VARIABILI ALEATORIE (O CASUALI)

Fonti: Cicchitelli, Dall'Aglio, Mood-Graybill.

Moduli 4, 5, 7,8 del programma.

Il termine variabile aleatoria indica una quantità il cui valore è determinato da un esperimento aleatorio. Dato il legame di dipendenza dai risultati dell'esperimento la variabile aleatoria ricorda il concetto di funzione Y = f(X) (una legge che associa ad ogni elemento del dominio X uno ed un solo elemento del condominio Y): si tratta in effetti di associare, secondo una determinata regola, un numero reale ad ogni evento elementare ω di Ω.

Definizione: Una variabile aleatoria (v.a.) X è una funzione definita sullo spazio campionario Ω che associa un numero reale $X(\omega) = x$ ad ogni evento elementare ω di Ω. Il suo dominio è Ω e il suo codominio l'asse dei numeri reali $\Re$. Si opera pertanto una trasformazione degli eventi elementari di Ω in punti dell'asse reale $\Re$.

Una variabile aleatoria può essere discreta o continua, a seconda che lo spazio campionario su cui è definita sia discreto o continuo.

Nel caso discreto la v.a. X può assumere un numero finito o un'infinità numerabile di valori. Nel caso continuo la v.a. X può assumere un'infinità non numerabile di valori.

(Si ricordi che con la lettera "X" maiuscola si intende indicare la variabile aleatoria, mentre con la lettera"x" minuscola sin intende il singolo valore assunto dalla v.a.)

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

In una v.a. discreta quando si fanno corrispondere ai valori di X i rispettivi livelli di probabilità si ottiene la funzione di probabilità $P(X = x)$, definita come:

$$P(X=x)=\begin{cases} p(x) & se \quad x\in R_X \\ 0 & se \quad x\notin R_x \end{cases}$$

dove con R_X si intende l'insieme che contiene i numeri reali effettivamente assunti da X (insieme delle immagini di X).

Una funzione di probabilità deve soddisfare due proprietà:

- $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re$
- $\sum_{x\in R_X} p(x) = 1$.

La distribuzione di probabilità può essere descritta anche attraverso la funzione di ripartizione $F_X(x) = P(X \leq x)$, che anziché considerare le probabilità dei singoli valori di X, fa riferimento agli intervalli $(-\infty, x]$ per tutti i numeri reali, per la quale vale che:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 \quad se \quad x<x_1 \\ F(x_i) \quad se \quad x_i \leq x < x_{i+1} \qquad i=1,2,\dots,k-1 \\ 1 \quad se \quad x \geq x_k \end{cases}$$

dove $F_X(x_i) = P(X \leq x_i) = p_1 + p_2 + \dots + p_i$.

Si tratta di una funzione costante a tratti: nell'intervallo $[x_i, x_{i+1})$ la funzione è costante, mentre in x_{i+1} cresce della quantità p_{i+1}.

Valore atteso: si chiama valore atteso (o media) della v.a. X:

$$E(X) = \sum_{x\in R_X} x \cdot p(x).$$

Varianza: si chiama varianza della v.a. X:

$$Var(X) = \sum_{x\in R_X} (x - E(X))^2 \cdot p(x) = \sum_{x\in R_X} x^2 \cdot p(x) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Dim: $$Var(X)=\sum_{x\in R_X}(x-E(X))^2\cdot p(x)=\sum_{x\in R_X}\left[x^2+E(X)^2-2xE(X)\right]\cdot p(X)=$$

$$=\sum_{x\in R_X}x^2\cdot p(x)+\sum_{x\in R_X}E(X)^2\cdot p(x)-2\sum_{x\in R_X}x\cdot E(X)\cdot p(x)=$$

$$=E(X^2)+E(X)^2-2\cdot E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2.$$

Scarto quadratico medio: si chiama scarto quadratico medio della v.a. X:

$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$.

Proprietà del valore atteso e della varianza:

Se Y è una v.a. ottenuta per trasformazione lineare di X, per cui $Y = a + b\cdot X$, si ha:

$E(Y) = a + b\cdot E(X)$

Dim: $$E(Y)=\sum_{x\in R_X}y_i\cdot p(y_i)=\sum_{x\in R_X}(a+b\cdot x_i)\cdot p(x_i)=\sum_{x\in R_X}a\cdot p(x_i)+\sum_{x\in R_X}b\cdot x_i\cdot p(x_i)=$$

$$=a\cdot\sum_{x\in R_X}p(x_i)+b\cdot\sum_{x\in R_X}x_i\cdot p(x_i)=a+b\cdot E(X);$$

e $Var(Y) = b^2\cdot Var(X)$

Dim: $$Var(Y)=\sum_{x\in R_X}(y_i-E(Y))^2\cdot p(y_i)=\sum_{x\in R_X}(a+b\cdot x_i-a-b(EX))^2\cdot p(x_i)=$$

$$=b^2\cdot\sum_{x\in R_X}(x_i-(EX))^2\cdot p(x_i)=b^2\cdot Var(X).$$

Esempio 1:

Si consideri il lancio di due dadi a 4 facce numerate: 1, 2, 3, 4.

Il primo dado D_1 è equilibrato, e quindi la probabilità di uscita di ognuna delle 4 facce è pari ad 1/4; il secondo dado D_2 è invece truccato in modo tale che la probabilità di uscita di un numero pari e doppia rispetto all'uscita di un numero dispari. Per questo secondo dado si ha che:

$P(1) = P(3) = 1/6 \quad e \quad P(2) = P(4) = 2/6$.

Si vuole costruire la v.a. X = "Somma del risultato dei due dadi (D_1 + D_2)", determinare i valori della funzione di ripartizione e calcolare il valore atteso e la varianza.

