1 Vettori aleatori continui

Si chiama vettore aleatorio assolutamente continuo una v.a. n-dimensionale $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, le cui componenti X_i sono v.a. assolutamente continue, ognuna provvista di densità continua $f_i(t) \geq 0$, tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)dt = 1,$$

per cui risulta:

$$F_i(t) = P(X_i \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_i(u)du, \quad \frac{d}{dt}F_i(t) = f_i(t).$$

($F_i(t)$ è la f.d.d. marginale della v.a. X_i, mentre $f_i(t)$ è la densità marginale di X_i).

La f.d.d. congiunta di $\underline{X}$ è

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n\},$$

e si chiama densità congiunta di $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ la funzione

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

definita da

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}.$$

Inoltre, se $E \subset \mathbb{R}^n$, si ha:

$$P[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in E] = \int_E f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \cdots dx_n,$$

dove l'integrale è multiplo.

Per semplicità, trattiamo inizialmente il caso di una v.a. bidimensionale (X, Y) (ovvero $n = 2$ e $X_1 = X, X_2 = Y$), con f.d.d. e densità congiunta:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \;\text{ e }\; f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Naturalmente, $f(x, y) \geq 0$, e l'integrale doppio di f esteso a $\mathbb{R}^2$ deve valere 1, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1;$$

inoltre, se $E \subset \mathbb{R}^2$, si ha:

$$P[(X, Y) \in E] = \int\int_E f(x, y)dxdy,$$

anche questo è un integrale doppio.
Si ha pure:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P((X, Y) \in A_{x,y}) = \int\int_{A_{x,y}} f(u, v)dudv,$$

ove $A_{x,y} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \leq x,\ v \leq y\}$.
Il significato della densità $f(x,y)$ è il seguente:

$$f(x,y)dxdy = P[X \in (x, x+dx), Y \in (y, y+dy)].$$

Anche per la v.a. bidimensionale (X,Y) vale che

$$P[(X,Y) \in A] = \int\int_A f(x,y)dxdy = 0, \text{ se } mis(A) = 0,$$

dove $mis(A)$ è la misura Euclidea dell'insieme A.
In particolare, risulta $P(X = x, Y = y) = 0,\ \forall x, y$.

Per quanto riguarda le distribuzioni marginali di X e Y, si ha:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{X \leq x, Y \leq y\}\right) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv f(u,v).$$

e

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{X \leq x, Y \leq y\}\right) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} dv \int_{-\infty}^{+\infty} du f(u,v).$$

Dunque:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv f(u,v)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} du f(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv f(x,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,$$

dove abbiamo usato il Teorema fondamentale del Calcolo (Teorema di Torricelli), per affermare che

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(u,v)du\right) = f(x,v);$$

analogamente, si trova:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Si osservi l'analogia con le formule per le densità marginali delle componenti di una v.a. bidimensionale discreta (X,Y), per cui, detta $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$ la densità congiunta, risulta:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_y p(x,y) \ e \ p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x p(x,y).$$

Naturalmente, ora le serie sono state sostituite da integrali.

Osservazione Per $a_2 > a_1,\ b_2 > b_1$, sia

$$R = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2);$$

allora:

$$P((X,Y) \in R) = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1).$$

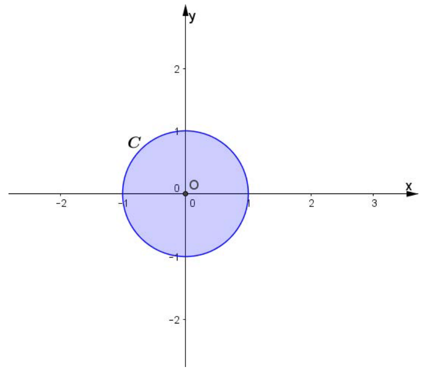

Figure 1: densità uniforme sul cerchio di raggio 1; $f(x, y) = 1/\pi$ nel cerchio (zona blu), e vale zero fuori.

