ESERCIZIO 2b.30

PER $a \in (-3,3)$, si consideri la funzione:

$$f_a(x,y) = \begin{cases} k\, e^{-3(x+y)-a(x-y)} & \text{se } x,y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ove $k>0$!

1) determinare, in funzione di a, la costante k, in modo tale che (f_a) sia la densità di una variabile assolutamente continua (X_a, Y_a)!

2) Trovare le marginali X_a e Y_a e calcolare $\operatorname{cov}(X_a, Y_a)$. Dire se X_a e Y_a sono indipendenti

3) Trovare il valore di $\bar{a}$ per cui risulta $E(X_{\bar{a}} - Y_{\bar{a}}) = -\frac{4}{5}$ e siano $U = X_{\bar{a}}$ e $V = Y_{\bar{a}}$. Posto $Z = 10U + 2V$, trovare la densità di Z e calcolare $E(Z)$ e $\operatorname{Var}(Z)$.

4) $P(2U < V)$

VLG

1) $$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} K\, e^{-3(x+y)-a(x-y)}\, dx\, dy = 1$$

TROVIAMO K_a

$$= \int_0^{+\infty} K\, e^{-3(x+y)-a(x-y)}\, dy$$

$$\int_0^{+\infty} K\, e^{-3x-3y-ax+ay}\, dy$$

$$= K \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cdot e^{-3y} \cdot e^{-ax} \cdot e^{ay}\, dy$$

$$K \cdot e^{-3x} \cdot e^{-ax} \int_0^{+\infty} e^{-y(3-a)}\, dy$$

all'interno dell'integrale possiamo intuire la funzione esponenziale!

$$= k \cdot e^{-3x} \cdot e^{-ax} \int_0^{+\infty} \frac{3-a}{3-a} \cdot e^{-(3-a)y} \, dy$$

$$\frac{k \cdot e^{-3x} \cdot e^{-ax}}{3-a} \int_0^{+\infty} \underbrace{(3-a) \cdot e^{-(3-a)y}}_{} \, dy$$

funzione esponenziale di parametro $(3-a)$! =

$$= \left[\frac{k \cdot e^{-3x} \cdot e^{-ax}}{3-a} \right]$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{k \; e^{-3x} \cdot e^{-ax}}{3-a} = \frac{k}{3-a} \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cdot e^{-ax} \, dx$$

$$= \frac{k}{3-a} \int_0^{+\infty} e^{-x(3+a)} \, dx = \frac{k}{3-a} \int_0^{+\infty} \frac{3+a}{3+a} \, e^{-(3+a)x} \, dx$$

$$= \frac{k}{(3-a)(3+a)} \int_0^{+\infty} \underbrace{3+a \cdot e^{-(3+a)x}}_{} \, dx$$

funzione esponenziale di parametro $\lambda = 3+a$ =

$$= \frac{k}{(3-a)(3+a)} \longrightarrow \boxed{\frac{k}{(3-a)(3+a)} = 1}$$

$$\left[\frac{k}{9-a^2} = 1 \right]$$

$$\boxed{k = 9-a^2}$$

2) ora troviamo le densità marginali!

$$f_X(x_a) = \int^{+\infty} (9-a^2) \; e^{-3(x+y)-a(x-y)} \, dy$$

$$f_X(x_a) = \int_0^{+\infty} (9-a^2)\, e^{-3(x+y)-a(x-y)}\, dy$$

$$= 9-a^2 \int_0^{+\infty} e^{-3x-3y-ax+ay}\, dy = 9-a^2 \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cdot e^{-3y} \cdot e^{-ax} \cdot$$

$$(9-a^2)\, e^{-3x} \cdot e^{-ax} \int_0^{+\infty} e^{-3y} \cdot e^{ay}\, dy$$

$$(9-a^2)\, e^{-3x} \cdot e^{-ax} \int_0^{+\infty} e^{-y(3-a)}\, dy$$

$$= (9-a^2)\, e^{-3x} \cdot e^{-ax} \int_0^{+\infty} \frac{3-a}{3-a}\, e^{-(3-a)y}\, dy$$

$$= \frac{(9-a^2)\, e^{-3x} \cdot e^{-ax}}{3-a} \int_0^{+\infty} \underbrace{3-a \quad e^{-(3-a)y}}_{1}\, dy$$

$$= \frac{(3\cancel{-a})(3+a) \cdot e^{-3x} \cdot e^{-ax}}{(3\cancel{-a})} = \boxed{(3+a) \cdot e^{-3x-ax}}\ \exp(3+a)$$

$$f_y(y_a) = \int_0^{+\infty} (9-a^2)\, e^{-3(x+y)-a(x-y)}\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} (9-a^2) \cdot e^{-3x} \cdot e^{-3y} \cdot e^{-ax} \cdot e^{ay}\, dx$$

$$= (9-a^2) \cdot e^{-3y} \cdot e^{ay} \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cdot e^{-ax}\, dx$$

$$= (9-a^2) \cdot e^{-3y} \cdot e^{ay} \int_0^{+\infty} e^{-x(3+a)}\, dx$$

$$= (9-a^2) \cdot e^{-3y} \cdot e^{ay} \int_0^{+\infty} \frac{3+a}{3+a} \cdot e^{-(3+a)x} \, dx$$

$$= \frac{\cancel{(3+a)} \cdot (3-a) \cdot e^{-3y} \cdot e^{ay}}{\cancel{3+a}} \int_0^{+\infty} \underbrace{(3+a) \, e^{-(3+a)x}}_{1} \, dx$$

$$= \boxed{(3-a) \cdot e^{-3y+ay}} \quad \exp(3-a)$$

Verifichiamo che $f_x(x_a)$ e $f_y(y_a)$ siano indipendenti!

