad\qquad \rightarrow x_2 = F/k_2 \end{aligned}$$

Considerando il sist. equivalente $(k_1, k_2 \longrightarrow k_{eff})$



$$\boxed{\frac{1}{k_{eff}} = \sum_i \frac{1}{k_i}}$$

generalizzando

$$\boxed{-k_{eff}(x_1+x_2) + F = 0}\ (*) \xrightarrow[(*)]{\text{dalle}} (x_1+x_2) = \frac{F}{k_{eff}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

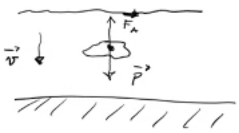
Dinamica 13 (Forza attrito viscoso)

giovedì 6 marzo 2025   16:55

Questa forza è proporzionale alla velocità ed orientata in modo opposto al moto.

$$\vec{F}_A = -b\vec{v}$$

Vediamo un esempio :



Introducendo un sistema di assi (usando y e orientandolo verso il basso) :

ES.: $\boxed{\vec{F}_A + \vec{P} = m\vec{a}} \Rightarrow$ Quale $\vec{v}(t)$?

$$\Rightarrow -\cancel{m}k\vec{v} + \cancel{m}\vec{g} = \cancel{m}\frac{d\vec{v}}{dt} \xRightarrow{S.d.C.} -kv + g = \frac{dv}{dt}$$

Assumendo da $t_0 = 0$, $v_0 = 0$

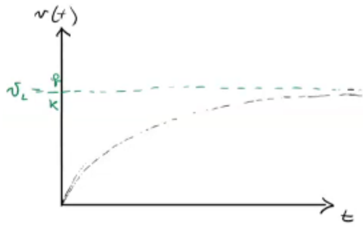
Ponendo $b = Km$

$$\int_0^t dt = \int_0^{v(t)} \frac{dv}{g - kv} \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

Il quale risultato è ottenuto usando un cambio di variabile :

$$(*) \begin{cases} z = g - kv \\ dz = -k\,dv \end{cases} \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{g - kv} = -\frac{1}{k}\int_g^{g-kv} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{k}\ln z\Big|_g^{g-kv}$$

<u>Quindi ora vediamo come evolve la velocità in funzione del tempo :</u>



Quindi supponendo la velocità iniziale v_0=0 , si nota che aumenta i modo esponenziale negativo fino ad tendere al valore limite che è quello di g/k

Dinamica 14 (Forza Non viscosa proporzionale a v^2)

giovedì 6 marzo 2025 17:18

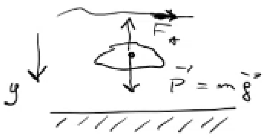
- **Questa forza (non viscosa) di attrito resistente proporzionale al quadrato della velocità. Anche questa si oppone al moto del corpo .** Vediamo ora la formula :

$$\vec{F}_A = -\frac{1}{2} c \rho_A S v^2 \hat{u}_v$$

Dove :

1. **Ro$_a$ (Ra) densità del fluido in cui è immerso il corpo che è soggetto durante il suo avanzamento ad azione di questa forza**
2. **C è coefficiente di resistenza aerodinamica (resistenza ad avanzamento), il quale tiene conto della geometria del corpo che deve "avanzare" nel fluido**
3. **S è sezione che il corpo con la sua estensione oppone ad avanzamento, maggiore è la sezione , maggiore sarà l'avanzamento**

<u>Il cui limite di applicazione (velocità limite) -> nella quale l'accelerazione è nulla</u>



E si arriva così alla seguente formula (sempre applicando la seconda legge di Newton):

$$mg - \frac{1}{2} c \rho_A S v_L^2 = 0$$

Dalla quale si ricava la velocità limite :

$$\boxed{v_L = \sqrt{\frac{2mg}{c \rho_A S}}}$$

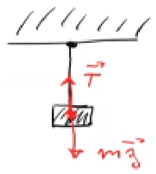
Dinamica 15 (Tensione)

giovedì 6 marzo 2025 17:39

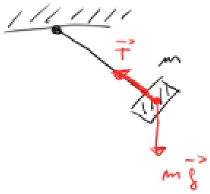
$$\vec{T}$$

Da notare che questa forza è caratterizzata da due punti :

1. E' una forza di contatto

    a. 

