Oscillazioni 1 (Introduzione)

giovedì 10 aprile 2025 18:27

Andiamo a studiare (o meglio su un sistema) che obbedisce a questa equazione: **equazione del moto armonico**

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + w^2x(t) = 0}$$

E tale sistema viene chiamato **oscillatore armonico semplice** (la sua legge armonica fa variare la coordinata x). Il quale sistema ha queste soluzioni (o meglio l'equazione armonica) :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + w^2x(t) = 0 \to x(t) = A\,\text{sen}(wt + \varphi)$$

$$\to v(t) = \frac{dx}{dt} = wA\cos(wt+\varphi)$$

$$\to a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt} = -w^2A\,\underbrace{\text{sen}(wt+\varphi)}_{x(t)} \Downarrow -w^2x(t)$$

<u>Dove l'ampiezza (A) e la fase (fi) sono determinati dalle condizioni iniziali, mentre w è determinata dalla dinamica.</u> Il moro è periodico con **periodo** 2π/w. Ricordiamo che la forza dà origine è di tipo elastico , e ricordandoci la prima legge di Newton si ha che :

$$\boxed{w^2 = \frac{k}{m}}$$

Tornando all'equazione dell'oscillatore armonico si ha che è equazione del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea. Andiamo a vedere ora le soluzioni :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + w^2x(t) \Rightarrow x(t) = a\,\text{sen}(wt) + b\cos(wt)$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = A\,\text{sen}(wt+\phi) \to a = A\cos\phi,\ b = A\,\text{sen}\,\phi$$

$$x(t) = B\cos(wt+\varphi) \to \underbrace{a = -B\,\text{sen}\,\varphi,\ b = B\cos\varphi}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \qquad A = \sqrt{a^2+b^2} = B$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \qquad tg\,\phi = \frac{b}{a} \quad tg\,\varphi = -\frac{a}{b}$$

Vediamo ora il caso nel quale l'equazione armonica con è omogenea e se più in generale <u>ci sono due situazioni diversi che si verificano contemporaneamente</u>:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + w^2x(t) = f(t) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = a\,\text{sen}(wt) + \beta\cos(wt) + \boxed{x_p(t)}$$

Soluzione particolare

$$\Downarrow$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Se $f_1(t)$ ho sol $x_1(t)$ e

$f_2(t)$ ho sol $x_2(t)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) + w^2(x_1+x_2) \Rightarrow f_1+f_2$$

Oscillazioni 2 (Energia)

sabato 12 aprile 2025 11:35

Andiamo ora a vedere l'energia cinetica e quella potenziale :

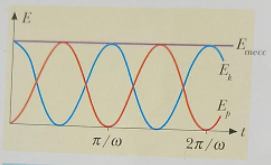


Figura 10.2
Le diverse forme di energia nel moto di un oscillatore armonico.

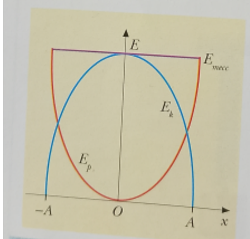


Figura 10.3
Energia cinetica ed energia meccanica di un oscillatore armonico in funzione del posizione del punto.

Vediamole in dettaglio e ricordiamo del **principio di conservazione dell'energia meccanica** (potenziale + cinetica)

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$\Downarrow$$

Conservazione dell'E_m

$$\Downarrow$$

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = cost$$

Dove **$1/2kA^2$** è il valore massimo dell'energia potenziale (assunto negli estremi dove l'energia potenziale è nulla); invece il termine **$1/2m\omega^2A^2$** è il valore massimo dell'energia cinetica assunto nel centro di oscillazione, dove l'energia potenziale è nulla. Quindi in una generica posizione la legge di conservazione dell'energia meccanica diventa la seguente :

$$E_m = E_{p,max} = E_{k,max}$$

$$\Downarrow$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2(x) + \frac{1}{2} k x^2$$

Tornando in generale all'oscillatore armonico si ha che : i valori medi di posizione ,velocità ed accelerazione in un periodo sono nulli , ma invece per quanto riguarda le forme di energia si ha che :

$$E_{km} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [\cos^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} E_m$$

$$E_{pm} = \frac{1}{2} k A^2 [\sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{4} k A^2 = \frac{1}{2} E_m$$