Infatti

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a_2, y \leq b_2\} - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a_2, y \leq b_1\} - Q,$$

dove

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a_1, y \leq b_2\} - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a_1, y \leq b_1\},$$

e

$$P(Q) = F(a_1, b_2) - F(a_1, b_1).$$

Pertanto:

$$P(R) = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - P(Q) = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1).$$

Esempio 1 (Distribuzione uniforme sul cerchio)
Sia $Z = (X, Y)$ una v.a. bidimensionale con densità:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & se\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcoliamo le densità marginali. Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy;$$

(I) $$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{2}{\pi}\, \sqrt{1 - x^2}$$

(II) $$|x| > 1 \Rightarrow f_X(x) = 0$$

Pertanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\, \sqrt{1 - x^2} & se\ |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\ \sqrt{1-y^2} & se\ |y| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definizione

Le v.a. continue $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si dicono stocasticamente indipendenti se $\forall a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots a_n, b_n$ con $a_i \leq b_i$ risulta:

$$P(X_1 \in [a_1, b_1],\ X_2 \in [a_2, b_2],\ \ldots, X_n \in [a_n, b_n] = P(X_1 \in [a_1, b_1])P(X_2 \in [a_2, b_2]) \cdots P(X_n \in [a_n, b_n]).$$

Se $n = 2$, X e Y sono indipendenti se, per $a \leq b$ e $c \leq d$:

$$P(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = P(a \leq X \leq b)P(c \leq Y \leq d). \tag{1.1}$$

Se X e Y hanno densità congiunta $f(x, y)$, (1.1) diviene:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\ dx = \left(\int_a^b f_X(x)dx\right)\left(\int_c^d f_Y(y)dy\right),$$

e ciò vale se e solo se

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)\ \ q.o.\ \ \text{(quasi ovunque).}$$

Osservazione Se $f(x, y)$, $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ sono funzioni continue, per mostrare che X e Y sono dipendenti, basta che esista $(x_0, y_0) \in dom f$ tale che $f(x_0, y_0) \neq f_X(x_0)f_Y(y_0)$; infatti, per il Teorema della permanenza del segno applicato alla funzione continua $g(x, y) = f(x, y) - f_X(x)f_Y(y)$, esiste un cerchietto con centro (x_0, y_0) e raggio r opportunamente piccolo, per cui risulta $g(x, y) \neq 0$, per $(x, y) \in C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq r^2\}$, e questo vuol dire che X e Y sono dipendenti, poiché C_r ha misura strettamente positiva.

Le v.a. X e Y dell' Esempio 1 non sono indipendenti; infatti $f_X(x)f_Y(y) > 0$ se $(x, y) \in Q = [-1, 1]^2$, e $f(x, y) = 0$ fuori del cerchio $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset Q$. Allora in $Q - C$ risulta $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

Proposition 1.1 *Se X e Y sono v.a. assolutamente continue indipendenti, e $\phi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora le v.a. $\phi(X)$ e $\psi(Y)$ sono indipendenti.*

Dim. Per $a < b$ e $c < d$, si ha:

$$P(\phi(X) \in [a, b], \psi(Y) \in [c, d]) = P(X \in \phi^{-1}([a, b]), Y \in \psi^{-1}([c, d])),$$

dove $\phi^{-1}([a, b])$ è la controimmagine di $[a, b]$ tramite ϕ e $\psi^{-1}([c, d])$ è la controimmagine di $[c, d]$ tramite ψ. Allora, siccome X e Y sono indipendenti:

$$P(\phi(X) \in [a, b], \psi(Y) \in [c, d]) = \int\int_{\phi^{-1}([a,b])\times\psi^{-1}([c,d])} f(x, y)dxdy$$

$$= \int\int_{\phi^{-1}([a,b])\times\psi^{-1}([c,d])} f_X(x)f_Y(y)dxdy = \int_{\phi^{-1}([a,b])} f_X(x)dx \cdot \int_{\psi^{-1}([c,d])} f_Y(y)dy$$
$$= P(\phi(X) \in [a, b]) \cdot P(\psi(Y) \in [c, d]).$$

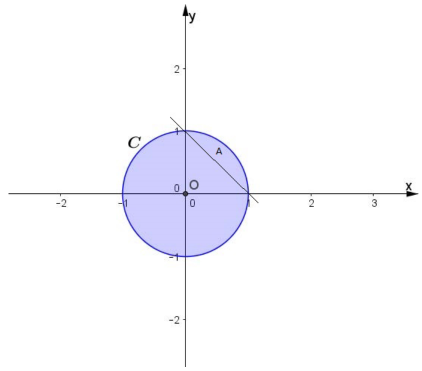

Figure 2:

Osservazione Se $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ è un vettore aleatorio $n-$dimensionale, la nozione di indipendenza di $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si formula in modo analogo.
Estendendo la Proposizione 1, se (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) sono due vettori aleatori bidimensionali indipendenti, allora $X_1 + Y_1$ è una v.a. indipendente da $X_2 + Y_2$. Basta prendere $\phi(x, y) = \psi(x, y) = x + y$, dove ora, naturalmente, $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Esercizio Sia (X, Y) un vettore aleatorio uniformemente distribuito sul cerchio unitario. Calcolare $P(X + Y \geq 1)$.

