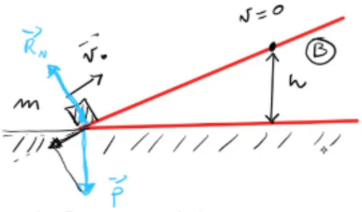
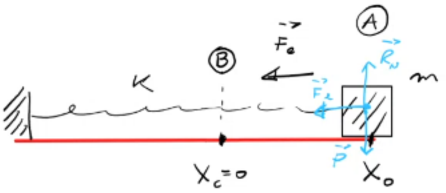
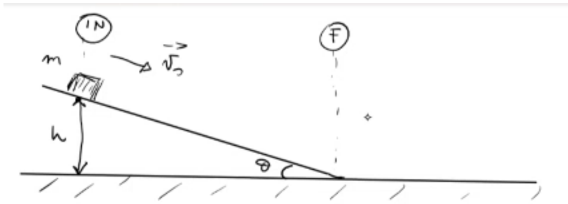
Dinamica 26 (Esercizi)

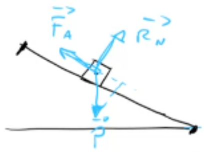
sabato 8 marzo 2025 18:50

Facciamo ora un esercizio :

1. auto di massa m da $v_0 \xrightarrow{\text{per un } \Delta t,\ P = \text{cost}} \boxed{v_F = ?}$ $\quad \begin{cases} v_0 = 2\ km/h \\ m = 10^3\ kg \\ \Delta t = 7\ s \\ P = 2.1\ kW \end{cases}$
   a. Con soluzione :
   b. $P = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow W = P\Delta t = \Delta E_k$
      $\Rightarrow P\Delta t = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow v_F = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P\Delta t}{m}} = 7.8\ m/s$
2. Calcolare altezza con la conservazione dell'energia meccanica e non considerando gli attriti
   a. 

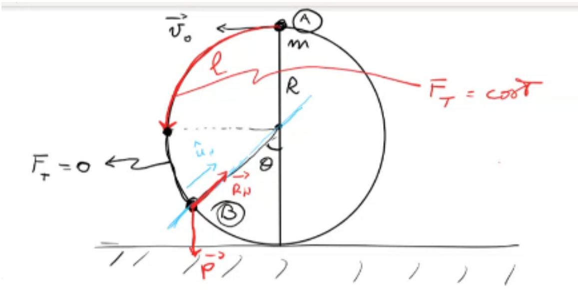
   b. Notiamo che R_n non compie lavoro
   c. Con soluzione :
      i. $$(E_k + E_P)_A = (E_k + E_P)_B$$
      $$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 = \cancel{m} g h \Rightarrow \boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}}$$
3. Sul sistema agisce la forza elastica (forza conservativa)
   a. 

   b. Considerando la conservazione dell'energia meccanica
   c. $\boxed{\frac{K X_0^2}{2} = \frac{1}{2} m v_c^2} \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{K}{m}}\, X_0 = \omega X_0$
4. Piano inclinato dove cassa parte da altezza h e scende al suolo
   a. 

   b. Se non c'è attrito
      i. se $\mu = 0$ $\quad \Delta E_m = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m v_F^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh} \Rightarrow \boxed{v_F = \sqrt{v_0^2 + 2gh}}$
   c. Se c'è attrito (μ_d)
      i. 

      ii. $\underset{\Delta E_k}{\overset{\parallel}{W}} = \underset{-\Delta E_p}{\overset{\parallel}{W_{Con}}} + W_{NC} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh - \int_0^{x_F} \mu R_N\, dx$
      iii. Con soluzione :
      iv. $\left.\begin{aligned} R_N &= \mu g \cos\theta \\ x_F &= h/\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_F = \sqrt{v_0^2 + 2gh - \frac{2\mu g h}{tg\theta}}$

v. Occhio se teta=90° -> piano verticale -> R_n=0

5. Esercizio mazzoldi
    a. 

    b. Di calcoli la R_n nel punto b
    c. Si conosce invece :
        i. $\begin{cases} F_T = 3.1\ N \\ m = 0{,}3\ kg \\ v_0 = 5{,}8\ m/s \\ \theta = 30° \\ R = 2.2\ m \end{cases}$
    d. Quindi la soluzione :
        i. Questo è il passaggio intermedio in quanto non conosco V_b
        ii. $\boxed{\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}} \xrightarrow[\hat{u}_N]{\text{lungo}} R_N - mg\cos\theta = m\frac{v_B^2}{R}$

            $\Rightarrow \boxed{R_N = m\left[g\cos\theta + v_B^2/R\right]}$
        iii. Ma ricordandoci il teorema di conservazione dell'energia meccanica :
            1. $W_{AB} = W_c + W_{nc} = -\Delta E_p - F_T\ell = \Delta E_k$

               $-\left[-mgR(1+\cos\theta)\right] - \frac{\pi}{2}RF_T = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} \Rightarrow v_B^2 = 42{,}8\ m/s$
        iv. E sostituendo il valore nell'equazione precedente, si arriva ad in valore di R_n:
            1. $R_N = 8{,}4\ N$

Dinamica 27 (Momento di un vettore)

martedì 11 marzo 2025 09:06

Vediamo ora la definizione generale : **questa grandezza fisica rappresenta la componente rotatoria del moto di un punto materiale percepita da un certo polo O**

Momento di $\vec{A}$ rispetto a un polo $\underline{O}$

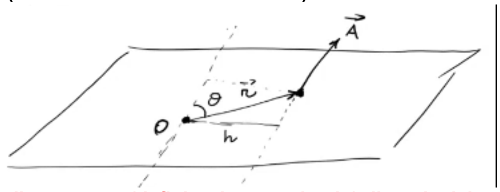
Dove per polo si intende un punto dal quale può svilupparsi il calcolo :

$$\boxed{\vec{M}_O \triangleq \vec{r} \times \vec{A}} \Rightarrow |\vec{M}_O| = rA \sin\theta = hA$$

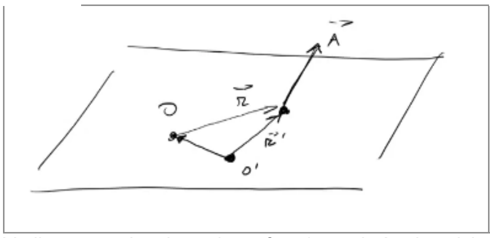
$h = |\vec{r}| \sin\theta$

↳ braccio

Dove "x" sta per vettore , r invece è la posizione del punto di applicazione del vettore A rispetto al polo O (modulo r = distanza tra A ed O) :



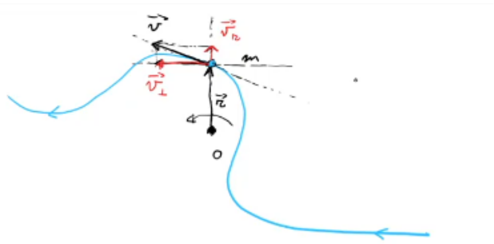
Questo momento di un vettore (definito rispetto al polo) dipende dal polo scelto : in quanto se cambio il polo di riferimento cambia il momento :



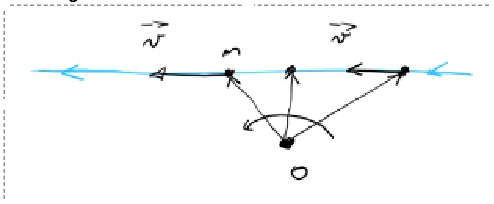
$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{A} = (\vec{O'O} + \vec{r}) \times \vec{A}$$

$$\vec{M}_{O'} = (\vec{O'O} \times \vec{A}) + \underbrace{\vec{r} \times \vec{A}}_{\vec{M}_O} \neq \vec{M}_O$$

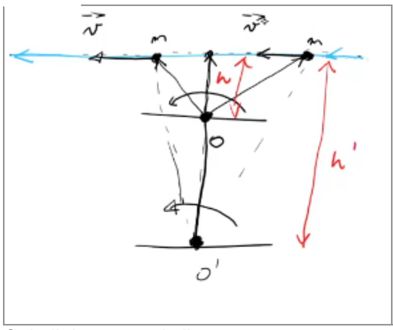
Vediamo ora che ci possiamo fare / proprietà : descriviamo lo stato di moto rotatorio percepito da un certo polo di osservazione :



Dove il moto rotatorio percepito da O dipende dalla componente trasversale v ortogonale(t rovesciata), la quale se fosse nulla implicherebbe che il punto di massa m o si avvicina o si allontana su componente radiale v_r impedendo così la "rotazione" per osservare. Analogamente anche la traiettoria è lungo una retta :



Quindi ricordandoci che lo stato di moto in dinamica me lo dà la quantità di moto p , questo tipo di informazione viene caratterizzata sia dalla quantità di moto , sia dal polo dal quale osservo la massa m che si sposta :



Quindi riassumendo il tutto : il momento dipende sia dalla velocità trasversale , sia dalla distanza tra il punto di osservazione O e la traiettoria del punto

Dipendenza da $v_\perp$

Dipendenza da h

Quindi riassumendo il tutto :

$\boxed{\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p}}$	**Questo vettore si chiama MOMENTO ANGOLARE** il quale coincide con il momento della quantità di moto

Dove :	$\vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{v}_\perp$ $\vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_\perp + \vec{v}_r)$ $= \vec{r} \times m\vec{v}_\perp + \underbrace{\vec{r} \times m\vec{v}_r}_{=0}$ Nota la componente radiale si annulla in quanto nel prodotto scalare compone un seno 0° =0 .

Mentre per il modulo si ha che :

$\underbrace{|\vec{r}|\,|\vec{p}|\sin\theta}_{h}$	$|\vec{L}_o| = ph$	Dove h è il braccio : distanza tra la traiettoria ed il punto di osservazione

Mentre se si cambia il polo di osservazione :

$$\vec{L}_{o'} = \vec{L}_o + \vec{O'O} \times \vec{p}$$

Una domanda sorge spontanea : da cosa dipende nel tempo una variazione del momento angolare?

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_o}{dt}}$$

Vediamolo , ma in generale ricordiamo che O può spostarsi -> v_0 è la velocità dell'osservatore , mentre v è la velocità della massa m:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

Che andandolo a vedere in dettaglio :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = (\vec{v} \times \vec{p}) - (\vec{v}_o \times \vec{p}) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

Dove il primo termine è nullo un quanto vettori paralleli e ricordandoci il secondo principio della dinamica :

$$\left(\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

Si arriva a:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \underbrace{(\vec{v} \times \vec{p})}_{=0} - (\vec{v}_o \times \vec{p}) + \underbrace{(\vec{r} \times \vec{F})}_{=\vec{M}_o}$$

Quindi si arriva al risultato noto come equazione dei momenti : mette in collegamento m_0 che dipende da una forza (osservata da osservatore inerziale) con la variazione dello stato di moto rotatorio percepito dal polo O ed anche (secondo termine) da come osservatore si sta spostando rispetto a come si sposta m (<u>moto del polo rispetto al moto della massa m</u>):

$$\boxed{\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} + \vec{v}_o \times \vec{p}}$$

Vediamo ora un caso limite (<u>osservatore si muove parallelamente alla massa m</u>):

$$\boxed{\text{Se} \begin{cases} \vec{v}_o = 0 \\ \vec{v}_o \parallel \vec{p} \end{cases}} \xrightarrow[\text{diventa}]{\text{la (I)}} \boxed{\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt}}$$

Quindi esprime (causa effetto) : chi è che fa variare percezione dello stato di moto rotatorio che ho da O , prende il nome di **TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE.**
Riassumendo quindi:

$$\left.\begin{array}{l}\vec p = m\vec v\\ \vec F\end{array}\right\}\ \boxed{\vec F = \frac{d\vec p}{dt}} \quad \text{se } \vec F = 0 \Rightarrow \vec p \text{ si conserva}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec L_o = \vec r \times \vec p\\ \vec M_o = \vec r \times \vec F\end{array}\right\}\ \boxed{\vec M_o = \frac{d\vec L_o}{dt}} \quad \text{se } \vec M_o = 0 \Rightarrow \vec L_o \text{ si conserva}$$

Facciamo un flashback :

$$\vec p = m\vec v \rightarrow \vec F = \frac{d\vec p}{dt} \longrightarrow \boxed{\vec J \hat{=} \int_0^t \vec F\, dt = \Delta \vec p} \quad \text{Th. dell' impulso}$$

$$\int_0^t \vec M_o\, dt = \int_0^t (\vec r \times \vec F)_o\, dt \simeq \vec r \times \int_0^t \vec F\, dt = \boxed{\vec r \times \vec J = \Delta \vec L_o} \quad \text{Momento dell'impulso}$$

se $\vec r \simeq cost$

E vediamo ora come studiare la rapidità del moto (modulo velocità) ed applicando i momenti :

12 aprile 2021 12:36

$$W = \int_A^B F_T\, ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} (r F_T)\, d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M_o\, d\theta$$

$ds = r\, d\theta$

Facciamo un esempio : Moto circolare -> polo di osservazione fisso :

12 aprile 2021 12:45

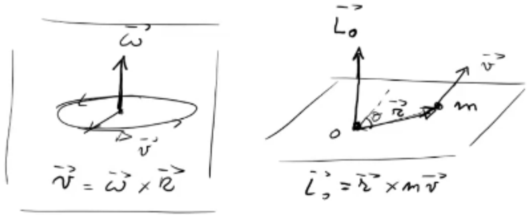
$$(\text{polo fisso}) \quad \boxed{\vec M_o = \frac{d\vec L_o}{dt}} \longleftrightarrow \boxed{\vec F = \frac{d\vec p}{dt}}$$

Ed andiamo a descrivere il momento :

$$\Rightarrow \begin{array}{l} v_r = 0 \\ r = cost \end{array} \Rightarrow \boxed{\vec L_o = m r^2 \vec\omega}$$

$\omega = v/r$, $\vec L_o \parallel \vec\omega$

Ricordandoci che :



Quindi riassumendo :

$$(\text{moto circolare}) \quad \boxed{\vec L_o = m r^2 \vec\omega} \longleftrightarrow \boxed{\vec p = m\vec v}$$

Per quanto riguarda il lavoro ed il teorema dell'energia cinetica :

$$(\text{rapidità di rotaz.}) \quad \boxed{W = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \vec M \cdot d\vec\theta} \longleftrightarrow \boxed{W = \int_A^B \vec F \cdot d\vec s = \Delta E_k}$$

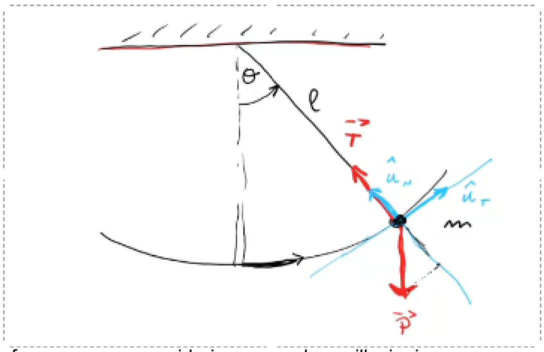
Invece per impulso e teorema dell'impulso :

$$(\vec r \simeq cost) \quad \boxed{\vec r \times \vec J = \int_0^t \vec M_o\, dt = \Delta \vec L_o} \longleftrightarrow \boxed{\vec J = \int_0^t \vec F\, dt = \Delta \vec p}$$

Quindi quanto detto finora va a rimarcare il legame tra le relazioni generali della dinamica e quelle delle rotazioni rispetto al punto O

Dinamica 28 (Pendolo semplice)

martedì 11 marzo 2025 12:51



Studiamo queste fenomeno ma consideriamo piccole oscillazioni .
Quindi applicando la seconda legge di Newton:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\ell}\hat{u}_N$$

E studiandolo lungo gli assi :

$$\begin{array}{l} \text{su } \hat{u}_N \\ \text{su } \hat{u}_T \end{array} \begin{cases} T - mg\cos\vartheta = m\,a_N \\ -\cancel{m}g\,\text{sen}\,\vartheta = \cancel{m}\,a_T \end{cases} \quad \begin{cases} T - mg\cos\vartheta = m\dfrac{v^2}{\ell} & \text{I} \\ -g\,\text{sen}\,\vartheta = \dfrac{dv}{dt} & \text{II} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{piccoli } \vartheta \Rightarrow \text{sen}\,\vartheta \simeq \vartheta \\ ds = \ell\, d\theta \Rightarrow v = \ell\dfrac{d\theta}{dt} = \ell\dot{\theta} \end{cases} (*)$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \; -g\theta = \ell\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0} \quad \text{moto armonico con } \omega = \sqrt{g/\ell}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

