

Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Informatica
I prova di valutazione in itinere a.a. 2006/07

1. Una scatola contiene tre monete. Una ha due teste, la seconda è non truccata e la terza è una moneta sbilanciata che dà testa nel 75% dei casi. Si sceglie a caso una delle tre monete e la si lancia.

- (i) Qual è la probabilità che esca testa? e che esca croce?
- (ii) Sapendo che è uscita testa, qual è la probabilità che si tratti della moneta con due teste?

2. Un astuccio contiene gettoni verdi e blu.

(i) Vengono estratti a caso **con rimpiazzo** 4 gettoni: sia X il numero dei gettoni verdi estratti. Si sa che $E(X) = \frac{8}{3}$. Sono più numerosi i gettoni verdi o quelli blu? Calcolare $P(X \geq 2)$.

(ii) Si consideri ora una scatola che contiene 12 gettoni, tra blu e verdi, con la stessa proporzione del punto (i): si effettuano estrazioni **senza rimpiazzo** dalla scatola.

- (a) Calcolare la probabilità che le prime due estrazioni forniscano un gettone blu e uno verde, **esattamente in quest'ordine** ;
- (b) sia Y_4 il numero dei gettoni verdi ottenuti in 4 di tali estrazioni, calcolare $P(Y_4 \geq 2)$;
- (c) se ciascun gettone verde vale 50 cent e ciascuno blu vale 1,00 euro, sia S la somma totale dei valori in euro dei gettoni estratti; quanto vale $E(S)$?

3. Due roulette regolari vengono azionate più volte; sia T il numero di volte che occorre azionare la prima roulette per ottenere per la prima volta un multiplo di 12, ed S il numero di volte che occorre azionare la seconda roulette per ottenere per la prima volta un multiplo di 7 (si ricordi che una roulette regolare fornisce ad ogni azione un numero $N \in \{0, \dots, 36\}$ con $P(N = i) = p$, $i = 0, 1, \dots, 36$).

- (i) Trovare le leggi delle v.a. T ed S e calcolare $E(T)$ ed $E(-3T + 5S)$. Si può ritenere che S e T siano v.a. indipendenti?
- (ii) Calcolare $P(T - 2S \geq 0)$.
- (iii) Si consideri una terza roulette, truccata in modo che sia uguale a $q = 10^{-3}$ la probabilità che esca il numero 0, ogni volta che viene azionata. Se la si aziona 6000 volte e si indica con Z il numero delle volte che esce 0, calcolare $P(Z \geq 2)$.

Soluzioni della I prova di valutazione in itinere a.a. 2006/07

1. Indichiamo con M_1, M_2, M_3 , gli eventi che vengano estratte la prima, seconda e terza moneta, rispettivamente. Sia T l'evento: “il lancio della moneta estratta dà testa” e C l'evento: “il lancio della moneta estratta dà croce”.

(i) Si ha:

$$P(T) = P(T|M_1)P(M_1) + P(T|M_2)P(M_2) + P(T|M_3)P(M_3)$$

Abbiamo

$$P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = 1/3,$$

inoltre $P(T|M_1) = 1, P(T|M_2) = 1/2, P(T|M_3) = 3/4$. Inserendo tali valori nella formula di sopra, si ottiene $P(T) = \frac{3}{4}$. Inoltre $P(C) = 1 - P(T) = \frac{1}{4}$.

(i) Per la formula di Bayes:

$$P(M_1|T) = \frac{P(T|M_1)P(M_1)}{P(T)} = \frac{1/3}{3/4} = \frac{4}{9} = 0.44 .$$

2. (i) Se v è il numero di gettoni verdi e b il numero di gettoni blu nell'astuccio, si ha $X \sim B(4, p)$, ove $p = \frac{v}{v+b}$ è incognita. Però sappiamo che $E(X) = 4p = 8/3$, dunque $p = 2/3$, cioè la proporzione di gettoni verdi è maggiore di quella dei blu. Risulta:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = \\ &= 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4 - \binom{4}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{9} = 0.88 . \end{aligned}$$

(ii) La v.a Y_n ha distribuzione ipergeometrica di parametri (n, v, b) ; siccome $v + b = 12$ e $p = v/(v + b) = 2/3$, si ha $v = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$, e $b = 12 - 8 = 4$; inoltre $E(Y_n) = np$.

(a) Indichiamo con B_i l'evento che si ottenga un gettone blu nell' i -esima estrazione, e con V_i l'evento che si ottenga un gettone verde nell' i -esima estrazione, $i = 1, 2$. Allora:

$$P(B_1 \cap V_2) = P(V_2|B_1)P(B_1) = \frac{8}{33} = 0.24 .$$

(b)

$$P(Y_4 \geq 2) = 1 - P(Y_4 = 0) - P(Y_4 = 1) = 1 - \frac{\binom{8}{0} \binom{4}{4}}{\binom{12}{4}} - \frac{\binom{8}{1} \binom{4}{3}}{\binom{12}{4}} = 0.934 .$$

(c) Si ha $S = 0.5 \cdot Y + (4 - Y) \cdot 1 = 4 - Y/2$ (euro).

Allora $E(S) = 4 - E(Y)/2 = 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$ (euro).

3. (i) Siccome i multipli di 12 tra 0 e 36 sono 3 e i multipli di 7 tra 0 e 36 sono 5, T ed S sono istanti di primo successo in serie di prove di Bernoulli indipendenti, in cui la

probabilità del successo in ogni prova è $p = \frac{3}{37}$, rispettivamente $q = \frac{5}{37}$. Dunque, T ed S hanno distribuzione geometrica modificata di parametro p e q , rispettivamente. Pertanto:

$$P(T = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, \dots, \quad P(S = h) = q(1 - q)^{h-1}, \quad h = 1, \dots$$

Si ha $E(T) = 1/p = \frac{37}{3}$ e $E(S) = 1/q = \frac{37}{5}$, dunque $E(-3T + 5S) = -3E(T) + 5E(S) = -3 \cdot \frac{37}{3} + 5 \cdot \frac{37}{5} = 0$. Le v.a. S e T possono ritenersi indipendenti.

(ii)

$$P(T - 2S \geq 0) = P(T \geq 2S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq 2k, S = k)$$

siccome S e T sono indipendenti, tale probabilità vale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq 2k) P(S = k)$$

Ora $T - 1 = X$ ha distribuzione geometrica di parametro p ; ricordando che per una tale X , risulta $P(X \geq h) = (1 - p)^h$, si ha $P(T \geq 2k) = P(T - 1 \geq 2k - 1) = P(X \geq 2k - 1) = (1 - p)^{2k-1}$. Dunque, riprendendo il calcolo

$$\begin{aligned} P(T - 2S \geq 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{2k-1} P(S = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{2k-1} q(1 - q)^{k-1} = \\ &= \frac{q}{(1 - p)(1 - q)} \sum_{k=1}^{\infty} [(1 - p)^2(1 - q)]^k = \frac{q}{(1 - p)(1 - q)} \left(\frac{1}{1 - (1 - p)^2(1 - q)} - 1 \right) = \\ &= \frac{q(1 - p)}{1 - (1 - p)^2(1 - q)} \end{aligned}$$

(iii) Per l'approssimazione di Poisson, si ha $P(Z = k) \approx P(W = k)$, ove W ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = nq = 6000/1000 = 6$. Pertanto $P(Z \geq 2) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) \approx 1 - P(W = 0) - P(W = 1) = 1 - e^{-6} - 6e^{-6} = 1 - 7e^{-6}$.