2. E' orientata nella stessa direzione del filo teso :

    i. 

    ii. Da notare che qui accelerazione non è 0 (seconda legge di Newton), e la tensione cambia sia in direzione che in modulo durante le oscillazioni

Di solito la tensione si applica ad una FUNE , la quale diventa **ideale** se <u>priva di massa</u> , quindi sono inestensibili :

Che per la seconda legge di Newton si ha che :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = m\vec{a}$$

Ma essendo la massa nulla :

$$\vec{F}_A + \vec{T}_B = 0 \Rightarrow |\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$$

Considerando anche le tensioni nei punti a e b :

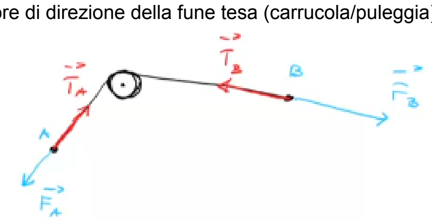
Ed applicando la seconda legge di Newton :

$$I \ (A) \quad \vec{F}_A + \vec{T}_A \underbrace{=}_{m=0} 0$$

$$II \ (B) \quad \vec{F}_B + \vec{T}_A = 0$$

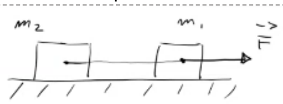
Arrivando chiaramente all'uguaglianza tra forze e tensioni (ricordiamoci che la massa è nulla) : **la tensione che è ad un estremo è la stessa che trovo ad altro estremo**. Il ciò garantisce una serie di proprietà : vediamone una

1. Deviatore di direzione della fune tesa (carrucola/puleggia)

    a. 

    b. Attenzione al verso della direzione e verso della forza A , se applico una forza B

Vediamo un esempio :



NOTE $\begin{cases} F \\ m_1 \\ m_2 \end{cases}$ determinare $\begin{matrix} a \\ T \end{matrix}$

Andiamo a vedere ora quello che succede su m1:

$$\vec{F} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}$$

Mentre su m2:

$$\vec{T}_2 = m_2 \vec{a}$$

Quindi le tensioni si uguagliano in modulo (non sempre in direzione e verso [sempre]) , in quanto la fune è ideale

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$$

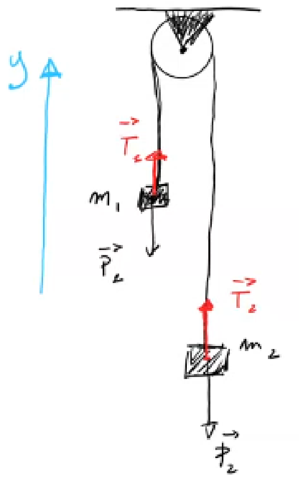
Quindi consideriamolo in un sistema di assi coordinati:

$$\begin{cases} F - T = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \\ T = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F \end{cases}$$

Dinamica 16 (Esempio : Macchina di Atwood)

giovedì 6 marzo 2025 18:19

Hp : puleggia senza massa e corda sena attrito



E calcoliamo la tensione T (T_1=T_2) ed accelerazione (A_1=A_2) .

Quindi scriviamo le equazioni :

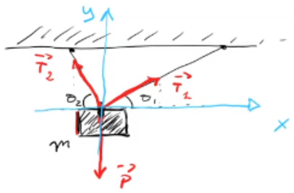
$$\begin{cases} m_1 & \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ m_2 & \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 \vec{a}_2 \end{cases}$$

Scegliamo asse di orientazione y (direzione normale) :

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = - m_2 a_1 \end{cases}$$

Dinamica 17 (Esempio 2)

giovedì 6 marzo 2025 18:36



$$\begin{cases} m = 2{,}04\ \text{kg} \\ \theta_1 = 30° \\ \theta_2 = 45° \end{cases} \qquad \text{determinare} \begin{cases} T_1 \\ T_2 \end{cases}$$

Secondo la seconda legge di Newton :

$$\boxed{\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = 0}$$

E usando il sistema di assi cartesiani :

$$\begin{cases} T_1 \cos\theta_1 - T_2 \cos\theta_2 = 0 \\ T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2 = \dfrac{mg}{\operatorname{tg}\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2} = 17{,}9\ N \\ T_1 = T_2 \dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = 14{,}7\ N \end{cases}$$

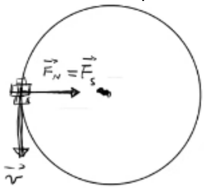
Nota le tensioni hanno diverso valore !! Ciò è dovuto al diverso angolo -> angolo maggiore ha maggiore influenza.