Soluzione. Siccome $X^2 + Y^2 \leq 1$, si ha:

$$P(X + Y \geq 1) = \int \int_A \frac{1}{\pi} \, dxdy,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Quindi:

$$P(X + Y \geq 1) = \int_0^1 dx \int_{-x+1}^{\sqrt{1-x^2}} dy \, \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot area(A) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right),$$

ovvero $\frac{1}{\pi} \cdot$ (area di un quarto di cerchio di raggio $1-$ area del triangolo rettangolo isoscele di cateto uguale a 1), vedi figura 2.

Osservazione Supponiamo che X e Y abbiano densità congiunta della forma $f(x, y) = u(x)v(y)$. allora X e Y sono indipendenti.
Infatti, deve essere:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} v(y) dy \qquad (*)$$

Le densità marginali di X e Y sono:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = u(x) \int_{-\infty}^{+\infty} v(y) dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = v(y) \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dx =$$

(utilizzando (*))
$$= v(y)\frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} v(y)dy},$$
da cui:
$$f(x,y) = u(x)v(y) = \left(u(x)\int_{-\infty}^{+\infty} v(y)dy\right)\cdot\left(v(y)\frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} v(y)dy}\right) = f_X(x)f_Y(y),$$
e quindi X e Y sono indipendenti.

Non è detto però che $u(x) = f_X(x)$ e $v(y) = f_Y(y)$.
Esempio: supponiamo che
$$u(x) = e^{-x^2/2}\ ,\ v(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-y^2/2}$$
e che $f(x,y) = u(x)v(y)$; allora, risulta:
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}u(x) \text{ e } f_Y(y) = \sqrt{2\pi}v(y),$$
come è facile verificare, calcolando le densità marginali, a partire dalla densità congiunta $f(x,y)$. Dunque, le densità marginali non sono uguali, rispettivamente a $u(x)$ e $v(y)$, ma lo sono, solo a meno di un fattore di proporzionalità.

Densità condizionale
Siano X e Y v.a. con densità congiunta $f(x,y)$ e marginali $f_X(x),\ f_Y(y)$. Allora, si chiama densità condizionale di X, dato $\{Y = y\}$ la funzione:
$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} & \text{se } f_Y(y) > 0 \\ 0 & \text{se } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$
Analogamente, si definisce la densità condizionale di Y, dato $\{X = x\}$, ovvero:
$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} & \text{se } f_X(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f_X(x) = 0 \end{cases}$$
Osserviamo che:
$$\int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx = \frac{1}{f_Y(y)}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1,$$
dunque, come funzione di x, la funzione $f_{X|Y}(x|y)$ è una densità. Stessa cosa accade per la funzione $f_{Y|X}(y|x)$.

Se X e Y sono indipendenti, allora:
$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x),\ \text{e anche}\ \ f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y).$$

Esempio Il tempo di vita, Y, di un componente elettronico ha densità esponenziale di parametro $\Lambda > 0$, dove Λ è una v.a. uniformemente distribuita in $(0,1)$. Trovare la densità di Y.

Si ha:

$$f_{Y|\Lambda}(y|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Siccome $\Lambda \sim Uni(0,1)$, la densità congiunta di Λ e Y, ovvero $f(\lambda, y)$ è:

$$f(\lambda, y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & \text{se } y \geq 0 \text{ e } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 f(\lambda, y)\, d\lambda = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda y}\, d\lambda = \frac{1}{y^2}(1 - ye^{-y} - e^{-y}), & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

Speranza condizionale
Si chiama media condizionale di X, dato $\{Y = y\}$ la quantità

$$E[X|Y = y] = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_{\mathbb{R}} x\, \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\, dx.$$

La media condizionale di X, dato $\{Y = y\}$ è in realtà anch'essa una v.a., che assume valori $m_y := E[X|Y = y]$, al variare di y nel range di Y.
Risulta:

$$E[E[X|Y = y]] = E(X);$$

infatti,

$$E[E[X|Y = y]] = \int_{\mathbb{R}} E[X|Y = y] f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} x\, \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\, dx \right) f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx\ x \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy =$$

(essendo $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = f_X(x)$)

$$= \int_{\mathbb{R}} dx\ x f_X(x) = E(X).$$

Naturalmente, in maniera analoga si definisce la media condizionale di Y, dato $\{X = x\}$, e risulta $E[E[Y|X = x]] = E(Y)$.

