Calcolo delle Probabilità e Statistica
Prova scritta di giugno 2011

1. Un'urna contiene palline numerate con $1, 2, 3$. Si estrae prima una pallina dall'urna, poi si lancia una moneta regolare tante volte quante ne indica il numero della pallina estratta: sia X il numero di volte che esce Testa. (i) Trovare la distribuzione di X. (ii) Calcolare $E(X)$ e $P(X \geq 2)$.

2. Sia X una v.a. con densità esponenziale di media $1/2$ e si consideri per $x \geq 0$ la funzione $f(x) = 1 - e^{-2x}$.
(i) Trovare la densità della v.a. $Y = f(X)$; si tratta di una densità nota?
(ii) Calcolare $E(Y)$ e $var(Y)$.

3. Supponiamo che il numero di incidenti stradali che avvengono giornalmente in una certa città abbia distribuzione di Poisson con media 1.
(i) Qual è la probabilità che si verifichino più di 20 incidenti in 2 settimane?
(ii) Ipotizzando sempre una distribuzione di Poisson, quale dovrebbe essere invece la media del numero di incidenti giornalieri, affinché, con probabilità ≥ 0.95, si abbiano meno di 13 incidenti in 20 giorni?

Soluzioni della prova scritta di giugno 2011

1. (i) Indichiamo con A, B, C, rispettivamente, gli eventi che si sia estratta la pallina numero $1, 2$ o 3. Risulta $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$. La v.a X può assumere valori $0, 1, 2, 3$ e si ha:

$$P(X=0|A) = P(X=1|A) = 1/2$$

$$P(X=0|B) = P(X=2|B) = 1/4, \ P(X=1|B) = 1/2$$

$$P(X=0|C) = P(X=3|C) = 1/8, \ P(X=1|C) = \binom{3}{1}\frac{1}{8} = \frac{3}{8},$$

$$P(X=2|C) = \binom{3}{2}\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Dunque:

$$P(X=0) = P(X=0|A)P(A) + P(X=0|B)P(B) + P(X=0|C)P(C) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$$

$$P(X=1) = P(X=1|A)P(A) + P(X=1|B)P(B) + P(X=1|C)P(C) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

$$P(X=2) = P(X=2|A)P(A) + P(X=2|B)P(B) + P(X=2|C)P(C) =$$

$$= \left(0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

$$P(X=3) = P(X=3|A)P(A) + P(X=3|B)P(B) + P(X=3|C)P(C) =$$

$$= \left(0 + 0 + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}.$$

(ii) Risulta

$$E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) = \frac{11}{24} + \frac{10}{24} + \frac{3}{24} = 1.$$

Inoltre $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{5}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{4}$.

2. (i) Per $t \in [0,1)$, si ha:

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(f(X) \leq t) = P(1 - e^{-2X} \leq t) = P(e^{-2X} \geq 1 - t) =$$

$$= P(-2X \geq \log(1-t)) = P(X \leq -\frac{1}{2}\log(1-t)) = F_X(-\frac{1}{2}\log(1-t))$$

dove $F(x)$ è la f.d.d. di X data da $F_X(x) = 1 - e^{-2x}$. Pertanto, si ottiene

$$F_Y(t) = 1 - e^{\log(1-t)} = 1 - (1-t) = t$$

e quindi Y è uniformemente distribuita in $[0, 1)$.
(ii) Ricordando le formule per la media e la varianza di una v.a. uniformemente distribuita su un intervallo, si ottiene subito $E(Y) = \frac{1}{2}$ e $var(Y) = \frac{1}{12}$.

3. (i) Se X_i rappresenta il numero di incidenti che avvengono nell' i-esimo giorno, essa è una v.a. di Poisson di parametro 1. Si ha:

$$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{14} > 20) = P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{14} - 14 \cdot 1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{14}} > \frac{20 - 14}{\sqrt{14}}\right)$$

Utilizzando l'approssimazione normale, tale probabilità vale circa

$$1 - \Phi(\frac{6}{3.74}) = 1 - \Phi(1.604) \simeq 1 - 0.9452 = 0.0548\ .$$

(ii) Siano ora X_i v.a. di Poisson di parametro (e media) λ. Si ha:

$$P(X_1 + \ldots + X_{20} < 13) = P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{20} - 20 \cdot \lambda}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{20}} < \frac{13 - 20\lambda}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{20}}\right)$$

Utilizzando l'approssimazione normale, tale probabilità vale circa

$$\Phi\left(\frac{13 - 20\lambda}{\sqrt{\lambda}\sqrt{20}}\right).$$

Affinché tale valore sia $\geq 0.95 = \Phi(1.65)$, deve essere

$$\frac{13 - 20\lambda}{\sqrt{\lambda}\sqrt{20}} \geq 1.65$$

ovvero $20\lambda + 7.37\sqrt{\lambda} - 13 \leq 0$. Posto $x = \sqrt{\lambda}$, la disequazione da risolvere è $20x^2 + 7.37x - 13 \leq 0$. Delle due radici dell'equazione associata, una è negativa e si scarta, l'altra è $x = \sqrt{\lambda} = \frac{33.08 - 7.37}{40} \simeq 0.642$. Pertanto, si ottiene infine $\lambda \leq 0.642^2 = 0.41$.