1 Calcoli con densità per v.a. discrete

Problema 1. Due monete identiche vengono lanciate più volte fino a che entrambe abbiano ottenuto almeno una volta Testa, Qual è la probabilità che occorrano esattamente k lanci?

Soluzione Siano S e T i numeri di lanci necessari affinché la I, rispettivamente la II moneta, dia Testa. sappiamo che $S-1$ e $T-1$ hanno distribuzione Geometrica di parametro p, dove $p=$ probabilità che esca Testa in un lancio (con la I o la II moneta). Quindi

$$P(S=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\dots$$

e

$$P(T=h)=p(1-p)^{h-1},\ h=1,2,\dots$$

Inoltre, possiamo ritenere che S e T siano v.a. indipendenti.
La v.a. $Z=\max\{S,T\}$ assume valori $\{1,2,\dots\}$; si tratta di calcolare $P(Z=i),\ i=1,2,\dots$
Per calcolare la densità discreta di $Z=\max\{S,T\}$, procediamo nel modo seguente.
Abbiamo visto in precedenza che, essendo S e T Geometriche modificate di parametro p, risulta

$$P(S>n)=P(T>n)=(1-p)^n,\ n=1,2,\dots$$

e quindi anche

$$P(S\le n)=P(T\le n)=1-(1-p)^n.$$

Quindi, per $i=1,2,\cdots$:

$$P(Z\le i)=P(\max\{S,T\}\le i)=P(S\le i,T\le i)$$

ed essendo S e T indipendenti, l'ultima probabilità è uguale a

$$P(S\le i)P(T\le i)=[1-(1-p)^i][1-(1-p)^i]=[1-(1-p)^i]^2.$$

Dunque:

$$P(Z=i)=P(Z\le i)-P(Z\le i-1)=[1-(1-p)^i]^2-[1-(1-p)^{i-1}]^2$$

$$=[1-(1-p)^i+1-(1-p)^{i-1}][1-(1-p)^i-1+(1-p)^{i-1}]$$

(abbiamo usato che $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$)

$$=[2-(1-p)^{i-1}(1-p+1)][(1-p)^{i-1}p].$$

Se, per es. le due monete sono eque, allora $p=1/2$ e si ha:

$$P(Z=i)=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\frac{3}{2}\right]\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

$$=\frac{1}{2^{i-1}}-\frac{3}{4}\frac{1}{4^{i-1}}.$$

2. Supponiamo ora, invece, che le monete non sono equilibrate e che la probabilità che la prima moneta dia Testa è p, mentre la probabilità che la seconda moneta dia Testa è

q. Vogliamo ora trovare la densità di $Y = \min\{S, T\}$, ovvero il minimo lancio necessario affinché una delle due monete (**non entrambe**, come prima) dia Testa per la prima volta. La v.a. Y assume valori in $\{1, 2, \dots\}$ Procediamo al seguente modo. Per $i = 1, 2, \cdots$:

$$P(Y > i) = P(S > i, T > i)$$

e, per l'indipendenza tale probabilità è uguale a

$$P(S > i)P(T > i) = (1 - p)^i (1 - q)^i.$$

Quindi:

$$P(Y > i) = [(1 - p)(1 - q)]^i = (1 - \theta)^i,$$

dove abbiamo posto $1 - \theta = (1 - p)(1 - q)$, ovvero $\theta = q + p - pq$.
Dunque, riconosciamo che Y ha distribuzione geometrica modificata di parametro θ, cioè $Y - 1$ ha distribuzione Geometrica di parametro θ. Riassumendo, abbiamo ottenuto che, se S ha distribuzione Geometrica modificata di parametro p e T ha distribuzione Geometrica modificata di parametro p, e S e T sono indipendenti, allora

$$Y - 1 = \min\{S, T\} - 1 \sim Geom(q + p - pq),$$

ovvero

$$P(Y = i) = (q + p - pq)(1 - q - p + pq)^{i-1}.$$

Per esercizio, si potrebbe calcolare la densità discreta di $Z = \max\{S, T\}$ nel caso in cui le probabilità di uscita di Testa per le due monete non siano uguali, ovvero siano p e q, rispettivamente. Basterà rifare i calcoli del punto **1.**, utilizzando però che

$$P(S = k) = p(1 - p)^{k-1}, \ k = 1, 2, \dots$$

e

$$P(T = h) = q(1 - q)^{h-1}, \ h = 1, 2, \dots$$

con p e q eventualmente diversi.

Svolgiamo ora gli esercizi 1.9, 1.20, 1.41

$\triangleright$ **Esercizio 1.9**
Siano X, Y due v.a. indipendenti con la stessa distribuzione geometrica.
Calcolare $P(X = Y)$ e $P(X \geq 2Y)$.