$$\boxed{(3+a) \cdot e^{-3x-ax}} \boxed{(3-a) \cdot e^{-3y+ay}}$$

$$= (9-a^2) \, e^{-3x-ax-3y+ay}$$

$$= (9-a^2) \cdot e^{-3(x+y)-a(x-y)}$$ Si, sono indi

$$\operatorname{cov}(x_a, y_a) = 0 \qquad (3-a) \cdot e^{-(3+a)x}$$

3) $E(x_{\bar{a}} - y_{\bar{a}}) = -\frac{4}{5}$

$$E(x_{\bar{a}}) - E(y_{\bar{a}}) = -\frac{4}{5}$$

$x_{\bar{a}}$ e $y_{\bar{a}}$ sono due esponenziali di parametro $\lambda = 3+a$ e $\lambda = 3-a$

$$\boxed{\frac{1}{3+a} - \frac{1}{3-a} = -\frac{4}{5}}$$

ora ricaviamo la a!

$$\frac{3-a-3-a}{9-a^2} \rightarrow \frac{-2a}{9-a^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{3-a-3-a}{9-a^2} \rightarrow \frac{-2a}{9-a^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\boxed{a=2}$$

ORA:

$$(3+a)\cdot e^{-3x-ax} \qquad \boxed{(3-a)\cdot e^{-3y+ay}} \qquad \underline{a=2}$$

$$f_x(x_a) = U \qquad f_y(y_a) = V$$

$$\underline{Z = 10U + 2V}$$

SOSTITUISCO $a=2$:

- $5e^{-3x-2x}$ $\qquad e^{-3y+2y}$

$$5e^{-5x} \qquad e^{-y}$$

$$U = exp(\lambda=5) \qquad V = esp(\lambda=1)$$

$$\phi = \begin{cases} U = U \\ Z = 10U + 2V \end{cases} \qquad \phi^{-1} = \begin{cases} U = U \\ V = \frac{Z}{2} - 5U \end{cases}$$

$$J\phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad |A| = \frac{1}{2}$$

$$f_{U,Z}(U,Z) = f_{(U,V)}\left(U, \frac{Z}{2} - 5U\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left(f(U,V) = 5e^{-5x}\, e^{-y} \right)$$

$$0 < U < +\infty$$

$$0 < \frac{Z}{2} - 5U < +$$

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} 5 e^{-5u} \cdot e^{-\frac{z}{2}+5u} \, du \cdot \frac{1}{2}$$

$\frac{z}{2} - 5u > 0$

$-5u > -\frac{z}{2}$

$5u < \frac{z}{2}$

$\boxed{u < \frac{z}{10}}$

$$= \int_0^{\frac{z}{10}} 5 \cancel{e^{-5u}} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot \cancel{e^{5u}} \, du \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{z}{10}} 5 e^{-\frac{z}{2}} \, du = \left[5u e^{-\frac{z}{2}} \right]_0^{\frac{z}{10}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \cancel{5} \cdot \frac{z}{\cancel{10}_2} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} = \boxed{\frac{z}{4} e^{-\frac{z}{2}} \mathbb{1}_z (0,+\infty)}$$

È una densità nota?

è una gamma $\left(\underset{a}{2}, \underset{\lambda}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(2)} x^1 e^{-\frac{1}{2}x} = \left[\frac{1}{4} z e^{-\frac{z}{2}} \right]$

quindi risulta facile calcolare:

$E(z) = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$ $\qquad$ $Var(z) = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$

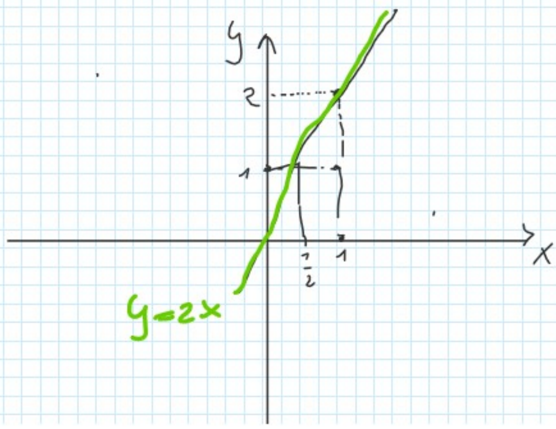
4) $P(2U < V) = P\left(U < \frac{V}{2}\right) = P\left(\frac{V}{2} > U\right) = P(V > 2U)$

$\begin{pmatrix} U = x \\ V = y \end{pmatrix}$

x	y
0	0
1	2
$\frac{1}{2}$	1

$V = 2U$

$y = 2x$



$$\int^{+\infty} \int^{+\infty} f(\dots) \dots$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \int_{2u}^{+\infty} f(u,v)\, du\, dv$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \int_{2u}^{+\infty} 5e^{-5u} e^{-v}\, du\, dv =$$

$$= \int_{2u}^{+\infty} 5e^{-5u} \cdot e^{-v}\, dv = -5e^{-5u} \left[e^{-v} \right]_{2u}^{+\infty} = -5e^{-5u} \left[0 - e^{-2u} \right]$$

$$= \boxed{5e^{-7u}}$$

$$\int_{0}^{+\infty} 5e^{-7u}\, du = 5 \int e^{-7u} \cdot \frac{-7}{-7} \cdot du = -\frac{5}{7} \left[e^{-7u} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$= -\frac{5}{7} \left[0 - e^{0} \right] = \boxed{\frac{5}{7}}$$

✓