Ad ogni risultato di Ω si deve associare un numero che, in questo caso, corrisponde alla somma dei due risultati:

Ω =	{1,1;	1,2;	1,3;	1,4;	2,1;	2,2;	2,3;	2,4;	3,1;	3,2;	3,3;	3,4;	4,1;	4,2;	4,3;	4,4}
X =	2	3	4	5	3	4	5	6	4	5	6	7	5	6	7	8

Quindi R_X che contiene i valori di X è dato da:

R_X = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

Adesso si devono determinare le probabilità:

$$P(X = 2) = P(1{,}1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24},$$

$$P(X = 3) = P(1{,}2) + P(2{,}1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{24} \quad \text{e via di seguito.}$$

I valori della v.a. X con le relative probabilità e i valori della funzione di ripartizione possono essere riassunti nella tabella:

x	Eventi elementari ω_i	$p(x)$	$F_X(x)$
2	(1,1)	1 / 24	1 / 24
3	(1,2);(2,1)	3 / 24	4 / 24
4	(1,3);(2,2);(3,1)	4 / 24	8 / 24
5	(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)	6 / 24	14 / 24
6	(2,4);(3,3);(4,2)	5 / 24	19 / 24
7	(3,4);(4,3)	3 / 24	22 / 24
8	(4,4)	2 / 24	24 / 24
		1	

Il valore atteso è pari a:

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{24} + 3 \cdot \frac{3}{24} + 4 \cdot \frac{4}{24} + 5 \cdot \frac{6}{24} + 6 \cdot \frac{5}{24} + 7 \cdot \frac{3}{24} + 8 \cdot \frac{2}{24} = \frac{31}{6} = 5{,}17\,.$$

La varianza è pari a:

$$Var(X) = 2^2 \cdot \frac{1}{24} + 3^2 \cdot \frac{3}{24} + 4^2 \cdot \frac{4}{24} + 5^2 \cdot \frac{6}{24} + 6^2 \cdot \frac{5}{24} + 7^2 \cdot \frac{3}{24} + 8^2 \cdot \frac{2}{24} - \left(\frac{31}{6}\right)^2 = 2{,}472.$$

Esempio 2:

Due urne A e B sono così composte:

Urna A = {10 palline con il segno di una stella e 40 palline con il segno di una luna}

Urna B = {5 palline con il segno di una stella e 45 palline con il segno di una luna}.

Un giocatore paga una posta iniziale di 1 euro ed estrae a caso una pallina dall'urna A e una pallina dall'urna B. Se estrae due stelle vince 5 euro, se estrae una stella e una luna vince 2 euro ed infine se estrae due lune non vince niente.

Costruire la variabile aleatoria X = "*guadagno del giocatore*" e la sua funzione di probabilità.

Determinare il valore atteso e la varianza della v.a. X.

Un gioco è definito *equo* se il valore atteso del guadagno è nullo. Stabilire se il gioco sopra descritto è equo oppure no, e in caso di risposta negativa modificare la posta iniziale in modo tale lo diventi.

Per costruire la variabile guadagno è utile seguire i passaggi della seguente tabella, in cui con "S" si intende l'estrazione di una stella e con "L" l'estrazione di una luna.

Risultato	*Vincita*	*Guadagno = Vincita - 1*
S, S	5	4
S, L	2	1
L, S	2	1
L, L	0	-1

La v.a. X (guadagno) e la sua funzione di probabilità sono:

x	*p(x)*
-1	(40/50)·(45/50) = 0,72
1	(10/50)·(45/50) + (40/50) ·(5/50) = 0,26
4	(10/50)·(5/50) = 0,02

Per calcolare il valore atteso e la varianza è utile aggiungere due colonne alla precedente tabella:

x	$p(x)$	$x\,p(x)$	$x^2\,p(x)$
-1	0,72	-0,72	0,72
1	0,26	0,26	0,26
4	0,02	0,08	0,32
		-0,38	1,3

da cui:

$E(X) = -0{,}38$

e

$Var(X) = 1{,}3 - (-0{,}38)^2 = 1{,}1556$.

Dato che il valore atteso non è nullo il gioco non può essere considerato equo, ma sarà a svantaggio del giocatore.

Per renderlo equo, modificando la posta da pagare, si può procedere come segue:

Guadagno = Vincita – Posta iniziale,

E(Guadagno) = E(Vincita) – Posta iniziale,

affinché il valore atteso del guadagno sia nullo, il valore atteso della vincita deve essere pari alla posta iniziale.

E(Vincita) = E(Guadagno) + 1 = -0,38 + 1 = 0,62 .

Perché il gioco sia equo la posta iniziale deve essere ridotta da 1 euro a 0,62 centesimi.

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE PARTICOLARI

E' ora possibile prendere in considerazione alcune v.a. discrete particolari (uniforme discreta, bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, Poisson e geometrica) e analizzarle nel dettaglio, considerando la funzione di probabilità, il valore atteso e la varianza.

Distribuzione uniforme discreta

Una variabile aleatoria segue una distribuzione uniforme discreta negli interi 1, 2, …, N, se la sua funzione di probabilità è espressa da:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{1}{N} & x=1,2,\dots,N \\ 0 & altrove\end{cases}$$

Il valore atteso e la varianza sono rispettivamente pari a:

$$E(X)=\frac{N+1}{2} \qquad Var(X)=\frac{N^2-1}{12}.$$

Esempio 3:

Si consideri il lancio di un dado equilibrato a 6 facce, la cui distribuzione di probabilità è pari a:

x	*p(x)*
1	1 / 6
2	1 / 6
3	1 / 6
4	1 / 6
5	1 / 6
6	1 / 6
	1

Il valore atteso è pari a:

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}.$$

La varianza è pari a:

$$Var(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Questi valori potevano essere trovati anche utilizzando le formule:

$$E(X) = \frac{N+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} \qquad Var(X) = \frac{N^2 - 1}{12} = \frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}.$$

Distribuzione di Bernoulli

Si consideri un esperimento che ammette soltanto due risultati: un successo (evento A) e un insuccesso (evento $\overline{A}$) e si associ il valore x = 1 all'evento A e il valore x = 0 all'evento $\overline{A}$. Sia p (0 < p < 1) la probabilità di osservare un successo e (1 – p) la probabilità di osservare un insuccesso. Per cui:

Evento	*x*	*p(x)*
A	1	p
$\overline{A}$	0	1 - p
		1

La v.a. che descrive un esperimento di questo tipo prende il nome di distribuzione di Bernoulli.