E se ci sono condizioni iniziali :

$$\begin{cases} \theta(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi) \\ \dot{\theta}(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

ESEMPIO : Cond. iniz. $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 > 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vartheta_0 = A\,\text{sen}\,\phi \\ 0 = \omega A\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \vartheta_0 \\ \phi = \pi/2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\vartheta_0 \\ \phi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$v = \ell\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \theta(t) = \vartheta_0\cos\omega t \\ \dot{\theta}(t) = -\omega\vartheta_0\,\text{sen}\,\omega t \end{cases}} \Longrightarrow \begin{cases} \theta = \vartheta_0 \longrightarrow v = 0 \quad a_T = a_M \\ \theta = 0 \longrightarrow v = v_M \quad a_T = 0 \end{cases}$$

NOTA $\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\theta_0\cos\omega t = -\omega^2\theta(t)$

Andiamo a vedere ora cosa succede per la tensione :

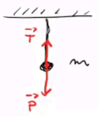
giovedì 15 aprile 2021 12:03

$$\begin{array}{l} \text{su } \hat{u}_N \\ \text{su } \hat{u}_T \end{array} \begin{cases} T - mg\cos\vartheta = m\dfrac{v^2}{\ell} & 1 \\ -mg\,\text{sen}\,\vartheta = m\ell\ddot{\theta} & 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T = m\left[g\cos\vartheta + \frac{v^2(t)}{\ell}\right]}$$

si ha $\begin{cases} \theta = \vartheta_0 \longrightarrow v = 0 \\ \theta = 0 \longrightarrow v = v_M \end{cases}$

$$\begin{cases} T_{min}(\theta = \vartheta_0) = mg\cos\theta_0 \\ T_{MAX}(\theta = 0) = m\left(g + \dfrac{v_M^2}{\ell}\right) \end{cases}$$

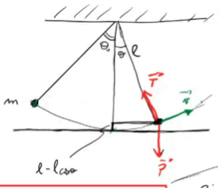
NOTA $\theta_0 \to 0$ pendolo fermo $\Rightarrow \boxed{|\vec{T}| = mg}$



Dove T_{min} e T_{max} sono i punti di inversione del moto. Andiamo a vedere ora come varia il modulo della velocità e ricordando il teorema della conservazione dell'energia meccanica:

giovedì 15 aprile 2021 12:14

Quale $v(\theta)$?



$$E_m = E_p + E_k = \text{cost}$$

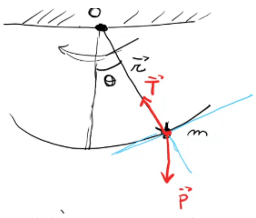
$$\text{I} \quad mg\ell(1-\cos\vartheta) + \frac{mv^2}{2} = mg\ell(1-\cos\vartheta_0) \quad \left(E(\vartheta_0)\right)$$

dalle $\overset{\text{I}}{\Longrightarrow}$ $\boxed{v = \sqrt{2g\ell(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}}$

Ricordando che $T = m\left(g\cos\vartheta + \dfrac{v^2}{\ell}\right)$

Sost. v $\Rightarrow \boxed{T(\theta) = mg(3\cos\vartheta - 2\cos\vartheta_0)}$

Mentre se osserviamo il moto rotatorio del pendolo semplice percepito da un particolare polo :



E ricordando il teorema del momento angolare :

$$\boxed{\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt}}$$

E ricordando che :

$$|\vec{p}| = |m\vec{v}| = m\, l\, \dot{\theta}$$

<u>In quanto applico la velocità come derivata dello spostamento</u> , si arriva a :

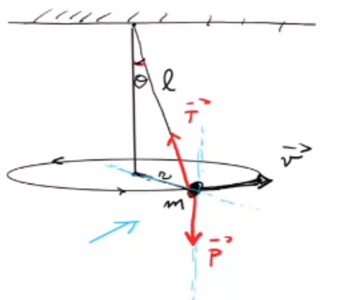
$$(\vec{r}\times\vec{P}) + \underbrace{(\vec{r}\times\vec{T})}_{=0} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})$$

Nella quale il secondo termine è nullo per via del parallelismo tra gli assi , e proiettando su un asse perpendicolare si arriva a :

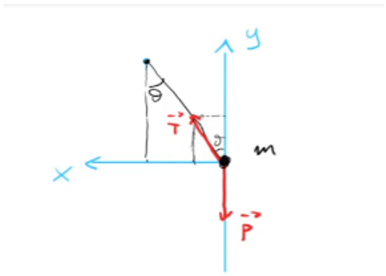
$$-\cancel{m}\, g\, l\, \text{sen}\theta = \cancel{m}\, l^2\ddot{\theta} \xrightarrow[\text{oscill.}]{\text{piccole}} \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

$$(\text{sen}\theta \simeq \theta)$$

Andiamo a vedere un tipo di pendolo : il **pendolo conico:**



E vogliamo determinare la velocità costante per teta e la tensione . Andiamo a rappresentarli su un sistema di assi coordinati :



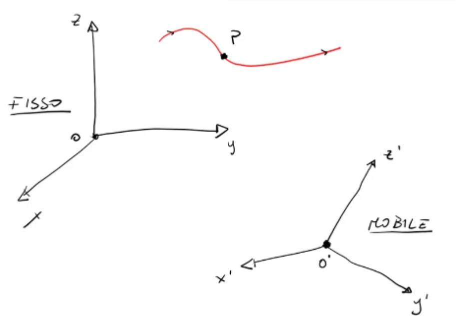
Arrivando alla seguente soluzione :

$$\begin{cases} T\cos\theta - mg = 0 & \text{su } y \\ T\,\text{sen}\theta = m\underbrace{\frac{v^2}{r}}_{a_n} & \text{su } x \end{cases} \qquad \begin{cases} T = mg/\cos\theta \\ v = \sqrt{r g\, tg\theta} \end{cases}$$

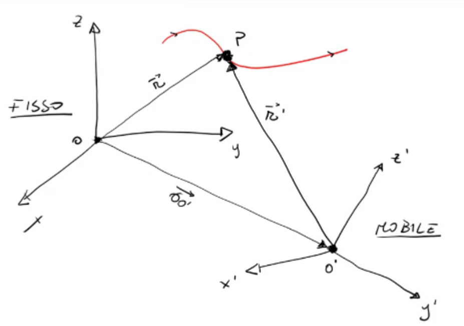
Dinamica 29 (Composizione e moti relativi)

martedì 11 marzo 2025   14:33

- Andiamo ora a stabilire che tipo di relazione tra le grandezze misurate da un sistema di riferimento fisso e quelle misurate da un sistema riferimento mobile(moto relativo rispetto al primo) .



Quindi per quanto riguarda le posizioni : da quello fisso sappiamo descriverla , ma anche da quello mobile, però in quello mobile la posizione è maggiore. Inoltre è possibile "collegare" i due sistemi di riferimento attraverso un vettore :



<table>
<tr>
<td>Quindi per quanto riguarda lo spostamento?</td>
<td>$$\boxed{\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}\,'}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Mentre per quanto riguarda la velocità:</td>
<td>$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\,\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$
Dove il primo termine rappresenta v0 del sistema mobile , mentre il secondo si ha la velocità del primo in combinazione con w x r (w=velocità angolare del sistema mobile con origine l'origine del sistema mobile)
$\vec{v}_{o'}$ NON BANALE $\Rightarrow \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$
Nota come relazione di Poisson
E scomponendolo lungo gli assi :
$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x'\hat{u}_x' + y'\hat{u}_y' + z'\hat{u}_z'\right] = \underbrace{\underbrace{\frac{dx'}{dt}}_{v_x'}\hat{u}_x' + \underbrace{\frac{dy'}{dt}}_{v_y'}\hat{u}_y' + \underbrace{\frac{dz'}{dt}}_{v_z'}\hat{u}_z'}_{\vec{v}\,'} + \underbrace{x'\frac{d\hat{u}_x'}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_y'}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_z'}{dt}}_{\vec{\omega} \times \vec{r}\,'}$$
si dimostra
Quindi per la velocità si ha che :
$$\boxed{\underbrace{\vec{v}}_{\vec{v}_e} = \underbrace{\vec{v}\,'}_{\vec{v}_a} + \underbrace{\vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'}_{\vec{v}_t}}$$
Se in un moto di pura traslazione si ha che :
$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_{o'}$$
Se invece moto di pura rotazione si ha che :
$$\vec{v} = \vec{v}\,' + (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$</td>
</tr>
</table>

Per quanto riguarda la accelerazione (derivata della velocità)	$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'}$$ Dove la prima rappresenta l'accelerazione relativa (sistema fisso) , la terna dopo rappresenta l'accelerazione di **puro trascinamento** mentre l'ultimo termine prende il nome di accelerazione di Coriolis(a_c) , la quale è presente se $\underline{\vec{v}' \neq 0}$ e $\underline{\vec{\omega} \neq 0}$ e $\vec{\omega} \nparallel \vec{v}'$ <u>Quindi questa accelerazione rappresenta un termine di deviazione del moto relativo : non è componente di accelerazione che si può associare ad una variazione di modulo di v, ma direzione e verso della velocità del sistema mobile</u>

Dinamica 30 (SRI->sistema di riferimento inerziale)

martedì 11 marzo 2025 15:38

Facciamo un breve riepilogo :

Sist / $\vec{F} = 0 \Rightarrow$ moto rettilineo uniforme $(\vec{a} = 0)$

$\vec{F}$: Forze vere } dovute a interazioni fondamentali tra sist.

Quindi per la seconda legge di Newton:

Newton $\longrightarrow$ se SRI $\Rightarrow$ $\vec{F}(\text{vere}) \propto \vec{a}$

$\vec{a}$: qui misurata

Vediamo ora casi particolari :

Moto relativo (rispetto a un SRI) rettilineo uniforme $\Rightarrow (\vec{v}_{O'} = \overrightarrow{\text{cost}})$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_{O'} = 0 \\ \vec{\omega} = 0 \end{array}\right\} \xRightarrow[(3)]{\text{dalla}} \boxed{\vec{a}' = \vec{a}} \quad (4)$$

$\vec{a}'$: $\vec{a}_r$

O' misura la stessa $\vec{a}$ di O $\Rightarrow$ se O è inerziale anche O' in moto rett. unif. risp. a O è inerziale

Dinamica 31 (SRNI-> Sistema di riferimento non inerziale)

martedì 11 marzo 2025 16:25

Facciamo attenzione alla seguente cosa:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_{o'} \neq 0 \\ \text{e/o} \quad \vec{\omega} \neq 0 \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{③}]{\text{dalla}} \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c \quad \text{moltiplicando per } m$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\vec{F}}_{\text{(vere)}} = m\vec{a} = m(\underbrace{\vec{a}'}_{\text{Non è proporzionale alla } \vec{F} \text{ vera}} + \vec{a}_t + \vec{a}_c)$$

Quindi le leggi orare per **un osservatore non inziale** (osservatore inerziale) si ha che :

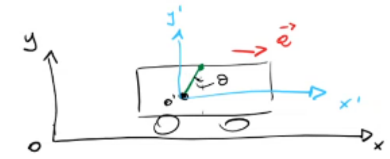
$$\vec{F}' = m\vec{a}' = \underbrace{\underbrace{-m\vec{a}_t}\ \underbrace{-m\vec{a}_c}}_{\substack{\text{opponenti} \\ \Downarrow \\ \text{d'inerzia}}} + \underbrace{\vec{F}}_{\text{vera}}$$

Nota : <u>quelle opponenti / d'inerzia vengono viste solo e soltanto da quello non inerziale</u>**(la quale forza non è generata da interazioni fondamentali, ma sono originate dallo stato di moto accelerato dell'osservatore NON inerziale)**

Dinamica 32 (Esercizi)

giovedì 13 marzo 2025 09:10

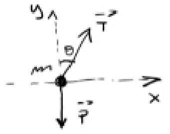
Vediamo ora degli esercizi : pendolo all'interno di un treno che accelera con accelerazione a



Determinare θ studiando il problema

① Da O: $\underbrace{\quad}_{\vec{T},\ \vec{P}}$ ② Da O': $\underbrace{\quad}_{\vec{T},\ \vec{P},\ \vec{F}_{app}}$

Andiamo a vedere ora cosa vede l'osservatore inerziale O : applicando seconda legge Newton

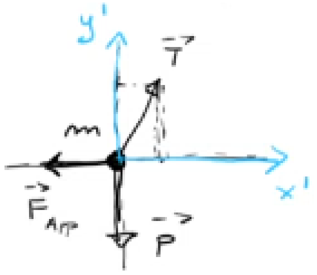


$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Ed andando a studiarlo lungo gli assi :

$$\begin{cases} \text{Su } x: & T \sin\theta = m a \\ \text{su } y: & T\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{tg\,\theta = a/g}$$

Mentre se voglio conoscere l'angolo teta , devo fare fa funzione inversa : l'arcotangente (arctan) . Andiamo a studiare la situazione nel sistema di riferimento non inerziale (solidale col treno-> passeggero seduto nel vagone):



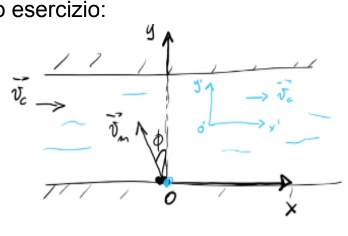
E studiandolo lungo gli assi :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_{App} = 0 \qquad \begin{cases} \text{Su } x': & T\sin\theta - ma = 0 \\ \text{su } y': & T\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{tg\,\theta = \frac{a}{g}}$$

Ricordiamo che le F_{app} (forze apparenti) sono quelle forze generate dallo stato di moto dell'osservatore non inerziale (per queste forze non vale la seconda lege di Newton)

Vediamo ora un altro esercizio:

Sime
- velocità della corrente $\vec{v}_c$
- velocità di un motoscafo (rispetto all'acqua) $\vec{v}_m$



① φ per attraversare ⊥ alla sponda
② t_{min} di attraversamento
③ lo spostamento d se $\vec{v}_m \perp$ rive

Quindi andiamo a studiarlo in dinamica ed applichiamo la <u>legge della composizione delle velocità</u> :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'}$$

Da notare che ultimo termine w vector r non è presente : non c'è rotazione . Studiamo ora il moto lungo le componenti :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} = \vec{v}_m + \vec{v}_c$$

$$\vec{v} = (v_{mx} + v_{cx})\,\hat{u}_x + v_{my}\,\hat{u}_y$$

Quindi ricordando che il moto deve essere ortogonale :

$$\vec v = \vec v' + \vec v_{O'} = \vec v_m + \vec v_c$$

$$\vec v = \underbrace{(v_{mx} + v_{cx})}_{\underbrace{-v_m \sin\phi + v_c}_{=0}} \hat u_x + \underbrace{v_{my}}_{\underbrace{v_m \cos\phi}_{|\vec v|}} \hat u_y$$

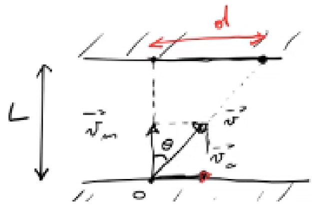
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\phi = \arcsin v_c / v_m}$$

Vediamo ora il tempo di attraversamento minimo (angolo deve essere minimo-> cos(teta)=1):

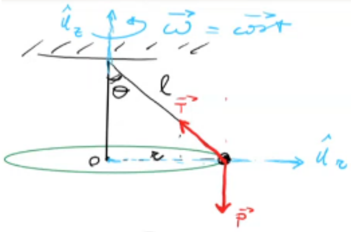
$$\underset{L}{y(t)} = \underset{v_m \cos\phi}{v_y} t^{AT} \Rightarrow t^{AT} = \frac{L}{v_m \cos\phi} \Rightarrow \boxed{t^{AT}_{min} = t^{AT}(\phi = 0) = L/v_m}$$

Mentre ora l'ultimo punto :



$$\begin{cases} d = L \operatorname{tg}\theta \\ v_c = v_m \operatorname{tg}\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{d = L \frac{v_c}{v_m}}$$

Vediamo ora altro esercizio (pendolo conico):
Quindi per il sistema di riferimento inerziale :