Oscillazioni 3 (Somma moti armonici)

martedì 15 aprile 2025 11:31

Consideriamo ora la situazione nella quale si hanno due punti , ciascuno di esso soggetto a forza elastica (moto armonico) e di volere combinare linearmente questi due moti . Vediamo in dettaglio :

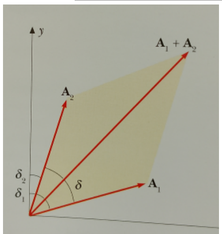
1. **Forze uguali**
   a. $x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1)$, $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$
      $\Downarrow$
      $\psi = \phi_1 + \phi_2$
      $\Downarrow$
      $x = A \sin(\omega t + \psi)$
      $\Downarrow$
      ogni istante
      $\Downarrow$
      $x = A \sin(\omega t + \psi) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$
      $\Rightarrow A \cos\psi \sin \omega t + A \sin\psi \cos \omega t =$
      $= (A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2) \sin\omega t + (A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2) \cos\omega t$
      $\Downarrow$
      uguaglianza dei coeff
      $A \cos\psi = A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2$; $A \sin\psi = A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2$
      $\Downarrow$
      $$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$
      $$\tan\psi = \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}$$
   b. In alternativa a questa formula , vi è la cosiddetta **costruzione di Fresnel** ovvero costruzione basata sull'idea che la proiezione di un moto circolare su un diametro è moto armonico. In dettaglio :
      i. 

Figura 10.6
Costruzione di Fresnel per il calcolo della somma di due moti armonici.

Quindi in dettaglio :

$\underline{A_1} \to \vec{\omega}$, $\delta_1 = \omega t + \phi_1$; $A_1 \sin(\omega t + \phi_1)$
$\underline{A_2} \to \vec{\omega}$, $\delta_2 = \omega t + \phi_2$; $A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$
$\Downarrow$
differenza di fase
$\Downarrow$
$\delta = \delta_1 - \delta_2 = (\omega t + \phi_1) + (\omega t + \phi_2) =$
$\Downarrow$
$\phi_1 - \phi_2$
$\Downarrow$
$\underline{A = A_1 + A_2}$
$\Downarrow$
$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$
$\Downarrow$
$A \sin\psi = A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2$; $A \cos\psi = A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2$

Quindi grazie a questa costruzione, **la somma di due moti armonici si riduce alla somma di due vettori**

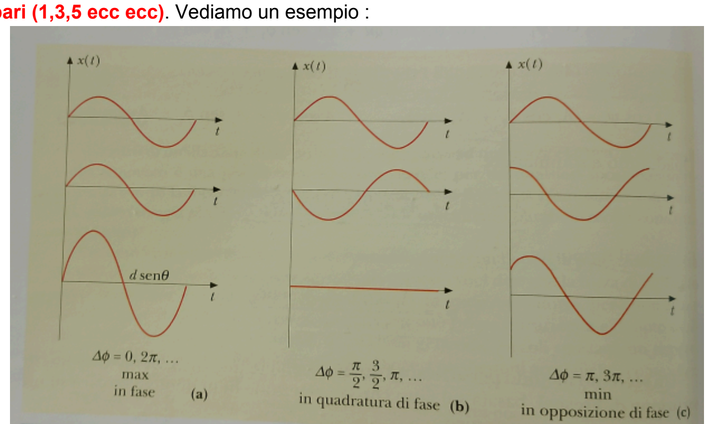
      ii. Riassumendo : **l'ampiezza del moto risultante dipende dalla differenza di fase ed è massima se l'istante è pari (0,2,4 ecc ecc) e minima se l'istante è dispari (1,3,5 ecc ecc)**. Vediamo un esempio :
         1. 

Figura 10.7
Somma di due moti armonici lungo la stessa direzione per vari valori della differenza di fase.

2. **Forze diverse**
   a. Supponiamo che ora la soluzione dell'equazione non sia soluzione della delle due, in quanto hanno velocità angolare diversa : applichiamo sempre Fresnel
   b.

$$x_1 = A_1 \,\mathrm{sen}(\omega_1 t + \phi_1), \quad x_2 = A_2 \,\mathrm{sen}(\omega_2 t + \phi_2)$$

⇓ differenza ⇓

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 \Rightarrow (\omega_1 t + \phi_1) - (\omega_2 t + \phi_2) \Rightarrow (\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2$$

⇓

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t + \phi_1 - \phi_2]}$$

→ MODULAZIONE DI AMPIEZZA

   c. Vediamo un esempio , il quale ci porta ad un concetto importante : i **battimenti**
      i.