Dinamica 18 (Forze centripete + esempio)

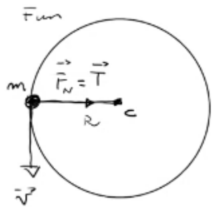
sabato 8 marzo 2025 10:18

Per forza centripeta si intende quella classe di forze che può essere definite da orientamento della forza che agisce sul sistema. Ripensiamo all'accelerazione (tangenziale e normale) , l**a componente normale (ovvero diretta verso il centro) prende il nome di forza centripeta.**

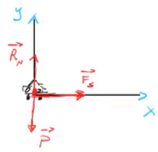
Vediamo un esempio di una macchina in un piazzale:



Dove chiaramente la velocità è la componente tangenziale , mentre la componente normale è la forza di attrito statico : quella forza che non permette alle ruote di andare in direzione normale al moto. Vediamo altro esempio una massa attaccata ad una fune:



Anche qui la velocità e la componente tangenziale , mentre per quello che riguarda la normale si ha che è la Tensione del filo di lunghezza r al quale è attaccato un corpo di massa m.
<u>Entrambi gli esempio si suppongono con velocità costante</u>.
Ritornando ad esempio della macchina vediamo quale è la velocità massima prima che auto cominci a slittare (andiamolo a studiare lungo gli assi):



$$(1)\ \begin{cases} R_N - mg = 0 \\ F_s = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases} \quad \vec{a} = \vec{a}_N \Rightarrow v_{max} \rightarrow F_s = F_s^{max} = \mu_s R_N$$

$$\begin{cases} R_N = mg \\ \mu_s \cancel{m} g = \cancel{m}\dfrac{v_{max}^2}{R} \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_{max} = \sqrt{\mu_s g R}}$$

Notiamo che nell'equazione di y non c'è accelerazione , quindi dal secondo principio di Newton m*a=0; nel caso dell'asse x invece notiamo che non c'è accelerazione tangenziale alla traiettoria , ma solo quella normale e ricordandoci che quella normale è uguale a v^2/R e sostituendo nella precedente si arriva al risultato ottenuto. Nota il valore massimo della forza di attrito statico è μ_s*R_n.

Dinamica 19 (Dinamica vettoriale e scalare)

sabato 8 marzo 2025 10:50

Facciamo ora delle riflessioni :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \qquad \vec{p} \triangleq m\vec{v} \qquad \xrightarrow[m = cost]{se} \qquad \Delta\vec{p} = m\,\Delta\vec{v}$$

Riassumendo quindi :

L'azione di $\vec{F}$ per un Δt	$\xLeftarrow{\text{IMPULSO}}\!\!\Rightarrow$	Le variazioni $\Delta\vec{p}$ delle grandezza $\vec{p}$ legata $\vec{v}$	$\Rightarrow$ vettoriale

Ricordando poi che la scomposizione dell'accelerazione secondo le sue componenti , mi dà la scomposizione degli effetti prodotti :

$$\vec{F} = \underbrace{m\frac{dv}{dt}\hat{u}_T}_{\vec{F}_T} + \underbrace{m\frac{v^2}{R}\hat{u}_N}_{\vec{F}_N}$$

Quindi se siamo interessati sono a vedere come varia il modulo della velocità (si considera solo la parte tangenziale):

L'azione di $\vec{F}$ lungo uno $\Delta\vec{s}$ (finito)	$\xLeftarrow{\text{LAVORO}}\!\!\Rightarrow$	Le variazioni di ΔE_k, una grandezza (E_k) legate a $\lvert\vec{v}\rvert$	$\Rightarrow$ scalare

Dove per E_k (energia cinetica) si intendono le variazioni del modulo di v . Riassumendo il tutto si arriva a :

NOTA $\quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{dv}{dt}\hat{u}_T + m\frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{F}_T + \vec{F}_N \longrightarrow \boxed{F_T \to \frac{dv}{dt}}$

Dinamica 20 (Lavoro)

sabato 8 marzo 2025 11:17

Andiamo a vedere due aspetti importanti prima di introdurre questa nuova grandezza :

1. Perché il lavoro (W) , ovvero l'azione di una forza su un corpo , provoca una variazione del modulo della velocità
2. "Compiere il lavoro" in fisica significa studiare l'azione di una forza F compie su un corpo mentre questo si sposta e che ne fa variare il modulo della velocità.
3. Per "effetto" intendiamo la variazione di una grandezza ce chiamiamo **energia**.