$m = 0{,}3\ kg$
$\ell = 0{,}7\ m$
$\omega = 4\ rad/s$
$(r = \ell \sin\theta)$

Determinare θ e T

E studiandolo lungo gli assi ed applicando la seconda legge di Newton e sistema di riferimento inerziale :

$$\vec T + \vec P = \underbrace{m\vec a}_{-m\omega^2 r\, \hat u_r}$$

$$\begin{matrix} \hat u_r \\ \hat u_z \end{matrix} \begin{cases} -T\sin\theta = -m\omega^2 r \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{m\omega^2 \ell \cancel{\sin\theta}}{\cancel{\sin\theta}} = 3{,}4\ N \\ \theta = \arccos\left(\frac{mg}{T}\right) = 29° \end{cases}$$

Mentre vediamo ora per un <u>sistema di riferimento non inerziale</u>:

$$\boxed{\vec T + \vec P + \vec F_{APP} = 0}$$

$$\vec F_v \quad \underbrace{-m\vec a_t}_{\vec F_{cen} = m\omega^2 r\, \hat u_r} \quad \underbrace{-m\vec a_c}_{=0} = \underbrace{m\vec a'}_{=0}$$

E ricordandoci il teorema della composizione delle accelerazioni :

$$\vec a = \vec a' + \underbrace{\vec a_{O'} + \left(\frac{d\vec\omega}{dt} \times \vec r'\right) + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r')}_{\vec a_t} + \underbrace{2\vec\omega \times \vec v'}_{\vec a_c}$$

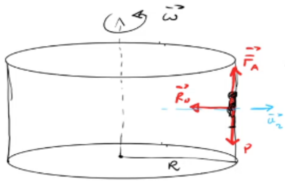
Il che nel nostro caso diventa (w è costante):

$$\vec a = \vec a' + \underbrace{\cancel{\vec a_{O'}} + \cancel{\left(\frac{d\vec\omega}{dt} \times \vec r'\right)} + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r')}_{\vec a_t} + \underbrace{2\vec\omega \times \vec v'}_{\vec a_c}$$

E proiettando lugo gli assi :

$$\begin{matrix} \hat u_r \\ \hat u_z \end{matrix} \begin{cases} m\omega^2 r - T\sin\theta = 0 \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \begin{cases} T = \frac{m\omega^2 \ell \cancel{\sin\theta}}{\cancel{\sin\theta}} = 3{,}4\ N \\ \theta = \arccos\left(\frac{mg}{T}\right) = 29° \end{cases}$$

Ed osserviamo che : se aumenta la velocità angolare (w) aumenta l'angolo (teta).Vediamo ora un esempio di una giostra cilindrica :



$\mu_s = 0,3$ $R = 2\ m$

Calcolare ω minima che mantiene sulla parete il soggetto

Ed andiamolo a studiare per un osservatore inerziale ed applicando la seconda legge di Newton:

$$\boxed{\vec R_N + \vec P + \vec F_A = m\vec a} = -m\omega^2 R\,\hat u_e \Rightarrow \begin{cases} -R_N = -m\omega^2 R \\ F_A - mg = 0 \end{cases} \begin{cases} R_N = m\omega^2 R \\ mg = F_A \le \mu_s R_N \end{cases}$$

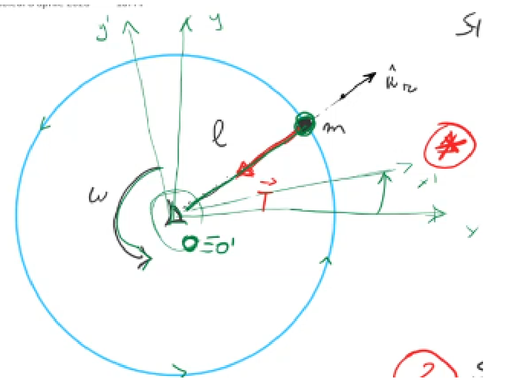
$$\cancel{m}g \le \mu \cancel{m}\omega^2 R \Rightarrow \omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} = 4\ rad/s$$

Mentre per quanto riguarda quello non inerziale (considera anche le forze apparenti , che nel nostro caso sono quelle centrifughe):

$$\boxed{\vec R_N + \vec P + \vec F_A + \vec F_{CF} = 0}$$

$$\begin{cases} -R_N + m\omega^2 R = 0 \\ F_A - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega^2 = \frac{R_N}{mR} \Rightarrow \boxed{\omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}}$$

Vediamo ora l'esempio del lancio del martello :



Del quale dobbiamo studiare l'accelerazione , accelerazione dell'osservatore non inerziale ed il modulo della tensione nel mentre il martellista gira su se stesso con velocità angolare w data e dopo il rilascio e trascurando effetto forza peso .Studiamolo per osservatore inerziale ed applichiamo la seconda legge di Newton :

$$\boxed{\vec T = m\vec a} = -m\omega^2\ell\,\hat u_2$$

su $\hat u_2$ $\quad -T = -m\omega^2\ell \Rightarrow \begin{cases} \boxed{T = m\omega^2\ell} \\ \boxed{\vec a = -\omega^2\ell\,\hat u_2} \end{cases}$

Mentre per quanto riguarda l'osservatore non inerziale (il martellista non vede moti laterali ne moti longitudinali): quindi la massa m è ferma e non ha accelerazione:

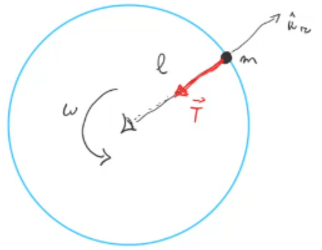
$$\boxed{\vec T + \vec F_{CF} = 0}$$

Ed applicando la seconda legge di Newton :

$$\underbrace{\vec F_v}_{\vec T} - m\underbrace{\vec a_t}_{\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)} - m\underbrace{\vec a_c}_{=0\ (v'=0)} = m\underbrace{\vec a'}_{=0}$$

su $\hat u_2$ $\quad -T + m\omega^2\ell = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{T = m\omega^2\ell} \\ \boxed{\vec a' = 0} \end{cases}$

Mentre dopo il rilascio:



E descrivendo le equazioni sugli assi ed applicando la 2 legge di Newton :

$$\underline{SRI} \qquad \boxed{\vec{T} = 0} \quad \boxed{\vec{a} = 0}$$

$$\underline{SRNI} \qquad \underset{(\vec{T}=0)\ \ 0}{\vec{F}_v} - \underbrace{m\vec{a}_t}_{\vec{F}_{CF}} - \underbrace{m\vec{a}_c}_{\vec{F}_c} = m\vec{a}'$$

E ricordando il discorso delle forze apparenti si arriva a :

$$\boxed{\vec{F}_{CF} + \vec{F}_c = m\vec{a}'}$$

$$\cancel{m}\omega^2 r\,\hat{u}_r - 2\cancel{m}\,\vec{\omega}\times\vec{v}' = \cancel{m}\vec{a}' \Rightarrow \boxed{\vec{a}' = \omega^2 r\,\hat{u}_r \underbrace{-2\,\vec{\omega}\times\vec{v}'}}$$

NOTA : $\perp$ e $\vec{v}'$
acc. deviatrica

Dinamica 33 (Azioni ed effetti)

giovedì 13 marzo 2025 14:45

Facciamo un breve riepilogo su quanto studiato fino ad ora :

Come studiare e rappresentare :

1. le AZIONI sui singoli punti e sul sist. nel suo insieme ⇒ Origine e classificazione delle $\vec{F}$

⇕ DINAMICA ⇕

2. gli EFFETTI sui singoli punti e sul sist. nel suo insieme ⇒ Analisi del moto d'insieme e dei singoli elementi rispetto a punti "notevoli"

Dinamica 34 (Forze interne ed esterne)

giovedì 13 marzo 2025 14:56

Su ogni punto (di massa m_i) possono agire forze interne ed esterne: **ovvero su questa massa agiscono la risultante delle forze interne e quella delle forze esterne**:

- $$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

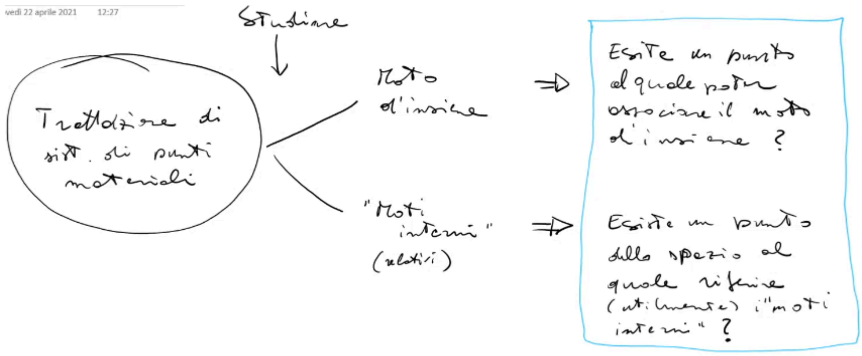
In generale per quanto riguarda le forze interne ad una singola massa potrebbe essere non nulla , ma quella dell'**intero sistema è uguale a 0** : ma ricordandoci la 3 legge di Newton : la forza esercitata dalla i-esima particella sulla j-esima è uguale ma opposta a quella esercitata da quella j-esima su quella i-esima :

$$\underbrace{\vec{F}^{(I)} = \sum_i \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{ij} \vec{F}_{ij}^{(I)} = 0}_{\boxed{\vec{F}^{(I)} = 0}}$$

Quindi in generale occorre che vi si introducano delle grandezze fisiche relative allo stato di moto dell'intero sistema di punti materiali . Facciamo dei richiami :

1. **Quantità di moto del sistema di punti materiali**
   a. $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$
2. **Momento angolare del sistema di punti materiali (rispetto allo stesso polo)**
   a. $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$
3. **Energia cinetica del sistema di punti materiali** :
   a. $E_k = \sum_i E_{k_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Quindi riassumendo il tutto :



Si !! Esiste questo punto e si chiama **centro di massa**

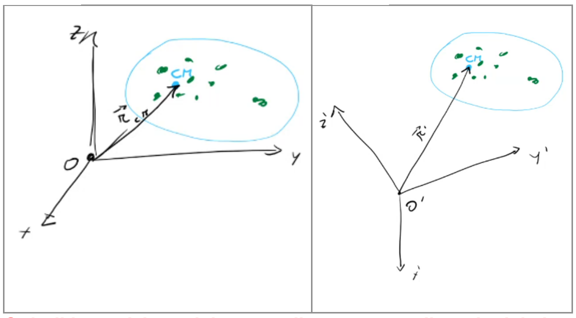
Dinamica 35 (Centro di massa)

giovedì 13 marzo 2025 15:26

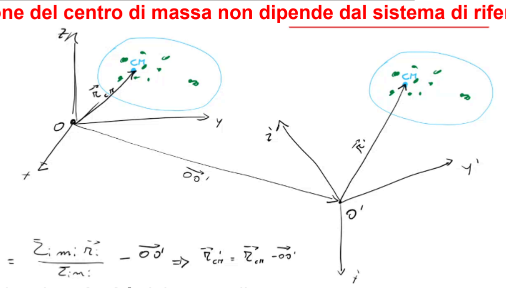
Questo <u>centro di massa</u> è il **punto geometrico** di posizione r_{cm} (posizione centro massa) calcolato a partire dalla singole posizione dei punti che compongono il corpo :

$$\boxed{\vec{r}_{cm} \triangleq \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}}$$

Vediamo ora degli esempi :



Quindi la posizione del centro di massa non dipende dal sistema di riferimento :



$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{OO'}$$

$$\vec{r}_{cm}' = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} - \vec{OO'} \Rightarrow \vec{r}_{cm}' = \vec{r}_{cm} - \vec{OO'}$$

Andiamo ora a vedere la **velocità** del centro di massa :

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{m} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = m\vec{v}_{cm} = \vec{p}_{cm}}$$

$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ (quantità di moto dell'intero sistema)

$m = \sum_i m_i$ (massa totale)

Mentre ora vediamo la variazione di velocità, ovvero la **accelerazione** del centro di massa :

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$$

$m \equiv m_{TOT}$

Ma ricordandoci che :

(II L. di N.)

In un SRI su m_i $\Big\}$ $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$

Si arriva a :

$$m\,\vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(E)}}_{\vec{F}^{(E)}} + \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(I)}}_{\vec{F}^{(I)} = 0}$$

Quindi riassumendo (assomiglia alla seconda legge di Newton , **ma con significato diverso**:

$$m\vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_i^{(E)} \Rightarrow \boxed{\vec{F}^{(E)} = m\,\vec{a}_{cM}}$$

Il quale prende il nome del **TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA**. Generalizzando la relazione di causa effetto del centro di moto si arriva a :

$$\boxed{\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

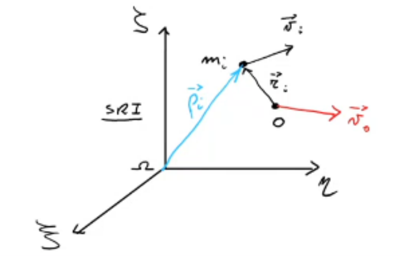
I equazione cardinale

La quale conservazione si ha quando la risultante delle forze esterne che agiscono sul sistema è nulla , oppure siamo in presenza di un sistema isolato (non ci sono forze esterne che agiscono sul sistema)

Dinamica 36 (Momento angolare e sue variazioni)

giovedì 13 marzo 2025 17:01

Andiamo a vedere il momento angolare rispetto ad un polo O :



Con legge :

$$\boxed{\vec{L}_{O_i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}$$

Mentre per quello che riguarda il moto della massa vista da un sistema di riferimento solidale con O ovvero studiamo il moto della massa m_i di un sistema di riferimento inerziale con origine in omega e ricordandoci legge composizione delle velocità :

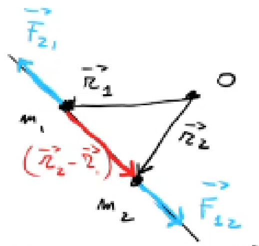
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i,r} + \vec{v}_t \qquad \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \vec{v}_o \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_o}$$

Quindi a cosa posso essere associate le variazioni di momento angolare rispetto ad un certo polo?

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right) = \sum_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right) \stackrel{\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_o}{=}$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}_{0} - \vec{v}_o \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}_{m \vec{v}_{cm}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)}}_{\vec{M}_o^{(E)}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(I)}}_{\vec{M}_o^{(I)} = 0} =$$

Dove il primo membro è nullo in quanto si ha il prodotto scalare tra vettori paralleli (coefficiente di parallelismo è m_i) , mentre il secondo ricordandoci la definizione di centro di massa (ovvero divido per la massa totale) esprime proprio la velocità del centro di massa , mentre la terza si avvale della definizione di momento (<u>ma per forze esterne</u>) , mentre l'ultima è la risultante dei momenti delle forze interne (è nulla) : andiamo a vedere il perché :



$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} =$$

$$= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{12} = 0$$

E quindi dato il parallelismo tra il vettore differenza e la forza è uguale a 0. Riassumendo il tutto quindi :

$$\vec{M}^{(E)} - \vec{v}_o \times m \vec{v}_{cm} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_o^{(E)} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} + \vec{v}_o \times m \vec{v}_{cm}}$$

- Che prende il nome di **TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE** , **il quale asserisce che le variazioni del momento angolare rispetto ad un polo O sono dovute alla azione delle forze esterne che devono agire sul sistema con momenti a risultante non nulla**. Vediamo ora un caso particolare :

$$\text{Se} \begin{cases} \vec{v}_o = 0 \\ \vec{v}_o \parallel \vec{v}_{cm} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_o^{(E)} = \frac{d\vec{L}_o}{dt}} \quad \text{II equazione cardinale}$$

Quindi dalla seconda equazione cardinale si ha che :

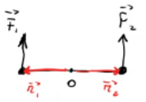
Dalla II eq. cardinale, se $v_o \times m\vec{v}_{CM} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Principio di conserv. del mom. angolare} \\ \text{Se } \vec{M}_o^{(E)} = 0 \implies \vec{L}_o \text{ si conserva}\end{array}}$$

Vediamo il perché :

$$\vec{M}_o^{(E)} = 0 \left\langle \begin{array}{l} \text{Ci sono } \vec{F}_k^{(E)} \text{ ma tali che } \sum_k \vec{M}_{o_k}^{(E)} = 0 \\ \text{Sistema è isolato (nessuna } \vec{F}_k^{(E)}) \end{array}\right.$$

Facciamo un esempio (la risultante delle forze non deve essere considerata , ma la variazione dei momenti delle forze esterne):



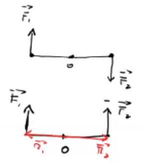
$\vec{M}_o^{(E)} = 0$ NOTA Anche se $\vec{F}^{(E)} \neq 0$

Quindi riassumendo :

1. In presenza di forze esterne

① $\vec{F}^{(E)} = 0 \implies \vec{P} = \vec{cost}$ ES

② $\vec{M}_o^{(E)} = 0 \implies \vec{L}_o = \vec{cost}$ ES



NOTA

Qui $\vec{M}_o^{(E)} \neq 0$!