Quindi in una distribuzione di Bernoulli i risultati possibili sono solamente due: successo (x = 1) e insuccesso (x = 0) con probabilità:

$$P(X = x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Per il valore atteso e la varianza si ottengono i risultati:

$$E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \quad Var(X) = p(1-p)$$
e
$$Var(X) = (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = p(1-p)$$

Esempio 4:

In un dato comune la percentuale di soggetti occupati è pari al 90%.

Si indichi con x = 0 il caso di un soggetto disoccupato e con x = 1 il caso di un soggetto occupato.

L'estrazione a caso di individuo dalla popolazione del comune è descritto da una distribuzione di Bernoulli con funzione di probabilità:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0{,}90^x (1 - 0{,}90)^{1-x} & x = 0{,}1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Il valore atteso e la varianza sono rispettivamente pari a:

E(X) = 0,90 e Var(X) = 0,90·0,10 = 0,09.

Distribuzione Binomiale

Una distribuzione binomiale considera il numero x di successi ottenuti in n prove di Bernoulli identiche ed indipendenti.

Partendo dall'esempio 4 si consideri l'estrazione di 4 soggetti in modo indipendente l'uno dall'altro. Ci si chiede quale sia la probabilità che fra i 4 soggetti ce ne siano x (x = 0, 1, 2, 3, 4) occupati.

La funzione di probabilità di una binomiale è pari a:

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0{,}1{,}2\ldots{,}n \\ 0 & altrove \end{cases}$$

dove il coefficiente binomiale $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!}$ indica il numero di combinazioni possibili in cui sono presenti x successi in n prove indipendenti.

Con n! (si legge "n fattoriale") si intende il prodotto di tutti i valori interi da 1 fino ad n (es. 5! = 5•4•3•2•1 = 120); per definizione 0! = 1.

La funzione di probabilità permette di calcolare la probabilità che in n prove di Bernoulli, identiche ed indipendenti, ci siano x successi, con x = 1, 2, …, n.

Per il valore atteso e la varianza si ottengono i risultati:

$E(X) = np \quad Var(X) = np(1-p)$.

Esempio 5:

Sempre partendo dall'esempio 4 si determini la probabilità che fra i 4 soggetti ce ne siano 3 occupati e la probabilità che almeno 3 siano occupati.

Determinare anche il numero medio di soggetti occupati nel campione estratto e la sua variabilità.

La distribuzione di probabilità in questo caso è data da:

$$P(X = x) = \binom{4}{x} \cdot 0{,}90^{x} \cdot (1-0{,}90)^{4-x} \qquad x = 0{,}1{,}2{,}3{,}4.$$

Per cui la probabilità che 3 soggetti siano occupati è pari a:

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}90^{3} \cdot (1-0{,}90)^{4-3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0{,}90^{3} \cdot (1-0{,}90) = 0{,}2916.$$

Il coefficiente binomiale $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 4$ indica che nelle 4 prove i 3 successi si possono trovare in 4 modi diversi. Infatti, indicando con O la condizione di occupato e con $\overline{O}$ la condizione di disoccupato si ha:

$$(\overline{O}, O, O, O) \quad (O, \overline{O}, O, O) \quad (O, O, \overline{O}, O) \quad (O, O, O, \overline{O}).$$

La probabilità di avere almeno 3 soggetti occupati sarà data dalla somma della probabilità di averne 3 e la probabilità di averne 4 (ricordo che almeno 3 vuol dire 3 o più di 3!):

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) =$$

$$= \binom{4}{3} \cdot 0{,}90^3 \cdot (1 - 0{,}90)^{4-3} + \binom{4}{4} \cdot 0{,}90^4 \cdot (1 - 0{,}90)^0 = 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9477.$$

Il valore atteso e la varianza sono dati rispettivamente da:

$$E(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}90 = 3{,}6$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 4 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}10 = 0{,}36.$$

Distribuzione Ipergeometrica

Dato un insieme contenente N unità di cui M con caratteristica A (successi) e N – M con caratteristica $\overline{A}$ (insuccessi), si effettuano n estrazioni senza reinserimento (prove dipendenti).

La distribuzione ipergeometrica considera il numero x di successi ottenuti nelle n estrazioni (anche la binomiale considerava il numero di successi in n prove, ma queste ultime erano indipendenti, ora sono dipendenti).

La sua funzione di probabilità è data da:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \max\{0,n-(N-M)\}\leq x\leq \min\{n,M\}\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Il valore atteso e la varianza sono pari a:

$$E(X)=n\cdot\frac{M}{N}\qquad Var(X)=n\cdot\frac{M}{N}\cdot\frac{N-M}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}.$$

Confrontando la binomiale con la ipergeometrica, si può notare che il valore atteso rimane invariato, mentre per la varianza si ha che:

Var (ipergeometrica) < Var (binomiale) con n > 1.

Esempio 6:

Una scatola contiene 12 paia di calze (N), di cui 3 difettose (M). Un soggetto acquista 4 paia di calze (n).