Esercizio
Supponiamo che $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ e sia Y un'altra v.a. con distribuzione esponenziale di parametro X (attenzione, X è positivo, ma è un numero aleatorio).
(i) Qual è la legge di Y?
(ii) Quanto vale la media di Y?

(iii) Qual è la densità condizionale di X, dato $\{Y = y\}$? e quanto vale $E[X|Y = y]$?
Soluzione. (i) La densità condizionale di Y, dato $\{X = x\}$ è:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} xe^{-xy} & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

La densità congiunta di (X, Y) è:

$$f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \cdot xe^{-xy} & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha} e^{-(\lambda+y)x} & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La densità di Y è la marginale:

$$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} dx \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-(\lambda+y)x}$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\lambda+y)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} dx \frac{(\lambda+y)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{(\alpha+1)-1} e^{-(\lambda+y)x} =$$

(visto che l'integrale vale 1, poiché la funzione integranda è una densità $Gamma(\alpha+1, \lambda+y)$)

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\lambda+y)^{\alpha+1}} = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+y)^{\alpha+1}},\ y \geq 0,$$

mentre $f_Y(y) = 0$, se $y < 0$.
(ii) $E(Y)$ è finita se e solo se

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\lambda^\alpha y}{(\lambda+y)^{\alpha+1}}\ dy < +\infty,$$

il che è vero se $\alpha > 1$. Integrando per parti, si ottiene facilmente:

$$E(Y) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}.$$

(iii) La densità condizionale di X dato $Y = y$ è:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{(\lambda+y)^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-(\lambda+y)x},\ x \geq 0$$

che è una densità $Gamma(\alpha+1, \lambda+y)$, perciò la sua media, ovvero $E[X|Y = y]$, vale $\frac{\alpha+1}{\lambda+y}$.

Trasformazioni di v.a. assolutamente continue
Abbiamo già visto che, se $Y = \phi(X)$ con ϕ diffeomorfismo, e $f_X(x)$ è la densità di X, allora la densità di Y è:

$$f_Y(y) = f(\phi^{-1}(y))|(\phi^{-1})'(y)|.$$

Vogliamo ora trattare il caso di una trasformazione bidimensionale. Consideriamo la trasformazione $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che manda $(X, Y) \to (U, V)$, e la sua inversa: $\psi = \phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che manda $(U, V) \to (X, Y)$, e fornisce

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v). \end{cases}$$

Se $E \subset \mathbb{R}^2$, si ha:

$$P((X, Y) \in E) = P((U, V) \in \phi(E))$$

ovvero, se $f(x, y)$ è la densità congiunta di (X, Y) :

$$\int\int_E f(x, y)dxdy = \int\int_{\phi(E)} h(u, v)dudv,$$

dove $h(u, v)$ denota la densità congiunta di (U, V). D'altra parte, per la formula del cambio di variabili nell'integrale doppio:

$$\int\int_E f(x, y)dxdy = \int\int_{\phi(E)} f(x(u, v), y(u, v))|det(J_{\phi^{-1}}(u, v))|dudv,$$

dove $J_{\phi^{-1}}(u, v)$ è la matrice Jacobiana associata alla trasformazione inversa, ed è data da:

$$J_{\phi^{-1}}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}. \end{pmatrix}$$

Dunque, si ottiene $\forall E \subset \mathbb{R}^2$:

$$\int\int_{\phi(E)} \left[f(x(u, v), y(u, v))|det(J_{\phi^{-1}}(u, v))| - h(u, v)\right] dudv = 0,$$

cioè:

$$h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))|det(J_{\phi^{-1}}(u, v))|$$

che esprime la densità di (U, V) in termini della densità f di (X, Y).

Vedremo negli esercizi vari esempi di applicazione della formula qui sopra.