Qui $\vec{F}^{(E)} \neq 0$!

2. In assenza di forze esterne

③ $\boxed{\text{SISTEMA ISOLATO}}$ $\begin{cases} \vec{F}^{(E)} = 0 \\ \vec{M}_o^{(E)} = 0 \end{cases} \implies \boxed{\text{Si conservano sia } \vec{P} \text{ sia } \vec{L}_o}$

Per quanto riguarda il **lavoro** per l'i-esimo punto :

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)} \implies W = W^{(E)} + W^{(I)}$$

ES : 2 punti i e j $\quad \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ji}$

$\boxed{\text{Il lavoro } \vec{F}^{(I)} \text{ non è in generale nullo}} \Longleftrightarrow$ spost. relativo tra m_i e m_j

Invece per l'**energia cinetica** :

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \implies dW_i = m_i v_i \, dv_i$$

$$\boxed{W_{AB} = \sum_i \int_{v_A}^{v_B} m_i v_i \, dv_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2 = E_k^{FIN} - E_k^{IN} = \Delta E_k}$$

Mentre se abbiamo **forze conservative** :

$$W \text{ (sia interne che esterne)} \longrightarrow -\Delta E_p$$

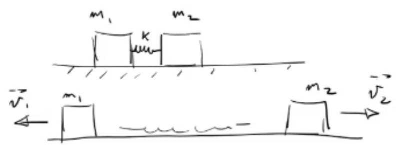
$\boxed{\text{solo forze conservative}} \implies \boxed{W = -\Delta E_p} = \Delta E_k \implies \Delta E_m = 0$

l'energia mecc. si conserva

Mentre se ci sono **forze anche non conservative** :

$$W = W_c + W_{NC} = -\Delta E_p + W_{NC} = \Delta E_k \implies \boxed{W_{NC} = \Delta E_m}$$

Vediamo ora un esempio :



NOTI m_1, m_2, K, d (compressione iniziale della molla)

Det. v_1 e v_2

Dove ricordando che l'unica forza che compie lavoro è una forza conservativa : quella elastica

① $\vec{F}^{(E)} = 0 \implies \vec{P} = \vec{cost} = 0 \begin{cases} \vec{P}_{in} = 0 \\ \vec{P}_{f} = -m_1 v_1 \hat{u}_x + m_2 v_2 \hat{u}_x = 0 \end{cases}$

② Solo $\vec{F}$ conservative $\implies E_m = cost \quad \begin{cases} E_m^{in} = \frac{1}{2} K d^2 \\ E_m^{f} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} m_1 v_1 = m_2 v_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = K d^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} v_1 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{K d^2}{m_1 + m_2}\right)} \\ v_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{K d^2}{m_1 + m_2}\right)} \end{cases}$$

Dinamica 37 (Sistema di riferimento del centro di massa)

giovedì 13 marzo 2025 18:58

Riepilogando il tutto :

⇒ CM → ok per lo studio del "moto d'insieme" [$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(E)}$]

⇒ CM → ok anche per la trattazione dei "moti interni" (riferiti al CM)

Quindi andiamo a vedere il sistema di **riferimento del centro di massa** :

• Sist. di rif. del CM : $\begin{cases} O' \equiv CM \quad (\vec{OO'} \equiv \vec{r}_{CM}) \\ \text{Solo traslazioni } (\vec{\omega} = 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_{CM}$

- In generale mobile risp. a SRI
- In generale non inerziale

Quindi vediamo le leggi di composizione dei moti relativi :

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{CM} \\ \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM} \\ \vec{a}_i = \vec{a}_i' + \vec{a}_{CM} \end{cases} \quad \text{Inoltre} \quad \begin{cases} \vec{r}'_{CM} = 0 = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{\sum_i m_i} \\ \vec{v}'_{CM} = 0 = \dfrac{\sum_i m_i \vec{v}_i'}{\sum_i m_i} \\ \vec{a}'_{CM} = 0 = \dfrac{\sum_i m_i \vec{a}_i'}{\sum_i m_i} \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \\ \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0 \quad (*) \\ \sum_i m_i \vec{a}_i' = 0 \quad (*) \end{cases}$$

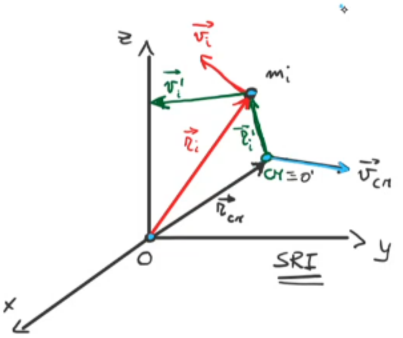
Quindi facendo delle considerazioni :

NOTA

Nel sist. del CM

$$\begin{cases} (*) \Rightarrow \vec{P}' \equiv \vec{P}'_{CM} = m\vec{v}'_{CM} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{P}' = 0} \\ (*) \Rightarrow \vec{F}' = \vec{F}^{(E)} + \vec{F}^{(I)} - m\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F}' = 0} \end{cases}$$

Dove il primo ed il terzo termine della seconda equazione sono nulli in quanto dal teorema del moto del centro di massa-> somma vettoriale =0. Andiamo a fare un esempio :



E studiando il momento angolare :

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'}_{\vec{L}'} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM}}_{\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i'}_{=0} \times \vec{v}_{CM}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i'}_{\vec{r}_{CM} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i'}_{=0}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}}_{\vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_{CM} = \vec{L}_O^{CM}} =$$

$$= \vec{L}' + \vec{L}_O^{CM} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = \vec{L}' + \vec{L}_O^{CM}}$$

mom. ang. del sist. di P.M. rispetto a O

mom. ang rispetto al CM

mom. ang. del CM rispetto a O

Facciamo ora un breve riepilogo :

NOTE $\begin{cases} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = v_i^2 \\ \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM} \end{cases}$

Ed andiamo ora a vedere l'energia cinetica (relazione tra energia cinetica del sistema di riferimento e quello del centro di massa (non ruota)):

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{E_k'} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM}}_{\frac{1}{2}\underbrace{(\sum_i m_i \vec{v}_i')}_{=0} \cdot \vec{v}_{CM}} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i'}_{\frac{1}{2} \vec{v}_{CM} \cdot \underbrace{(\sum_i m_i \vec{v}_i')}_{=0}} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM}}_{E_k^{CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_k = E_k' + E_k^{CM}}$$

relativo a tutti i moti del sistema — relativo ai moti "interni" rispetto al CM — relativo al moto del CM

Il quale prende il nome di SECONDO TEOREMA DI KöNIG , mentre il primo teorema è quello espresso dalla somma dei momenti angolari. Riassumendo il tutto :

giovedì 29 aprile 2021 12:32

Stato di moto dinamico del sistema

GENERALE: $\vec{P} = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\vec{P}'}} + \vec{p}_{CM}$

ROTATORIO: $\vec{L}_o = \vec{L}' + \vec{L}_o^{CM}$

CINETICO: $E_k = E_k' + E_k^{CM}$

① $\vec{P} \equiv \vec{p}_{CM}$

② $\vec{L}_o^{CM} \quad \vec{L}'$

③ $E_k^{CM} \quad E_k'$

$$\vec{L}_o = \vec{L}_{o'} + (\vec{OO'} \times \vec{P}) \xrightarrow{O \to O' \equiv CM} \vec{L}_o = \vec{L}' + \underbrace{(\vec{r}_{CM} \times \vec{p}_{CM})}_{\vec{L}_o^{CM}}$$

Quindi alla fine si ha che :

- Sistemi di punti materiali

① $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \longleftrightarrow \vec{F}^{(E)} = m\,\vec{a}_{CM} \longrightarrow$ Th. del CM

② $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \longleftrightarrow \vec{M}_o^{(E)} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} + \vec{v}_o \times m\vec{v}_{CM} \longrightarrow$ Th. del mom. ang.

③ $E_c = \sum_i E_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \longleftrightarrow W = W^{(E)} + W^{(I)} = \Delta E_k \longrightarrow$ Th. del lavoro e dell'E_c

- Equazioni cardinali

Dalla ① $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{F}^{(E)} = d\vec{P}/dt}$ I equazione cardinale

Dalla ② con $\left.\begin{matrix}\vec{v}_o = 0 \\ \vec{v}_o \parallel \vec{v}_{CM}\end{matrix}\right\} \rightarrow$ $\boxed{\vec{M}^{(E)} = d\vec{L}/dt}$ II equazione cardinale

- Sistema di rif. del CM

GENERALE: $\vec{P} = \vec{P}' + \vec{p}_{CM} \longrightarrow \vec{P} \equiv \vec{p}_{CM} \quad \vec{P}' = 0 \quad \vec{F}' = 0$

ROTATORIO: $\vec{L}_o = \vec{L}' + \vec{L}_o^{CM} \longrightarrow$ I Th. di König

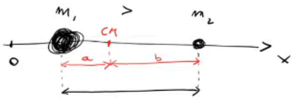
CINETICO: $E_k = E_k' + E_k^{CM} \longrightarrow$ II Th. di König

Dinamica 38 (Esercizi)

sabato 15 marzo 2025 12:55

Vediamo il seguente esercizio :

lunedì 3 maggio 2021 11:29



e quale massa è più vicina il CM ?

$a + b = d$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$$

S.d.C. $\Downarrow$

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m} \\ d = x_2 - x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{CM} - x_1 = \dfrac{m_2 d}{m} = a \\ x_2 - x_{CM} = \dfrac{m_1 d}{m} = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_2}{m_1} b} < b$$

Altro esercizio : esplosione di un razzo

lunedì 3 maggio 2021 11:43

NOTA : Durante l'esplosione si trascuri l'azione delle $\vec{F}_g$

Esplosione $\to$ razzo di massa m in 3 parti $\frac{m}{3}$ che hanno $\vec{v}_1 = -300\,\hat{u}_x$; $\vec{v}_2 = 450\,\hat{u}_y$ e $\vec{v}$

Prima della esplosione $\to$ $\vec{v} = v_0 \hat{u}_z$ ($v_0 = 400$ m/s)

$\Rightarrow$ Determinare $\vec{v}_3$ e la quota max del CM

① $\vec{F}^{(E)} \cong 0 \Rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{cost}$ (durante l'esplosione!)

$$m\vec{v} = \frac{m}{3}\vec{v}_1 + \frac{m}{3}\vec{v}_2 + \frac{m}{3}\vec{v}_3$$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = 3\vec{v} - \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 300\,\hat{u}_x - 450\,\hat{u}_y + 1200\,\hat{u}_z$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_3| = \sqrt{(3v_0)^2 + v_1^2 + v_2^2} = 1316 \text{ m/s}$$

② Dopo l'esplosione $(t=0)$ $\boxed{\vec{F}^{(E)} = m\vec{a}_{CM}} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \vec{g}$ $\quad \vec{v}_{CM}(0) = \vec{v}_0$, $\vec{r}_{CM}(0) = z_0 \hat{u}_z$

$$\begin{cases} z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_z(t) = v_0 - g t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_M = z_0 + v_0 t_M - \frac{1}{2} g t_M^2 \\ 0 = v_0 - g t_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{MAX} = z_0 + h = z_0 + \dfrac{v_0^2}{2g} \\ h = v_0^2 / 2g \end{cases}$$

lunedì 3 maggio 2021 12:05

Razzo che esplode mentre $v_0 = 400$ m/s

$m = 3 \times 10^3$ kg

Dopo l'esplosione m/s $\begin{cases} v_1 = 300 \text{ m/s} \\ v_2 = 450 \text{ m/s} \\ v_3 = 1320 \text{ m/s} \end{cases}$

Determinare l'energia sprigionata dall'esplosione

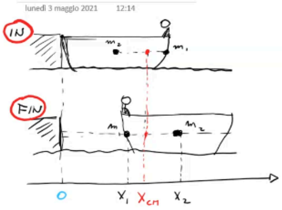
$$\left.\begin{aligned} E_k^{IN} &= E_k^{CM} = \frac{1}{2} m v_0^2 = 0{,}72 \times 10^9 \text{ J} \\ E_k^F &= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right) v_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right) v_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right) v_3^2 = 3{,}05 \times 10^9 \text{ J} \end{aligned}\right\} \Delta E_k = 2{,}33 \times 10^9 \text{ J}$$

$\boxed{\text{II Th di König}}$

$$\overset{FIN}{E_k} = \overset{INT}{E_k'} + \overset{INIZ.}{E_k^{CM}} \Rightarrow \underset{\Delta E_k}{\underset{\downarrow}{E_k'}} = \overset{FINALE}{E_k} - E_k^{CM}$$

Ultimo esempio :

lunedì 3 maggio 2021 12:14



barca lunga ℓ, massa m_2 conc. a metà lungh.

Inizial. un estremo della barca è in contatto con la banchina ed m_1 all'estremo opposto.

Dati: $m_1 = 60$ kg $\quad m_2 = 40$ kg $\quad \ell = 3$ m

Det. la posizione finale (rispetto alla banchina) di m_1 e m_2.

Nel piano orizz. $\vec{F}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{cost} \Rightarrow m\dfrac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{CM} = \overrightarrow{cost}}$

$$x_{CM} = \begin{cases} \dfrac{m_1 \ell + m_2 \ell/2}{m} = \dfrac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m} \\ X_2 - X_1 = \ell/2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} X_1 = \dfrac{m_1}{m}\ell = 1{,}8 \text{ m} \\ X_2 = \left(\dfrac{m_1}{m} + \dfrac{1}{2}\right)\ell = 3{,}3 \text{ m} \end{cases}}$$

avendo posto $m = m_1 + m_2$

Dinamica 39 (Urti)

sabato 15 marzo 2025 13:07

Per urto si intende un qualche fenomeno di interazione tra due o più corpi che altera il moto degli elementi del sistema : è un'interazione molto intensa, breve ed interna . Se intensa e breve si dice impulsiva(tau) : vi agiscono forse **impulsive**. Durante questo evento notiamo che se siamo in assenza di forze esterne , si ha la conservazione della quantità di moto totale:

$$\vec{P}_{in} = m_1\vec{v}_{1\,in} + m_2\vec{v}_{2\,in} = m_1\vec{v}_{1\,f} + m_2\vec{v}_{2\,f} = \vec{P}_f$$

Mentre per quello che riguarda il centro di massa :

$$\vec{P} = (m_1+m_2)\vec{v}_{cm} = \vec{P}_{in} = \vec{P}_f = \overrightarrow{costante}$$

Quindi il moto del centro di massa rimane costante(non alterato dall'urto). Invece variano le quantità di moto dei singoli punti del punto materiale , per effetto dell'impulso :

$$m_1\vec{v}_{1,f} - m_1\vec{v}_{1,in} = \vec{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{2,1}\,dt \rightarrow \text{IMPULSO (1)}$$

$$m_2\vec{v}_{2,f} - m_2\vec{v}_{2,in} = \vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{1,2}\,dt \rightarrow \text{IMPULSO (2)}$$

$\Downarrow$

1+2 → forza applicata da punto A a punto B è uguale a quella applicata da punto B a punto A

Una domanda sorge spontanea : possiamo conservare la quantità di moto anche in presenza di forze esterne agenti sul sistema ? La risposta è sì ma a due condizioni : **la durata dell'urto è molto breve (tau) e le forze esterne non sono impulsive** :

$$\Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{(e)}\,dt = \vec{F}^{(e)}_m\,\tau \qquad \text{se } \tau\to 0 \Rightarrow \Delta\vec{P}\sim 0$$

$\Updownarrow$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt \xrightarrow{\tau\to 0} \vec{F}_m\,\tau$$

Facciamo un'ipotesi : l'interazione tra i punti materiali del corpo abbia intensità molto grande rispetto alle forze esterne che vi agiscono , definiamo l'urto come segue :

1. **L'urto comporta uno scambio di quantità di moto tra due punti sotto forma di impulsi dovute alle forze interne tra essi**
2. **Nell'urto la quantità di moto prima dell'urto è uguale a quella dopo l'urto** : **la quantità di moto si conserva**

Per quanto riguarda invece l'energia meccanica **durante l'urto**(non è possibile sapere se si conserva a priori : le forze interne sono conservative?) non è detto che si conservi .In dettaglio:

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{v}^2_{cm} + \boxed{E_k'} \rightarrow \text{II° teorema di König}$$

rimane costante (centro di massa)

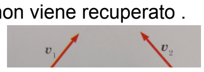
$$E_k' = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2$$

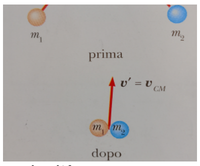
Varia → E_k' rispetto al centro di massa

Nota : l'energia cinetica del centro di massa di solito non si conserva :

$$E'_{k,in} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}'^2_{1,in} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}'^2_{2,in} \neq E'_{k,f} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}'^2_{1,f} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}'^2_{2,f}$$

In generale ci sono 3 tipi di urti : **completamente anelastico , elastico ed anelastico.**
Vediamoli in dettaglio :
Completamente anelastico: questo tipo si urto si ha quando i due punti dopo l'urto tra loro rimangono attaccati formando un unico corpo di massa uguale alla somma delle masse : le forze interne che si sviluppano nell'urto non sono conservative : il lavoro compiuto a spese dell'energia cinetica non viene recuperato .