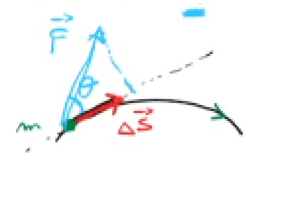
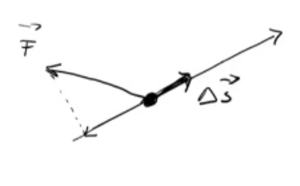
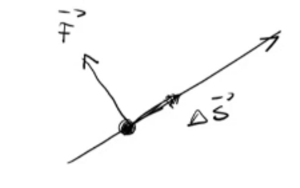
Andiamo a vedere un esempio molto semplice (giusto per vedere il lavoro) : assumiamo le seguenti ipotesi

$$\begin{cases} \vec{F} \simeq \text{cost} \\ \Delta\vec{s} \ \text{piccoli} \end{cases}$$

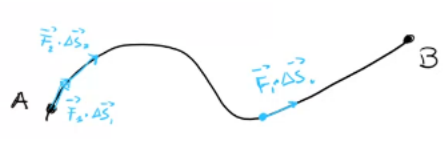
Ed arrivando alla seguente domanda : il lavoro può essere inteso come il lavoro di una forza su uno spostamento molto piccolo ?

$$\boxed{W \triangleq \vec{F}\cdot\Delta\vec{s}} = F\cos\Delta s = F_T\,\Delta s$$

Vediamolo in dettaglio :

	Vediamo che la componente tangenziale è la proiezione della forza applicata lungo la traiettoria , e dato che la forza è applicata con angolo teta , si deve includere il coseno: **proiezione della forza nella direzione del moto è concorde con lo spostamento** , il coseno di teta è < di 90° -> positivo . Quindi in questo caso si parla di **lavoro positivo anche noto come lavoro motore.**
	In questo caso la proiezione avviene sempre lungo la traiettoria , ma il verso è opposto (moto resistente) angolo teta > 90 ° -> negativo . **Il lavoro negativo è anche noto come lavoro resistente.**
	In questo caso la proiezione della forza lungo la traiettoria dello spostamento è nulla (0) . **In questo caso si parla di lavoro nullo.**

Quindi andandolo a studiare su una traiettoria lunga e finito :

	Quindi il lavoro compito da A a B vale : $W_{AB} = \sum_{i=1}^{m} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$

Quindi in generale (studiando un qualunque percorso da A a B finito) si arriva alla definizione vera e propria di lavoro :

Suddividendo AB con $m \to \infty$

LAVORO $\boxed{W \triangleq \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}}$

Per lavoro totale si intende :

$$W_{TOT} = \sum_k \int_A^B \vec{F}_k \cdot d\vec{s}$$

Nota : Il lavoro totale (**W_{tot}**) potrebbe essere 0 se :

1. La risultante delle forze agenti sul corpo si equilibrano
   a. $\sum_k W_k = 0$
2. Non ci sono forze agenti sul corpo durante la traiettoria
3. Se le F agenti sul corpo lungo la traiettoria AB sono ortogonali (non lo prendiamo in considerazione questo caso)

Come già detto questa grandezza provoca variazioni del modulo della velocità , ma la domanda sorge spontanea : come ?? Ovvero quale dipendenza del lavoro ho dalla velocità modulo?? Vediamo come :

$$dW \longrightarrow \vec{F}\cdot d\vec{s} = F_T\, ds = m\, a_T\, ds = m \frac{dv}{dt} ds = m v\, dv \implies dW = m v\, dv$$

Ed applicando la definizione del lavoro :

$$W \triangleq \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{v_A}^{v_B} m v\, dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \Delta E_K \implies \boxed{W = \Delta E_K}$$

<u>La quale definizione prende nome di Teorema del lavoro</u>.