Ora, dimostriamo l'annunciata **formula di convoluzione**:
se X e Y hanno densità congiunta $f(x, y)$, allora la densità di $Z = X + Y$ è:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z - x)dx.$$

Questa formula si può dimostrare anche utilizzando il cambio di variabili di sopra, ma è più istruttivo procedere mediante la f.d.d. di Z nel modo seguente. Si ha:

$$P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int\int_A f(x, y)dxdy$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y \leq z - x\}$. Quindi:

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dy;$$

derivando rispetto a z :

$$\frac{d}{dz}F_Z(z) = \frac{d}{dz}(P(Z \leq z)) = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x, z-x),$$

ove abbiamo applicato il Teorema di Torricelli alla funzione $y \to f(x,y)$, con x fissata. Abbiamo quindi ottenuto:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z-x)dx.$$

Se poi, X e Y sono indipendenti, allora la densità di $Z = X + Y$ diviene:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)dx.$$

Ora dimostriamo la formula di convoluzione, utilizzando il cambio di variabili.

Consideriamo la traformazione $(X, Y) \longrightarrow (X, Z)$, dove $Z = X + Y$, ovvero:

$$\phi : \begin{cases} X = X \\ Z = X + Y \end{cases}, \quad \text{e la sua inversa } \phi^{-1} : \begin{cases} X = X \\ Y = Z - X. \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasformazione inversa, $J_{\phi^{-1}}(x,z)$ è :

$$J_{\phi^{-1}}(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e il valore assoluto del suo determinante vale 1. Allora, usando la formula per la densità della v.a. trasformata (X, Z), si ottiene:

$$f_{(X,Z)}(x,z) = f_{(X,Y)}(x(x,z), y(x,z))|det(J_{\phi^{-1}}(x,z))| = f_{(X,Y)}(x, z-x) \cdot 1.$$

Infine, la densità di $Z = X + Y$ è la seconda marginale di (X, Z), pertanto si ottiene integrando in x :

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Z)}(x,z)dx = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, z-x)dx,$$

che coincide con la formula già trovata, col metodo della funzione di distribuzione. Osserviamo che particolare attenzione deve essere fatta relativamente al dominio di integrazione; infatti, nella formula c'è scritto $\mathbb{R}$, ma spesso esso è solo un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, a causa della forma di $f_{(X,Y)}(x,y)$ che può contenere nella sua definizione una o due funzioni indicatrici.

Utilizziamo ora la formula di convoluzione per dimostrare il teorema di addizione di v.a. con densità Gamma, indipendenti.

Theorem 1.2 *Siano X e Y indipendenti con $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim Gamma(\beta, \lambda)$, $\alpha, \beta, \lambda > 0$. Allora*

$$Z = X + Y \sim Gamma(\alpha + \beta, \lambda).$$

Dim. Per la formula di convoluzione relativa a v.a. indipendenti, la densità di Z è data da:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \cdot \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-\lambda(z-x)} \mathbf{1}_{\{z-x \geq 0\}}(x) dx$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1} dx;$$

(ricordiamo che $\mathbf{1}_E(u)$ è la funzione indicatrice sull' insieme E, che vale 1 se $u \in E$, e zero altrimenti)
con la sostituzione $x = tz$, si ottiene

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-\lambda z} \int_0^1 (tz)^{\alpha-1}(z-tz)^{\beta-1} z dt$$

$$= C \cdot z^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda z},$$

ove abbiamo posto

$$C = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt;$$

Quindi, abbiamo ottenuto:

$$f_Z(z) = C \cdot z^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda z}.$$

Da quest'ultima uguaglianza segue che Z ha densità $Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$, a patto che risulti $C = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, ovvero

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Da ciò segue che

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$$

è una densità con supporto $(0, 1)$; essa si chiama densità $Beta(\alpha, \beta)$.

Utilizzando la formula di convoluzione, si potrebbe dimostrare il teorema di addizione per v.a. Gaussiane indipendenti, cioè:

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2),\ Y \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2),\ X, Y \text{ indipendenti} \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{N}(m + \mu, \sigma^2 + \tau^2),$$

ma i calcoli sarebbero troppo elaborati. Per dimostrare tale proprietà si preferisce procedere in un altro modo, utilizzando le funzioni caratteristiche, argomento che comunque non faremo.