Per quanto riguarda la velocità :

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}\,' = (m_1+m_2)\vec{v}_{cm}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}}$$

La quale rimane invariata durante l'urto.
Per quanto riguarda in vece l'energia cinetica :

$$\boxed{E_{k,in} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} = E'_k + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{v}_{cm}^{\,2}}$$ II° teo König

$$\downarrow$$

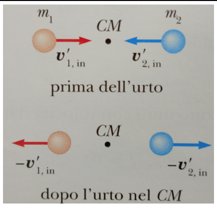
ma in realtà si ha che:

$$\boxed{E_{k,f} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{v}_{cm}^{\,2} < E_{k,in}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,in} = -E'_k = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{v}_{cm}^{\,2} - \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} - \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2}}$$

Elastico: questo urto viene definito come segue : in questo urto si conserva anche l'energia cinetica del sistema : le forze interne del sistema sono conservative. In questo urto i punti si muovono lungo la stessa direzione ma in verso opposto



$$\boxed{\vec{P}_{in} = \vec{P}_f \text{ e } E_{k,in} = E_{k,f}}$$! Valgono entrambe

$$\Downarrow$$

$$m_1\vec{v}_{1,in} + m_2\vec{v}_{2,in} = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f} = (m_1+m_2)\vec{v}_{cm}$$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1,in}^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2,in}^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1,in}^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2,f}^{\,2}$$

$$\Downarrow$$

Risolvendo questo sistema

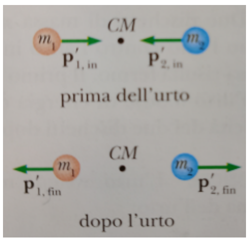
$$\vec{v}_{1,f} = \frac{(m_1-m_2)\vec{v}_{1,in} + 2m_2\vec{v}_{2,in}}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}_{2,f} = \frac{2m_1\vec{v}_{1,in} + (m_2-m_1)\vec{v}_{2,in}}{m_1+m_2}$$

Mentre se questo urto viene considerato nel centro di massa si ha che :

$$\vec{v}\,'_{1,f} = -\vec{v}_{1,in} \quad \text{e} \quad \vec{v}\,'_{2,f} = -\vec{v}\,'_{2,in}$$

Anelastico: in questo tipo di urto si ha che i punti tornano separati dopo l'urto e nell'urto si conserva la quantità di moto ma non l'energia cinetica, sempre se non agiscono forze esterne impulsive. Quindi **una certa parte dell'energia cinetica prima dell'urto (rispetto al centro di massa) viene assorbita.**



Quindi : un punto si avvicina al centro di massa con quantità di moto non nulla , poi arrivato a contatto con altro punto(centro di massa) inverte la direzione , andando così progressivamente la quantità di moto . Quantità di moto dopo urto ha verso opposto e modulo minore. Questa perdita di intensità viene chiamata **coefficiente di restituzione :**

$$\boxed{e = -\frac{\vec{p}\,'_{1,f}}{\vec{p}\,'_{1,in}} = -\frac{\vec{v}\,'_{1,f}}{\vec{v}\,'_{1,in}} = -\frac{\vec{p}\,'_{2,f}}{\vec{p}\,'_{2,in}} = -\frac{\vec{v}\,'_{2,f}}{\vec{v}\,'_{2,in}}}$$

Mentre per quanto riguarda l'energia cinetica dopo l'urto:

$$E'_{k,f} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}\,'^2_{1,f} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}\,'^2_{2,f} = e^2 \left(\frac{1}{2} m \vec{v}\,'^2_{1,in} + \frac{1}{2} m \vec{v}\,'^2_{2,in} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E'_{k,f} = e^2 E'_{k,in}}$$

Mentre per quello che riguarda l'energia cinetica rispetto al centro di massa :

$$\boxed{\delta = \frac{E'_{k,f} - E'_{k,in}}{E'_{k,in}} = e^2 - 1}$$

Mentre per che riguarda la velocità:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_{1,f} &= \frac{(m_1 - e m_2)\vec{v}_{1,in} + m_2(1+e)\vec{v}_{2,in}}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_{2,f} &= \frac{m_1(1+e)\vec{v}_{1,in} + (m_2 - e m_1)\vec{v}_{2,in}}{m_1 + m_2} \end{aligned}}$$

Nota : andiamo ora a studiare il coefficiente di restituzione in tutti i casi :

ELASTICO $\rightarrow e = 1$, $\delta = 0 \rightarrow E_k$ si conserva

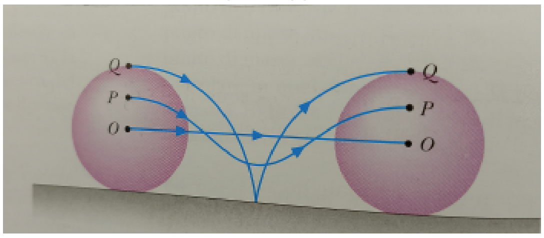
COMPLET. ANELASTICO $\rightarrow e = 0$, $\delta = 1 \rightarrow E_k$ centro di viene assorbita e trasformata

ANELASTICO $\rightarrow 0 < e < 1 \rightarrow \boxed{E'_{k,f} < E'_{k,in}}$

Dinamica 40 (Corpo rigido)

martedì 18 marzo 2025 14:26

Per corpo rigido si intende un insieme di punti materiali sottoposti ad interazione mutua tale da mantenerli in posizione fissa l'uno rispetto all'altro. Quindi per corpo rigido **si intende un sistema di punti materiali in cui le distanze tra loro non possono variare**. Attenzione però : i vari punti di un corpo rigido possono descrivere traiettorie diverse tra loro e dal centro di massa : il moto d'assieme non contiene e non può rappresentare tutta la dinamica del corpo rigido :



Quindi lo studio di questo moto verrà fatto in un sistema di riferimento :

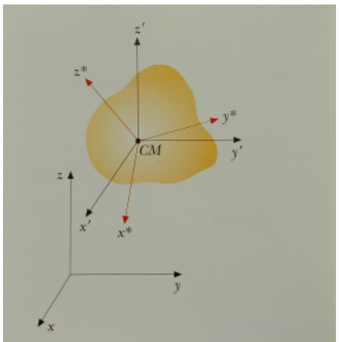


Figura 7.2
Sistema di riferimento inerziale (x, y, z), sistema di riferimento in moto relativo (x', y', z') e sistema di riferimento del centro di massa (x^*, y^*, z^*).

Quindi sapendo che parliamo sempre e comunque di forze interne al corpo, andiamo a descrivere le leggi fondamentali :

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} \,, \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \,, \quad \Delta E_k = W}$$

Osservazione : abbiamo parlato di corpo rigido , ma questo corpo è formato da più singoli punti materiali : piccolo volume d_V contenente massa d_m . Di solito d_V è formato da 10^-6 m. Quindi questa rappresentazione/estensione di sistemi di punti a sistemi continui di punti , porta a dei vantaggi : da somme ad integrali e consente di capire come la massa sia distribuita all'interno del corpo. Nell'ultimo caso si parla di **densità** :

$$\underbrace{\boxed{\rho = \frac{dm}{dV}}}_{\text{Se estesa a tutto il corpo}} \quad \left[\frac{kg}{m^3}\right] \Rightarrow \text{Se omogeneo}$$

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V}$$

$$m = \int dm = \int_V \rho \, dV$$

Se invece si parla di corpi non omogenei(corpi nei quali la densità non è omogenea -> composti da più materiali) , il discorso è analogo , ma si parla di **densità media :**

$$\boxed{\bar{\rho} = m/V \quad (\text{densità media})}$$

Se invece di un volume si parla di una superficie , il discordo è analogo : si parla di densità **superficiale e densità lineare**:

$$\boxed{\rho_s = \frac{dm}{dS} \Rightarrow m = \int \rho_s \, dS} \rightarrow \text{superficiale} \left[\frac{kg}{m^2}\right]$$

$$\boxed{\rho_l = \frac{dm}{dl} \Rightarrow m = \int \rho_l \, dl} \rightarrow \text{lineare} \left[\frac{kg}{m}\right]$$

Analogamente a quanto già detto per il centro di massa di un punto , andiamo ora a vedere quello del corpo rigido :

$$\underbrace{\vec r_{cm} = \frac{\int \vec r \, dm}{\int dm} = \frac{\int_V \vec r \rho \, dV}{\int_V \rho \, dV} \Rightarrow \frac{1}{m}\int_V \vec r \rho \, dV}_{\text{Se omogeneo}}$$

Raggio vettore

$$\vec r_{cm} = \frac{\rho}{m}\int \vec r \, dV \Rightarrow \frac{1}{V}\int \vec r \, dV$$

Mentre per quello che riguarda la forza peso :

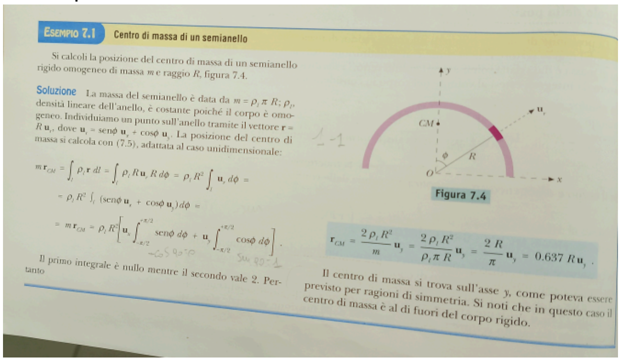
$$\int \vec g \, dm \Rightarrow \vec g \int dm = m\vec g$$

$$\vec M = \int \vec r \times \vec g \, dm = \left(\int \vec r \, dm\right) \times \vec g = m \vec r_{cm} \times \vec g =$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec r_{cm} \times m \vec g}$$

$$E_p = \int \vec g z \, dm = \vec g \int z \, dm \Rightarrow m \vec g z_{cm}$$

Vediamo un esempio : calcolare il centro di massa di un semi anello :



ESEMPIO 7.1 **Centro di massa di un semianello**

Si calcoli la posizione del centro di massa di un semianello rigido omogeneo di massa m e raggio R, figura 7.4.

Soluzione La massa del semianello è data da $m = \rho_l \pi R$; ρ_l, densità lineare dell'anello, è costante poiché il corpo è omogeneo. Individuiamo un punto sull'anello tramite il vettore $\mathbf{r} = R\,\mathbf{u}_r$, dove $\mathbf{u}_r = \text{sen}\phi\,\mathbf{u}_x + \cos\phi\,\mathbf{u}_y$. La posizione del centro di massa si calcola con (7.5), adattata al caso unidimensionale:

$$m\mathbf{r}_{CM} = \int_l \rho_l \mathbf{r}\,dl = \int_l \rho_l R\mathbf{u}_r R\,d\phi = \rho_l R^2 \int_l \mathbf{u}_r\,d\phi =$$

$$= \rho_l R^2 \int_l (\text{sen}\phi\,\mathbf{u}_x + \cos\phi\,\mathbf{u}_y)\,d\phi =$$

$$= m\mathbf{r}_{CM} = \rho_l R^2 \left[\mathbf{u}_x \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \text{sen}\phi\,d\phi + \mathbf{u}_y \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\phi\,d\phi\right].$$

Il primo integrale è nullo mentre il secondo vale 2. Pertanto

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{2\rho_l R^2}{m}\mathbf{u}_y = \frac{2\rho_l R^2}{\rho_l \pi R}\mathbf{u}_y = \frac{2R}{\pi}\mathbf{u}_y = 0.637\,R\,\mathbf{u}_y .$$

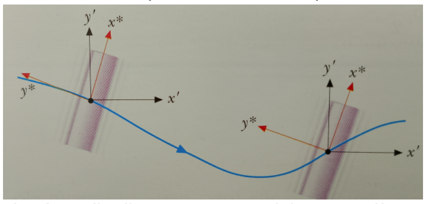
Il centro di massa si trova sull'asse y, come poteva essere previsto per ragioni di simmetria. Si noti che in questo caso il centro di massa è al di fuori del corpo rigido.

Figura 7.4

Dinamica 41 (Moto di un corpo rigido)

martedì 18 marzo 2025   15:43

Andiamo a descrivere in modo generale , il moto di un corpo rigido : cominciamo con il **moto di traslazione** , ovvero quel moto nel quale i punti descrivono traiettorie uguali (in genere curvilinee) percorse con velocità v che può variare nel tempo , direzione e verso.



Da notare che la dinamica è quella di un punto materiale e non c'è movimento rispetto al centro di massa :

$$\boxed{\vec{L}' = 0 \quad , \quad E_k' = 0}$$

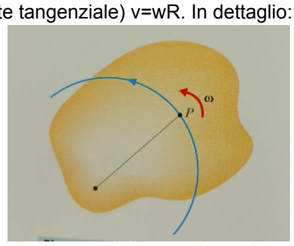
$$\vec{P} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{v}_{cm}$$

$$E_k = E_{k,cm} = \frac{1}{2} m \vec{v}_{cm}^{\,2}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \text{ (eq. moto centro massa)}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm} \Rightarrow \vec{r}_{cm} \times \vec{P}$$

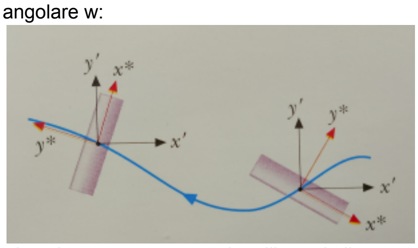
Vediamo ora invece **il moto di rotazione** ovvero quel moto in cui tutti i punti descrivono un moto circolare , le traiettorie sono archi di circonferenze diverse che stanno su piani paralleli , <u>ma hanno lo stesso asse di rotazione.</u> Quindi tutti i punti (in un dato istante) hanno la stessa velocità angolare w che è parallela all'asse di rotazione , ma la velocità in genere è diversa (ricordiamoci la componente tangenziale) v=wR. In dettaglio:



E ricordiamoci che l'equazione di base del moto di rotazione è la seguente :

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Dopo questa introduzione , andiamo il moto più generale di un corpo : **rototraslazione** ovvero la composizione del rotolamento e della traslazione : ogni spostamento infinitesimo può essere considerato come la somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime , individuate dalla velocità v e da quella angolare w:



In generale quindi per descrivere questo moto sia utilizza sia il teorema dei moto del centro di massa che il teorema del momento angolare , avendo preso come polo un punto fisso nel sistema inerziale o il centro di massa. **Notiamo però che : la velocità angolare w è indipendente dalla descrizione del moto , mentre la velocità v non lo è**. Torniamo al moto di rotazione : ma consideriamo ora la rotazione intorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale :

$\vec{w}$ ha direzione fissa (quella dell'asse di rotazione);

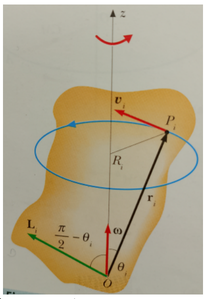
se $\vec{w}$ varia $\rightarrow \vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{w}}{dt}$ (accelerazione angolare)

<u>Riassumendo quindi:</u>

Velocità = $\vec{v}_i$; $|\vec{v}_i| = \vec{w} R_i$

accelerazione = $\vec{\alpha}_i$
- normale $\rightarrow \vec{w}^2 R_i$
- tangente $\rightarrow \vec{\alpha} R_i$

Vediamo ora un esempio :



Il cui momento angolare è il seguente :