Quindi il lavoro esprime la variazione di energia cinetica (E_k) :

W fa variare la quantità $\frac{1}{2} m v^2$

che definiamo ENERGIA CINETICA $\quad E_K \triangleq \frac{1}{2} m v^2$

La quale le cui variazioni rappresenta effetto prodotto su rapidità del moto da una forza F che agisce sul corpo su un tratto di traiettoria tra A e B , la quale dipende dal modulo della velocità. Andiamo ora a fare un paragone tra la trattazione vettoriale e quella scalare :

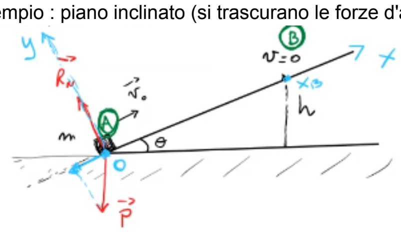
Trattaz. vettoriale — Δt finito — $\vec{J} \Longrightarrow \Delta\vec{P} = m(\vec{v}_F - \vec{v}_{IN})$

Trattaz. scalare — $\Delta\vec{s}$ finito — $W \Longrightarrow \Delta E_K = \frac{m}{2}(v_F^2 - v_{IN}^2)$

cause — effetti sulla velocità

<u>Con la prima si ha a che fare con la dinamica del punto .</u>

Facciamo un esempio : piano inclinato (si trascurano le forze d'attrito):



<u>In questo esempio il contributo di R_n è nullo : forza ortogonale allo spostamento</u>. Quindi introducendo il sistema di assi e dopo aver scritto le leggi lungo gli assi :

Quale h ?

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\boxed{W = \Delta E_K} = E_K^B - E_K^A$$

$$W = \int_0^{x_B} P_T\, dx = \int_0^{x_B} -mg\sin\theta\, dx = -mg\sin\theta\, x_B$$

$$\Delta E_K = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

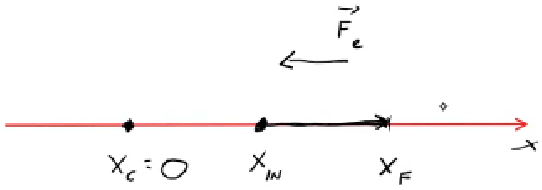
Quindi la soluzione è la seguente :

$$W = \Delta E_K \implies -\cancel{m} g \underbrace{\sin\theta\, x_B}_{h} = -\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 \implies h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Dinamica 21 (Lavoro forza elastica)

sabato 8 marzo 2025 15:23

Vediamo ora il lavoro della forza elastico con moto su un piano :



Ed andando a vedere il lavoro effettuato da questa forza :

$$W = \int_{x_{IN}}^{x_F} F_x \, dx = \int_{x_{IN}}^{x_F} (-kx) \, dx = -\frac{1}{2} k \left(x_F^2 - x_{IN}^2 \right)$$

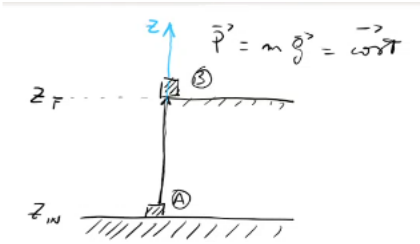
Questo lavoro è

1. < di 0 se si parla di allungamenti / compressioni -> lavoro resistente
2. = a 0 se si parla di percorsi chiusi
3. > di 0 se si parli di richiami (spostamenti) verso il centro -> lavoro motore

Dinamica 22 (Lavoro forza peso)

sabato 8 marzo 2025 15:33

Facciamo un esempio :



Ed analizzandolo in un sistema di riferimento :

$$\mathcal{W} = \int_{z_{IN}}^{z_F} F_z \, dz = \int_{z_{IN}}^{z_F} (-mg) \, dz = -mg\,(z_F - z_{IN})$$

Da notare che il lavoro della forza peso (P) vale :

1. < di 0 se si parla di aumento di quota (lavoro resistente)
2. = a 0 se la quota iniziale è uguale alla quota finale
3. > di 0 se diminuzione di quota (lavoro motore). <u>In questo caso aumenta l'energia cinetica</u>

