Università di Roma "Tor Vergata"
Calcolo delle Probabilità e Statistica (lettere A-Z)
Docenti: `Mario Abundo, Claudio Macci`
Esame dell'11 Luglio 2006

Importante. ***Le risposte senza motivazioni non verranno prese in considerazione. Ad esempio, dove è possibile, va scritta la formula che si usa, e non solo i valori numerici.***

Esercizio 1. Si lancia una moneta equa: se esce testa si estrae una pallina a caso da un'urna con tre palline con i numeri 1, 2 e 3; se esce croce si estrae una pallina a caso da un'urna con quattro palline con i numeri 1, 2, 3 e 4. Sia E l'evento "viene estratto il numero 1".
`D1`) Calcolare la probabilità dell'evento E.
`D2`) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa sapendo che è stato estratto il numero 1 (cioè sapendo che l'evento E si è verificato).
Infine supponiamo di avere un'urna con 2 palline bianche, 2 rosse e 2 nere. Si estraggono a caso 3 palline, una alla volta e <u>senza</u> reinserimento.
`D3`) Calcolare la probabilità di avere tre colori diversi.
`D4`) Calcolare la probabilità di avere la sequenza di colori $(\text{bianco}, \text{rosso}, \text{nero})$.

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria con densità continua

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4-t) & \text{se } 0 < t < 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

`D5`) Trovare la densità discreta di $Y = [X]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la *parte intera* di x.
`D6`) Trovare la densità continua di $Z = \sqrt{X}$.
Siano X_1, X_2 due variabili aleatorie indipendenti e con la stessa distribuzione di X.
`D7`) Calcolare $P(\max\{X_1, X_2\} \leq 2)$.

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale standard.
`D8`) Calcolare $P(-1 < X < 2)$.
Siano $X_1, \ldots, X_{900}$ variabili aleatorie indipendenti e con la stessa distribuzione, con media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 100$.
`D9`) Calcolare $P(1.5 < \frac{X_1+\cdots+X_{900}}{900} < 2.5)$ sfruttando l'approssimazione normale.

Cenno alle soluzioni (*Ogni segnalazione di errori o sviste (sempre possibili) è gradita*)

Esercizio 1. Sia T l'evento "esce testa" e $C = T^c$ l'evento "esce croce".
`D1`) Per la formula delle probabilità totali si ha
$P(E) = P(E|T)P(T) + P(E|C)P(C) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} = (\frac{1}{3} + \frac{1}{4})\frac{1}{2} = \frac{4+3}{12}\frac{1}{2} = \frac{7}{24}$.
`D2`) Per la formula di Bayes (e il valore di $P(E)$ calcolato prima) si ha
$P(T|E) = \frac{P(E|T)P(T)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}{\frac{7}{24}} = \frac{1}{6}\frac{24}{7} = \frac{4}{7}$.
`D3`) La probabilità richiesta è $\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{2\cdot 2\cdot 2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.
`D4`) Con notazioni ovvie la probabilità richiesta è
$P(B_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(B_1)P(R_2|B_1)P(N_3|B_1 \cap R_2) = \frac{2}{6}\frac{2}{5}\frac{2}{4} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$.

Esercizio 2.
`D5`) In generale si ha $p_Y(k) = P(k \le X < k+1)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Quindi nel nostro caso si ha:
$p_Y(0) = \int_0^1 \frac{1}{8}(4-t)dt = \frac{1}{8}[4t - \frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{7}{16}$; $p_Y(1) = \int_1^2 \frac{1}{8}(4-t)dt = \frac{1}{8}[4t - \frac{t^2}{2}]_1^2 = \frac{5}{16}$; $p_Y(2) = \int_2^3 \frac{1}{8}(4-t)dt = \frac{1}{8}[4t - \frac{t^2}{2}]_2^3 = \frac{3}{16}$; $p_Y(3) = \int_3^4 \frac{1}{8}(4-t)dt = \frac{1}{8}[4t - \frac{t^2}{2}]_3^4 = \frac{1}{16}$.
`D6`) La densità di Z si ottiene a partire dalla sua funzione di distribuzione. Si ha:

$$F_Z(t) = P(Z \le t) = P(\sqrt{X} \le t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ P(X \le t^2) & \text{se } t \ge 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ \int_0^{t^2} \frac{1}{8}(4-x)dx & \text{se } t > 0 \text{ e } t^2 < 4 \\ 1 & \text{se } t > 0 \text{ e } t^2 \ge 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ \frac{1}{8}\left(4t^2 - \frac{(t^2)^2}{2}\right) & \text{se } 0 < t < 2 \\ 1 & \text{se } t \ge 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ \frac{1}{8}\left(4t^2 - \frac{t^4}{2}\right) & \text{se } 0 < t < 2 \\ 1 & \text{se } t \ge 2 \end{cases}, \text{ e derivando } f_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(4t - t^3) & \text{se } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

`D7`) Posto $W = \max\{X_1, X_2\}$, si ha $P(\max\{X_1, X_2\} \le 2) = F_W(2)$. Per quanto visto a lezione si ha $F_W(t) = F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi:
$P(\max\{X_1, X_2\} \le 2) = F_{X_1}(2)F_{X_2}(2) = \left(\int_0^2 \frac{1}{8}(4-t)dt\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\left[4t - \frac{t^2}{2}\right]_0^2\right)^2 = (\frac{6}{8})^2 = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$.

Esercizio 3.
`D8`) Si ha $P(-1 < X < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0.97725 + 0.84134 - 1 = 0.81859$.
`D9`) L'approssimazione normale ci dice che, per n grande, si ha
$P(a < \frac{X_1+\cdots+X_n}{n} < b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) \approx \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$.
Quindi $P(1.5 < \frac{X_1+\cdots+X_{900}}{900} < 2.5) \approx \Phi(\frac{2.5-2}{\sqrt{100}/\sqrt{900}}) - \Phi(\frac{1.5-2}{\sqrt{100}/\sqrt{900}}) = \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1.5)) = 2\Phi(1.5) - 1 = 2 \cdot 0.93319 - 1 = 0.86638$.

Commenti.
`D3-D4`) Procedendo come visto prima per la domanda `D4`), si vede facilmente che la probabilità di ottenere una qualsiasi sequenza di colori diversi fissata è $\frac{1}{15}$. Le possibili sequenze di tre colori diversi sono $3! = 6$ e ovviamente non si possono realizzare due sequenze diverse. Quindi possiamo ottenere la probabilità richiesta alla domanda `D3`) (cioè la probabilità di avere tre colori diversi) sommando $3! = 6$ volte $\frac{1}{15}$, e il risultato è $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.
`D5`) Si ha $p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) + p_Y(3) = \frac{7+5+3+1}{16} = 1$ in accordo con la teoria.
`D6`) Abbiamo ottenuto che la densità f_Z è uguale a zero al di fuori dell'intervallo $(0, 2)$, e quindi $P(0 < Z < 2) = 1$. Questa cosa poteva essere dedotta osservando che $P(0 < X < 4) = 1$ e che $0 < x < 4$ implica $0 < \sqrt{x} < \sqrt{4} = 2$.