$\vec{L}_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \vec{\omega} R_i$, il quale proiettato su asse di rotazione prende il nome di **momento angolare assiale** :

$$\vec{L}_{iz} = \vec{L}_i \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i\right) = \vec{L}_i \sin\theta_i = m_i r_i \sin\theta_i R_i \vec{\omega}; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_i \sin\theta_i = R_i \Rightarrow \boxed{m_i R_i^2 \vec{\omega}}$$

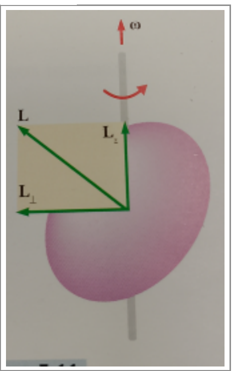
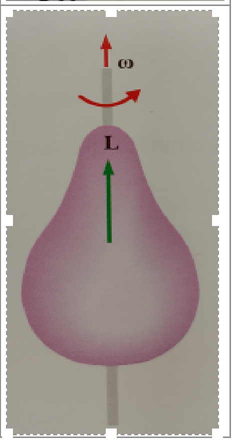
Ma dal momento che il momento angolare del corpo è la somma dei momenti angolari di tutti i punti ed in generale non è parallelo all'asse di rotazione , si ha che non esiste una relazione di proporzione tra il momento e la velocità angolare. Quindi il **momento angolare assiale** totale è:

$$\boxed{\vec{L}_z = \sum_i \vec{L}_{iz} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\vec{\omega} = I_z \vec{\omega}}$$

momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z

$$\boxed{I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)}$$

Il quale dipende sia dalle masse sia dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione. In dettaglio **la componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione è proporzionale alla velocità angolare w e dipende (tramite I_z) dalla forma del corpo e della posizione dell'asse del corpo**. Vediamo ora due esempi :

Momento angolare di un corpo rigido che ruota intorno ad asse non parallelo ad asse di rotazione . Notiamo che la componente parallela all'asse di rotazione L_z può variare solo in modulo, dipende dalla velocità angolare w (attraverso I_z) e non dipende dalla scelta del polo . Invece la componente ortogonale varia in direzione , può variare in modulo e dipende dalla scelta del polo. Quindi si ha che $\boxed{\vec{L}_{i\perp} = \vec{L}_i \cos\theta \Rightarrow m_i r_i R_i \vec{\omega} \cos\theta}$	
Momento angolare di un corpo rigido che ruota intorno ad asse parallelo ad asse di rotazione . Notiamo qui che l'asse di rotazione è l'asse di simmetria , quindi per il prodotto scalare tra vettori paralleli è nullo. Quindi si hanno queste 3 condizioni : $\boxed{\vec{L} = \vec{I}_z w;\ \vec{L} = \vec{L}_z;\ \vec{L}_\perp = 0}$	

- Vediamo ora le equazioni orarie :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{I}_z w) = \vec{I}_z \frac{dw}{dt} = I_z \alpha}$$

E da questa equazione si arriva a descrivere **quella del moto angolare** come segue, la quale prende il nome di **equazione del moto di rotazione**

$$\boxed{\vec{M} = I_z \vec{\alpha}} \rightarrow \vec{\alpha} \text{ e } \vec{M} \text{ // asse rotazione } (\omega)$$

Quindi le leggi orarie del moto diventano le seguenti :

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{I_z} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \vec{\omega} \, dt}$$

Se $M = 0 \rightarrow$ quiete + MCU

$$\Downarrow$$

$$\vec{\alpha} = 0, \quad \omega = \omega_0, \quad \theta = \theta_0 + \alpha t$$

Se $M =$ costante

$$\Downarrow$$

$$\vec{\alpha} = \text{costante}, \quad \omega = \omega_0 + \vec{\alpha} t, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0(t) + \frac{1}{2} \vec{\alpha} t^2$$

Per quello che riguarda invece il centro di massa e supponendo che non sia parallelo all'asse di rotazione ma ne dista R_{cm} si ha che:

$$\underbrace{\boxed{\vec{a}_{cm} = \alpha \vec{R}_{cm}}}_{\text{Tangenziale}} ; \quad \underbrace{\boxed{\vec{a}_{cm} = \omega^2 \vec{R}_{cm}}}_{\text{Normale}} ; \quad \underbrace{\boxed{\vec{v} = \omega \vec{R}_{cm}}}_{\text{velocità}}$$

Vediamo ora energia cinetica :

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \Rightarrow \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{R}_i^2 \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$$

ma se momento angolare è // a ω

$$\Downarrow$$

$$E_k = \frac{\vec{L}^2}{2 I_z}$$

$$\boxed{W = \Delta E_k \Rightarrow \frac{1}{2} \vec{I}_{z,f}^2 \omega_{,f}^2 - \frac{1}{2} \vec{I}_{z,in}^2 \omega_{,in}^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L} \,//\, \omega$$

$$\boxed{d\vec{W} = dE_k = I_z \omega \, d\omega \Rightarrow \vec{I}_z \frac{d\theta}{dt} \alpha \, dt \Rightarrow I_z \vec{\alpha} \, d\theta = M \, d\theta}$$

Quindi dovendo conoscere la dipendenza del momento dall'angolo :

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{\vec{W} = \int_0^\theta \vec{M} \, d\theta}}_{\text{Lavoro}} ; \quad \underbrace{\boxed{\vec{P} = \frac{d\vec{W}}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \vec{M} \omega}}_{\text{Potenza istantanea}}}_{\text{Potenza = derivata del lavoro !}}$$

Vediamo un esempio :

ESEMPIO 7.3 Un sistema di due masse in moto

Un cilindro di massa $m_1 = 0.4$ kg è collegato ad una massa $m_2 = 0.2$ kg tramite una fune sottile che passa attraverso una carrucola di raggio $R = 2.5$ cm e momento di inerzia rispetto all'asse $I = 2.5 \cdot 10^{-4}$ kgm^2, figura 7.13. La massa m_2 scivola su un piano orizzontale senza attrito. Calcolare l'accelerazione a delle due masse.

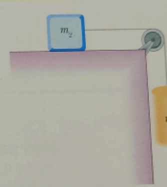


Figura 7.13

Soluzione Prendiamo come asse quello passante per il centro della carrucola. Il momento angolare del sistema è la somma di quello delle due masse che si muovono in un certo istante con velocità v e del momento angolare del disco che costituisce la carrucola:

$$m_1 v R + m_2 v R + I \frac{v}{R} .$$

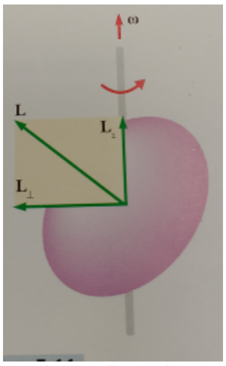
Il momento delle forze esterne rispetto all'asse di rotazione è quello dovuto al peso della massa m_1 ovvero $M = m_1 g R$. L'equazione del moto è quindi:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_1 v R + m_2 v R + I \frac{v}{R}\right) = M = m_1 g R ,$$

ovvero:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) R a = m_1 g R \Rightarrow a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + I/R^2} = 3.92 \text{ ms}^{-2}$$

Quanto detto finora vale solo e soltanto per casi in cui L e w sono paralleli. Vediamo ora il caso nel quale non lo sono :



In questo caso L ruota intorno ad asse di rotazione e questo moto si chiama **moto di precessione**(costante se w=costante). Le equazioni del moto lungo gli assi sono le seguenti :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \ ; \quad \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{M}_\perp \ ; \quad I_z \alpha = \vec{M}_z}$$

$\Downarrow$

Se $\vec{M}_z = 0 \rightarrow w = 0$ e $\vec{L}_z$ = costante;
$|L_\perp|$ = costante;
& w = costante →
varia direzione $L_\perp$

$\Downarrow$

<u>variazioni di $L_\perp$ sono regolate da $M_\perp$</u>

Vediamo un esempio pratico :

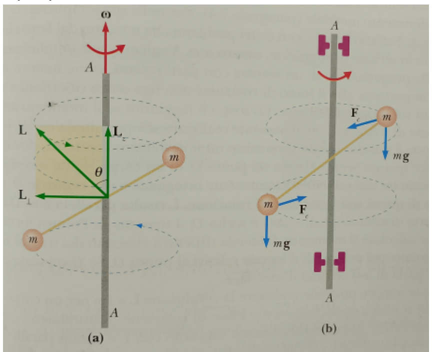


Figura 7.15
Sistema di due sferette in rotazione intorno ad un asse non parallelo al momento angolare (*a*) e analisi delle reazioni vincolari sull'asse di rotazione (*b*).

Ma in realtà conviene sempre mettersi nella situazione più comoda : ovvero nella situazione che L e w siano paralleli. Tornando alle leggi orarie ed al lavoro , entrambe dipendono dalle componenti lungo l'asse di rotazione e da quelle del momento delle forze :

$$\boxed{E_k = \frac{\vec{L}_z^{\,2}}{2I_z} \ ; \quad \vec{W} = \int \vec{M}_z \, d\theta}$$

Dinamica 42 (Momento d'inerzia di un corpo rigido)

giovedì 20 marzo 2025 14:34

Analogamente a quanto fatto e detto per un momento di inerzia di un punto materiale , andiamo ora a vederlo per un corpo rigido: ovvero sfruttando la proprietà che un corpo rigido è la somma di più punti materiali e le proprietà di integrali/sommatorie, si arriva alla conclusione che il momento d'inerzia di un corpo rigido è la somma dei momenti di inerzia di tutti i punti , sempre rispetto ad un asse .

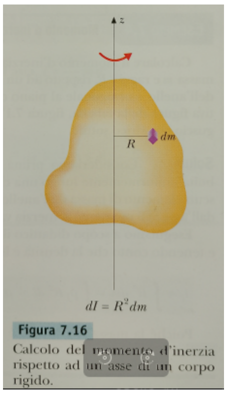
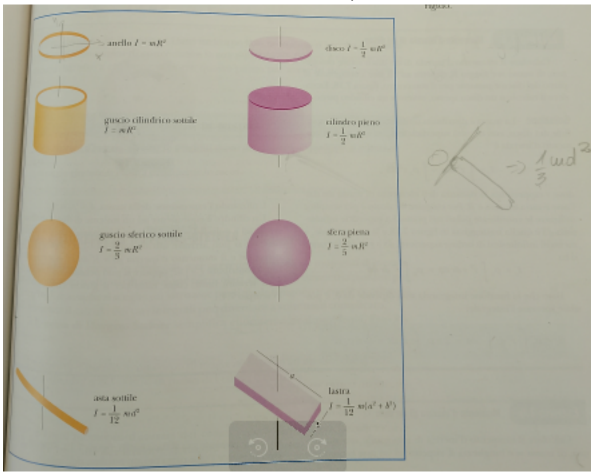


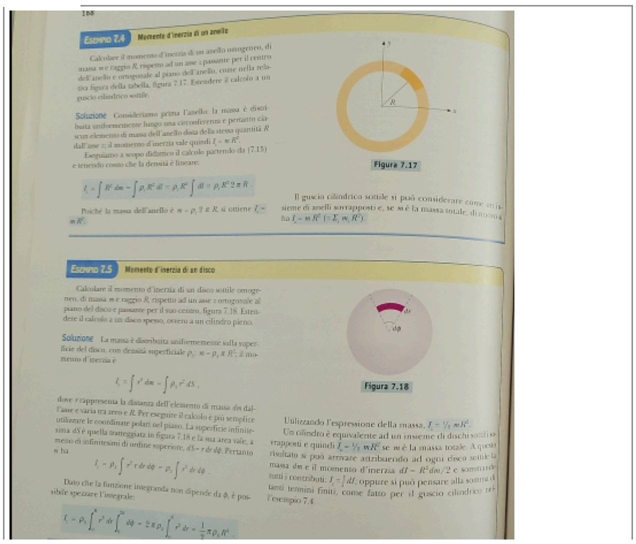
Figura 7.16 Calcolo del momento d'inerzia rispetto ad un asse di un corpo rigido.

E per calcolarlo :

$$I = \int \underbrace{R^2}_{\text{raggio (tra asse z ed elemento di massa dm)}} dm = \int_{\underbrace{V}_{\text{Volume}}} \rho R^2 dV = \int_{\underbrace{V}_{\text{Volume}}} \rho (x^2 + y^2) dV$$

Vediamo ora alcuni notevoli e vari esempi:





168

Esempio 7.4 Momento d'inerzia di un anello

Calcolare il momento d'inerzia di un anello omogeneo, di massa m e raggio R, rispetto ad un asse z passante per il centro dell'anello e ortogonale al piano dell'anello, come nella relativa figura della tabella, figura 7.17. Estendere il calcolo a un guscio cilindrico sottile.

Soluzione Consideriamo prima l'anello: la massa è distribuita uniformemente lungo una circonferenza e pertanto ciascun elemento di massa dell'anello dista della stessa quantità R dall'asse z; il momento d'inerzia vale quindi $I_z = mR^2$.

Eseguiamo a scopo didattico il calcolo partendo da (7.15) e tenendo conto che la densità è lineare:

$$I_z = \int R^2 dm = \int \rho_l R^2 dl = \rho_l R^2 \int dl = \rho_l R^2 2\pi R .$$

Poiché la massa dell'anello è $m = \rho_l 2\pi R$ si ottiene $I_z = mR^2$.

Figura 7.17

Il guscio cilindrico sottile si può considerare come un insieme di anelli sovrapposti e, se m è la massa totale, di nuovo si ha $I_z = mR^2$ $(= \Sigma_i m_i R^2)$.

Esempio 7.5 Momento d'inerzia di un disco

Calcolare il momento d'inerzia di un disco sottile omogeneo, di massa m e raggio R, rispetto ad un asse z ortogonale al piano del disco e passante per il suo centro, figura 7.18. Estendere il calcolo a un disco spesso, ovvero a un cilindro pieno.

Soluzione La massa è distribuita uniformemente sulla superficie del disco, con densità superficiale ρ_s: $m = \rho_s \pi R^2$; il momento d'inerzia è

$$I_z = \int r^2 dm = \int \rho_s r^2 dS ,$$

dove r rappresenta la distanza dell'elemento di massa dm dall'asse e varia tra zero e R. Per eseguire il calcolo è più semplice utilizzare le coordinate polari nel piano. La superficie infinitesima dS è quella tratteggiata in figura 7.18 e la sua area vale, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $dS = r\,dr\,d\phi$. Pertanto si ha

$$I_z = \rho_s \int r^2 r\,dr\,d\phi = \rho_s \int r^3 dr\,d\phi .$$

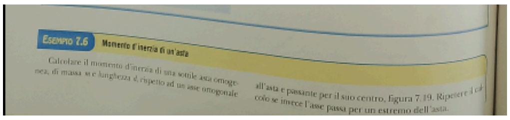
Dato che la funzione integranda non dipende da ϕ, è possibile spezzare l'integrale:

$$I_z = \rho_s \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\rho_s \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho_s R^4 .$$

Figura 7.18

Utilizzando l'espressione della massa, $I_z = \frac{1}{2} mR^2$.

Un cilindro è equivalente ad un insieme di dischi sottili sovrapposti e quindi $I_z = \frac{1}{2} mR^2$ se m è la massa totale. A questo risultato si può arrivare attribuendo ad ogni disco sottile la massa dm e il momento d'inerzia $dI = R^2 dm/2$ e sommando tutti i contributi: $I_z = \int dI$, oppure si può pensare alla somma di tanti termini finiti, come fatto per il guscio cilindrico nell'esempio 7.4.



Esempio 7.6 **Momento d'inerzia di un'asta**

Calcolare il momento d'inerzia di una sottile asta omogenea, di massa m e lunghezza d, rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante per il suo centro, figura 7.19. Ripetere il calcolo se invece l'asse passa per un estremo dell'asta.

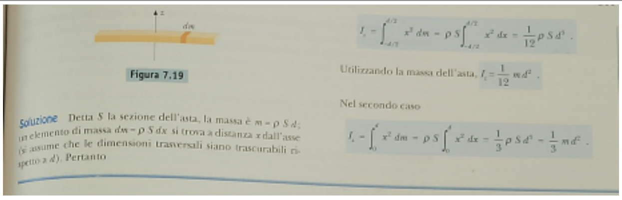


Figura 7.19

Soluzione Detta S la sezione dell'asta, la massa è $m = \rho\, S\, d$; un elemento di massa $dm = \rho\, S\, dx$ si trova a distanza x dall'asse (si assume che le dimensioni trasversali siano trascurabili rispetto a d). Pertanto

$$I_c = \int_{-d/2}^{d/2} x^2\, dm = \rho\, S \int_{-d/2}^{d/2} x^2\, dx = \frac{1}{12} \rho\, S\, d^3 .$$

Utilizzando la massa dell'asta, $I_c = \frac{1}{12}\, m\, d^2$.