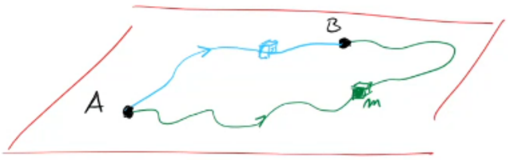
Dinamica 23 (Lavoro forza attrito)

sabato 8 marzo 2025   16:45

La legge che esprime questo moto è la seguente :

$$\vec{F}_A = -\mu_d R_N \hat{u}_v$$

Facciamo un esempio : un corpo che si muove su un piano



Ed applicando la definizione di lavoro :

$$W = \int_A^B \vec{F}_A \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d R_N \hat{u}_v \cdot d\vec{s} = -\mu_d R_N \int_A^B ds = -\mu_d R_N \, l_{AB}$$

lunghezza del cammino percorso tra A e B

<u>Ma attenzione : anche se la costruzione del percorso si fa nello stesso modo (ovvero aggiungendo ogni volta un pezzettino infinitesimo della traiettoria), la lunghezza del cammino dipende dal percorso</u>. **Il lavoro è resistente per via dell'azione della forza di attrito (direzione opposta al moto).**

Dinamica 24 (Lavoro forze riassunto)

sabato 8 marzo 2025 16:57

Facciamo un riepilogo :

Forze peso $$W = -[mgz_B - mgz_A]$$

Forze elastica $$W = -\left[\frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2}\right]$$

Forze d'attrito $$W = -\mu_d R_N \underbrace{\ell_{AB}}_{\text{cammino tra A e B}}$$

Nel caso della forza peso, il lavoro compiuto da questa forza può essere espresso come variazione di una funzione che dipende dalle coordinate iniziali e finali : questa funzione viene chiamata **E_p (energia potenziale)**. Nel caso invece nel caso di forza elastica anche qui il lavoro è esprimibile come variazione cambiata di segno di funzione chiamata **E_p** delle sole coordinate iniziali e finali. Questa funzione non è valida per il terzo caso : forza d'attrito in quanto il lavoro non è esprimibile come differenza di valore di una certa funzione (dipendente dalle coordinate iniziali e finali) , ma **dipende anche dal tipo di cammino che si usa**. Tornando alle prime due forze :

vedì 8 aprile 2021 13:04

Forze peso $$W = -\overbrace{[mgz_B - mgz_A]}^{\Delta E_p} \qquad \text{dove } E_p = mgz$$
Energia potenziale

Forze elastica $$W = -\overbrace{\left[\frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2}\right]}^{\Delta E_p} \qquad \text{dove } E_p = \frac{kx^2}{2}$$
Energia potenziale

Questa categoria di forze viene chiamata Forza conservativa.
Vediamo ora il lavoro delle forze conservative :

$$W = -\Delta E_p = \Delta E_k \implies -(E_p^B - E_p^A) = (E_k^B - E_k^A)$$
$$\Downarrow$$
$$E_k^A + E_p^A = E_k^B + E_p^B$$

Dove la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale porta alla definizione dell'**energia meccanica**(sempre nel caso di lavoro di forze conservative):

$$E_k^A + E_p^A = E_k^B + E_p^B$$

$$\boxed{E_m \triangleq E_k + E_p = \text{cost}} \quad (\text{caso di sole forze conservative})$$
$$\Downarrow$$
Energia Meccanica $\Longrightarrow$ si conserva

Mentre se nel caso di forze non conservative : si ha il contributo delle forze non conservative e quelle conservative.

$$\left.\begin{aligned} W &= W_{NC} + W_C \\ &\Downarrow \\ \Delta E_k &= W_{NC} - \Delta E_p \end{aligned}\right\} \implies W_{NC} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_m$$

Quindi il lavoro delle forze non conservative è uguale al lavoro delle forze non conservative :

$$\boxed{\Delta E_m = W_{NC}}$$

Dinamica 25 (Potenza)

sabato 8 marzo 2025 17:30

Questa capacità di compiere lavoro in tempi brevi, quindi di produrre effetti su rapidità del moto in tempi brevi si definisce **potenza media** :

$$P_m \triangleq \frac{W}{\Delta t}$$

Spesso ci interessa però la **potenza istantanea**: che viene definita per Δt->0 :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{v}}_{\underbrace{F\cos\vartheta}_{F_T} \, v} = F_T v$$

Per quanto riguarda invece l'unità di misura :

$$\{W\} = \{E_k\} = J$$

$$\Rightarrow \{P\} = \frac{1\,J}{1\,s} = 1\,W$$