Determinare la probabilità che nessun paio risulti difettoso e che almeno tre paia risultino difettose.

Determinare anche il numero medio di paia di calze difettose nel campione estratto e la sua variabilità.

In questo caso le estrazioni avvengono senza reinserimento, per cui la funzione di probabilità che interpreta il numero di paia di calze difettose sarà:

$$P(X=x)=\frac{\binom{3}{x}\binom{12-3}{4-x}}{\binom{12}{4}} \qquad x=0,1,2,3.$$

Per cui la probabilità che nessun paio sia difettoso è pari a:

$$P(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{12-3}{4-0}}{\binom{12}{4}}=\frac{1\cdot 126}{495}=0,255;$$

mentre la probabilità che almeno tre (in questo esempio almeno 3 coincide con 3 perché la v.a. non assume valori maggiori di 3) paia siano difettose è pari a:

$$P(X\geq 3)=P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{12-3}{4-3}}{\binom{12}{4}}=\frac{1\cdot 9}{495}=0,018.$$

Il valore atteso e la varianza in questo esempio sono pari a:

$$E(X)=4\cdot\frac{3}{12}=1 \qquad Var(X)=4\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{12-3}{12}\cdot\frac{12-4}{12-1}=0,545.$$

Esempio 7:

In un gruppo di 10 condomini, 6 risultano favorevoli ad un intervento di manutenzione straordinaria.

Se si estraggono con reinserimento 5 condomini, qual è la probabilità che almeno due siano favorevoli all'intervento?

Se si estraggono senza reinserimento 5 condomini, qual è la probabilità che almeno due siano favorevoli all'intervento?

Confrontare il valore atteso e la varianza delle due v.a. usate nei punti precedenti.

Nel primo punto, dato che si effettuano delle estrazioni con reinserimento, la distribuzione che considera il numero di condomini favorevoli sarà una *binomiale* con n = 5, p = 0,6 e x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$= 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^5 - \binom{5}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^4 = 1 - 0{,}01024 - 0{,}0768 = 0{,}91296.$$

Nel secondo punto, dato che si effettuano delle estrazioni senza reinserimento, la distribuzione che considera il numero di condomini favorevoli sarà una *ipergeometrica* con N = 10, M = 6, n = 5 e x = 1,2,3,4,5.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{10-6}{5-1}}{\binom{10}{5}} = 1 - 0{,}0238 = 0{,}9762.$$

Per la binomiale il valore atteso e la varianza risultano essere:

$E(X) = 5 \cdot 0{,}6 = 3 \quad Var(X) = 5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$

mentre per la ipergeometrica:

$E(X) = 5 \cdot \frac{6}{10} = 3 \quad Var(X) = 5 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{10-5}{10-1} = 0{,}667.$

Quindi, come è noto dalla teoria, il valore atteso per le due distribuzioni coincide; mentre la varianza è minore nel caso della distribuzione ipergeometrica.

Distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson considera il numero di accadimenti (successi) x che si realizzano in un intervallo di lunghezza data o in uno spazio di dimensione data. Se λ indica il numero medio di successi nel tempo o nello spazio definiti, la funzione di probabilità del numero di successi è pari a:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2...\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Il valore atteso e la varianza sono rispettivamente pari a:

$E(X)=\lambda \quad Var(X)=\lambda$.

La costante λ è proporzionale alla lunghezza dell'intervallo di tempo o della dimensione dello spazio considerato.

Esempio 8:

In una domenica di agosto il centralino di "Telefono Amico" riceve in media 1,7 telefonate all'ora.

Si suppone che la variabile aleatoria X = "numero di telefonate" segua una distribuzione di Poisson.

Calcolare la probabilità che tra le 11.00 e le 13.00 non giungano telefonate.

Calcolare la probabilità che tra le 16.00 e le 17.30 giungano al più di due telefonate.

Calcolare, inoltre, il numero medio di telefonate che giungono durante l'intera giornata di domenica (il centralino è attivo 24 ore su 24).

Dato che l'intervallo di tempo è di 2 ore, λ sarà doppio:

$\lambda = 1{,}7 \cdot 2 = 3{,}4$;

$$P(X=0)=\frac{e^{-3,4}\cdot 3,4^{0}}{0!}=0,033.$$

Per la seconda probabilità si ancora modificare λ:

$\lambda = 1,7 \cdot 1,5 = 2,55$

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=\frac{e^{-2,55}\cdot 2,55^{0}}{0!}+\frac{e^{-2,55}\cdot 2,55^{1}}{1!}+\frac{e^{-2,55}\cdot 2,55^{2}}{2!}=0,078+0,199+0,254=0,531.$$

Il valore atteso è pari a:

$E(X)=1,7\cdot 24=40,8$.

Esempio 9:

Il pavimento di una stanza è costituito da 80 piastrelle quadrate di 50 cm di lato. Durante l'imbiancatura del soffitto cadono casualmente alcune gocce di pittura sul pavimento. Per ogni piastrella si contano in media 0,5 gocce.

Supponendo che le gocce si distribuiscano sulle piastrelle secondo una v.a. di Poisson, determinare:

la probabilità che in uno spazio di 2 m^2 ci sia una sola goccia di pittura;

la probabilità che in un quarto di pavimento ci siano più di due gocce di pittura;

il numero medio di gocce di pittura presenti sull'intero pavimento e la sua variabilità.

Dato che ogni piastrella ha un'area di 0,25 m^2 in uno spazio di 2 m^2 ci sono 4 piastrelle, per cui λ riferito a 4 piastrelle sarà pari a 0,5 · 4 = 2.

$P(X=1)=e^{-2}\cdot 2=0,271$.

