Facolta' di Ingegneria
Calcolo delle Probabilita' e Statistica

II prova scritta - 10 maggio 2007
A.A. 2006-2007

Esercizio 1

Due urne A e B contengono 80 monete e 50 monete, rispettivamente. L'urna A contiene il 10% di monete difettose (la probabilità che esca testa è diversa dalla probabilità che esca croce), mentre l'urna B contiene il 20% di monete difettose. Vengono effettuate 5 estrazioni senza reinserimento da una delle 2 urne. Calcolare la probabilità che tra le monete estratte ce ne sia almeno 1 difettosa, sapendo che
(i) l'urna scelta è la A;
(ii) l'urna scelta è la B;
(ii) l'urna è scelta a caso.

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $(a, a+1)$ e sia $Y = -\frac{1}{\alpha}\ln(X-a)$, con $a > 0, \alpha > 0$.
(i) Calcolare la legge della v. a. Y. È una legge nota?
(ii) Calcolare $E(X+Y)$ e $P(Y^2 > 9)$.

Esercizio 3

Una moneta equilibrata viene lanciata n volte. Per ogni $k \leq n$ indichiamo con X_k la variabile aleatoria che vale 1 se al k-esimo lancio è uscita testa, 0 altrimenti.
Poniamo $\overline{X}_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$.
(i) Usando l'approssimazione normale, calcolare $P(\overline{X}_n \geq 0.51)$, per $n = 900$.
(ii) Usando l'approssimazione normale, calcolare $P(|\overline{X}_n - 1/2| \leq 0.01)$, per $n = 900$.
(iii) Stimare quanto deve essere grande n perché sia $P(|\overline{X}_n - 1/2| \leq 0.01) \geq 0.95$.

Facolta' di Ingegneria
Calcolo delle Probabilita' e Statistica

II prova scritta - 10 maggio 2007
A.A. 2006-2007

Sol. esercizio 1

L 'urna A contiene 8 monete difettose e 72 monete equilibrate.
L 'urna B contiene 10 monete difettose e 40 monete equilibrate.
Sia X la v.a. che conta il numero di monete difettose su 5 estrazioni senza reinserimento. Allora
(i)

$$P(X \geq 1/A) = 1 - P(X = 0/A) = 1 - \frac{\binom{8}{0} \times \binom{72}{5}}{\binom{80}{5}} = 1 - 0.582 = 0.418;$$

(ii)

$$P(X \geq 1/B) = 1 - P(X = 0/B) = 1 - \frac{\binom{10}{0} \times \binom{40}{5}}{\binom{50}{5}} = 1 - 0.311 = 0.689;$$

(ii)

$$P(X \geq 1) = P(X \geq 1/A)P(A) + P(X \geq 1/B)P(B) = 0.418 \times \frac{1}{2} + 0.689 \times \frac{1}{2} = 0.554.$$

Sol. esercizio 2

(i) $Im(Y) = \{0, +\infty\}$ e dunque se $x \geq 0$

$$P(Y \leq x) = P\left(-\frac{1}{\alpha}\ln(X - a) \leq x\right) = P\left(\ln(X - a) \geq -\alpha x\right) =$$

$$P\left(X \geq \exp(-\alpha x) + a\right) = \int_{\exp(-\alpha x)+a}^{a+1} dx = a + 1 - (\exp(-\alpha x) + a) = 1 - \exp(-\alpha x)$$

ovvero

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0; \\ 1 - \exp(-\alpha x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Pertanto $Y \sim Exp(\alpha)$.

(ii)

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = a + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}$$

$$P(Y^2 > 9) = P(Y > 3) = \exp(-3\alpha).$$

Sol. esercizio 3

$$\text{(i)} \quad P(\overline{X}_{900} \geq 0.51) = P\left(30\frac{\overline{X}_{900} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \geq 30\frac{0.51 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = 1 - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$$

$$\text{(ii)} \quad P(|\overline{X}_{900} - 1/2| \leq 0.01) = P\left(30\frac{-0.01}{\frac{1}{2}} \leq 30\frac{\overline{X}_{900} - 1/2}{\frac{1}{2}} \leq 30\frac{0.01}{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \Phi(0.6) - \Phi(-0.6) = 2\Phi(0.6) - 1 = 2 \times 0.7257 - 1 = 0.4514.$$

$$\text{(iii)} \quad P(|\overline{X}_n - 1/2| \leq 0.01) = P\left(\sqrt{n}\frac{-0.01}{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - 1/2}{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n}\frac{0.01}{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$\Phi(\sqrt{n}0.02) - \Phi(-\sqrt{n}0.02) = 2\Phi(\sqrt{n}0.02) - 1$$

Bisogna trovare n tale per cui sia soddisfatta la seguente disuguaglianza

$2\Phi(\sqrt{n}0.02) - 1 \geq 0.95$, ovvero:

$$\Phi(\sqrt{n}0.02) \geq 0.975 \Longrightarrow \sqrt{n}0.02 \geq \phi_{0.975} = 1.96,$$

$$\text{ovvero } \sqrt{n} \geq 98 \Longrightarrow \boxed{n \geq 9604}.$$