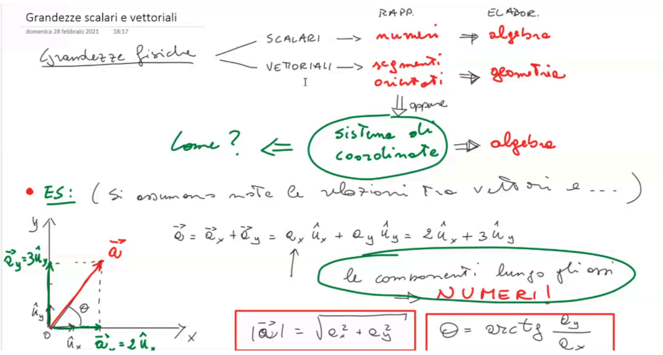
Cinematica (Grandezze fisiche)

mercoledì 18 settembre 2024 10:46

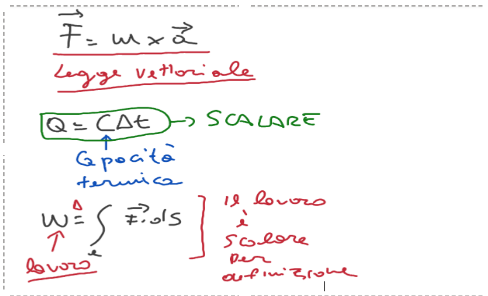
Per trattare gli eventi della natura si devono usare opportune **grandezze fisiche e leggi fisiche.** Andiamo ora a vederle in dettaglio : per grandezze fisiche si intende quella descrizione dei moti della natura ,in modo oggettivo. Ovvero si parla di entità misurabili (possibile associare una serie di caratteristiche : numeriche ecc) , universalmente misurabili (per esempio numericamente) e verificabili. **Riassumendo : le grandezze fisiche vengono introdotte per quantificare (per poter esprimere in modo oggettivo) proprietà dei sistemi che si osservano per poter descrivere i fenomeni della natura.** Spesso queste grandezze fisiche sono legate tra di loro (ad una variazione di una grandezza fisica , ne corrisponde una variazione di un'altra). Ma come sono legate? Per esempio equazione lineare oppure quadratica. **In generale questo legame tra due o più grandezze fisiche prende il nome di legge fisica**. Può capitare che si vogliano studiare dei fenomeni/sistemi che per essere studiati in modo esaustivo ed oggettivo , hanno bisogno di altre informazioni (oltre a quelle numeriche): **direzione e verso**. Quindi per descrivere i sistemi fisici c'è bisogno di raggruppare le grandezze in due tipi :

1. **SCALARI**
   a. Per scalare si intende un numero .
   b. Oltre al numero vi si associa un'unità di misura : termine di confronto universalmente adottato per assegnare un numero alla grandezza fisica.
   c. Le elaborazioni tra queste grandezze scalari si usa l'algebra.
2. **VETTORIALI**
   a. Sorge un problema : come la rappresento?? **(gli devo associare un numero, una direzione ed un verso)**.
   b. Quindi per ovviare a questo problema , la rappresento usando una rappresentazione compatta : **uso segmenti orientati**.
   c. Quindi si introduce un **sistema di coordinate,** con il quale sarà possibile passare dalla rappresentazione vettoriale alla rappresentazione per componenti (numeri) .

Riassumendo il tutto quindi :



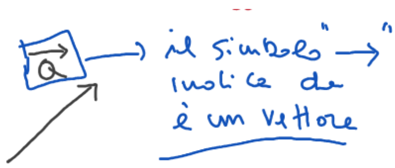
Andiamo ora a vedere un'importante differenza tra **legge fisica scalare e legge fisica vettoriale** :

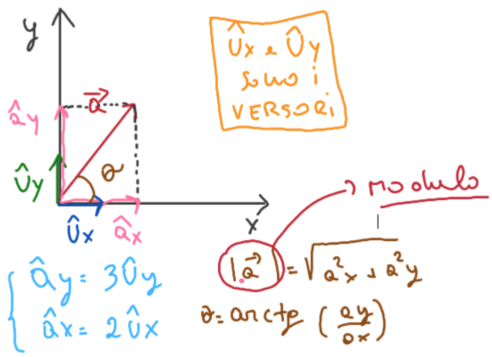


Cinematica (Componenti di un vettore)

giovedì 19 settembre 2024 09:45

Dopo aver fatto un breve riepilogo vediamo ora cosa è **un'unità di misura**: è un termine di confronto convenzionalmente adottato per poter esprimere nello stesso modo una ben e determinata grandezza fisica. <u>Tutte queste grandezze , vengono descritte e definite nel sistema internazionale</u> . Andiamo a vedere ora come rappresentare l'algebra dei vettori :

1. **Vettore**
   a. Elemento caratterizzato da verso , intensità e modulo.
   b. Si rappresenta cosi :
   c. 

   d. Il quale viene rappresentato in un sistema di assi cartesiani.
   e. 