Considerando 20 piastrelle (un quarto di pavimento) λ sarà pari a 0,5 · 20 = 10.

$$P(X>2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$$

$$=1-e^{-10}-e^{-10}\cdot 10-\frac{e^{-10}\cdot 10^{2}}{2}=0{,}997.$$

Il valore atteso e la varianza dell'intero pavimento saranno pari a:

$$E(X)=80\cdot 0{,}5=40$$

$$Var(X)=80\cdot 0{,}5=40.$$

Distribuzione geometrica

Considerando una successione di prove di Bernoulli, identiche ed indipendenti, in cui la probabilità dell'evento successo è pari a p, si definisce geometrica la v.a. che rappresenta il numero di prove necessarie per ottenere il primo successo.

La sua funzione di probabilità è pari a:

$$P(X=x)=\begin{cases} p\cdot(1-p)^{x-1} & x=1,2,3,\ldots \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La costruzione di questa formula è intuitiva. Infatti nel replicare un esperimento di Bernoulli, le prove sono indipendenti e pertanto la probabilità di ottenere un particolare risultato non è altro che il prodotto delle probabilità dei risultati ottenuti nelle singole prove. Se per ottenere il primo successo, la cui probabilità è pari a p, sono necessarie x prove, si avrà:

$P(I\ldots IS)=\underbrace{P(I)\cdot\ldots\cdot P(I)}_{x-1\ \ volte}\cdot P(S)=\underbrace{(1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p)}_{x-1\ \ volte}\cdot p=(1-p)^{x-1}\cdot p$ dove con "I" si indica il verificarsi dell'insuccesso e con "S" il verificarsi del successo.

Anche la distribuzione binomiale considera il ripetersi di prove di Bernoulli identiche ed indipendenti, ma conta il numero di successi ottenuti in un numero prefissato n di prove, mentre la *geometrica* non fissa il numero di prove che devono essere effettuate, ma replica l'esperimento fino ad ottenere il primo successo.

Il valore atteso e la varianza della *geometrica* sono rispettivamente pari a:

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad e \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Esempio 10:

Al tavolo della roulette un giocatore sceglie una determinata strategia di gioco caratterizzata da una probabilità di successo pari a 0,6. Il giocatore ripete la sua puntata, in giocate successive, finché ottiene un successo, dopodiché si ferma. Si indichi con E l'esperimento aleatorio definito da questo tipo di gioco ed X la v.a. che descrive il numero di giocate effettuate.

Descrivere lo spazio campionario associato all'esperimento E e la funzione di probabilità associata alla v.a. X.

Sia A l'evento: "il giocatore ha successo entro la terza prova" e B l'evento: "il giocatore ha successo alla terza o alla quarta prova"; decidere se i due eventi A e B sono indipendenti.

Determinare la probabilità che siano necessarie più di tre prove per ottenere il primo successo.

Determinare il numero atteso di giocate per ottenere il primo successo.

Lo spazio campionario Ω associato all'esperimento E sarà del tipo:

Ω = {S, IS, IIS, IIIS, …} dove con "I" si indica il verificarsi dell'insuccesso e con "S" il verificarsi del successo nella singola prova, mentre la v.a. X assumerà i valori contenuti in R_X con le relative probabilità:

ω	R_X	$P(X = x)$
S	1	0,6
IS	2	0,4·0,6 = 0,24
IIS	3	0,4·0,4·0,6 = 0,096
IIIS	4	0,4·0,4·0,4·0,6 = 0,0384
…	…	…

La funzione di probabilità può quindi essere riassunta nella formula:

$P(X = x) = 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}6)^{x-1} \qquad x = 1,2,3,\ldots$

P(A) = P(X ≤ 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,6 + 0,24 + 0,096 = 0,936

P(B) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,096 + 0,0384 = 0,1344

Per stabilire che due eventi A e B sono indipendenti si deve verificare:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Dato che $P(A \cap B) = P(X = 3) = 0{,}096$ e che $P(A) \cdot P(B) = 0{,}936 \cdot 0{,}1344 = 0{,}1258$, si può concludere che i due eventi non sono indipendenti.

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}936 = 0{,}064$ è la probabilità che siano necessarie più di tre prove al fine di ottenere il primo successo.

Il valore atteso sarà pari a: $E(X) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{0{,}6} = 1{,}667$.

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

La trattazione delle v.a. continue è piuttosto complessa; è utile tuttavia accennare qualche concetto.

Una v.a. si definisce continua se può assumere tutti i valori in un determinato intervallo di numeri reali; cioè se l'insieme $\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ è un intervallo di numeri reali.

Una v.a. continua è collegata con operazioni di misurazione, quali la durante di un componente elettronico, il peso, l'altezza e altri casi ancora. L'operazione pratica di una misurazione dà sempre luogo ad un troncamento, ad un'approssimazione, ma questa non è altro che un'approssimazione; infatti la misurazione viene arrotondata ad un numero prefissato di cifre decimali e questo dipende anche dalla precisione dello strumento utilizzato per misurare.

Però, se da un lato non è difficile concepire l'idea di continuità, dall'altro l'operazione di assegnazione della probabilità agli eventi dello spazio campionario (che qui ricordo sono infiniti!) è complessa. Per cercare di comprendere il concetto è interessante considerare il seguente esempio.

