ESERCIZIO 2.44

▷ **Esercizio 2.44** (prova d'esame del 7/7/2004)
Sia X una v.a. con distribuzione uniforme su $(0, 1)$.
(i) Calcolare $E(X^4)$.
(ii) Trovare la funzione di distribuzione di $Y = 1 - X^2$;
(iii) calcolare $P(-1 < Y < 1/2)$.

Soluzione (i) La speranza matematica richiesta è:

$$E(X^4) = \int_0^1 t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5} \ .$$

(ii) La funzione di distribuzione di Y è:

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(1 - X^2 \le t) = P(X^2 \ge 1 - t) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } 1 - t \le 0 \\ P(X \ge \sqrt{1-t}) = 1 - F_X(\sqrt{1-t}) & \text{se } 1 - t > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } 1 - t \le 0 \\ 1 - \sqrt{1-t} & \text{se } 0 < 1 - t < 1 \\ 1 - 1 = 0 & \text{se } 1 - t \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ 1 - \sqrt{1-t} & \text{se } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{se } t \ge 1 \end{cases} \ .$$

(iii) La probabilità richiesta è:

$$P\left(-1 < Y < \frac{1}{2}\right) = F_Y\left(\frac{1}{2}\right) - F_Y(-1) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}} - 0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

Esercizi sulla v.a. lognormale

Svolgere gli esercizi 2.23, 2.73

▷ **Esercizio 2.23**
Sia $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
(i) Trovare la densità di $Y = e^X$.
(ii) Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$.
(iii) Calcolare $P(Y \leq e^2)$.

Soluzione (i) Siano $F(x)$ e $f(x)$ la funzione di distribuzione e la densità di $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Quindi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ .$$

Per $y > 0$, si ha:

$$P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) = F(\log y).$$

Derivando, si ottiene la densità di Y, per $y > 0$:

$$f_Y(y) = f(\log y) \cdot \frac{1}{y} =$$

$$= \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log y - m)^2}{2\sigma^2}}$$

(per $y \leq 0$, tale densità è ovviamente zero); essa si dice *lognormale* di parametri m e σ^2, visto che $\log Y$ è normale di parametri m e σ^2.

(ii) Per k intero ≥ 1, si ha:

$$E(Y^k) = \int_0^{+\infty} y^k f_Y(y)dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} y^{k-1} e^{-\frac{(\log y - m)^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Con la sostituzione $y = e^{\sigma t + m}$, l'integrale diventa:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma kt + km - \frac{1}{2}t^2} dt.$$

Osserviamo che:

$$\sigma kt + km - \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{2}[t^2 - 2k\sigma t - 2km] =$$

$$= -\frac{1}{2}[(t - k\sigma)^2 - k^2\sigma^2 - 2km] = -\frac{1}{2}(t - k\sigma)^2 + \frac{k^2\sigma^2}{2} + km.$$

Dunque, l'integrale di sopra può essere riscritto:

$$e^{\frac{1}{2}k^2\sigma^2 + km} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-k\sigma)^2} dt.$$