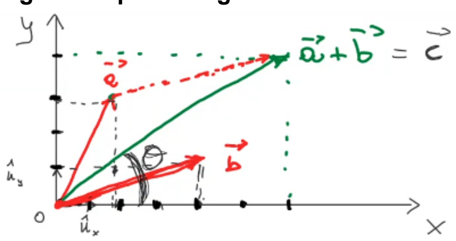
   f. Proiettando poi il vettore su entrambi gli assi , si arriva alla costruzione di due nuovi vettori (uno su asse x ed un su asse y) : ax e ay (in rosa) , <u>i quali sono caratterizzati da lunghezza unitaria.</u>
   g. Quindi in generale un qualunque vettore si può rappresentare nel seguente modo :
      i. $\boxed{\vec{a} = \boxed{\vec{a}_x + \vec{a}_y} = a_x\hat{U}_x + a_y\hat{U}_y = 2\hat{U}_x + 3\hat{U}_y}$

         vettori componenti

         componenti lungo gli assi

         NUMERI!

Facciamo degli esempi :

a. **Regola del parallelogramma**
b. 

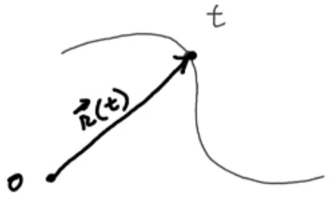
c. In modo analitico :
   i. $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{u}_x + (a_y + b_y)\hat{u}_y = 6\,\hat{u}_x + 4\,\hat{u}_y$
d. $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{c_y}{c_x}\right)$

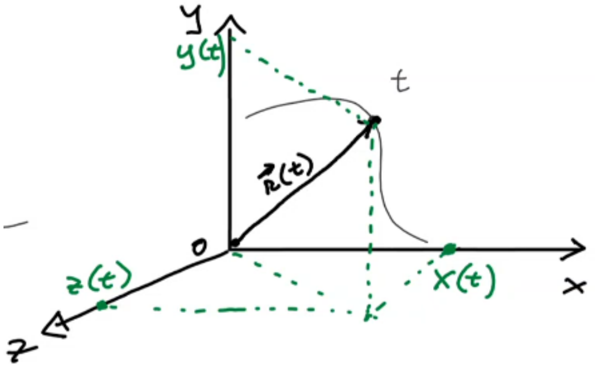
   $|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$

Cinematica 1 (Descrizione)

giovedì 19 settembre 2024 11:33

Andiamo a vedere ora in dettaglio : concentriamoci su una delle sub discipline della meccanica : la cinematica : questa branca va a studiare un certo fenomeno della natura chiamato moto . La descrizione del moto è la descrizione delle variazione (direzione e verso) di posizione di un corpo . Oltre alla variazione studia anche la rapidità con quale avviene.
In questa branca non ci si focalizza su chi genera il moto (non analizziamo le cause)**.**
Come viene descritto il moto ? **Attraverso le leggi orarie del moto** : ovvero leggi che esprimono come varia la posizione e la rapidità dello spostamento. Andiamo a vedere ora due principali concetti :

1. **Posizione**
    a. Indica la locuzione spaziale di un punto lungo una traiettoria
    b. 

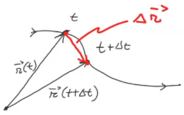
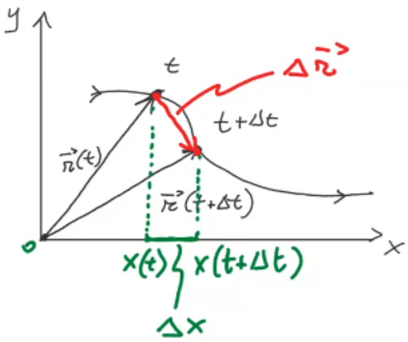
    c. Il quale contestualizzato in un sistema di coordinate:
    d. 

    e. Quindi dal punto di vista vettoriale :
        i. $\vec{r}(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad \vec{r}(t) = x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y + z(t)\,\hat{u}_z$

Cinematica 2 (Spostamento)

giovedì 19 settembre 2024 11:55

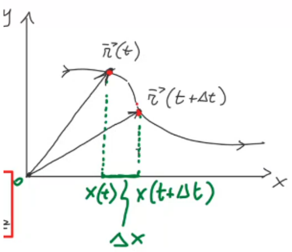
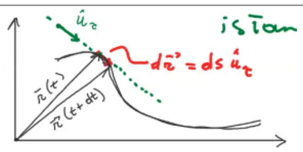
Andiamo a vedere **lo spostamento** : è un vettore , **il quale è definito come variazione di posizione .**

Viene rappresentato così :	$\Delta \vec{r}(t)$
Più in generale se si vuole definire e vedere lo spostamento si devono considerare due o più istanti di tempo diversi.	giovedì 4 marzo 2021 11:34 $\Delta \vec{r} \triangleq \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ 
Andiamo a contestualizzarlo in un sistema di coordinate :	
Quindi in generale il processo è il seguente : analizzo il fenomeno su tutti gli assi	$\underbrace{\Delta \vec{r}}_{\text{vettore}} \underbrace{\left\langle \right.}_{\text{S.d.C}} \underbrace{\begin{matrix} x(t+\Delta t) - x(t) = \Delta x \\ y(t+\Delta t) - y(t) = \Delta y \\ z(t+\Delta t) - z(t) = \Delta z \end{matrix}}_{\text{studio "scalare" per componenti (numeri)}} \underbrace{\quad}_{\text{ricomposte}}$ $\underbrace{\boxed{\Delta \vec{r} = \Delta x\, \hat{u}_x + \Delta y\, \hat{u}_y + \Delta z\, \hat{u}_z}}_{\text{vettoriale}}$ Δx

Cinematica 3 (Velocità)

giovedì 19 settembre 2024 12:29

Andiamo ora a vedere la velocità : descrizione della rapidità del moto.