La seguente tabella riporta i risultati della classificazione dell'altezza (in cm.) di un elevato numero di soggetti (iscritti di leva del '72 in Italia):

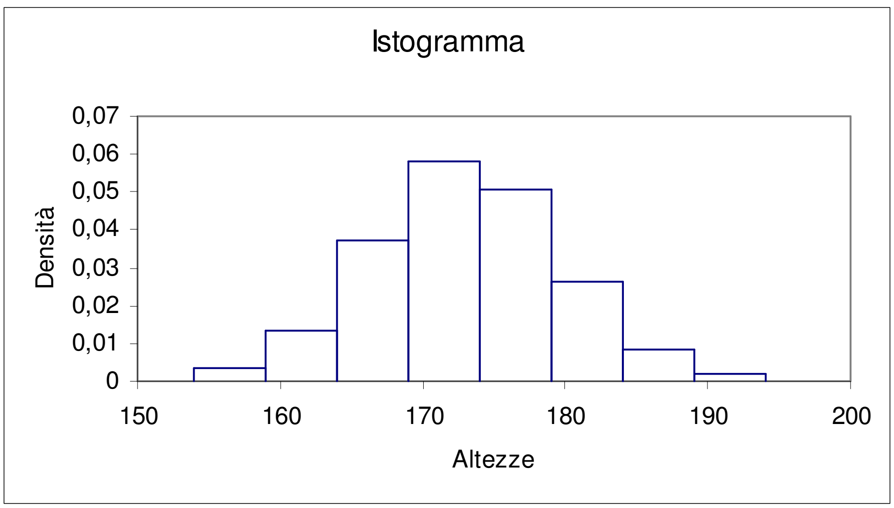
Classi di altezza	*Classe*	f_i	a_i	h_i
(154 – 159]	C_1	0,017	5	0,0034
(159 – 164]	C_2	0,068	5	0,0136
(164 – 169]	C_3	0,186	5	0,0372
(169 – 174]	C_4	0,291	5	0,0582
(174 – 179]	C_5	0,252	5	0,0504
(179 – 184]	C_6	0,132	5	0,0264
(184 – 189]	C_7	0,043	5	0,0086
(189 – 194]	C_8	0,011	5	0,0022
		1		

dove f_i = frequenza relativa, che indica il rapporto tra il numero di soggetti osservati in ogni classe di altezza e numero totale dei soggetti;

a_i = ampiezza di classe, che indica la differenza tra l'estremo superiore e l' estremo inferiore di ogni classe (es. 159 – 154);

$h_i = f_i / a_i$ = densità di frequenza, che indica la frazione di soggetti in ogni centimetro della classe (es. 0,017 / 5).

La rappresentazione grafica (istogramma) che si ottiene ponendo le altezze sull'asse delle ascisse e le densità di frequenza sull'asse delle ordinate è del tipo:



E' facile constatare che l'area A_i di ogni rettangolo dell'istogramma è pari alla frequenza relativa della classe e che l'area dell'intera figura è pari alla somma delle frequenze relative, per cui 1. Quindi per le aree vale che:

(1) Ai > 0 per ogni i = 1, 2, …, 8;

(2) $\sum_i A_i = 1$.

Si consideri ora uno spazio campionario discreto i cui elementi sono le 8 classi di altezza individuate: $\Omega = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8\}$.

Come attribuire una probabilità ad ogni singola classe, cioè ad ogni evento elementare dello spazio campionario discreto Ω ? In altri termini: se si estrae a caso un soggetto dalla popolazione degli iscritti alla leva, qual è la probabilità che la sua altezza appartenga alla classe C_i (i = 1, 2, …, 8)?

Viste le proprietà (1) e (2) delle aree, diventa naturale attribuire ad ogni classe una probabilità pari alla frequenza relativa. E questo, inoltre, alla luce dell'interpretazione frequentista della probabilità non è per nulla illogico: le prove effettuate, cioè i soggetti considerati sono in numero sufficientemente grande (gli iscritti alla leva del '72 in Italia non sono pochi!), e quindi la probabilità del verificarsi di un evento può esser ben approssimata dalla sua frequenza relativa.

L'idea che qui si vuole trasmettere è importante: nel continuo la probabilità è rappresentata da un'area e di conseguenza la probabilità di un punto x è nulla (interpretabile come l'area di un rettangolo con base pari a zero!).

Da un punto di vista applicativo per approssimare la probabilità del verificarsi di un punto si può considerare la probabilità di un piccolo intervallo, centrato sul valore di interesse.

Si può dare ora una definizione di v.a. continua.

Una v.a. X definita nell'intervallo (l, L) è detta continua se esiste una funzione f(x), chiamata funzione di densità di probabilità, tale che:

* $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re$
* $\int_l^L f(x)dx = 1$
* $\int_a^b f(x)dx = P(a < X < b)$

dove a e b sono due valori di X tali che a < b.

Il valore atteso e la varianza delle v.a. continue non vengono qui considerate perché richiedono la conoscenza del calcolo integrale, ma sono comunque definite nel seguente modo:

$E(X) = \int_l^L x \cdot f(x)dx$ purché l'integrale esista e sia finito,

$Var(X) = \int_l^L (x - E(X))^2 \cdot f(x)dx = \int_l^L x^2 \cdot f(x)dx - E(X)^2$ purché l'integrale esista e sia finito.

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE PARTICOLARI

E' ora possibile dare un cenno di due v.a. continue particolari (uniforme continua o rettangolare e normale o di Gauss).

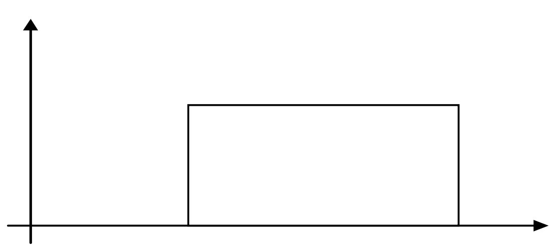
Distribuzione uniforme continua (o rettangolare)

La distribuzione uniforme continua è un'estensione al caso continuo della distribuzione uniforme discreta.