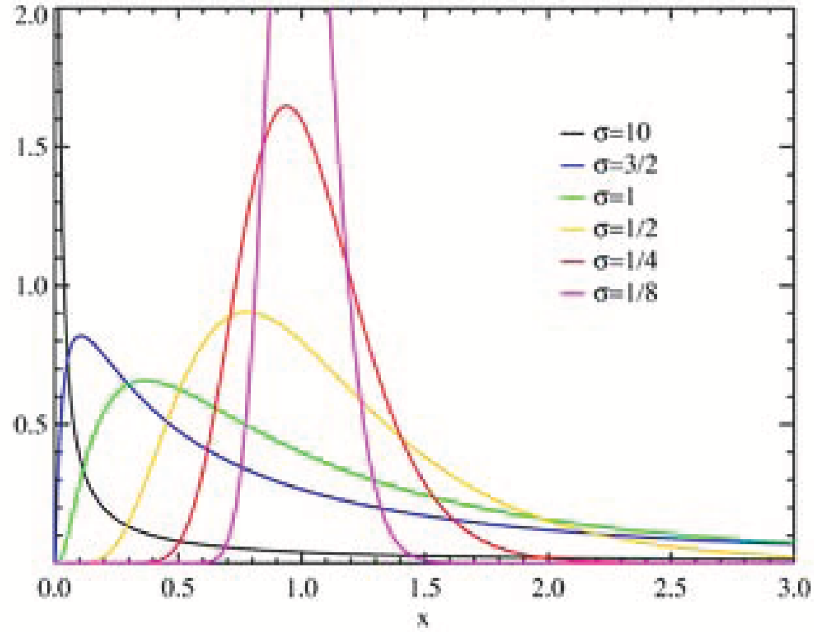

Figure 1: Densità lognormale

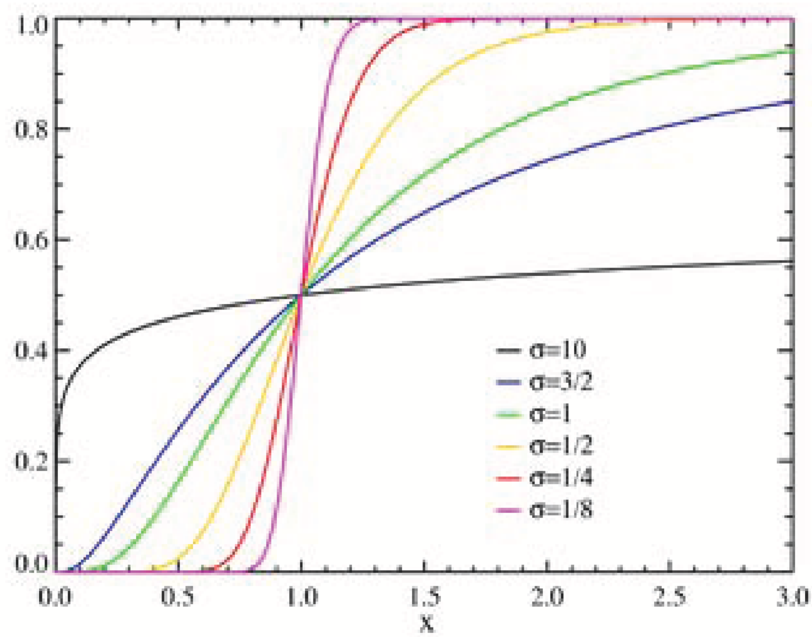

Figure 2: Funzione di distribuzione lognormale

Effettuando l'ulteriore sostituzione $s = t - k\sigma$, si ottiene infine:

$$E(Y^k) = e^{\frac{1}{2}k^2\sigma^2 + km} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = e^{\frac{1}{2}k^2\sigma^2 + km}.$$

Pertanto, sostituendo $k = 1$ e $k = 2$, si ottiene:

$$E(Y) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 + m}, \quad E(Y^2) = e^{2(\sigma^2 + m)},$$

da cui segue:

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = e^{2(\sigma^2+m)} - e^{\sigma^2+2m} = e^{\sigma^2+2m}(e^{\sigma^2} - 1).$$

(iii) Si ha:

$$P(Y \leq e^2) = P(e^X \leq e^2) = P(X \leq 2) =$$
$$= P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{2 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2 - m}{\sigma}\right),$$

ove Φ è la funzione di distribuzione della Gaussiana standard.

▷ **Esercizio 2.73** (III prova scritta a.a. 2014-15)
Sia X una v.a. con densità:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{\ln^2(x)/2}$$

se $x > 0$, e 0 altrimenti.
(i) Calcolare la densità di $Y = \ln(X)$. Si tratta di una densità nota?
(ii) Calcolare media e varianza di Y.
(iii) Calcolare $P(Y \in (-1/2, 1/2))$.
(iv) Trovare la densità di $Z = Y^2$.

Soluzione (i) La v.a. X ha densità lognormale di parametri 0 e 1, per cui, dalla definizione di v.a. lognormale, si ottiene subito che $Y = \ln(X) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
(ii) $E(Y) = 0,\ Var(Y) = 1$.
(iii) $P(Y \in (-1/2, 1/2)) = 2\Phi(0.5) - 1 = 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.383$
(iv) Come è noto, $Z = Y^2$ ha densità $\Gamma(1/2, 1/2)$.