Lezione 8 Algebra Booleana 2

domenica 15 ottobre 2023 11:36

Vediamo ora in dettaglio il **teorema di shannon** : una qualunque funzione può essere scritta cosi : **y=f(x1,x2,… xn)** la quale può essere scritta in forma duale :

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x_1 \cdot f(1,x_2,\cdots,x_n) + \overline{x_1} \cdot f(0,x_2,\cdots,x_n)$$
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (x_1 + f(0,x_2,\cdots,x_n)) \cdot (\overline{x_1} + f(1,x_2,\cdots,x_n))$$

Dove i termini che moltiplicano/ sommano ad x1 sono chiamata residui . Questa cosa è vera nel caso di variabili <u>indipendenti .</u> In generale questo teorema può essere applicato iterativamente a tutte le variabili della funzione :

$$\begin{aligned} f(x_1,\cdots,x_n) = {} & \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\cdots\cdot\overline{x_n}f(0,0,\cdots,0) + x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\cdots\cdot\overline{x_n}f(1,0,\cdots,0) + \\ & + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot\cdots\cdot\overline{x_n}f(0,1,\cdots,0) + \cdots + \\ & + x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot\overline{x_n}f(1,1,\cdots,0) + x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n f(1,1,\cdots,1) \end{aligned}$$

Generalizzando quanto detto finora :

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$
$$\text{con } \alpha_i = \{0,1\} \text{ e } x_i^{\alpha_i} = x_i \text{ se } \alpha_i = 1,\ x_i^{\alpha_i} = \overline{x_i} \text{ se } \alpha_i = 0$$

In generale ogni funzione si può scrivere in due modi : somme di prodotti (SOP) oppure nella dualità prodotti di somme (POS) . In dettaglio :

1. Somma di prodotti (SOP): si prendono gli uno della funzione e si negano gli zero .
   a.
   b. $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{m}_k f(\mathbf{k})$$
   c.
   d. Il termine $\mathbf{m}_k$ viene chiamato *mintermine* ed è nella forma $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$
   e. **Da notare che in questa espressione le variabili compaiono 1 ed una sola volta in forma affermata o negata.**
2. Dualmente alla somma di prodotti ed usando De Morgan , arriviamo al Prodotto di somme (POS) : si affermano gli zero e si negano gli uno :
   a. $$\overline{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{m}_k \overline{f(\mathbf{k})}$$
   b. $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \overline{\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{m}_k \overline{f(\mathbf{k})}} = \prod_{k=0}^{2^n-1} \overline{\mathbf{m}_k \overline{f(\mathbf{k})}} = \prod_{k=0}^{2^n-1} (\mathbf{M}_k f(\mathbf{k}))$$
   c.
   d. Dove Il termine $\mathbf{M}_k$ viene chiamato *maxtermine* ed è nella forma $\mathbf{M}_k = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{\alpha_i}$, con $\alpha_i = \{0,1\}$ e $x_i^{\alpha_i} = x_i$ se $\alpha_i = 0$, $x_i^{\alpha_i} = \overline{x_i}$ se $\alpha_i = 1$

Vediamo un esempio :

k	x_1	x_2	x_3	$f(\mathbf{k})$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Dove per mintermini si prendono le somme di K=0,4,5,7 , mentre per maxtermini si prende prodotto di K=1,2,3,6.

Per maxtermini :

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_2} + x_3)(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)$$

Per mintermini :

$$f(x_1,x_2,x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2x_3$$

Vediamo ora 3 forme : Canoniche , Decimale , Semplificate.

1. **1.** Canoniche : rappresentano una funzione di commutazione : si usa un trucchetto , ovvero se variabile non compare si moltiplica per affermato +negato:
   - **a.**
   - **b.** $$x_1x_3 + \overline{x_1}(x_2 + \overline{x_3}) = x_1x_3(x_2 + \overline{x_2}) + \overline{x_1}x_2(x_3 + \overline{x_3}) + \overline{x_1}\,\overline{x_3}(x_2 + \overline{x_2})$$
     $$= x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1x_2x_3}$$
2. **2.** Decimale : si rappresenta la funzione come prodotti (max) o somme (min):
   - **a.** $$f(\mathbf{k}) = \sum(0,4,5,7) = \prod(1,2,3,6)$$
   - **b.**

k	x_1	x_2	x_3	$f(\mathbf{k})$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

3. **3.** Per le ultime invece si ha che : dato che non si è certi che un metodo prevalga su altro, ci si affida all'esperienza , quindi si cerca di ridurre al minimo la funzione attraverso metodi analitici e/o algoritmici .

Vediamo un esempio :

Semplificazione analitica: un esempio

- Consideriamo la funzione:
$$f(x,y,z,w) = xyzw + xyz\overline{w} + xy\overline{zw} + xy\bar{z}w + \bar{x}yzw$$

- Per la proprietà dell'idempotenza, un termine può essere ripetuto più di una volta senza modificare il risultato
- Primo e secondo mintermine: $xyzw + xyz\overline{w} = xyz$
- Primo e quarto mintermine: $xyzw + xy\bar{z}w = xyw$
- Primo e quinto mintermine: $xyzw + \bar{x}yzw = yzw$
- Secondo e terzo mintermine: $xyz\overline{w} + xy\overline{zw} = xy\overline{w}$
- Otteniamo:
$$f(x,y,z,w) = xyz + xyw + yzw + xy\overline{w}$$

- Proseguendo:
$$f(x,y,z,w) = xyz + xyw + yzw + xy\overline{w}$$

- Secondo e ultimo termine: $xyw + xy\overline{w} = xy$
$$f(x,y,z,w) = xy + xyz + yzw$$

- Per la legge dell'assorbimento ($a + a \cdot b = a$):
$$f(x,y,z,w) = xy + yzw$$

- In sintesi, abbiamo trovato la seguente uguaglianza:
$$f(x,y,z,w) = xyzw + xyz\overline{w} + xy\overline{zw} + xy\bar{z}w + \bar{x}yzw = xy + yzw$$