Soluzione. Siccome X e Y sono v.a. geometriche di parametro p, si ha:

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1 - p)^k, \ k = 0, 1, \dots$$

L'evento $\{X = Y\}$ si può scrivere come unione numerabile di eventi disgiunti, e dei quali si sa calcolare la probabilità, nel seguente modo:

$$\{X = Y\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{X = k, Y = k\}$$

Pertanto, per la $\sigma-$additività, si ha:

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k, Y = k) =$$

(per l'indipendenza di X e Y)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^2(1-p)^{2k} =$$

$$= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p} \ .$$

Si ha poi:

$$P(X \geq 2Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k, X \geq 2k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k)P(X \geq 2k);$$

osserviamo ora che

$$P(X \geq 2k) = P(T \geq 2k+1) = P(T > 2k) = (1-p)^{2k},$$

dove abbiamo posto $T = X + 1$, cioè una v.a. Geometrica modificata di parametro p. Riprendendo il calcolo di sopra, si ha allora:

$$P(X \geq 2Y) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k(1-p)^{2k} =$$

$$= p\sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)^3)^k = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^3} = \frac{1}{p^2 - 3p + 3} \ .$$

▷ **Esercizio 1.20**

Due dadi equilibrati vengono lanciati separatamente più volte. Indichiamo con X il numero di lanci necessario ad ottenere 3 gettando il primo dado, e con Y il numero dei lanci necessario a ottenere 2 oppure 5 lanciando il secondo.
(i) Qual è la legge di X? e di Y?
(ii) Trovare la densità discreta di $Z = \max(X, Y)$.
(iii) Calcolare $P(X \geq Y)$.

Soluzione. (i) X è l'istante di primo successo in uno schema di prove indipendenti e Bernoulliane, in cui la probabilità del successo in ciascuna prova è $p = 1/6$. Analogamente, Y è il tempo di primo successo in uno schema di prove indipendenti e Bernoulliane, in cui la probabilità del successo in ciascuna prova è $p' = 2/6 = 1/3$. Le v.a. X e Y hanno dunque legge geometrica modificata di parametro p e p', rispettivamente, ovvero risulta, per $k = 1, 2, \cdots$:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad P(Y = k) = p'(1-p')^{k-1}.$$

(ii) Se $Z = \max(X, Y)$, si ha, per $k = 1, 2, \cdots$:

$$P(Z \leq k) = P(X \leq k, Y \leq k)$$

che, per l'indipendenza di X e Y, e utilizzando i risultati trovati sopra vale:

$$P(X \leq k)P(Y \leq k) = [1 - (1-p)^k][1 - (1-p')^k] \ .$$

Allora:

$$P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1) =$$
$$[1 - (1-p)^k][1 - (1-p')^k] - [1 - (1-p)^{k-1}][1 - (1-p')^{k-1}] \ .$$

Sostituendo i valori $p = 1/6$ e $p' = 1/3$, si ottiene $(k = 1, 2, \dots)$:

$$P(Z = k) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right]\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right] - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right]\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right];$$

svolgendo i calcoli, si ottiene infine:

$$P(Z = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1} \ .$$

(iii) Si ha:

$$P(X \geq Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k, Y = k) =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)P(Y = k).$$

Ora

$$P(X \geq k) = P(X > k-1) = (1-p)^{k-1},$$

avendo X distribuzione Geometrica modificata di parametro p. Allora, riprendendo il calcolo:

$$P(X \geq Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)^{k-1} p'(1-p')^{k-1}\right) =$$

$$= p' \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)(1-p'))^{k-1} = \frac{p'}{1 - (1-p)(1-p')} =$$

$$= \frac{p'}{p' + p(1-p')} \ .$$

Sostituendo i valori noti per p e p', si trova infine $P(X \geq Y) = 3/4$.

$\triangleright$ **Esercizio 1.41** (prova in itinere a.a. 2002/03)
Una scatola contiene 5 lampadine gialle e 1 blu; una seconda scatola contiene 8 lampadine rosse e 7 bianche. Vengono effettuate estrazioni successive da ciascuna delle due scatole, con rimpiazzo e separatamente, senza mischiare le lampadine tra le due scatole. Sia X_1 il numero delle estrazioni dalla prima scatola necessario ad ottenere una lampadina blu e X_2 il numero di estrazioni dalla seconda scatola per ottenere una lampadina bianca.

(i) Qual è la legge di X_1? e di X_2?
(ii) Trovare la densità discreta di $Z = \min(X_1, X_2)$.
(iii) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.

Soluzione. X_1 e X_2 sono istanti di primo successo e si ha, per $k = 1, 2, \cdots$:

$$P(X_1 = k) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \; ; \; P(X_2 = k) = \frac{7}{15} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^{k-1} .$$

(ii) Se $Z = \min(X_1, X_2)$, si ha $P(Z \geq k) = P(X_1 \geq k, X_2 \geq k)$ che, per l'indipendenza, è uguale a $P(X_1 \geq k)P(X_2 \geq k)$. Ma:

$$P(X_1 \geq k) = 1 - P(X_1 < k) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \cdots = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} .$$

Analogamente:

$$P(X_2 \geq k) = 1 - P(X_2 < k) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{7}{15} \left(\frac{8}{15}\right)^{i-1} = \cdots = \left(\frac{8}{15}\right)^{k-1} .$$

Dunque, riprendendo il calcolo di sopra:

$$P(Z \geq k) = \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{8}{15}\right)^{k-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} , \; k = 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

da cui:

$$P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1) = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} - \left(\frac{4}{9}\right)^{k} = \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} ,$$

ovvero Z ha distribuzione Geometrica modificata, di parametro $4/9$. A questo risultato si poteva pervenire subito, notando che $P(Z \geq k) = P(Z > k-1)$ e quindi, per $(*)$:

$$P(Z > k-1) = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} , \; k = 1, 2, \ldots ,$$

il che vuol dire che Z ha distribuzione Geometrica modificata, di parametro $4/9$.
(iii)

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k) P(X_2 = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{7}{15} \left(\frac{8}{15}\right)^{k-1} = \frac{7}{90} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{7}{90} \cdot \frac{9}{5} = \frac{7}{50} = 0.14 .$$