Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria A&T, Civile, Informatica
I prova di valutazione in itinere a.a. 2008/09

Punteggi: **1.** 3+3+3+5; **2.** 3+3+3+3 ; **3.** 4+4; totale = 34 .

1. Da una cassetta contenente 12 palline di cui 4 difettose, se ne estraggono 5 con reinse–rimento.
(i) Calcolare la probabilità che la seconda pallina estratta sia buona.
(ii) Calcolare la probabilità che esattamente due delle palline estratte siano buone.
(iii) Calcolare la probabilità che almeno una pallina estratta sia difettosa.
(iv) Se invece vengono effettuate 3 estrazioni senza reinserimento, calcolare:
(a) la probabilità che esattamente due siano difettose;
(b) la probabilità che la prima estratta è buona e le altre due non sono buone.

2. Sia X il numero delle volte che esce *Testa* in due lanci di una moneta truccata, per la quale la probabilità di uscita di *Testa* in ogni lancio è $p \in (0, 1/2)$. Sia invece Y il numero delle volte che esce un numero dispari, effettuando tre lanci di un dado perfetto a sei facce. Le v.a. X e Y sono indipendenti?
(i) Trovare la legge di Y e, sapendo che $P(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{128}$, trovare anche quella di X. Si tratta di distribuzioni note?
(ii) Sia T il numero di lanci della moneta necessari ad ottenere *Croce* per la prima volta; quanto vale $P(T < 1.18)$? quanto vale $E(T)$?
(iii) Se $Z = \min(X, Y)$, calcolare $P(Z = 1)$.
(iv) Calcolare $P(X > Y) + E(3X - Y)$.

3. I monitor per PC di una certa partita vengono assemblati utilizzando due tipi di componenti diversi, A e B. In un fissato intervallo di tempo di durata T, i componenti del tipo A hanno probabilità 0.98 di funzionare correttamente, mentre quelli del tipo B solo 0.75. Si sa che il 30% dei monitor è assemblato con componenti di tipo A. Scelto a caso un monitor della partita, calcolare:
(i) la probabilità che esso funzioni correttamente durante un intero periodo T di prova;
(ii) la probabilità che esso sia stato assemblato con componenti di tipo A, sapendo che esso funziona correttamente durante un intero periodo T di prova.

Soluzioni della I prova di valutazione in itinere a.a. 2008/09

1. (i) Sia B_2 l'evento: "la II pallina estratta è buona"; si ha ovviamente $P(B_2) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
(ii) Sia X il numero delle palline buone ottenute in 5 estrazioni con reinserimento; risulta $X \sim B(5, \frac{2}{3})$; allora

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243}$$

(iii) L'evento che almeno una pallina estratta sia difettosa coincide con l'evento $\{X \leq 4\}$; la probabilità corrispondente è:

$$P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{211}{243}$$

(iv) Indichiamo con Y il numero di palline buone ottenute in 3 estrazioni senza rimpiazzo. Risulta che Y è una v.a. ipergeometrica di parametri $(3, 4, 8)$. Pertanto:

$$(a) \quad P(Y = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} = \ldots = \frac{12}{55}$$

(b) Indichiamo con B_1 l'evento: "nella prima estrazione esce una pallina buona" e con D_i l'evento: "nella i-esima estrazione esce una pallina difettosa" $(i = 1, 2)$. Risulta: $P(B_1) = \frac{2}{3}$, $P(D_2|B_1) = \frac{4}{11}$, $P(D_3|(B_1 \cap D_2)) = \frac{3}{10}$. La probabilità da calcolare è:

$$P(B_1 \cap D_2 \cap D_3) = P(D_3|(B_1 \cap D_2))P(D_2|B_1)P(B_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{55}$$

2. Le v.a. X e Y sono ovviamente indipendenti, visto che i risultati dei lanci della moneta non influenzano i risultati dei lanci del dado; inoltre $X \sim B(2, p)$, con p parametro da trovare, mentre $Y \sim B(3, \frac{1}{2})$.
(i) Siccome X e Y sono indipendenti, si ha:

$$\frac{1}{128} = P(X = 2, Y = 3) = P(X = 2)P(Y = 3) = p^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

da cui si ottiene $p^2 = \frac{8}{128} = \frac{1}{16}$ e quindi $p = \frac{1}{4}$.
(ii) T è il tempo di primo successo in una serie di prove ripetute ed indipendenti in cui la probabilità del successo è costante ed uguale a $P(\text{"Croce"}) = 1 - P(\text{"Testa"}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. La v.a T ha distribuzione geometrica modificata di parametro 3/4, dunque:

$$P(T = k) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, \ k = 1, 2, \ldots$$

Pertanto $P(T < 1.18) = P(T = 1) = \frac{3}{4}$, e $E(T) = 1/p = 4/3$.
(iii) Se $Z = \min(X, Y)$, si ha, per $k = 0, 1, 2 : P(Z \geq k) = P(X \geq k, Y \geq k)$ e, essendo X e Y indipendenti, questa probabilità vale $P(X \geq k)P(Y \geq k)$. Siccome $P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1)$, si ottiene:

$$P(Z = k) = P(X \geq k)P(Y \geq k) - P(X \geq k+1)P(Y \geq k+1), \ k = 0, 1, 2$$

Per $k = 1$, si ottiene

$$P(Z = 1) = P(X \geq 1)P(Y \geq 1) - P(X \geq 2)P(Y \geq 2) =$$
$$= \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) - \frac{1}{16}\left[\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] =$$
$$= \frac{7}{16} \cdot \frac{7}{8} - \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{8} = \frac{45}{16 \cdot 8} \approx 0.3516$$

(iv) Si ha:

$$P(X > Y) = \sum_{k=0}^{2} P(X = k, Y < k) =$$

(per l'indipendenza di X e Y)

$$= \sum_{k=0}^{2} P(X = k)P(Y < k) =$$
$$= P(X = 0)P(Y < 0) + P(X = 1)P(Y < 1) + P(X = 2)P(Y < 2) =$$
$$= 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{3}{64} + \frac{1}{32} = \frac{5}{64}$$

Inoltre, ricordando che la media di una v.a. binomiale di parametri n e p è np, si ottiene $E(3X - Y) = 3E(X) - E(Y) = 3 \cdot \frac{2}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} = 0$, pertanto:

$$P(X > Y) + E(3X - Y) = \frac{5}{64} + 0 = \frac{5}{64}$$

3. Denotiamo con H_1 l'evento: "si sceglie un monitor assemblato con componenti di tipo A", con H_2 l'evento: "si sceglie un monitor assemblato con componenti di tipo B" e con E l'evento: " il monitor scelto funziona correttamente durante un intero periodo T di prova". Dai dati del problema segue che $P(H_1) = 0.30, \ P(H_2) = 0.70, \ P(E|H_1) = 0.98, \ P(E|H_2) = 0.75$.

(i) $P(E) = P(E|H_1)P(H_1) + P(E|H_2)P(H_2) = 0.98 \cdot 0.30 + 0.75 \cdot 0.70 = 0.819$

(ii) Per la formula di Bayes:

$$P(H_1|E) = \frac{P(E|H_1)P(H_1)}{P(E)} = \frac{0.98 * 0.30}{0.819} \approx 0.3590$$