Nel secondo caso

$$I_z = \int_0^d x^2\, dm = \rho\, S \int_0^d x^2\, dx = \frac{1}{3} \rho\, S\, d^3 = \frac{1}{3}\, m\, d^2 .$$

Notiamo che in tutte le formule che abbiamo trovato (vedasi tabella) hanno un pattern :

$$\boxed{\vec{I} = f\, m\, d^2}$$

f: fattore numerico legato alla struttura

m: massa del corpo

d: dimensione significativa di un corpo (raggio, lunghezza)

Quindi riassumendo il tutto : il <u>momento d'inerzia di un corpo</u> si può scrivere così:

$$\boxed{\vec{I} = m\, k^2 \quad ; \quad k = \sqrt{f} \quad ; \quad d = \sqrt{\frac{\vec{I}}{m}}}$$

$\vec{I}$: $[kg\, m^2]$

k: Raggio giratore → $[m]$

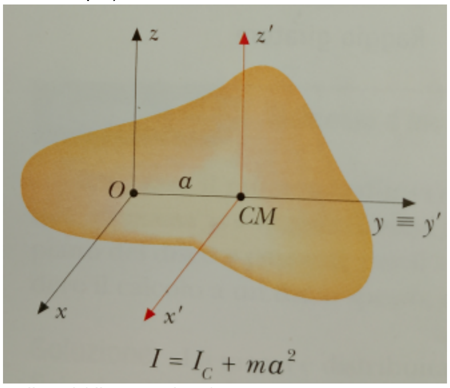
Dinamica 43 (Teorema Huygens-Steiner)

giovedì 20 marzo 2025 15:50

Questo teorema è molto importante in quanto ci semplifica (ci permette di studiare) quelle situazioni nelle quali l'asse di rotazione **non** coincide con quello del centro di massa . **Quindi questo teorema descrive il momento di inerzia di un corpo che ruota intorno ad un asse che si trova a distanza a dal centro di massa del corpo** :

$$\boxed{\vec{I} = \underbrace{\vec{I}_c}_{\text{momento d'inerzia del corpo rispetto ad asse parallelo e passante per il C.M.}} + m\underbrace{a}_{\text{distanza dell'asse rispetto a quello del C.M.}}^2}$$

In dettaglio (attraverso un esempio) :



Quindi studiando lungo gli assi (dimostrazione):

$$x = x' \; ; \; y = y' + a \; ; \; z = z'$$

$$\vec{I} = m(x_i^2 + y_i^2)$$

$\Downarrow$

sommando su tutti i punti

$\Downarrow$

$$\vec{I}_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum \left[x_i'^2 + (y_i' + a)^2 \right] =$$

$$= \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \;\rightarrow\; \text{Inerzia rispetto a } z$$

$$\sum m_i a^2 +$$

$$0! \leftarrow 2a \sum m_i y_i' \rightarrow \text{centro di massa}$$

Vediamo ora due esempi di applicazione (dove il secondo termine rappresenta la distanza dall'asse del centro di massa -> teorema Huygens-Steiner):

$$\vec{I} = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$ → momento d'inerzia di un disco rispetto ad asse ortogonale al disco e passante per il bordo

$$\vec{I} = \frac{1}{12} md^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} md^2$$ → momento d'inerzia di un'asta lunga d e con asse passante per un estremo

Vediamo ora come questo teorema si lega con l'energia cinetica (la cui conservazione è espressa dal secondo teorema di KÖNIG :

$$E_k = \frac{1}{2}\left(\underbrace{I_a}_{\text{momento di asse // a quello del CM}} + m\underbrace{a^2}_{\text{distanza tra i 2 assi}}\right)w^2 \Rightarrow \frac{1}{2} I_z w^2 + \frac{1}{2} m \underbrace{\boxed{a^2 w^2}}_{\vec{V}_{cm}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_k = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\vec{I}\,w^2}}_{\text{rot. di asse rispetto a CM}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2} m \vec{V}^2_{cm}}}_{E_k \text{ del CM}}}$$

Vediamo un esempio di applicazione:

ESEMPIO 7.8 **Un disco in rotazione**

Un disco posto in un piano orizzontale ruota attorno ad un asse verticale distante $a = 0.1$ m dal suo centro; la massa del disco è $m = 6$ kg, il raggio è $R = 0.2$ m; la velocità angolare vale $\omega = 12$ rad/s, figura 7.22. Calcolare la forza che deve essere esercitata dai supporti sull'asse per permettere la rotazione, il momento della forza peso rispetto al punto O, l'energia cinetica del disco. Se, partendo da fermo, il disco deve raggiungere la velocità di regime in 4 s, che momento costante bisogna applicare? Quanto vale durante la fase di accelerazione l'accelerazione tangente del centro di massa?

Soluzione La forza sull'asse deve eguagliare la forza centripeta applicata al centro di massa, $m\omega^2 a = 86.4$ N. Il momento della forza peso è $M = mga = 5.9$ Nm.

Il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è

$$I = \frac{1}{2} m R^2 + m a^2 = 0.12 + 0.06 = 0.18 \text{ kg m}^2$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 = 12.96 \text{ J} .$$

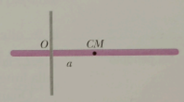


Figura 7.22

Oppure

$$E_k = \frac{1}{2} I' \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2_{CM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2} m (\omega a)^2 =$$

$$= 8.64 + 4.32 = 12.96 \text{ J} :$$

il primo valore è l'energia di rotazione rispetto al centro di massa, il secondo l'energia di traslazione del centro di massa.

Da $\omega = \alpha t$ si ricava $\alpha = 3$ rad/s^2 e $M = I\alpha = 0.54$ Nm. Infine $a_{CM,T} = \alpha a = 0.3$ m/s^2.

Dinamica 44 (Pendolo composto)

giovedì 20 marzo 2025 16:44

- Per pendolo composto (pendolo fisico) si intende ogni corpo rigido che possa oscillare , sotto azione del suo stesso peso , in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale **non** passante per il centro di massa :

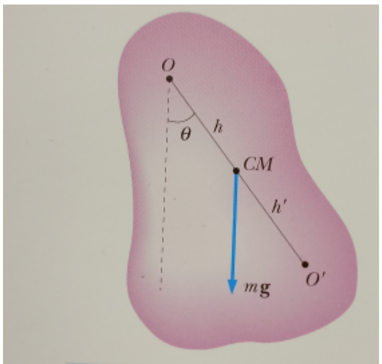


Figura 7.23
Pendolo composto.

Notiamo che in questo esempio , il pendolo è stato spostato dalla sua posizione di equilibrio , formando angolo teta . Facciamo la seguente ipotesi : non esistono/non agiscono forze di attrito intorno all'asse e studiando il moto lungo le componenti , ricavando le leggi orarie :

Momento d'inerzia rispetto all'asse z

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z \vec{\alpha} = I_z \frac{d^2\theta}{dt} = \boxed{-mgh\sin\theta} \rightarrow$$ Momento di richiamo verso l'origine

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{mgh}{I_z}\sin\theta = 0}$$

$$\boxed{I_z = I_c + mh^2} \rightarrow \text{Teo H-S}$$

$\sin\theta = \theta$ se $\theta \to 0$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0} \rightarrow$$ oscillatore armonico

Sol $\Rightarrow \theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi)$

Pulsazione

$$\sqrt{mgh/I_z} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

lunghezza di un pendolo semplice con stesso periodo $\longleftrightarrow$ lunghezza ridotta del pendolo composto

Vediamo ora cosa succede se le oscillazioni sono grandi : stesso periodo ma non più moto armonico :

Ponendo $h' = \frac{I_c}{mh} \Rightarrow I_c = mhh'$

$$\Downarrow$$

$$l = \frac{I_z}{mh} = \frac{I_c + mh^2}{mh} \Rightarrow \frac{I_c}{mh} + h$$

$$\Rightarrow h' + h > h$$

Quindi $\rightarrow$ (considero O' come asse di rotazione)

h' = distanza fra O' e CM

$$\Downarrow$$

$$l' = \frac{I'}{mh'} = \frac{I_c + mh'^2}{mh'} \Rightarrow \frac{mhh' + mh'^2}{mh'} \Rightarrow$$

$$h + h' = l$$

Quindi riassumendo : i due assi da noi studiati vengono chiamati **assi reciproci**

Dinamica 45 (Moto puro rotolamento)

giovedì 20 marzo 2025 17:24

Per moto di puro rotolamento si intende quel moto dove l'asse di rotazione non è un asse materiale (cuscinetto e/o supporto) ma bensì un asse geometrico che si sposta insieme al corpo rigido. In dettaglio :

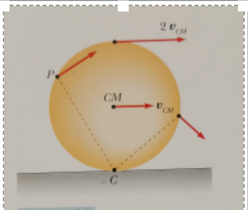


Figura 7.24
Moto di puro rotolamento di una ruota.

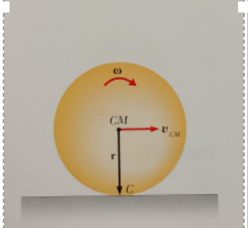


Figura 7.25
Moto del centro di massa di una ruota in moto di puro rotolamento.

In generale il corpo (figura) ha una velocità del punto di contatto C diversa da 0 : moto di rotolamento. Ma se nel nostro caso il punto C ha velocità nulla si parla di **rotolamento**. Finché il corpo non si muove , in quanto agisce la forza di attrito statico(tra piano e punto di contatto C) , sempre valutando un lasso di tempo sufficientemente piccolo . Studiamo ora la velocità del corpo :

$$\vec{V}_c = \vec{V}_{cm} + \omega \times r \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{cm} = -\omega \times r} \Rightarrow \vec{V}_c$$

sono parallelo a quello di CM

Calcolando il modulo

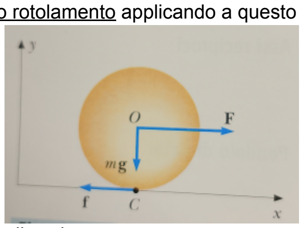
$$\Downarrow$$

$$\vec{V}_{cm} = \omega \times r \Rightarrow \vec{a}_{cm} = \alpha r$$

$$\left(\text{derivo: } \frac{dv}{dt} = a(t) \right)$$

<u>In generale la successione di rotazioni infinitesime attorno al punto di contatto C equivale ad una rototraslazione.</u>

Studiamo ora il caso di <u>puro rotolamento</u> applicando a questo corpo una forza F :



Il che andandolo a studiare gli assi :

$$\vec{F} + \vec{R}_n + m\vec{g} = m\vec{a}_{cm} \quad (\text{Newton})$$

<u>lungo x</u> $\rightarrow \vec{F} - f = m\vec{a}_{cm}$

<u>lungo y</u> $\rightarrow \vec{R}_n - m\vec{g} = 0 \longrightarrow \vec{R}_n = m\vec{g}$

<u>Momento</u> $\rightarrow r \times \vec{f} = I\vec{\alpha} \Rightarrow rf = I\vec{\alpha} \Rightarrow I\,\frac{a_{cm}}{r}$

<u>Quindi</u> $$\boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}}{m\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)} \,,\quad f = \frac{\vec{F}}{\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)}}$$

<u>la quale è limitata</u> da attrito statico

$$\downarrow$$

$$f \le \mu_s R_N = \mu_s m\vec{g}$$

$$\Downarrow$$

$$f \le \mu_s m\vec{g}\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) \simeq \vec{F}_{lim}$$

Quindi finché viene rispettato questo vincolo si ha moto puro rotolamento. Vediamo ora cosa succede al corpo se a posto di applicare una forza , gli applico un momento costante(motore per esempio) : il corpo tende a slittare (attraverso il punto di contatto) verso sx:

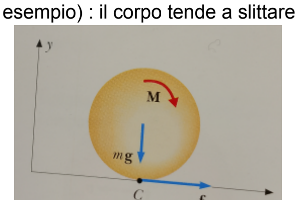


Figura 7.27
Moto di rotolamento senza strisciare di una ruota dovuto ad un momento meccanico esterno.

Quindi andando a studiare il fenomeno lungo gli assi :

$$\vec{R}_N + m\vec{g} = m\vec{a}_{cm} \quad \text{(Newton)}$$
$$\vec{M} + r \times f = I\vec{\alpha} \quad \text{(Momenti)}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{R}_N = m\vec{g}, \quad \vec{f} = m\vec{a}_{cm}, \quad \vec{M} - rf = I\frac{\vec{\alpha}_{cm}}{r}$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{M}}{mr\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)}, \quad f = \frac{\vec{M}}{r\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)}}$$

anche qui f è limitato da attrito

$$\Downarrow$$
$$f \le \mu_s \vec{R}_N = \mu_s m\vec{g} \Rightarrow M \le \mu_s m\vec{g} r\left(1+\frac{I}{mr^2}\right) \cong M_{lim}$$

Quindi sotto l'azione della forza F la reazione tangente f si oppone al moto ; mentre se agisce un momento esterno M la reazione tangente favorisce il moto. Vediamo ora il caso più generale (combinando questi due azioni): sul corpo agiscono sia una forza F che un momento M. **Ma questa azione contemporanea provoca l'impossibilità di definire il verso della forza di reazione tangente f: si suppone parallela e concorde ad x** :

$$\vec{F} + f = m\vec{a}_{cm} \quad \text{(Newton)}$$
$$M - rf = I\frac{\vec{\alpha}_{cm}}{r} \quad \text{(Momenti)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m}\,\frac{\vec{F} + \frac{\vec{M}}{r}}{1+\frac{\vec{I}}{mr^2}} \quad ; \quad f = \frac{\frac{\vec{M}}{r} - \frac{I}{mr^2}\vec{F}}{1+\frac{I}{mr^2}} \le \underbrace{\mu_s m\vec{g}}_{f_{lim}}}$$

Nota
$\vec{f}$ concorde con x se $\vec{M} > I\vec{F}/mr$
$\bar{f}$ discorde con x se $\vec{M} < \frac{I\vec{F}}{mr}$
$\bar{f}$ è nulla se $\vec{M} = \frac{I\vec{F}}{mr} \rightarrow \vec{a}_{cm} = 0$

Quindi riassumendo per tutti e tre i casi :

1. traslazione e rotolamento sono entrambi uniformemente accelerati
   a. A_{cm} ed α sono costanti se la sollecitazione è costante ; e dalla prima possiamo ricavare velocità del centro di massa (v_{cm}) e dalla seconda la velocità angolare
   b. In assenza di forze esterne e momento il corpo resta in quiete o compie una rototraslazione uniforme : accelerazione centro massa ed angolare sono nulle -> velocità centro massa e velocità angolare costanti.

Nota : un corpo durante un moto di rotolamento puro (senza forse esterne e momenti applicati ad esso) dopo un certo tempo si ferma. Quindi vi ci deve agire una forma di attrito : **attrito volvente** la quale forza d'attrito viene attribuita alla deformazione locale del piano ed è schematizzato così: $\mathbf{M_{v}=h*m*g}$ che si oppone al moto. Invece per quanto riguarda il momento da applicare per vincere questa forza per vincere attrito volvente si deve applicare una Forza pari a : $\mathbf{F_{2>}= (h*m*g)/r}$, dove per h si intende l'altezza dove si trova il corpo e misurata in m, m si intende la massa del corpo e si misura in kg e g è vettore accelerazione gravità , mentre r è il raggio della sfera e si misura in m. Vediamo un esempio :

ESEMPIO 7.9 **Un disco che rotola su un piano orizzontale**

Un disco rigido rotola senza strisciare su un piano orizzontale; la sua massa è $m = 5$ kg, il raggio è $r = 0.2$ m, il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.3$. Al disco è applicata la forza $F = 21$ N, come in figura 7.26. Calcolare il valore del momento che bisogna applicare alla ruota, come in figura 7.27, per avere la stessa accelerazione del centro di massa e il valore della forza di attrito statico nei due casi.