$A_1 = A_2 = A$ e $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$$x = x_1 + x_2 = A\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t + A_2\,\mathrm{sen}\,\omega_2 t = 2A\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\;\mathrm{sen}\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

⇓

$$x(t) = A(t)\,\mathrm{sen}\,\omega t \Rightarrow 2A\cos\Omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

⇓

$$\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,;\quad \Omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$$

      ii. Il cui risultato à il seguente :
         1.

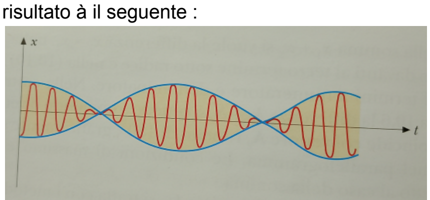
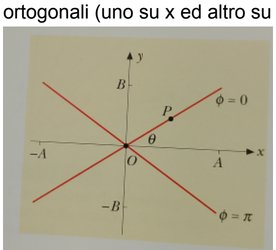


Figura 10.8
Battimenti.

3. **Forze ortogonali**
   a. Questo è il caso nel quale un punto sia sottoposto a due forze elastiche con direzioni ortogonali (uno su x ed altro su y)
   b.



$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2}\,\mathrm{sen}\,\omega t$

Figura 10.9
Somma di due moti armonici su assi ortogonali con differenza di fase nulla o uguale a π.

   c. E facendo le opportune ipotesi , si arriva a :
      i.

$k_1 = k_2 = k$

$x = A\,\mathrm{sen}\,\omega t, \; y = B\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$

se in fase → $\phi = 0$

⇓

$\frac{x}{y} = \frac{A}{B} \Rightarrow \boxed{\theta = \mathrm{arctg}\frac{B}{A}}$

se c'è moto in quadratura di fase $\phi = \frac{\pi}{2}$

$x = A\,\mathrm{sen}\,\omega t;\; y = B\,\mathrm{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2}) \sim B\cos(\omega t)$, $\boxed{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{B}{y}\right)^2 = 1}$

equazione dell'ellisse

      ii. Riassumendo : **la somma di due moti armonici con eguale pulsazione su assi ortogonali dà sempre luogo a un moto piano con traiettoria ellittica**

Oscillazione 4 (Oscillatore armonico smorzato da forza viscosa)

martedì 15 aprile 2025 15:10

Vediamo ora una situazione reale : l'oscillatore armonico che viene frenato da forze di attrito :

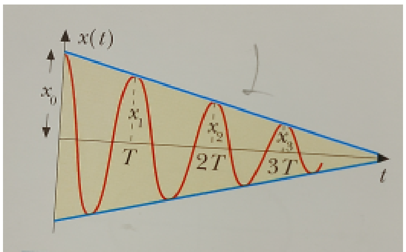


Figura 10.12
Moto oscillatorio smorzato di un punto materiale soggetto ad una forza elastica ed ad una forza di attrito radente.

Le quali forze lo attenuano fino a fare annullare l'oscillazione (stesso periodo di oscillazione durante tutto il moto) . Se nel caso di attrito radente si ha che il punto non si ferma nel centro di oscillazione , ma ad una distanza da questo: ovvero quando **la forza elastica è minore di quella di attrito**. Andiamo a studiare l'esempio : si ha oscillatore armonico di massa m e costante elastica k che viene lasciato libero con velocità iniziale v_0 non nulla a distanza x_0 dal centro , il quale risente di una forza di attrito radente pari a **μmg**; lo pseudo periodo vale **$T=2\pi(m/k)^{1/2}$** : quindi in un tempo pari a **T=4μmg/k** si ha la diminuzione dell'ampiezza. Quanto detto finora vale in generale , ma ora andiamo nel dettaglio , ovvero a studiare **l'oscillatore armonico smorzato da forza di attrito viscoso** , il quale è caratterizzato da una forza proporzionale ed opposta alla velocità **-lambdav**. La legge quindi del moto è :

$$m\vec{a} = -kx - \lambda\vec{v} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

dove $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$, $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0$$

