2b.32

domenica 5 dicembre 2021 19:12

ESERCIZIO 2b.32

$$f(x,y) = \begin{cases} K(x+y) & \text{SE } x,y \in [0,3]^2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

1) dopo aver determinato la costante K, in modo che f sia la densità di una variabile aleatoria. Trovare le densità marginali e dire se esse sono o no stocasticamente indipendenti.
2) calcolare media, varianza e cov di X, Y
3) posto $Z = X - Y$, trovare la densità di Z e $P(Z \leq 0)$
4) fornire un esempio di densità congiunta $g(u,v)$ di un vettore aleatorio (U,V) in modo che U abbia la stessa densità di X e inoltre U e V siano indipendenti

SVLG

1) $$\int_0^3 \int_0^3 K(x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^3 K(x+y)\,dy = \int_0^3 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right] = 3x + \frac{9}{2}$$

$$\int_0^3 3x + \frac{9}{2}\,dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{9}{2}x\right]_0^3 = \frac{27}{2} + \frac{27}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

$$27K = 1$$
$$K = \frac{1}{27}$$

calcolo delle densità marginali!

$$f_X(x) = \int_0^3 \frac{1}{27}(x+y)\,dy = \frac{1}{27}\int_0^3 (x+y)\,dy = \frac{1}{27}\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \frac{1}{27}\left[3x + \frac{9}{2}\right] = \boxed{\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}}$$

$$f_Y(y) = \int_0^3 \frac{1}{27}(x+y)\,dx = \frac{1}{27}\left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_0^3 = \frac{1}{27}\left[\frac{9}{2} + 3y\right] = \boxed{\frac{1}{6} + \frac{1}{9}y}$$

Verifichiamo se sono stocasticamente indipendenti:

$$\left(\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}y\right) = \frac{1}{54}x + \frac{1}{81}xy + \frac{1}{36} + \frac{1}{54}y$$

NO, NON SONO INDIPENDENTI!

NO, NON SONO INDIPENDENTI!

2) calcoliamo:

$$E(x) = \int_0^3 x\cdot\left(\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}\right)dx = \int_0^3 \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= 1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{2} = \frac{1}{1} + \frac{3}{4} = \frac{4+3}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$$

$$E(y) = \int_0^3 y\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}y\right)dy = \int_0^3\left(\frac{1}{6}y + \frac{1}{9}y^2\right)dy = \frac{1}{6}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3 + \frac{1}{9}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{27}{3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{1} = \frac{3+4}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$$

$$E(x^2) = \int_0^3 x^2\left(\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}\right)dx = \int_0^3\left(\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{9}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{6}\frac{x^3}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\,\frac{81}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{27}{3} = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9+6}{4} = \frac{15}{4}$$

$$E(y^2) = \int_0^3 y^2\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}y\right)dy = \int_0^3\left(\frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{9}y^3\right)dy = \left[\frac{1}{6}\frac{y^3}{3} + \frac{1}{9}\frac{y^4}{4}\right]_0^3$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{27}{3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{81}{4} = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{6+9}{4} = \frac{15}{4}$$

$$Var(x) = E(x^2) - E^2(x) = \frac{15}{4} - \frac{49}{16} = \frac{60-49}{16} = \frac{11}{16}$$

$$Var(y) = E(y^2) - E^2(y) = \frac{15}{4} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}$$

$$COV(x,y) = E(xy) - E(x)\cdot E(y) = \frac{3}{1} - \frac{49}{16} = \boxed{-\frac{1}{16}}$$

$$E(xy) = \int_0^3\int_0^3 \frac{1}{27}(x+y)\,x\cdot y\,dx\,dy = \boxed{3}$$

3) $Z = X - Y$ $\quad Z = [-3,3]$ $\quad \rightarrow \quad [0,3] - [0,3] = [-3,3]$

ORA, NON ABBIAMO UN ESPONENZIALE, MA ABBIAMO UNA DIFFERENZA.
SE $X \in [0,3]$ e $y \in [0,3]$, $\quad Z \in [-3,3]$. OCCORRE STUDIARE I CASI! (COME SEMPRE)!

TROVARE LA DENSITÀ DI Z!

$$\phi = \begin{cases} x = x \\ z = x - y \end{cases} \qquad \phi^{-1} = \begin{cases} x = x \\ y = x - z \end{cases} \qquad J\phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad |A| = 1$$

$$f_{x,z}(x,z) = f_{x,y}(x, x-z) \cdot 1$$

$$f_z(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{27}(2x - z)\,dx \cdot 1_{[0,3]}(x) \cdot 1_{[0,3]}(y)$$

funzioni indicatrici: $z \in [-3,3]$, studiamo i casi ..

$0 \leq x \leq 3$ $\qquad$ $0 < x - z < 3$

$x \geq 0$ $\qquad$ $x > z \qquad x < z+3$

$x \leq 3$

INTERSEZIONE. $\longrightarrow$ $\left[1_{[0,3]}(x) \cap 1_{[z,\,z+3]}(x) \right]$

Però sai anche che $z \in [-3,3]$, perciò bisogna studiare i casi!

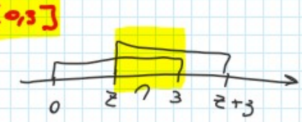
• se $z \in [-3,0]$

$$\int_0^{z+3} \frac{1}{27}(2x-z)\,dx = \frac{1}{27}\int (2x-z)\,dx = \frac{1}{27}\left[x^2 - zx\right]_0^{z+3}$$

$$\frac{1}{27}\left[\cancel{z^2} + 9 + 6z - \cancel{z^2} - 3z\right] = \frac{1}{27}\left[3z + 9\right] = \frac{1}{9}z + \frac{1}{3}$$

$$\frac{z}{9} + \frac{1}{3} \checkmark$$

• se $z \in [0,3]$



$$\int_z^3 \frac{1}{27}(x + x - z)\,dx = \int_z^3 \frac{1}{27}(2x - z)\,dx$$

$$= \frac{1}{27}\left[x^2 - zx\right]_z^3 = \frac{1}{27}\left[9 - 3z - \cancel{z^2} + \cancel{z^2}\right] = -\frac{z}{9} + \frac{1}{3} \checkmark$$

$$P(z \leq 0) = \int_{-3}^{z} \frac{z}{9} + \frac{1}{3}\,dz = \left[\frac{z^2}{18} + \frac{1}{3}z\right]_{-3}^{z} = \left[\frac{z^2}{18} + \frac{1}{3}z - \left(\frac{9}{18} - 1\right)\right]$$

se $z \in [-3,0]$

$$= \left[\frac{z^2}{18} + \frac{1}{3}z - \frac{1}{2} + 1\right] = \left[\frac{z^2}{18} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}\right] = f.d.d$$

$P(z \leq 0) = F(0) =$ SOSTITUIRE $F(0)$ nella z sulla $f.d.d$ $= \frac{1}{2}$

ho scelto l'intervallo $[-3,0]$ perchè chiede la $P(z \leq 0)$!

4) BASTA PRENDERE $g(u,v) = f_x(u) \cdot f_y(v) = \left(\frac{u}{9} + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{v}{9} + \frac{1}{6}\right) \quad u,v \in [0,3]$

$\checkmark$