Una v.a. definita nell'intervallo [a, b] ha distribuzione uniforme se può essere espressa mediante la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & altrove \end{cases}$$

che graficamente è del tipo (es. con a > 0 e b > 0):



Esempio 11:

Ad una fermata l'orario di arrivo dell'autobus fra le 8 e le 8.10 segue una distribuzione uniforme continua. Avendo indicato con X il tempo trascorso dalle 8 (in minuti):

si calcoli la probabilità che l'autobus passi tra le 8.04 e le 8.08;

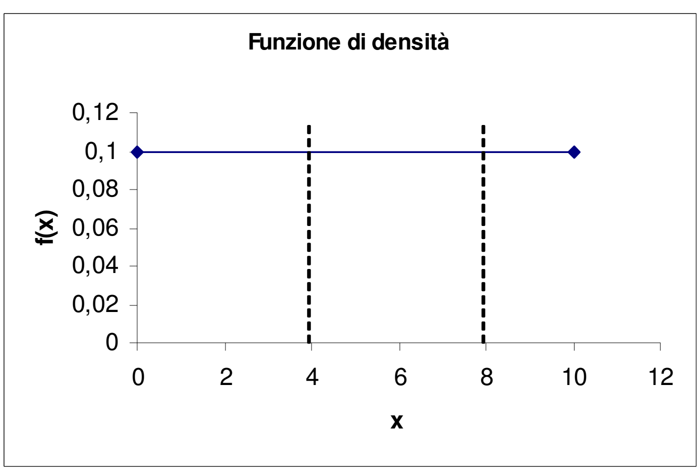
supponendo che uno studente arrivi alla fermata alle 8.04, si determini la probabilità che l'autobus sia già passato;

considerando le 6 mattine in cui lo studente si reca a scuola, si calcoli la probabilità che in almeno 5 mattine l'autobus passi prima delle 8.04.

La funzione di densità sarà:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & 0 \le x \le 10 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Dato che la distribuzione è continua per determinare le probabilità si deve risolvere un integrale. Tuttavia analizzando il grafico della funzione di densità le probabilità possono essere determinate anche calcolando l'area di un rettangolo:



La probabilità che l'autobus passi tra le 8.04 e le 8.08 sarà quindi data da:

$$P(4 \le X \le 8) = (8-4) \cdot \frac{1}{10} = 0{,}4;$$

mentre la probabilità che passi prima delle 8.04 sarà:

$$P(X \le 4) = (4-0) \cdot \frac{1}{10} = 0{,}4 .$$

Sia Y la variabile casuale binomiale che considera il numero di mattine in cui l'autobus passa prima delle 8.04 in 6 prove indipendenti. Dunque la probabilità che fra queste almeno 5 volte si verifichi il successo:

$$P(Y \ge 5) = P(Y = 5) + P(Y = 6) =$$

$$= \binom{6}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot (1-0{,}4)^1 + \binom{6}{6} \cdot 0{,}4^6 \cdot (1-0{,}4)^0 = 0{,}04096.$$

Distribuzione normale (o di Gauss):

La sua funzione di densità è pari a:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \qquad x \in R$$

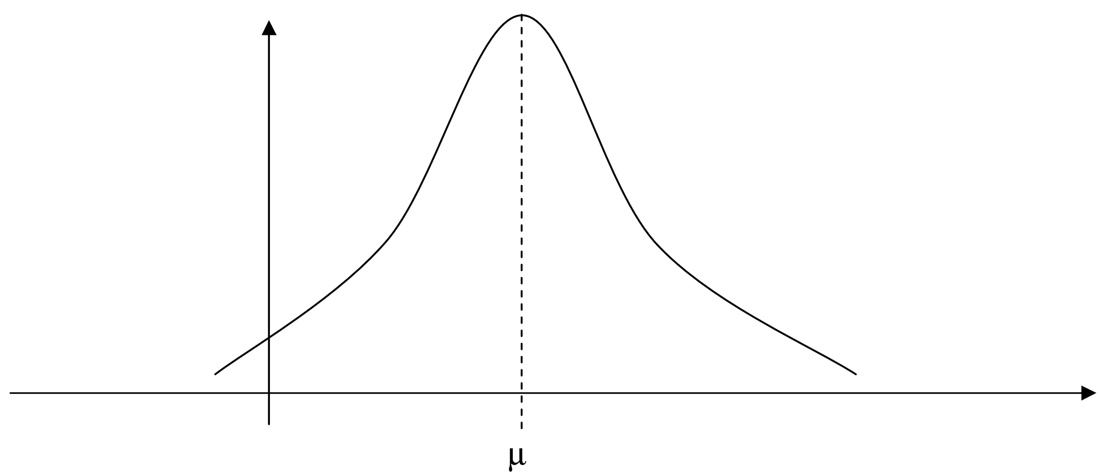
$$E(X) = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2 .$$

La curva normale è simmetrica rispetto alla media, mentre è più o meno "appiattita" a seconda che lo scarto quadratico medio sia più o meno elevato.

Vale comunque che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, cioè l'area sottesa da una curva normale è sempre pari ad uno (dato che è simmetrica rispetto alla media, l'area da -∞ alla media sarà pari a 0,5 e l'area dalla media a +∞ sarà pari a 0,5).