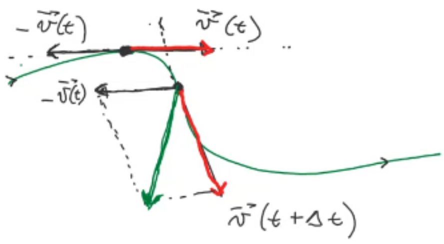
Andiamo a vedere quella **media** , con la quale si intende la rapidità (direzione e verso) dello spostamento.	$\vec{v}_m$
Viene definita cosi :	$\vec{v}_m \triangleq \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$
Quindi contestualizzando al sistema di assi cartesiani :	
Ed analizzandolo con le componenti :	$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{m_x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t} = v_{m_y}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t} = v_{m_z}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}_m = v_{m_x}\hat{u}_x + v_{m_y}\hat{u}_y + v_{m_z}\hat{u}_z}$ Velocità media
Quindi questo tipo di grandezza esprime il tempo necessario per effettuare lo spostamento dal punto A al punto B , non dicendo informazioni intermedie/ puntuali.	
Andiamo a vedere quella **istantanea** , con la quale si intende la rapidità (direzione e verso) del moto ad un istante	$\vec{v}(t) \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$
Andandolo a contestualizzare nel sistema di assi cartesiani :	Velocità istantanea - Rapidità (direzione e verso) del moto a un istante giovedì 4 marzo 2021 12:06 $\vec{v}(t) \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = v_x(t)$, $\ldots = v_y(t)$, $\ldots = v_z(t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}}$ Velocità istantanea
Andiamo ora a vedere una caratteristica importante : **l'orientazione .** Riassumendo quindi quando delta t tende a 0, lo spostamento (delta r) tende a coincidere con il tratto infinitesimo della traiettoria	 $\vec{v}(t) \parallel d\vec{r} \parallel \hat{u}_\tau \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) \text{ è tg alla traiettoria}}$ <u>Tau è la tangente della traiettoria</u>

Attenzione però alla situazione inversa : data la velocità istantanea posso ricavare la posizione?	$\vec{v}(t) \longrightarrow \vec{r}(t) \qquad d\vec{r} = \vec{v}(t)\,dt$ lungo x $\Downarrow$ $v_x(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x(t)\,dt \xrightarrow{\text{INTEGRANDO}} \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt$ $\left.\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt \\ y(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,dt \\ z(t) &= z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(t)\,dt \end{aligned}\right\}$ $\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt}$

Cinematica 4 (Accelerazione)

giovedì 19 settembre 2024 13:30

Andiamo ora a vedere l'accelerazione : descrive la variazione della rapidità con cui in corpo si sta muovendo (variazione della velocità).

Andiamo a vedere quella **media :** variazione della velocità ed il tempo necessario a produrla	$\vec{a}_m \triangleq \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ — $\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = a_{m_x}$, $\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = a_{m_y}$, $\frac{\Delta v_z}{\Delta t} = a_{m_z}$ — $\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$
Anche qui vediamo come evolve l'orientazione :	 $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$ <u>Quindi in generale l'accelerazione media non è parallela alla velocità</u>
Vediamo ora quella **istantanea**	$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t)$
Vediamo ora il problema inverso : da accelerazione voglio vedere come varia la velocità:	$\vec{a}(t) \xrightarrow{?} \vec{v}(t)$ lungo x $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$ $\quad dv_x = a_x(t)\,dt \longrightarrow \int_{v_x(t_0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt$ $\left.\begin{array}{l} v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt \\ v_y(t) = \dots \\ v_z(t) = \dots \end{array}\right\}$ $\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt}$

Cinematica 5 (Leggi orarie del moto)

giovedì 19 settembre 2024 14:00

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt\end{aligned}}$$

Nota : queste relazioni sono del tutto generali . Entrambe sono equazioni / relazioni vettoriali.
E da queste relazioni vettoriali se ne ottengono 6 scalari : per ognuna delle leggi si scompone il moto lungo e tutti e tre gli assi

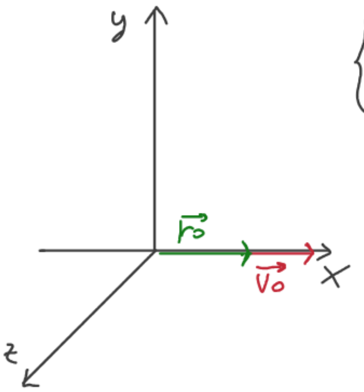
Cinematica 6 (MRU-> Moto rettilineo uniforme)

giovedì 19 settembre 2024   14:45

Questo moto si sviluppa lungo una retta ed è <u>uniforme</u> in quanto la velocità non varia in modulo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \vec{cost}$$

Ed inoltre né la direzione né il verso cambiano. <u>In questo moto si sceglie un solo asse dove orientare il moto.</u>
Quindi riportandolo nel sistema di assi cartesiani , si arriva alla seguente situazione (scelto asse x per facilità):



$$\begin{cases} r_0 = r(t_0) \\ x_0 = x(t_0) \\ ecc \end{cases}$$

$$r_0 = x_0 \hat{u}_x$$

Quindi andando ad usare la prima legge del moto , si arriva alla seguente scomposizione lungo gli assi :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \begin{cases} v_x = v_0 & \Rightarrow \\ v_y = 0 & \Rightarrow \\ v_z = 0 & \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Arriviamo ora alle **leggi orarie per il moto rettilineo uniforme** (componente x) : assumiamo per semplicità che x0=0:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t \\ v_x(t) &= v_0 \end{aligned}}$$

Dalle quali si ricavano le seguenti conclusioni : dalla prima , visto che è una retta , il coefficiente della pendenza vale $v_0 = \Delta x / \Delta t$.