Soluzione Utilizziamo le relazioni (7.20), con $I = \frac{1}{2}mr^2$ e quindi $I/mr^2 = \frac{1}{2}$:

$$a_{CM} = \frac{21}{5\left(1+\frac{1}{2}\right)} = 2.8\ \text{m/s}^2 \quad , \quad f_1 = \frac{21}{1+2} = 7\ \text{N} .$$

La massima forza di attrito statico è $\mu_s mg = 14.7$ N, superiore a f_1 per cui il moto di puro rotolamento può avvenire (F_{lim} vale 44.1 N).

Dal confronto tra (7.20) e (7.21) si vede che con un momento $M = rF$ si produce la stessa accelerazione, quindi $M = 4.2$ Nm. La corrispondente forza di attrito statico (7.21) è

$$f_2 = \frac{4.2}{0.2\left(1+\frac{1}{2}\right)} = 14\ \text{N} = 2f_1 ,$$

anch'essa inferiore, seppur di poco, al valore limite 14.7 N (M_{lim} vale 4.4 Nm).

Dinamica 46 (Momento dell'impulso)

martedì 25 marzo 2025   11:03

Ricordandoci che l'impulso della forza è uguale alla variazione della quantità di moto , andiamo ora a fare una deduzione analoga : **momento dell'impulso**. Rappresenta l'azione di in momento durante un intervallo finito di tempo , provocando così una variazione finita del momento angolare : **teorema dell'impulso angolare** . In dettaglio :

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,dt = \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1) = \Delta\vec{L}} \Rightarrow \frac{\Delta\vec{L}}{(t_2 - t_1)} \simeq \text{valor medio del momento}$$

Vediamo ora in dettaglio : supponiamo di avere una rotazione di un corpo rispetto ad asse fisso(rotolamento del corpo) applicando ad un punto del corpo una forza intensa per un breve tempo :

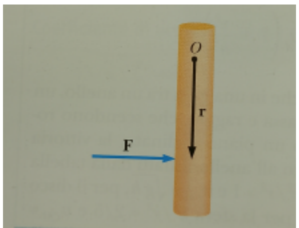


Figura 7.30
Impulso angolare di una forza su un'asta sospesa ad un estremo.

E valutando come O il centro di sospensione si arriva a :

$$\boxed{\int \vec{M}\,dt = \int (r \times \vec{F})\,dt = r \times \int \vec{F}\,dt = \underbrace{\boxed{r \times \vec{J}}}_{\text{momento dell'impulso}} = \Delta\vec{L}}$$

Quindi si ha che : l'applicazione di un impulso provoca una variazione della quantità di moto ed una variazione del momento angolare che è uguale al momento dell'impulso, il quale risultato prende il nome di **teorema del momento dell'impulso** . **Notiamo che non è presente né la reazione vincolare al piano R_n né la forza peso : la prima ha valore nullo in quanto ha momento nullo in quanto applicata proprio nel punto O , mentre la seconda è nulla in quanto si considera trascurabile l'impulso angolare rispetto a quello dovuto alla forza F**.

Vediamo un esempio :

Esempio 7.13 Un pendolo composto

Si consideri un pendolo composto, costituito da un'asta di lunghezza l e massa m, libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale, passante per un suo estremo O, figura 7.31. Inizialmente l'asta è ferma in posizione verticale. Si determini l'impulso **J**, ortogonale all'asta, che si deve applicare a distanza $r \leq l$ da O per far compiere all'asta una rotazione di 90°.

Soluzione Il momento dell'impulso, rispetto ad O, è dato in modulo da rJ. Applichiamo (7.24) con $L_{in} = 0$ e quindi $L_{fin} = I\omega = rJ$. I è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per O e vale $\frac{1}{3}ml^2$. La velocità angolare che l'asta acquista a seguito dell'applicazione dell'impulso è

$$\omega = \frac{3\,rJ}{ml^2}\ .$$

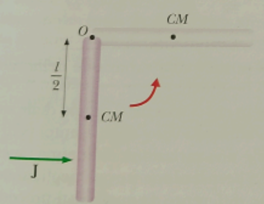


Figura 7.31

L'applicazione dell'impulso ha durata così breve da poter considerare l'asta ferma in tale intervallo di tempo.

Subito dopo però l'asta inizia a ruotare e, dopo una rotazione di 90°, il centro di massa si è sollevato di $l/2$, per cui l'energia potenziale dell'asta è aumentata di $mgl/2$. Per la conservazione dell'energia

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow J = \frac{m}{r}\sqrt{\frac{g\,l^3}{3}}\ .$$

Come nell'esempio 7.12 da ω possiamo calcolare la velocità del centro di massa subito dopo l'applicazione dell'impulso. Risulta

$$v_{CM} = \omega\frac{l}{2} = \frac{3\,rJ}{2\,m\,l}\ ,$$

diversa da J/m. Questo perché durante l'applicazione di **J** si sviluppa nel polo O una reazione vincolare impulsiva, di cui bisogna tener conto. Anzi, proprio dal calcolo della variazione di quantità di moto, che è mv_{CM}, e da J si può determinare l'impulso della reazione. L'impulso di reazione non compare invece nel momento dell'impulso perché rispetto ad O ha momento nullo. In conclusione, bisogna fare attenzione e considerare tutti i possibili contributi nella relazione

$$(m\boldsymbol{v}_{CM})_{fin} - (m\boldsymbol{v}_{CM})_{in} = \mathbf{J}\ ,$$

soprattutto quando il corpo è vincolato.

Dinamica 47 (Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido)

martedì 25 marzo 2025 12:02

Andiamo a fare considerazioni analoghe a quelle già fatte per un singolo punto : vediamo ora come si trasformano se si parla di corpo rigido. Cominciamo con la quantità di moto : se la risultante delle forze esterne è nulla , allora si ha che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme , ma quello dei singoli punti che compongono il corpo rigido non è detto che sia traslatorio rettilineo uniforme. In dettaglio :

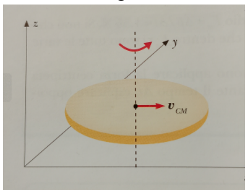


Figura 7.32
Moto di rototraslazione di un disco su un piano orizzontale.

Quindi in questa situazione si ha che : assumendo come polo O quello del centro di massa , si ha che se la risultante del momento (esterno) applicato è nulla , il momento angolare L rimane costante in modulo direzione e verso . Non vale invece per la velocità angolare w , in quanto potrebbe essere non costante, in quanto non è detto che il moto avvenga attorno ad un asse principale di inerzia , modificando la relazione L=Iw. Vediamo ora invece come si conserva il momento angolare in un sistema formato da più corpi rigidi : **la variazione della posizione dei corpi provoca una variazione del momento d'inerzia del sistema** :

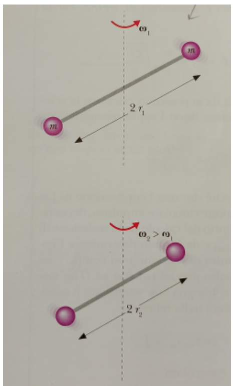


Figura 7.33
Conservazione del momento angolare in un sistema di due sferette in rotazione attorno ad un asse.

Tutti i momenti esterni sono nulli , quindi si conserva il momento angolare :

$$\vec{L} = I\vec{w}_1 \text{ costante}, \quad \vec{I}_1 = \underbrace{2\left[\underbrace{\frac{2}{5}mr^2}_{\text{inerzia terna}} + \underbrace{m(r+r_1)^2}_{mr^2}\right]}_{\text{T. H-S}} \simeq 2mr^2$$

Riduciamo ora la distanza tra le sfere (disegno sopra parte sotto): avvicino le sfere a distanza $r_2<r_1$: dato che le forze che applichiamo hanno momento nullo , si ha la conservazione del momento angolare :

$$\boxed{2mr_2^2 w_2^2 = 2mr_1^2 w_1^2 \Rightarrow w_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} w_1 > w_1}$$

Il che fa evincere che la variazione del momento d'inerzia porta ad una variazione della velocità angolare ,anche se il momento angolare è nullo . Per quanto riguarda invece il lavoro si ha che :

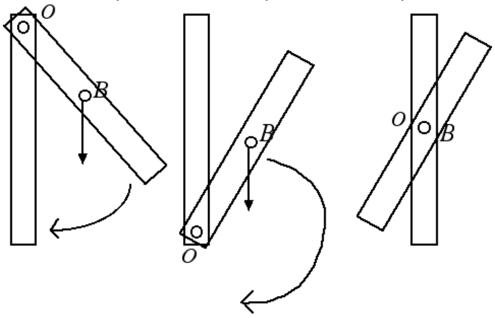
$$\boxed{\vec{W} = \Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,in} = \frac{\vec{L}^2}{2I_{,f}} - \frac{\vec{L}^2}{2I_{,in}}}$$

Dimostrando così **l'indipendenza della legge di conservazione del momento angolare da quella dell'energia**. Quindi ricapitolando : la legge di conservazione dell'energia meccanica è valida quando non ci sono attriti oppure (nel caso di puro rotolamento) le forze di attrito non compiono lavoro (pur essendo presenti)

Dinamica 48 (Equilibrio statico del corpo rigido)

martedì 25 marzo 2025 14:12

Ricapitolando : si ha **equilibrio statico se e solo se la risultante delle forze esterne applicate ad un corpo rigido è nulla e se non si ha moto rotatorio** : per la prima si ha appunto che la risultante è nulla (equilibrio del centro di massa) , mentre per la seconda si ha che con c'è velocità angolare e d i conseguenza non c'è accelerazione angolare .
Andiamo a studiare ora l'equilibrio dei corpi : per esempio di un corpo sospeso (come per esempio il pendolo composto) sottoposto alla forza peso. In qualsiasi posizione nella quale si trova il centro di massa e non passante per il centro si sospensione O , il momento della forza perso rispetto ad O non è nullo, quindi il corpo è soggetto ad accelerazione angolare.
Più in generale ci sono tre possibili situazioni sulla ubicazione del centro di massa rispetto al punto di sospensione (O) : sotto, sopra o coincidente. **Nel primo** si ha che se allontano il corpo dalla posizione di equilibrio , la forza peso (mg) tende a riportarcelo : **equilibrio stabile** ; **nel secondo** si ha che se il corpo si allontana dalla posizione di equilibrio , la forza peso lo fa ruotare e quindi si arriva nel caso nel quale il centro di sospensione O sta sotto al centro di massa : **equilibrio instabile**; **nell'ultimo caso** si parla di **equilibrio indifferente** ovvero il centro di massa coincide con il centro di sospensione del corpo O : il momento della forza peso sarebbe sempre nullo ed il corpo starebbe in quiete . In dettaglio :



Dinamica 49 (Urti 2 – Urti tra punti/corpi oppure corpi/corpi)

martedì 25 marzo 2025 14:59

Riassumendo : per quanto riguarda gli urti ,si ha conservazione dell'energia cinetica se e solo se l'urto è elastico. Se invece agiscono solo forze interne oppure quelle esterne non sono impulsive , si ha la conservazione della quantità di moto. Se invece vi è un oggetto vincolato ad un punto , e vi è urto, si sviluppa una forza esterna di tipo impulsivo , si ha che non si conserva la quantità di moto. In generale , ovvero quando il corpo vincolato viene urtato , succede che si sviluppa una risultante delle forze ed una risultante dei momenti diversa da 0. Può capitare tuttavia che la **conservazione della quantità di moto e/o momento angolare sia parziale**: ricordiamoci che sia la quantità di moto , sia il momento angolare sono grandezze vettoriali, quindi studiandoli lungo gli assi (componenti x y z) si ha la possibilità di componenti nulle (non c'è variazione) oppure componenti non nulle (variazione). Vediamo due esempi :

ESEMPIO 8.11 **Urto completamente anelastico tra un punto materiale ed un'asta vincolata**

Nell'esempio precedente assumiamo che l'asta sia vincolata ad un estremo, attorno al quale può ruotare senza attrito, figura 8.17. Per semplicità sia $m_1 = m_2 = m$; indichiamo con r la distanza del punto d'impatto dall'estremo fisso. Determinare la velocità angolare ω del sistema asta più punto materiale dopo l'urto e l'impulso della reazione vincolare durante l'urto.

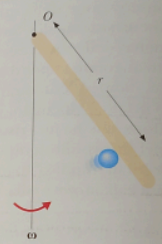


Figura 8.17

Soluzione In questo caso non possiamo conservare la quantità di moto del sistema, in quanto durante l'urto agisce una forza esterna di tipo impulsivo esplicata dal vincolo. È possibile però conservare il momento angolare rispetto al punto fisso perché il momento delle forze vincolari è nullo rispetto a tale polo:

$$r\,m\,v = I\omega \quad , \quad I = m\frac{l^2}{3} + m\,r^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{r\,v}{l^2/3 + r^2} \ .$$

Durante l'urto la quantità di moto del sistema varia per effetto dell'impulso $\mathbf{J}$ delle forze vincolari:

$$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_{fin} - \mathbf{P}_{in} \ .$$

$\mathbf{P}_{in} = m\,\boldsymbol{v}$ mentre $\mathbf{P}_{fin}$ può essere calcolata come somma delle quantità di moto del punto e dell'asta o come quantità di moto del centro di massa del sistema, nell'istante successivo all'urto. Nel primo caso:

$$\mathbf{P}_{fin} = m\,\omega\,r\,\mathbf{u}_v + m\,\omega\frac{l}{2}\mathbf{u}_v = m\left(r + \frac{l}{2}\right)\omega\,\mathbf{u}_v \ ,$$

dove $\omega\,r$ è la velocità del punto, $\omega\frac{l}{2}$ la velocità del centro di massa dell'asta, subito dopo l'urto, e $\mathbf{u}_v$ è il versore della velocità $\boldsymbol{v}$ del punto prima dell'urto. Con la seconda procedura, bisogna prima calcolare la posizione del centro di massa del sistema nell'istante dell'urto:

$$x_{CM} = \frac{m\frac{l}{2} + m\,r}{2\,m} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{l}{2}\right)$$

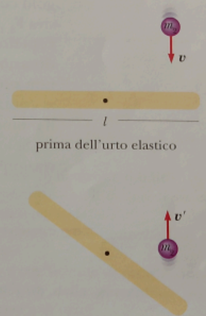
e quindi $\mathbf{P}_{fin} = 2\,m\,\boldsymbol{v}_{CM} = 2\,m\,x_{CM}\,\omega\,\mathbf{u}_v = m\left(r + \frac{l}{2}\right)\omega\,\mathbf{u}_v$. Solo durante l'urto $\mathbf{P}_{fin}$ e $\mathbf{P}_{in}$ hanno la stessa direzione, dopo $\mathbf{P}$ cambia anche di direzione.

Pertanto l'impulso della reazione vincolare è dato da

$$\mathbf{J} = m\left[\omega\left(r + \frac{l}{2}\right) - v\right]\mathbf{u}_v = m\,l\,v\,\frac{\frac{r}{2} - \frac{l}{3}}{\frac{l^2}{3} + r^2}\,\mathbf{u}_v \ .$$

ESEMPIO 8.13 **Un punto materiale cade su un'asta**

Un'asta, di massa m_1 e lunghezza l, è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro. Inizialmente l'asta è in quiete in posizione orizzontale. Un punto materiale, di massa m_2, colpisce con velocità $\boldsymbol{v}$, ortogonale all'asta in direzione verticale, l'estremo dell'asta, figura 8.19. Assumendo che l'urto sia elastico e che la velocità $\boldsymbol{v}'$ del punto materiale dopo l'urto sia parallela a $\boldsymbol{v}$, determinare nell'istante successivo all'urto la velocità angolare ω dell'asta e il modulo e il verso di $\boldsymbol{v}'$.



dopo l'urto elastico

Figura 8.19

Soluzione Data la presenza di una forza vincolare in O non è possibile conservare la quantità di moto; possiamo però conservare rispetto ad O il momento angolare e, dato che l'urto è elastico, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia. Pertanto, assumendo v' positiva se ha il verso indicato in figura,

$$m_2 v\frac{l}{2} = I\omega - m_2 v'\frac{l}{2} \quad , \quad I = m_1\frac{l^2}{12} \quad ;$$

$$\frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 v'^2 \ .$$

Risolvendo il sistema si trova

$$\omega = \frac{12\,m_2}{m_1 + 3\,m_2}\,\frac{v}{l} \quad , \quad v' = \frac{m_1 - 3\,m_2}{m_1 + 3\,m_2}\,v \ .$$

Il punto materiale prosegue il suo moto nello stesso verso se $3\,m_2 > m_1$ $(v' < 0)$, rimbalza se $3\,m_2 < m_1$ $(v' > 0)$, si ferma nell'istante dell'urto se $3\,m_2 = m_1$ $(v' = 0)$.