Dove applicando la seconda legge di Newton si arriva ad equazione differenziale del secondo ordine. Quindi chiamando **coefficiente di smorzamento** (gamma) , ovvero il rapporto tra ampiezza e massa dell'oggetto e **pulsazione propria** (w_0) si arriva all'**equazione dell'oscillatore armonico smorzato**. Ricordando che lo smorzamento ha una forma del tipo esponenziale **($e^{\alpha t}$)** , si ha che :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{\alpha t}\right) + 2\gamma\left(e^{\alpha t}\right) + w_0^2\left(e^{\alpha t}\right) = 0$$

$e^{\alpha t} \Leftrightarrow$ moto smorzato exp

$$\Downarrow$$

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + w_0^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - w_0^2}$$

Quindi in base al discriminante , si hanno 3 casi specifici :

1. **Smorzamento forte**
    a. $\gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow \lambda^2 > 4mk$

       $\underbrace{\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}_{<0}$; $\underbrace{\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}_{0}$

       $\Downarrow$

       $\boxed{x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}}$

    b. La quale è <u>esponenzialmente decrescente</u>
    c. Le costanti A e B sono dipendenti dalle condizioni iniziali
2. **Smorzamento critico**
    a. $\gamma^2 = \omega_0^2 \rightarrow \lambda^2 = 4mk$

       $\Downarrow$

       $\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$

       $\Downarrow$

       $\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}(At+B)}$

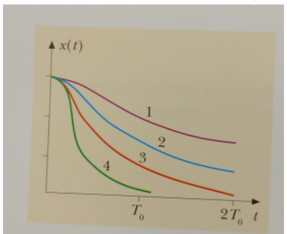
    b. La quale è <u>esponenzialmente decrescente</u>
    c. Le costanti A e B sono dipendenti dalle condizioni iniziali
    d. 

       Figura 10.13
       Smorzamento forte in un oscillatore armonico soggetto ad una forza di tipo viscoso forte; la curva 4 si riferisce allo smorzamento critico.
3. **Smorzamento debole**
    a. $\gamma^2 < \omega_0^2 \rightarrow \lambda^2 < 4mk$

       $\Downarrow$

       $\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} \rightarrow -\gamma + i\omega \in \mathbb{C}$

       $\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} \rightarrow -\gamma - i\omega \in \mathbb{C}$

       $\Downarrow$

       $x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$

       $\Downarrow$

       Applicando Eulero

       $\Downarrow$

       $\boxed{e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \sin\omega t}$

       $\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}[(A+B)\cos\omega t + (A-B)\, i \sin\omega t]$

       ma il risultato <u>deve</u> essere $\in \mathbb{R}$

       $\Downarrow$

       $A = a + ib$; $B = a - ib$

       $\Downarrow$

       $A+B = 2a$; $A-B = 2ib$

       $\Downarrow$

       $x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi)$

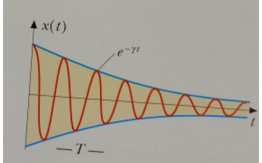
    b. La quale è <u>esponenzialmente decrescente</u>
    c. Le costanti A_0 e fase(fi) sono dipendenti dalle condizioni iniziali
    d. Quindi il punto compie oscillazioni di pulsazione **w=discriminante<w_0** con pseudo periodo **T=2π/w**
    e. Oscillazioni smorzate
       

       Figura 10.14
       Moto oscillatorio smorzato di un oscillatore soggetto ad una forza di attrito debole.

Oscillazione 5 (Oscillatore armonico forzato)

martedì 15 aprile 2025   16:19

Riassumendo : finora abbiamo visto che se il punto si sposta dalla posizione di equilibrio, tende a tornarci grazie alla forza elastica; <u>se non c'è attrito si ha oscillazione indefinita</u> se invece è presente si ha oscillazione <u>smorzata</u> che si esaurisce in un certo tempo. Vediamo ora come avere **oscillazione permanente** : ovvero un sistema che oscilla con frequenza definita ed ampiezza costante, anche se in presenza di attrito viscoso. Vediamo come farlo : **applico al sistemo una forza sinusoidale definita e costante.** Quindi applicando il secondo principio di Newton si ha che :

$$m\vec{a} = -kx - \lambda v + \vec{F}_0 \operatorname{sen} \omega t$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{\vec{F}_0}{m}\operatorname{sen}\omega t \quad [\omega_0 \neq \omega]$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi) + a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$$

$$\Downarrow$$

$$-\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + 2\gamma\omega A\cos(\omega t + \phi) + \omega_0^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen}\omega t$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \vec{\omega}^2) A\cos\phi - 2\gamma\vec{\omega} A\operatorname{sen}\phi = \frac{\vec{F}_0}{m} \\ (\vec{\omega}_0^2 - \vec{\omega}^2) A\operatorname{sen}\phi + 2\gamma\vec{\omega} A\cos\phi = \frac{\vec{F}_0}{m} \end{cases}$$

$$A = \frac{\vec{F}_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} ; \quad \operatorname{tg}\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