Cinematica 7(MUA->Moto uniformemente accelerato)

giovedì 19 settembre 2024 15:12

Questo moto è caratterizzato da **un'accelerazione costante**.

$$\vec{a}(t) = \vec{a} = \vec{cost}$$

Attenzione che non sempre è rettilineo , ma lo diventa se la velocità iniziale è costante oppure parallela all'accelerazione. Ora focalizziamoci sulla seconda equazione oraria dei moti e con accelerazione costante :

$$\text{con } \vec{a}(t) = \vec{a} \overset{\text{dalle}}{\underset{\text{I}}{\Rightarrow}} \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t - t_0)$$

La quale scomposta lungo i 3 assi del sistema si arriva a questo scenario :

$$\vec{a}(t) = \vec{a} \begin{cases} a_x \longrightarrow v_x(t) = v_x(t_0) + a_x(t - t_0) \\ a_y \longrightarrow v_y(t) = v_y(t_0) + a_y(t - t_0) \\ a_z \longrightarrow v_z(t) = v_z(t_0) + a_z(t - t_0) \end{cases}$$

Torniamo ora allo spostamento :

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [v_x(t_0) + a_x(t - t_0)]\,dt$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 \quad \text{Se } t_0 = 0 \text{ e indicando } \begin{cases} x_0 = x(0) \\ v_{0x} = v_x(0) \end{cases}$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Mentre per quanto riguarda la velocità : derivo lo spostamento oppure applico la prima legge del moto :

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t$$

Quindi riassumendo : le leggi per il moto uniformemente accelerato sono le seguenti :

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t$$

Analogamente per gli altri assi.
Riassumendo quini i moti visti finora :

① Moto rettilineo uniforme $\quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0$

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

② Moto uniformemente accelerato $\quad \vec{a}(t) = \vec{a}$

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases}$$

Cinematica 8 (Esempio corpo in caduta)

giovedì 19 settembre 2024 15:38

Vediamo degli esempi pratici :

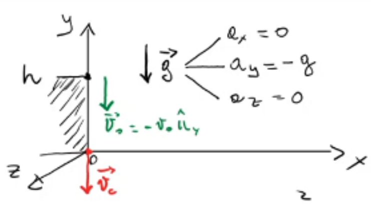
1. **Moto verticale di un corpo**
2. 

3. Dove h è il punto di altezza dal suolo (y=0)
4. Vediamo 3 possibili scenari :
   a. V_0=0 (vettore) : apro la mano ed il sasso cade con velocità zero
   b. V_0!=0(vettore) : il sasso ha già velocita iniziale verso il basso
   c. V_0!=0(vettore) : il sasso ha già velocita iniziale verso l'alto
5. In generale un qualsiasi oggetto che è soggetto a volo libero sono soggetti ad una **accelerazione di gravità** che è costante :
   a. $$\downarrow \vec{g} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$
   b. Da notare che nel primo caso è nullo in quanto questa accelerazione ha componente solo verticale ; similmente per asse y: ma in questo caso è diverso da 0 e vale 9.81 m/s^2 ma è comunque negativa (direzione e verso dell'asse)

Quindi ora appuntiamo cosa vogliamo fare/ ottenere :

1. **Introdurre un sistema di coordinate**
2. **Scrivere le leggi orarie**
3. **Ricavare le info richieste**
   a. Tempo di caduta (Tc)
   b. Velocità al suolo
      i. Assumiamo t_0=0

Torniamo all'esempio : esempio di Moto uniforme accelerato

1. Scriviamo le leggi :
2. $$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases}$$
3. Caso v0=0 (vettore)
   a. Scalarizzo sugli assi :
      i. Su asse X non succede niente-> x(t)=0, vx(t)=0
      ii. Su asse Y si studia il moto :
         1. $$\begin{cases} y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$
      iii. Su asse Z non succede niente z(t)=0 , vz(t)=0
      iv. Vediamo ora il Tc (tempo di caduta):
         1. $$0 = h - \frac{1}{2}gt_c^2 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$
      v. Vediamo ora la velocità al suolo :
         1. $$v_y(t_c) \equiv \boxed{v_c = -\sqrt{2gh}}$$
      vi. Scrivendola quindi in forma vettoriale :
         1. $$\vec{v}(t_c) = v_x(t_c)\hat{u}_x + v_y(t_c)\hat{u}_y + v_z(t_c)\hat{u}_z$$
4. Caso V_0!=0 (vettore) con velocità iniziale v_0 verso il basso
   a. 

b. Quindi le leggi del moto diventano :

i. $$\begin{cases} y(t) = h - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y(t) = -v_0 - g t \end{cases}$$

c. Calcoliamo il Tempo di caduta(t_C):

$= -v_0 - gt$

i. Tempo di caduta $\quad 0 = h - v_0 t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 \Rightarrow t_c = \frac{-2v_0 + \sqrt{4v_0^2 + 8gh}}{2g}$

$\Rightarrow t_c = -\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$

d. Velocità al suolo :

