Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Informatica A-I
I prova di valutazione in itinere a.a. 2005/06

1. Un certo programma per computer può utilizzare una delle procedure A o B, a seconda del problema da trattare; l'esperienza ha mostrato che la procedura A viene usata il 40% delle volte e la B il 60% delle volte. Se si usa la procedura A, c' è una probabilità del 75% che il programma venga eseguito correttamente entro il suo tempo limite; se si usa la procedura B, c' è una probabilità del 50% che questo accada.
(i) Qual è la probabilità che il programma venga eseguito entro il tempo limite?
(ii) Sapendo che il programma è stato eseguito nel tempo limite, qual è la probabilità che sia stata utilizzata la procedura A?

2. In una scatola vi sono 10 pen drive: 3 da 256 MB di memoria e 7 da 1 GB (= 1024 MB).
(i) Vengono estratti $n \leq 10$ pezzi a caso con reinserimento. Sia X_n il numero delle penne da 1 GB estratte.
  (a) Calcolare $E(X_n)$, $Var(X_n)$ $\forall n \leq 10$ e $P(X_n \geq 4)$, per $n = 6$.
  (b) Quante estrazioni occorre fare affinché $P(X_n \geq 1)$ sia almeno 0.99?
(ii) Supponiamo ora di estrarre 6 pezzi a caso dalla scatola senza reinserimento e sia Y_6 il numero di penne da 1 GB estratte.
  (a) Calcolare $P(Y_6 \geq 4)$.
  (b) Se M è la capacità di memoria complessiva in MB delle penne estratte, calcolare $E(M)$.

3. Francesco lancia ripetutamente due dadi non truccati: sia T il numero di lanci necessario ad ottenere per la prima volta un punteggio dei due dadi uguale a 4. Giovanni effettua ripetute estrazioni con reinserimento da un mazzo di carte napoletane regolare: sia S il numero di estrazioni necessario ad ottenere per la prima volta un *sette* o un *due*.
(i) Trovare le densità discrete di T ed S e i loro valor medi. Si tratta di leggi note? T ed S possono ritenersi indipendenti?
(ii) Trovare la densità discreta di $Z \doteq \max(T, S)$ e calcolare $P(Z = 2)$.
(iii) Calcolare $P(T \leq S)$.

Soluzioni della I prova di valutazione in itinere a.a. 2005/06

1. Indichiamo con A (rispettivamente B) l'evento che viene utilizzata la procedura A (B) e con E l'evento che il programma venga eseguito entro il tempo limite. si ha:
(i) $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) = 0.75 \cdot 0.40 + 0.50 \cdot 0.60 = 0.6$.
(ii) Per la formula di Bayes:

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{0.75 \cdot 0.40}{0.6} = 0.5 \ .$$

2. (i) Si ha $X_n \sim B(n, 0.7)$. Allora
(a) $E(X_n) = n \cdot 0.7,\ Var(X_n) = n \cdot 0.7(1 - 0.7)$. Inoltre, per $n = 6$:

$$P(X_n \geq 4) = \binom{6}{4}(0.7)^4(0.3)^2 + \binom{6}{5}(0.7)^5 \cdot 0.3 + \binom{6}{6}(0.7)^6 =$$

$$= \ldots \approx 0.74 \ .$$

(b) Risulta:

$$P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - (0.3)^n$$

Se vogliamo che tale probabilità sia ≥ 0.99, deve essere $(0.3)^n \leq 0.01$; passando ai logaritmi, ciò è equivalente a $n \ln(0.3) \leq \ln(0.01)$ ovvero $-1.20 \cdot n \leq -4.605$ che risolta fornisce $n \geq 3.83$. Pertanto, il numero minimo di estrazioni che occorre fare è 4 .
(ii) In questo caso, Y_6 è una v.a. ipergeometrica di parametri $(6, 3, 7)$. Dunque:
(a)

$$P(Y_6 \geq 4) = \sum_{k=4}^{6} \frac{\binom{7}{k}\binom{3}{6-k}}{\binom{10}{6}} =$$

$$= \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{2} + \binom{7}{5}\binom{3}{1} + \binom{7}{6}\binom{3}{0}}{\binom{10}{6}} = \ldots = 0.83 \ .$$

(b) Si ha $E(Y_6) = 6 \cdot 0.7 = 4.2$. Inoltre $M = 1024 \cdot Y_6 + (6 - Y_6) \cdot 256 = 768 \cdot Y_6 + 1536$; dunque $E(M) = 768 \cdot 4.2 + 1536 = 4761.6$.

3. (i) I dadi danno un punteggio 4 se si verificano le uscite $(1, 3)$, $(3, 1)$ e $(2, 2)$. Il numero totale delle coppie possibili è 36, perciò la probabilità di fare il punteggio 4 è $p = 3/36 = 1/12$. Dunque, T è l'istante di primo successo in una sequenza di prove indipendenti e Bernoulliane di parametro p, per cui, se $k = 1, 2, \ldots$:

$$P(T = k) = \frac{1}{12}\left(\frac{11}{12}\right)^{k-1}$$

Il valor medio di T è $E(T) = 1/p = 12$.

La probabilità di estrarre ogni volta un 7 o un 2 dal mazzo di carte napoletane è $\frac{4+4}{40} = \frac{1}{5}$. Pertanto, analogamente al caso precedente, S è l'istante di primo successo in una sequenza di prove indipendenti e Bernoulliane di parametro $p' = 1/5$, per cui, se $k = 1, 2, \ldots$:

$$P(S = k) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

Il valor medio di S è $E(S) = 1/p' = 5$. Le v.a. T ed S, riferendosi a meccanismi di estrazione diversi, sono da ritenersi indipendenti.

(ii) Risulta, per $k = 1, 2, \ldots$:

$P(Z \leq k) = P(T \leq k, S \leq k) =$ (per l'indipendenza di T ed S)
$P(T \leq k) \cdot P(S \leq k)$. Si ha ora:

$$P(T \leq k) = \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{12}\left(\frac{11}{12}\right)^{h-1} =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{1-(\frac{11}{12})^k}{1-\frac{11}{12}}\right) = 1 - (11/12)^k$$

e analogamente

$$P(S \leq k) = \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{h-1} =$$

$$= \ldots = 1 - (4/5)^k$$

Dunque, riprendendo il calcolo:

$$P(Z \leq k) = (1 - (11/12)^k)(1 - (4/5)^k)$$

Siccome $P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1)$, si ottiene:

$$P(Z = k) = (1 - (11/12)^k)(1 - (4/5)^k) - (1 - (11/12)^{k-1})(1 - (4/5)^{k-1})$$

Per $k = 2$, tale probabilità è uguale a (effettuando i calcoli) 0.0408 .

(iii) Si ha:

$$P(T \leq S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T \leq k)P(S = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{h=1}^{k}\frac{1}{12}\left(\frac{11}{12}\right)^{h-1}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1-(11/12)^k}{1-11/12}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{11}{12}\cdot\frac{4}{5}\right]^k\cdot\frac{5}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-4/5} - \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{15}{4}-1\right)\right) = \ldots = 1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16} = 0.3125$$