In generale per indicare che una caratteristica X segue una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2 si scrive $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Il grafico della distribuzione normale è del tipo:



Proprietà: La curva

i) è simmetrica rispetto all'asse $x = \mu$;

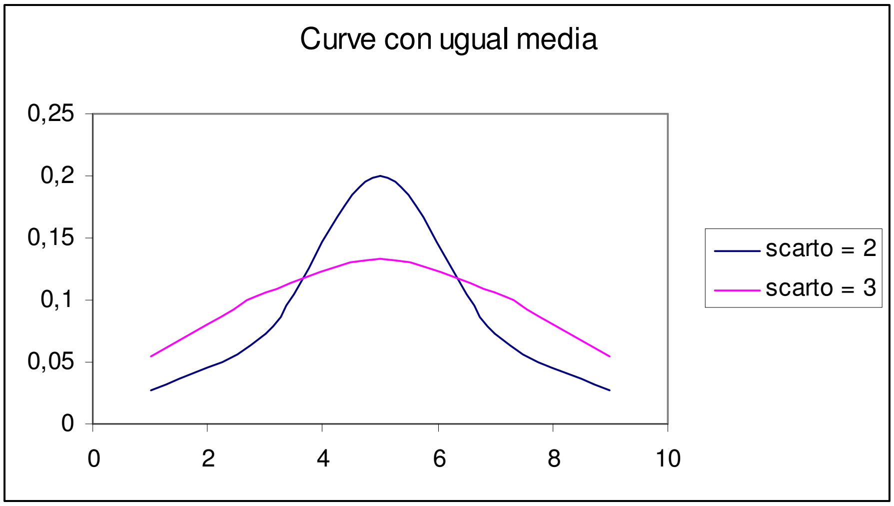
ii) è crescente nell'intervallo $(-\infty, \mu)$ e decrescente nell'intervallo $(\mu, +\infty)$;

iii) ha due punti di flesso in $x = \mu - \sigma$ e $x = \mu + \sigma$;

iv) è concava nell'intervallo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ e convessa altrove;

v) ha come asintoto l'asse x.

Il grafico che segue mostra l'andamento di due curve normali con uguale media ($\mu = 5$) e scarto quadratico medio diverso:



Distribuzione normale standardizzata:

La sua funzione di densità è pari a:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} \qquad z \in R.$$

$$E(X) = 0 \qquad Var(X) = 1.$$

Quindi una curva normale standardizzata non è altro che una curva normale con media pari a 0 e varianza pari ad 1.

Per trasformare una distribuzione normale in una normale standardizzata si utilizza il procedimento della standardizzazione:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Le tavole della normale standardizzata riportano $P(Z \leq z) = \Phi(z)$.

Le tavole della normale standardizzata indicano quindi sempre l'area minore o uguale del punto z.

Esempio 12:

In una coltivazione di frumento il numero di parassiti appartenenti alla famiglia *Puccinia Graminis* presenti una pianta si distribuisce secondo una normale con media μ = 35 e scarto quadratico medio σ = 13,5.

Determinare la probabilità che su una pianta il numero di parassiti sia inferiore a 38.

Determinare la probabilità che su una pianta il numero di parassiti sia compreso tra 30 e 40.

Scelte a caso due piante determinare la probabilità che solo sulla prima ci siano tra i 30 e i 40 parassiti.

Per risolvere i primi due punti è necessario trasformare la distribuzione normale in una standardizzata:

$$P(X < 38) = P\left(Z < \frac{38-35}{13{,}5}\right) = P(Z < 0{,}22) = \Phi(0{,}22) = 0{,}5871;$$

$$P(30 < X < 40) = P\left(\frac{30-35}{13{,}5} < Z < \frac{40-35}{13{,}5}\right) = P(-0{,}37 < Z < 0{,}37) =$$

$$= \Phi(0{,}37) - [1 - \Phi(0{,}37)] = 0{,}6443 - [1 - 0{,}6443] = 0{,}2886.$$

Il terzo punto richiede un ulteriore ragionamento:

sia A l'evento "sulla pianta il numero di parassiti è tra 30 e 40".

Si chiede la probabilità che per la prima pianta si verifichi l'evento A e per la seconda pianta l'evento $\overline{A}$. Le due piante sono indipendenti, per cui:

$$P\left(A \cap \overline{A}\right) = P(A) \cdot P\left(\overline{A}\right) = 0{,}2886 \cdot (1 - 0{,}2886) = 0{,}2053.$$

Esempio 13:

Si supponga che il punteggio X in un gioco a premi sia distribuito secondo una normale con media pari a 28 e varianza pari a 16. Il 19,5% dei giocatori migliori riceve un premio.

Qual è il punteggio minimo x^* affinché un giocatore possa ricevere un premio?

Dal testo dell'esercizio si sa che $X \sim N$ (μ = 28; σ = 4) e che:

$$P(X > x^*) = P\left(Z > \frac{x^* - 28}{4}\right) = 0{,}195.$$

Dalle tavole della normale standardizzata si ricava che:

$$P(Z \leq 0{,}86) = 0{,}805 \quad \Rightarrow \quad P(Z > 0{,}86) = 0{,}195.$$

Quindi per ottenere x^* è sufficiente risolvere l'equazione:

$$\frac{x^* - 28}{4} = 0{,}86 \quad \Rightarrow \quad x^* = 31{,}44\ .$$

Quindi per ricevere un premio si deve ottenere un punteggio maggiore di 31,44.

Esempio 14:

Da precedenti esperienze è emerso che la durata di una sessione di posta elettronica segue una distribuzione normale con media 8 minuti e scarto quadratico medio 2 minuti. Determinare la probabilità che una sessione scelta a caso duri meno di 10 minuti.

Scelte sei sessioni di una giornata, in modo indipendente, calcolare la probabilità che meno di due durino meno di dieci minuti.

Per determinare la probabilità che una sessione duri meno di 10 minuti:

$$P(X < 10) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{10-8}{2}\right) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0{,}8413$$

Sia A l'evento = "Una sessione dura meno di 10 minuti"; considerate 6 sessioni, la v.a. che conta il numero di successi x (eventi A) che si verificano è una binomiale con n = 6 e p = 0,8413. Per cui:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$

$$= \binom{6}{0} \cdot 0{,}8413^0 (1 - 0{,}8413)^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}8413^1 (1 - 0{,}8413)^5 = 0{,}000524.$$