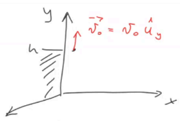
i. $v_c = \cancel{-v_0} + \cancel{v_0} - \sqrt{v_0^2 + 2gh} \Rightarrow v_y(t_c) \equiv \boxed{v_c = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$

5. Caso V_0!=0 (vettore) con velocità iniziale v_0 verso alto

a.

martedì 9 marzo 2021 20:55

$$\begin{cases} y(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y(t) = v_0 - g t \end{cases}$$



$\vec{v}_0 = v_0 \hat{u}_y$

$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases} \qquad \vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = v_0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$

I) tempo di volo $\quad 0 = h + v_0 t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 \qquad t_c^2 - \frac{2v_0}{g} t_c - \frac{2h}{g} = 0$

$$\boxed{t_c = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}}$$

II) $v_c = \cancel{v_0} - \cancel{v_0} - \sqrt{v_0^2 + 2gh} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_c = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}\ \hat{u}_y}$

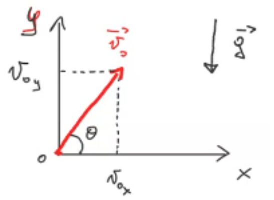
Cinematica 9 (Moto nel piano verticale / Parabolico)

giovedì 19 settembre 2024 17:36

Per andare a studiare questo moto, ci dobbiamo basare in parte sul moto uniformemente accelerato :

In generale (moto unif. acc.)
$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases}$$

Mentre per quanto riguarda la rappresentazione sugli assi cartesiani è la seguente :



Quindi applicando le leggi sia dello spostamento che della velocità su tutti e tre gli assi si arriva a :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \\ v_z = 0 \end{cases}$$

Che quindi riassumendo per gli assi :

lungo x
$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\theta)\, t \\ v_x(t) = v_0 \cos\theta \end{cases}$$

lungo y
$$\begin{cases} y(t) = (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y(t) = v_0 \sin\theta - g t \end{cases}$$

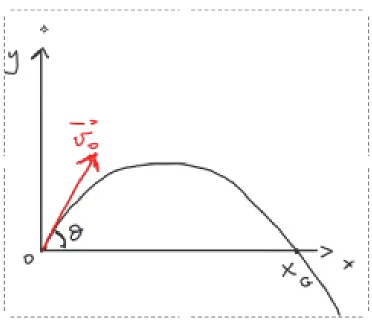
lungo z
$$\begin{cases} z(t) = 0 \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

Riscriviamo le relazioni delle componenti x e y , studiandole per arrivare ad un altro concetto :

la traiettoria : e vediamo che la y è sola funzione di x !

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\theta)\, t \\ y(t) = (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = x / v_0 \cos\theta \\ \boxed{y = tg\theta\, x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2} \end{cases}$$

Quindi si nota che è una funzione parabolica, in quanto al secondo termine c'è X^2 :



Dove X_g (gittata) è il punto dove l'oggetto lanciato con una velocità v_0 ed angolo teta torna al suolo. Quindi in dettaglio si ha che : Nota bene il componente di Y vale 0!!

1 Gittata $y = 0$

$$x\left(tg\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta}\, x\right) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x_G = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta \end{cases}$$

Mentre per quello che riguarda il valore massimo si ha nel punto n cui $Y=(X_g/2)$:

② Quota massima $\quad y_n = y\left(x_G/2\right)$

$$y_n = \frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}} \cdot \frac{v_0^2 \sin\theta \cancel{\cos\theta}}{g} - \frac{\cancel{g}}{2\cancel{v_0^2}\cancel{\cos^2\theta}} \cdot \frac{v_0^{\cancel{4}\,2}\sin^2\theta\,\cancel{\cos^2\theta}}{g^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{y_n = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}}$$

In alternativa all'equazione della traiettoria, si possono usare le leggi del moto per arrivare allo stesso risultato : moto parabolico

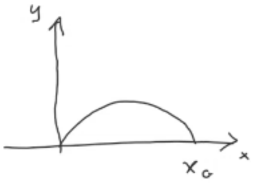
Cinematica 10 (Moto parabolico)

sabato 21 settembre 2024   11:58

Questo moto permette di studiare la gittata (coordinata del punto di caduta) di un corpo senza studiare la traiettoria dello stesso. Andiamolo a studiare :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta \, t \\ y(t) = v_0 \sin\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) = v_0 \sin\theta - g t \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

Mentre nel sistema di assi coordinati :



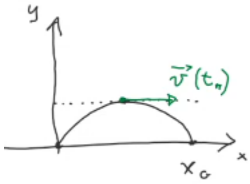
Quindi calcolando il tempo di volo (T_g):

① Gittata : $y(t) = 0$

$$t\left(v_0 \sin\theta - \frac{g}{2} t\right) = 0 \quad \begin{cases} t = 0 \\ \boxed{t_G = \dfrac{2 v_0 \sin\theta}{g}} \quad \text{tempo di volo} \end{cases}$$

$$x_G = x(t_G) = v_0 \cos\theta \, \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} \Rightarrow \boxed{x_G = 2 \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}}$$

Mentre per quanto la riguarda la quota massima (punto in cui la velocità ha lo stesso verso del moto) :



Usando la seconda legge del moto (quella della velocità) :

② Quota massima : $v_y(t_M) = 0$

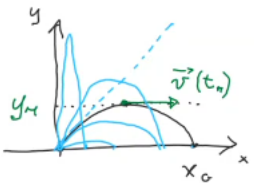
$$v_0 \sin\theta - g t_M = 0 \Rightarrow \boxed{t_M = \frac{v_0 \sin\theta}{g}} \Rightarrow y_M = y(t_M) = v_0 \sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_M = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$