E_m

Riassumendo quindi si ha che :

1. Ad una sollecitazione sinusoidale l'oscillatore armonico risponde con uno spostamento sinusoidale : **la pulsazione non è quella propria w_0 ma quella impressa dall'esterno w**
2. **Lo spostamento è sfasato rispetto alla forza**
3. La risposta dell'oscillatore non è la stessa qualunque sia w :**ampiezza e fase dipendono da w**
4. A e fase (fi) <u>non dipendono dalle condizioni iniziali , da cui dipendono solo le costanti a e b della parte transitoria.</u>

Quindi riassumendo e studiano la risposta in funzione di w (pulsazione impressa dall'esterno) :

1) $\omega \ll \omega_0$ $A \simeq \frac{F_0}{k}$ $\phi \simeq 0$

$x \simeq \frac{F_0}{k}\operatorname{sen}\omega t$ in fase con la forza,

il parametro dominante è k, costante elastica dell'oscillatore;

2) $\omega \gg \omega_0$ $A \simeq \frac{F_0}{m\omega^2}$ $\phi \simeq \pi$

$x \simeq \frac{F_0}{m\omega^2}\operatorname{sen}\omega t$ in opposizione di fase con la forza,

il parametro dominante è m, massa dell'oscillatore;

) $\omega = \omega_0$ $A = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}$ $\phi = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}\cos\omega t$ in quadratura di fase con la forza,

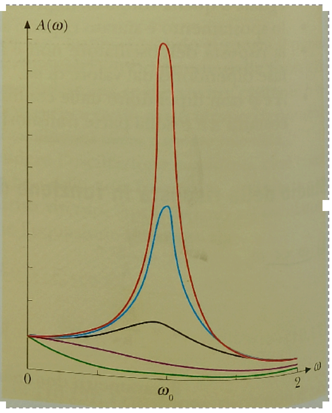
il parametro dominante è γ, **coefficiente di smorzamento**. Si parla in questo caso di **risonanza**.

Vediamo ora quando la risposta è massima : ovvero annullando **dA/dw** il che avviene alla pulsazione **w=discriminante<w0** arrivando così a:

$$A_M = A(\omega_M) = \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}} > A(\omega_0)$$

E studiandolo in un grafico si ha che :

Figura 10.16
Ampiezza delle oscillazioni di un oscillatore armonico in funzione della pulsazione della forza agente; le curve rosa, blu e nera definiscono la condizione di risonanza.



Dove le curve rossa e blu indicano **la condizione di risonanza** :ovvero gamma -> 0 , w_m->w_0 e A_m -> infinito : si ha smorzamento molto piccolo , quindi il massimo dell'ampiezza. Vediamo ora la potenza :

$$P_m = \frac{\vec{F_0}^2 w^2 \gamma}{m} \Rightarrow \frac{1}{(w_0^2 - w^2) + 4\gamma^2 w^2} \Rightarrow \gamma m w^2 A^2$$

se annullo dP_m/dw

$$P_{ris} = \frac{\vec{F_0}^2}{4m\gamma} \Rightarrow \gamma m w_0^2 A^2_{ris}$$

Che in condizioni di risonanza **comporta** che : **si ha massimo trasferimento di potenza da forza oscillante ad oscillatore e che la potenza media è proporzionale al quadrato della velocità massima.** Quindi per valutare la larghezza di una curva di risonanza w_1<w_0<w_2 tali che la potenza di ogni singola curva è metà di quella risultante media si usano due parametri fondamentali : **la larghezza della risonanza e fattori di merito** :

$$\Delta\vec{w} = \vec{w_2} - \vec{w_1} = 2\gamma$$

$$Q = \frac{\vec{w_0}}{\Delta\vec{w}} = \frac{\vec{w_0}}{2\gamma} = \sqrt{\frac{mk}{\lambda^2}}$$