Calcolo delle probabilità e Statistica

laurea triennale in Ingegneria, a.a. 2018-19

Prima prova di valutazione in itinere del 13-05-19

Durata della prova 2 h

Punteggi: 1) $3 + 2 + 3$; **2)** $4 + 4 + 4 + 5 + 5$**.**

Totale = 30.

1. In una prova per l'esame di pianoforte al Conservatorio, ogni candidato deve suonare un pezzo scelto a caso tra tre proposti: il primo è una sonata di Vivaldi, il secondo di Chopin, il terzo di Mozart. Supponiamo che la probabilità di eseguire in modo corretto il primo pezzo sia 0.5, quella di eseguire in modo corretto il secondo pezzo sia 0.6, mentre la probabilità di eseguire in modo corretto il terzo pezzo sia 0.3 . Calcolare:
(i) la probabilità che un candidato superi la prova;
(ii) la probabilità che abbia sonato il pezzo di Mozart, sapendo che ha superato la prova;
(iii) la probabilità di superare la prova, dato che non ha scelto il pezzo di Vivaldi.

2. Si consideri la v.a. bidimensionale discreta $(X, Y) \in \{-1, 0, 1\} \times \{0, 1\}$ con densità:

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } (x, y) = (0, 0),\ (x, y) = (-1, 1),\ (x, y) = (1, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y; si tratta di distribuzioni note?
(ii) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$ e $cov(X, Y)$; X e Y sono v.a. stocasticamente indipendenti?
(iii) Si lancia 300 volte una moneta, truccata in modo che la probabilità che esca Testa in ciascun lancio sia $\theta = P(Y = 1) \cdot 10^{-2}$; se N rappresenta il numero di Teste uscite, calcolare approssimativamente $P(N > 1)$.
(iv) Siano U e V v.a. indipendenti, con la stessa distribuzione geometrica di parametro $p = P(Y = 1)$; trovare la distribuzione di $Z = \min(U, V)$ e calcolare $P(U/2 \geq V)$.
(v) Se U e V sono le v.a. del punto (iv), calcolare $P(U + V \leq 3|V = 1)$.

Soluzioni della prima prova di esonero di CPS, 13 Maggio 2019

1. Indichiamo con S l'evento che il candidato supera la prova e con B_i l'evento che il candidato scelga il pezzo musicale $i \in \{1,2,3\}$.
(i) Per il teorema delle probabilità totali, si ha:

$$P(S) = P(S|B_1)P(B_1) + P(S|B_2)P(B_2) + P(S|B_3)P(B_3)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{3}{10}\right) = \frac{7}{15} = 0.4666667 \ .$$

(ii) per il teorema di Bayes:

$$P(B_3|S) = \frac{P(S|B_3)P(B_3)}{P(S)} = \frac{0.3 \cdot \frac{1}{3}}{7/15} = \frac{3}{14} = 0.2142857 \ .$$

(iii) Occorre calcolare $P(S|B_1^C)$; risulta:

$$P(S|B_1^C) = \frac{P(S \cap B_1^C)}{P(B_1^C)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{9}{20} = 0.45 \ .$$

2. (i) Si ha:

$$P(X=-1, Y=0) = 0, \ \ P(X=-1, Y=1) = 1/3;$$

$$P(X=0, Y=0) = 1/3, \ \ P(X=0, Y=1) = 0;$$

$$P(X=1, Y=0) = 0, \ \ P(X=1, Y=1) = 1/3.$$

Allora:

$$P(X=-1) = P(X=-1, Y=0) + P(X=-1, Y=1) = 0 + 1/3 = 1/3;$$

$$P(X=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) = 1/3 + 0 = 1/3;$$

$$P(X=1) = P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) = 0 + 1/3 = 1/3.$$

Pertanto, X è uniformemente distribuita in $\{-1,0,1\}$. Inoltre:

$$P(Y=0) = P(X=-1, Y=0) + P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) = 0 + 1/3 + 0 = 1/3;$$

$$P(Y=1) = P(X=-1, Y=1) + P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1)$$

$$= 1/3 + 0 + 1/3 = 2/3.$$

Pertanto, Y ha distribuzione di Bernoulli di parametro $p = 2/3$.
(ii) Si ha:

$$E(X) = (-1) \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 = 0, \ E(Y) = p = 2/3;$$
$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot 1/3 + 0^2 \cdot 1/3 + 1^2 \cdot 1/3 = 2/3,$$
$$E(Y^2) = var(Y) + E^2(Y) = p(1-p) + p^2 = p = 2/3.$$

Per calcolare la covarianza di (X, Y) occorre prima calcolare la media di $Z = XY$; osserviamo che Z può assumere valori nell'insieme $\{-1, 0, 1\}$ con probabilità:

$$P(Z = -1) = P(X = -1, Y = 1) = 1/3,$$
$$P(Z = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = -1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0)$$
$$= 1/3 + 0 + 0 + 0 = 1/3, \ P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 1) = 1/3.$$

Quindi, anche Z è uniformemente distribuita in $\{-1, 0, 1\}$, per cui $E(XY) = E(Z) = 0$. Dunque $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$.
Però X e Y non sono indipendenti, poiché, ad esempio

$$1/3 = P(X = 1, Y = 1) \neq P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \, .$$

(iii) La v.a. N ha distribuzione binomiale di parametri $(300, \frac{2}{3} \cdot 10^{-2})$; per l' approssimazione di Poisson, si ha $P(N > 1) \approx P(W > 1)$, dove $W \sim \ Poisson(\lambda)$, con $\lambda = np = 300 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-2} = 2$; quindi $P(N > 1) \approx 1 - P(W = 0) - P(W = 1) = 1 - 3e^{-2}$.
(iv) Se $Z = \min(U, V)$, risulta, per l'indipendenza di U e V :

$$P(Z > n) = P(U > n, V > n) = P(U > n)P(V > n)$$
$$= P(U + 1 > n + 1)P(V + 1 > n + 1) = \left[(1 - 2/3)^{n+1}\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{n+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1};$$

quindi $P(Z > n) = P(Z + 1 > n + 1) = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$, per cui $Z + 1$ ha distribuzione geometrica modificata di parametro $8/9$, ovvero Z ha distribuzione geometrica di parametro $8/9$.
Si ha, per l'indipendenza di U e V :

$$P(U/2 \geq V) = P(U \geq 2V) = \sum_{k=0}^{\infty} P(U \geq 2k)P(V = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{3k} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{27}\right)^k = \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{26} = \frac{9}{13} \, .$$

(Abbiamo usato il fatto che che $U + 1$ ha distribuzione geometrica modificata e quindi $P(U \geq 2k) = P(U > 2k - 1) = P(U + 1 > 2k) = (1/3)^{2k}$)
(v) Si ha:

$$P(U + V \leq 3 | V = 1) = \frac{P(U + V \leq 3, V = 1)}{P(V = 1)} = \frac{P(U \leq 2)P(V = 1)}{P(V = 1)}$$
$$= P(U \leq 2) = P(U = 0) + P(U = 1) + P(U = 2) = \frac{2}{3}(1 + 1/3 + 1/9) = \frac{26}{27} = 0.9629630 \, .$$