Vediamo ora l'angolo massimo per avere massima velocità e massima gittata :

$$(x_G)_{MAX} = \frac{v_0^2}{g} (\sin 2\theta)_{MAX} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_M = \frac{\pi}{4} = 45°$$

Ed andiamo a vedere negli assi cartesiano cosa succede:



Cinematica 11 (Accelerazione e caratteristiche del moto+ componenti)

giovedì 19 settembre 2024 15:38

Facciamo un breve riepilogo : focalizziamoci su quello con **accelerazione costante:**

Accelerazione e caratteristiche del moto

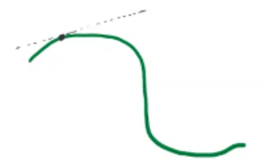
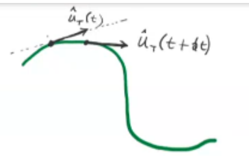
11 March, 2021 10:17 AM

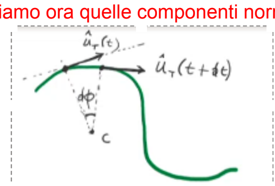
- Caso particolare $\vec{a} = cost = \vec{g}$ < Traiettoria rettilinea $\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_0 = 0 \\ \vec{v}_0 \parallel \vec{g} \end{array} \right.$; Traiettoria parabolica $\vec{v}_0 \nparallel \vec{g}$

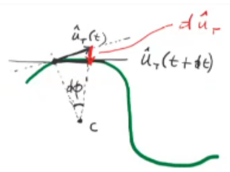
- **Più in generale andiamo a vedere quale relazione c'è tra l'accelerazione e le caratteristiche della traiettoria istante per istante:** lo si capisce studiando ad un determinato istante le componenti dell'accelerazione (a) in un sistema di coordinate con assi tangenti e normale(ortogonale) alla traiettoria :

$$\begin{array}{ccc} tg & e & \perp \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T) & & (N) \end{array}$$

Andiamo ora a vedere in dettaglio le componenti (normale e tangenziale) dell'accelerazione, studiando il moto di un punto . Vediamo un esempio:

1. Moto su piano :
2. 
3. Dove in verde viene rappresentata la traiettoria , mentre in nero viene rappresentata la velocità , <u>la quale è orientata tangenzialmente alla traiettoria</u>
4. Quindi andiamo a vedere come si scrive ora l'accelerazione :
   a. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{v} = v\,\hat{u}_T \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$
   b. La quale è stata ottenuta usando il prodotto tra derivate
5. Notiamo che l'ultimo membro della relazione è **la derivata di un versore:**
   a. 

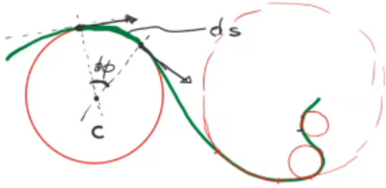
   b. <u>Dove il secondo tratto rappresenta la componente tangente del versore al tempo t + intervallo infinitesimamente piccolo</u>
   c. Vediamo ora quelle componenti normali:
      i. 

      ii. Dove le componenti normali sono quelle che arrivano a formare il punto C. Inoltre notiamo che in base alla variazione infinitesima dello spostamento , o meglio alla variazione infinitesima del tempo , si crea un angolo .
   d. Quindi in generale , o meglio per definire la derivata del versore (variazione infinitesima del versore tangente) che ha direzione normale alla traiettoria:
      i. 

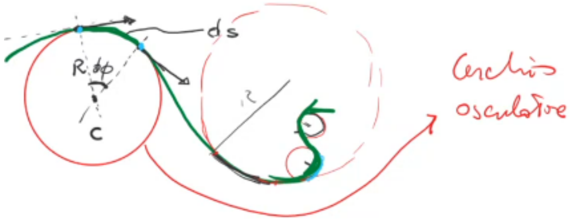
$$d\hat{u}_T = \hat{u}_T(t+dt) - \hat{u}_T(t)$$

   e. Riassumendo quindi e ricordandoci che il **modulo di un versore=1**
      i. $d\hat{u}_T = \underbrace{|\hat{u}_T|}_{=1} d\phi\,\hat{u}_N \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N$
6. Quindi riassumendo il tutto :
   a. $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N$

b. Per ogni "pezzetto" della traiettoria , è possibile approssimare quel pezzetto di traiettoria come un arco di circonferenza

c. 

d. <u>Attenzione però: c'è un inversa proporzionalità tra il raggio della circonferenza e la curvatura dello stesso</u>

i. 

ii. Ed il raggio R si chiama raggio di curvatura

e. Tornando quindi allo spostamento (ds) si ha la seguente relazione:

i.
$$ds = R\,d\phi$$
$$\Rightarrow d\phi = \frac{ds}{R}$$
$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

Quindi finalmente l'accelerazione viene descritta come segue : una componente tangente ed una componente normale :

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{la componente tangenziale dell' accel.}}\hat{u}_T + \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{\text{la comp. normale dell'accel.}}\hat{u}_N = \underbrace{\vec{a}_T}_{\text{il vettore (componente) tangente della accel.}} + \underbrace{\vec{a}_N}_{\text{il vettore normale della accel.}}$$