Verifichiamo ora che la funzione di Gauss è effettivamente una densità su $\mathbb{R}$.
Proveremo che

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi},$$

ovvero che

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1.$$

Cominciamo col calcolare l'integrale doppio

$$J = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy;$$

Passando a coordinate polari piane, ovvero

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

si ha:

$$J = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} d\rho e^{-\rho^2/2} \rho = 2\pi \Big[- e^{-\rho^2/2} \Big]_0^{+\infty} = 2\pi.$$

D'altra parte:

$$2\pi = J = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \right) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt \right)^2 = I^2$$

e quindi

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Densità di $X - Y$.
Calcoliamo ora la densità di $Z = X - Y$; se $f(x, y)$ è la densità congiunta di X, Y, per z fissato si ha:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X - Y \le z) = \int\int_E f(x, y)\ dxdy,$$

ove

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y \ge x - z\}.$$

Quindi:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x-z}^{+\infty} f(x, y)\ dxdy,$$

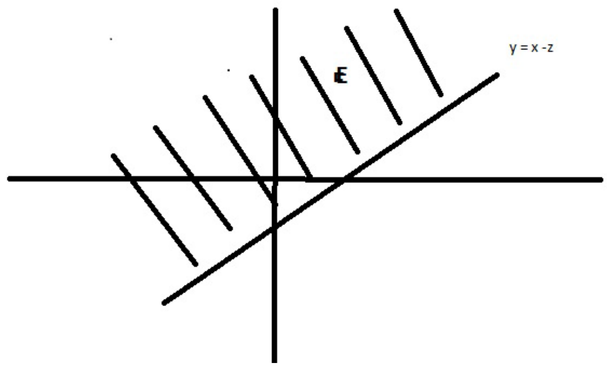

Figure 3:

e, derivando rispetto a z :

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dz}\int_{x-z}^{+\infty} f(x,y)\ dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ (-f(x,x-z)\cdot(-1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ f(x,x-z).$$

(come in precedenza, abbiamo utilizzato il Teorema di Toricelli).

Allo stesso risultato si poteva pervenire utilizzando il cambio di variabili: $(X,Y) \longrightarrow (X,Z)$, dove $Z = X - Y$, ovvero:

$$\phi : \begin{cases} X = X \\ Z = X - Y \end{cases} \quad , \quad \text{e la sua inversa } \phi^{-1} : \begin{cases} X = X \\ Y = X - Z. \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasformazione inversa, $J_{\phi^{-1}}(x,z)$ è :

$$J_{\phi^{-1}}(x,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e il valore assoluto del suo determinante vale 1. Allora, usando la formula per la densità della v.a. trasformata (X,Z), si ottiene:

$$f_{(X,Z)}(x,z) = f_{(X,Y)}(x(x,z), y(x,z))|det(J_{\phi^{-1}}(x,z))| = f_{(X,Y)}(x, x-z)\cdot 1.$$

Infine, la densità di $Z = X - Y$ è la seconda marginale di (X,Z), pertanto si ottiene integrando in x :

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Z)}(x,z)dx = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,x-z)dx,$$

che coincide con la formula già trovata, col metodo della funzione di distribuzione.

Calcoliamo ora la densità di $Z = aX + bY + c$.
1) $b > 0$
si ha:

$$P(Z \le z) = P(aX + bY + c \le z) = P\left(Y \le \frac{z-c}{b} - \frac{ax}{b}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{(z-c)/b-ax/b} f(x,y)dy,$$

e, derivando rispetto a z :

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}P(Z \le z) = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{(z-c)/b-ax/b} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{(z-c)/b-ax/b} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ f\left(x, \frac{z-c-ax}{b}\right) \cdot \frac{1}{b};$$

2) $b < 0$
si ha:

$$P(Z \le z) = P(aX + bY + c \le z) = P\left(Y \ge \frac{z-c}{b} - \frac{ax}{b}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{(z-c)/b-ax/b}^{+\infty} f(x,y)dy,$$

e, derivando rispetto a z :

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}P(Z \le z) = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{(z-c)/b-ax/b}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dz}\int_{(z-c)/b-ax/b}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \left[-f\left(x, \frac{z-c-ax}{b}\right)\right] \cdot \frac{1}{b}.$$

In definitiva, riunendo tutti e due i casi, otteniamo che la densità di Z è:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ f\left(x, \frac{z-c-ax}{b}\right) \cdot \frac{1}{|b|}.$$

Ovviamente, il caso $b = 0$ va considerato a parte, poiché in tal caso $Z = aX + c$ è una trasformazione lineare della v.a. unidimensionale X, e la densità di Z, come sappiamo, è :

$$f_X\left(\frac{z-c}{a}\right)\frac{1}{|a|},$$

ove $f_X(x)$ denota la densità di X.