Università di Roma "Tor Vergata"
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Docenti: Mario Abundo, Barbara Torti
Appello del 5 Maggio 2010

Punteggi: **1.** 3+3+4; **2.** 3+3+4 ; **3.** 4+4+4; totale = 32 .

1. Sia dato un dado truccato in modo che la probabilità che esca 6 in ogni lancio sia $\frac{1}{4}$ (e quindi la probabilità che esca un numero diverso da 6 ($:= 6^c$) in ogni lancio sia $\frac{3}{4}$). Si lanci tale dado 4 volte.
(i) Calcolare la probabilità che esca 6 esattamente 2 volte.
(ii) Calcolare la probabilità che esca 6 meno di 3 volte.
(iii) Calcolare la probabilità che si abbia la sequenza $(6, 6^c, 6, 6^c)$ esattamente in quest'ordine.

2. Sia X uniformemente distribuita in $(-1, 1)$.
(i) Calcolare $E(X^7)$, se esiste finita.
(ii) Calcolare $P(-7 < X \leq 1/4)$.
(iii) Trovare la densità di $Y = 3 - X^2$.

3. Un dado perfetto viene lanciato n volte. Per ogni $i \leq n$ poniamo $Y_i = 1$ se nell' i–esimo lancio è uscito un numero dispari, $Y_i = 0$ se è uscito un numero pari. Poniamo $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n)$. Usando l'approssimazione normale, calcolare:
(i) $P(\bar{Y}_{900} \geq 0.51)$
(ii) $P(|\bar{Y}_{900} - \frac{1}{2}| \leq 0.01)$
(iii) Sempre usando l'approssimazione normale, stimare quanto deve essere grande n perché sia $P(|\bar{Y}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01) \geq 0.95$.

Soluzioni dell' appello del 5 Maggio 2010
di Calcolo delle Probabilità e Statistica

1. Se X è il numero di 6 ottenuti, allora X ha distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ e $p = \frac{1}{4}$.
(i) La probabilità richiesta è:

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{54}{256} \cong 0.2109 \ .$$

(ii) La probabilità richiesta è:

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3) - P(X = 4) = 1 - \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{3}{4^3} - \frac{1}{4^4} = \frac{243}{256}$$

(iii) Siccome gli esiti dei singoli lanci del dado sono indipendenti, se indichiamo con A_i l'evento che l'$i-$ esimo lancio dà 6, e con B_i l'evento che l'$i-$esimo lancio dà un numero diverso da 6, $i = 1, \ldots, 4$, la probabilità richiesta è:

$$P(A_1 \cap B_2 \cap A_3 \cap B_4) = P(A_1)P(B_2)P(A_3)P(B_4) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{256} \cong 0.0351 \ .$$

2. (i) Risulta $E(X^7) = 0$, poiché la densità di X è una funzione pari.
(ii) Si ha:

$$P(-7 < X < 1/4) = \int_{-1}^{1/4} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{8}$$

(iii) Siccome $X \in (-1, 1)$, risulta $Y = 3 - X^2 \in (2, 3)$. Allora, per $t \in (2, 3)$ si ha:

$$P(Y \leq t) = P(3 - X^2 \leq t) = P(3 - t \leq X^2) =$$

$$= P(X \geq \sqrt{3-t}) + P(X \leq -\sqrt{3-t}) = 1 - F_X(\sqrt{3-t}) + F_X(-\sqrt{3-t})$$

Derivando, si ottiene la densità di Y :

$$f_y(t) = -f_x(\sqrt{3-t}) \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{3-t}} - f_x(-\sqrt{3-t}) \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{3-t}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3-t}} \left(f_x(\sqrt{3-t}) + f_x(-\sqrt{3-t})\right) = \frac{1}{2\sqrt{3-t}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3-t}}$$

avendo notato che per $t \in (2,3)$ risulta $\pm\sqrt{3-t} \in (-1,1)$, e di conseguenza $f_x(\pm\sqrt{3-t}) = 1$. Pertanto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3-y}} & \text{se } y \in (2,3) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notare che, nonostante $\lim_{y \to 3^-} f_Y(y) = +\infty$, l'integrale (improprio) di $f_Y(y)$ esteso a $(2,3)$ è convergente e vale, ovviamente, 1.

3. Le v.a. Y_i sono di Bernoulli di parametro $p = \frac{1}{2}$; dunque $E(Y_i) = p = \frac{1}{2}$ e $Var(Y_i) = p(1-p) = \frac{1}{4}$. Posto $S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$, risulta $S_n \sim B(n,p)$.
(i) Si ha:

$$P(\bar{Y}_{900} \geq 0.51) = P(900 \cdot \bar{Y}_{900} \geq 900 \cdot 0.51) =$$
$$= P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{900} \geq 459) =$$
$$P\left(\frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{900} - 900 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{900}} \geq \frac{459 - 450}{15}\right).$$

Usando l'approssimazione normale, questa probabilità vale circa $P(W \geq 9/15)$, dove $W \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dunque:

$$P(\bar{Y}_{900} \geq 0.51) \cong 1 - \Phi\left(\frac{9}{15}\right) = 1 - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743 \; .$$

(ii) Si ha, utilizzando ancora l'approssimazione normale, con $W \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$P(|\bar{Y}_{900} - 0.5| \leq 0.01) = P(|S_{900} - 450| \leq 9) = P\left(\frac{|S_{900} - 450|}{15} \leq \frac{9}{15}\right) \cong$$
$$\cong P\left(|W| \leq \frac{9}{15}\right) \cong \Phi(0.6) - \Phi(-0.6) = \Phi(0.6) - (1 - \Phi(0.6)) =$$
$$= 2\Phi(0.6) - 1 = 2 \cdot 0.7257 - 1 = 0.4514 \; .$$

(iii) Abbiamo, sempre per l'approssimazione normale:

$$P(|\bar{Y}_n - 0.5| \leq 0.01) = P\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \leq 0.01 \cdot n\right) =$$
$$= P\left(\frac{|S_n - 0.5 \cdot n|}{0.5\sqrt{n}} \leq \frac{0.01 \cdot n}{0.5\sqrt{n}}\right) \cong P\left(|W| \leq 0.02\sqrt{n}\right),$$

dove $W \sim \mathcal{N}(0,1)$. Questa probabilità vale $2\Phi(0.02\sqrt{n}) - 1$; se vogliamo che essa sia maggiore di 0.95, deve essere $\Phi(0.02\sqrt{n}) > 0.975$. Dalla tavola della distribuzione normale standard, si ricava che $0.975 = \Phi(1.96)$, dunque deve aversi $\Phi(0.02\sqrt{n}) > \Phi(1.96)$. Siccome la funzione di distribuzione Φ è crescente, da ciò segue che $0.02\sqrt{n} > 1.96$, ovvero

$$n > \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 = 9604 \; .$$