Cinematica 12 (Moti particolari)

martedì 25 febbraio 2025 14:19

Partendo da questa formula generale :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N}$$

Andiamo a definire i moti :

1. **Moto rettilineo**: curvatura molto poco marcata(tende a 0) -> R molto grande (tende ad infinito).In generale è vario (modulo velocità cambia -> non costante) . In questo tipo di moto l'accelerazione coincide con il termine tangenziale , in quanto quello normale è 0 (1/R) con R molto grande
   a. 1 March, 2021 12:21 PM

      In generale

      Moto rettilineo : $R = \infty$ (Vario $\underbrace{v \neq cost}_{\frac{dv}{dt} \neq 0}$)

      $\vec{a} \equiv \vec{a}_T \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{dv}{dt}$
   b. **Quindi in questo moto , varia solo il modulo della velocità**
2. **Moto curvilineo uniforme :** il modulo della velocità è costante , quindi la variazione della velocità rispetto al tempo è nulla. In questo tipo di moto si annulla il primo termine (accelerazione tangenziale).
   a. $\boxed{\vec{a} \equiv \vec{a}_N} \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{v^2}{R}$
   b. **Quindi in questo moto varia solo la direzione della velocità**
3. **Moto rettilineo uniforme :** unione dei due precedenti : il Raggio di curvatura tende ad infinito ed il modulo della velocità è costante. Date queste ipotesi si ha che in questo moto l'accelerazione è nulla -> velocità costante . Quindi non variano né direzione né verso

Quindi riassumendo il tutto si arriva alla seguente conclusione :

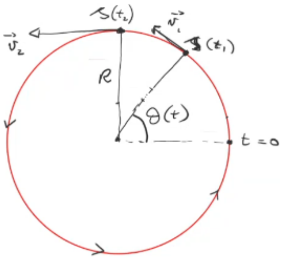
$\vec{a}_T$ associata a variazioni di modulo di $\vec{v}$

$\vec{a}_N$ associata a variazioni di direzione di $\vec{v}$

Cinematica 13 (Moto circolare + legame grandezze)

martedì 25 febbraio 2025 14:52

<u>E' un caso particolare di moto piano nel quale il raggio di curvatura R non varia -> R=0</u>



Quindi viene inteso come un moto di rotazione lungo una circonferenza . **Se ne può dare una descrizione in termini scalari fissando orientazione del piano di rotazione e fissando anche il verso di rotazione.** La posizione è data da s(t) , cioè da teta(t), quindi analogamente a quanto fatto prima (spostamento, velocità ed accelerazione) si arriva alle **grandezze angolari**:

$\theta(t)$ posizione angolare $\longrightarrow \Delta\theta \rightarrow \omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \Rightarrow \omega(t)$

$\omega(t)$ velocità angolare (istantanea) $\longrightarrow \Delta\omega \rightarrow \alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{\lim} \alpha(t)$

$\alpha(t)$ accelerazione angolare (ist.)

Vediamo ora in dettaglio come sono legate le grandezze angolari con quelle scalari:

$$ds = R\,d\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}}$$

NOTA

In generale $\omega = \omega(t) = \frac{v(t)}{R}$ $\qquad \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow d\theta(t) = \omega(t)\,dt$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \int_0^t \omega(t)\,dt \\ \omega(t) &= \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)\,dt \end{aligned}}$$

Leggi orarie (angolari) del moto circolare

$\theta(t_0) = \theta_0$
$\omega(t_0) = \omega_0$
es. $t_0 = 0$

Andiamo a spiegare nel dettaglio come è possibile ricavare formule generali con le grandezze angolari :

lunedì 15 marzo 2021 11:52

$R = \text{cost}$

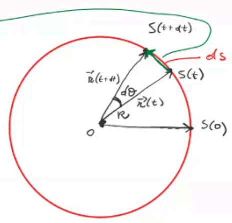
$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$

$d\vec{r}$

$ds \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} |d\vec{r}|$

- In generale $v = v(t) \Rightarrow \omega = \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t)\,dt \\ \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)\,dt \end{cases}$$



Cinematica 14 (Moti circolare uniforme)

martedì 25 febbraio 2025 16:52

Consideriamo ora quel moto in cui la velocità sia costante: **moto circolare uniforme** :

Casi particolare $\rightarrow$ $v = cost \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = cost$

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega t \\ \omega(t) = \omega \end{cases}$$

Questo tipo di moto è periodico : dopo un certo periodo di tempo, la posizione che assume il punto nel suo moto circolare sulla circonferenza sarà la stessa. Ma quante vale questo periodo T? Andiamolo a vedere :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Cinematica 15 (Moto circolare uniformemente accelerato)

martedì 25 febbraio 2025 17:02

In questo moto la velocità angolare w non è costante , ma la accelerazione angolare è costante. Quindi le formule generali diventano le seguenti :

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \end{cases}$$

Cinematica 16 (Moto circolare riepilogo)

martedì 25 febbraio 2025 17:11

Andiamo a fare un riepilogo dei moti circolari , ponendo particolare enfasi sulle tre condizioni :
1) Conoscenza del piano di rotazione e 2) dato un verso di rotazione e 3) raggio di curvatura R costante si arriva alle leggi orarie del moto :

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t)\,dt \\ \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)\,dt \end{cases}$$

Leggi orarie del moto circolare

Più in dettaglio :

