Università di Roma "Tor Vergata"
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Docenti: Mario Abundo, Barbara Torti
Appello del 29 Aprile 2009

Punteggi: **1.** 3+4+4; **2.** 4+3+5; **3.** 5+5; totale = 33

1. Un acquario contiene 4 pesci neri e 7 gialli. Vengono pescati casualmente con un retino 3 pesci, senza reinserimento.
(i) Qual è la probabilità che i primi due pesci pescati siano entrambi non gialli?
(ii) Qual è la probabilità che il secondo e il terzo pesce pescato siano entrambi neri, sapendo che il primo era giallo? E se il primo pescato fosse stato nero?
(iii) I 3 pesci pescati vengono venduti al prezzo di 3.5 Euro quelli neri e 5 Euro quelli gialli. Qual è la spesa media per acquistare i 3 pesci?

2. Sia X uniformemente distribuita in $(0, 1)$ e $Y = -\frac{1}{7} \log(1 - X)$.
(i) Trovare la densità di Y; si tratta di una densità nota?
(ii) Calcolare $P(-\pi < Y \leq 1/7)$.
(iii) Sia $[\cdot]$ la funzione definita dalla regola $[x] = k$ se $x \in [k, k+1)$ (funzione parte intera). Posto $Z = [Y]$, calcolare $E(Z)$ e $P(Z \leq 4)$.

3. Supponiamo che il peso X delle spigole cresciute in un certo allevamento commerciale abbia distribuzione normale con media μ incognita, e deviazione standard $\sigma = 0.09$ kg.
(i) Analizzando un campione casuale di 100 spigole, si trova che il peso medio campionario è 1.3 kg. Trovare un intervallo di confidenza al livello $1-\alpha = 0.99$ per la media μ incognita.
(ii) Se fosse precisamente $\mu = 1.3$, quanto varrebbe $P(|X - \mu| \geq 2\sigma)$?

Soluzioni dell' appello del 29 Aprile 2009
di Calcolo delle Probabilità e Statistica

1. (i) Denotiamo con N_{12} l'evento "il primo e il secondo pesce pescati sono entrambi non gialli, ovvero neri". Utilizzando la distribuzione ipergeometrica, si ha:

$$P(N_{12}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{7}{0}}{\binom{11}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{11 \cdot 10} = 0.11 \ .$$

(ii) Siano N_1 e G_1, rispettivamente, gli eventi "il primo pesce pescato è nero" e "il primo pesce pescato è giallo". Denotiamo con N_{23} l'evento "il secondo e il terzo pesce pescati sono neri". Se il primo pesce pescato è giallo, nell'acquario sono rimasti 4 pesci neri e 6 gialli. Usando sempre la distribuzione ipergeometrica, si ottiene:

$$P(N_{23}|G_1) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = 0.13 \ .$$

Analogamente:

$$P(N_{23}|N_1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9} = 0.067 \ .$$

(iii) Il numero X di pesci neri pescati è una v.a. ipergeometrica di parametri $(3, 4, 7)$. Pertanto, $E(X) = 3 \cdot \frac{4}{11}$. Allora, la spesa in Euro per l'acquisto dei 3 pesci è $S = X \cdot 3.5 + (3 - X) \cdot 5 = 15 - 1.5 \cdot X$, e risulta $E(S) = 15 - 1.5 \cdot E(X) = 15 - 1.5 \cdot \frac{12}{11} \approx 13.36$.

2. (i) Y ha legge esponenziale di parametro 7.
Infatti:

$$P(Y \leq y) = P\left(-\frac{1}{7}\log(1 - X) \leq y\right) = P(\log(1 - X) \geq -7y) =$$

$$= P(1 - X \geq e^{-7y}) = P(X \leq 1 - e^{-7y}) = F_X(1 - e^{-7y}).$$

Ricordando che la funzione di ripartizione $F_X(x)$ di una v.a. X uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, 1)$ è:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x \in (0,1) \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} ,$$

si ottiene

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 - e^{-7y} \leq 0 \ (i.e. \ y \leq 0) \\ 1 - e^{-7y} & \text{se } 1 - e^{-7y} > 0 \ (i.e. \ y > 0) \end{cases} .$$

Derivando, si ottiene:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 7e^{-7y} & \text{se } y \geq 0 \end{cases},$$

dunque Y ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 7$.
(ii) Si ha:

$$P\left(-\pi < Y \leq \frac{1}{7}\right) = F_Y\left(\frac{1}{7}\right) - F_Y(-\pi) = 1 - e^{-7\cdot\frac{1}{7}} - 0 = 1 - e^{-1}.$$

(iii) Per $k = 0, 1, \ldots$ si ha

$$P(Z = k) = P(Y \in [k, k+1)) = \int_k^{k+1} 7e^{-7x}dx =$$

$$= (1 - e^{-7})(e^{-7})^k$$

Dunque Z ha distribuzione geometrica di parametro $p = 1 - e^{-7}$, e la sua media vale $E(Z) = 1/p - 1$.
Si ha poi

$$P(Z \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} p(1-p)^k = p \cdot \frac{1 - (1-p)^5}{p} = 1 - e^{-7\cdot 5} = 1 - e^{-35} \cong 1$$

3. (i) Un intervallo I di confidenza a livello $1-\alpha$ per la media incognita di una distribuzione avente varianza σ^2, è:

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right] \qquad (*)$$

dove $\bar{x}$ è la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso in esame, si ha $n = 100$, e la media campionaria è $\bar{x} = 1.3$; inoltre, da $1 - \alpha = 0.99$ segue $1 - \alpha/2 = 0.995$, e quindi dalla tavola dei valori di Φ si ricava $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$. Sostituendo in $(*)$, si ottiene che un intervallo di confidenza per il peso medio delle spigole del campione, al livello 0.99 è:

$$I = \left[1.3 - \frac{0.09}{10} \cdot 2.58,\ 1.3 + \frac{0.09}{10} \cdot 2.58\right] = [1.276,\ 1.323]\ .$$

(ii) Si ha:

$$P(|X - 1.3| \geq 2 \cdot 0.09) = 1 - P(|X - 1.3| < 2 \cdot 0.09) =$$

$$= 1 - P(-2\cdot 0.09 < X - 1.3 < 2\cdot 0.09) = 1 - P(-2\cdot 0.09/0.09 < (X - 1.3)/0.09 < 2\cdot 0.09/0.09)$$

$$= 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 2(1 - \Phi(2)) = 2(1 - 0.9772) = 0.0456$$