1. **Moto circolare uniforme** : velocità angolare w costante , il quale è un moto periodico con periodo T :
   a. **Leggi orarie** :
      i. $\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega t \\ \omega(t) = \omega \end{cases}$
   b. **Periodo T**:
      i. $T = 2\pi/\omega$
2. **Moto circolare uniformemente accelerato** : accelerazione angolare (alfa) costante
   a. **Leggi orarie :**
      i. $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
      $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

Quanto detto finora , o meglio da quando abbiamo introdotto le grandezze angolari , ovvero usando una trattazione scalare , rispetto alla trattazione dei moti generali , porta alla seguente differenza : con le grandezze angolari si usando relazione scalari , mentre nel caso dei moti generali si usano grandezze vettoriali

Cinematica 17 (La velocità angolare è vettore)

martedì 25 febbraio 2025 17:36

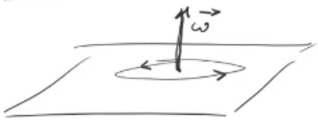
- In generale si ha che lo stato di moto ovvero la rapidità e direzione del moto vengono definita dalla velocità (la quale dà tutte le informazioni possibili ed utili) . Nel caso di moto rotatorio si parla di stato di moto circolare nella quale mi aspetto che la velocità angolare w sia vettore. Lo è? **Assolutamente sì e vediamolo :**

MODULO : $|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$

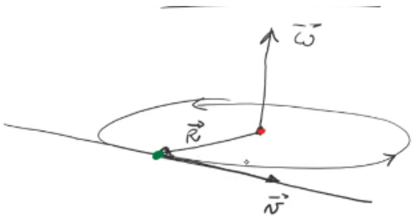
DIREZIONE: $\perp$ al piano di rotaz.

VERSO: dal quale il moto è antiorario

Le quali ipotesi vengono formalizzate così :



Andiamo a vedere ora la relazione vettoriale tra la velocità istantanea e la velocità angolare (w)? Analizziamo il moto di rotazione :



Dove in rosso vi è il centro (di rotazione) della circonferenza , in verde la posizione del punto sulla traiettoria , ed R è il vettore posizione , mentre v è la tangente del punto. Le relazioni tra i moduli di queste tre grandezze già li abbiamo trovati :

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{R}|$$

Nota bene : questi tre vettori sono tutti ortogonali tra loro , quindi la relazione già trovata diventa al seguente :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Dove la "x" sta per VECTOR dato che l'angolo (o meglio il seno dell'angolo 90) = 1, ed applicando la regola del prodotto scalare

Cinematica 18 (La accelerazione angolare)

martedì 25 febbraio 2025   18:08

Facciamo un riepilogo della formula generale della accelerazione angolare :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N \qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Nel moto circolare diventa (derivando la velocità) ed usando la regola del prodotto delle derivate :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{(\vec{\alpha} \times \vec{R})}_{\vec{a}_T} + \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{v})}_{\vec{a}_N}$$

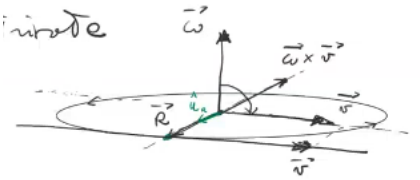
Nel moto circolare uniforme :

$$\vec{\omega} = \vec{cost} \Rightarrow \vec{\alpha} = 0$$

Il quale porta alla seguente cosa :

$$\boxed{\vec{a} \equiv \vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v}} \Rightarrow \text{accelerazione è centripeta}$$

Andiamolo ora a vedere dal punto di vista trigonometrico :



Quindi sfruttando il prodotto scalare e vedendo che w vector v ha direzione opposta , si arriva a :

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = -|\vec{\omega}|\,|\vec{v}|\,\hat{u}_R \Rightarrow \boxed{\vec{a}_N = -\omega^2 \vec{R}}$$

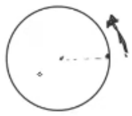
La quale accelerazione centripeta parte dal punto verde ed ha direzione verso il centro opposta a quella del raggio di curvatura

Cinematica 19 (Esercizi 1)

martedì 25 febbraio 2025 18:31

Si ha un giradischi un disco con raggio r=13 cm che parte da fermo ed arriva ad una velocità di 33 giri/min nel tempo t=0.6 s . Nel cambio di questa velocità ci passa con accelerazione costante .
Calcolare 1)alfa , 2)velocità del bordo del disco dopo un tempo pari a 0.4 s , 3) calcolare la frazione di giro dopo t=0.6s .

SOLUZIONE:
Inizialmente è un moto circolare uniformemente accelerato che poi diventa moto circolare uniforme.



ASSUMIAMO:
$T_0=0$, $w_0=0$
Quindi il moto è moto circolare uniformemente accelerato

Risposta ad 1) :

1. $\begin{cases} \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega(t) = \alpha t \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_F}{t_F} = 5,8 \ rad/s^2$
2. Dove è stata fatta seguente conversione :
   a. $\omega_F = 33 \frac{2\pi}{60} \ rad/s = 3,5 \ rad/s$
   b. Nota che il "33" è il dato del problema

Risposta a 2):

- $\omega(t_1) = \alpha t_1 = \frac{v(t_1)}{R} \Rightarrow v(t_1) = \alpha R t_1 = 0,3 \ m/s$

[redacted]

Risposta a 3):

$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \theta_F = \frac{\alpha}{2} t_F^2 \Rightarrow \theta = 1 \ rad \Rightarrow \boxed{\frac{\theta_F}{2\pi} = 0,16}$