SVOLGERE GLI ESERCIZI 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.54, 1.55, 1.60

▷ **Esercizio 1.14**
Una v.a. discreta X assume i valori $1, 2, 3, 4$ e $P(X = 1) = P(X = 2) = 1/4$. Sapendo che $E(X) = 21/8$, trovare la densità discreta di X e $Var(X)$.

Soluzione. Si ha:

$$\frac{21}{8} = E(X) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4)$$

da cui, posto $p_3 = P(X = 3),\ p_4 = P(X = 4)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + 3p_3 + 4p_4 = \frac{21}{8} \\ p_3 + p_4 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \end{cases}$$

che, risolto, fornisce:

$$p_3 = \frac{1}{8},\ p_4 = \frac{3}{8}\ .$$

Allora:

$$E(X^2) = 1^2 \cdot P(X = 1) + 2^2 \cdot P(X = 2) + 3^2 \cdot P(X = 3) + 4^2 \cdot P(X = 4) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{3}{8} = \frac{67}{8} \cong 8.375\ .$$

e

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{67}{8} - \left(\frac{21}{8}\right)^2 \cong 1.4844\ .$$

▷ **Esercizio 1.15**
Sia X una v.a. che assume valori interi non negativi, con valore di aspettazione finito. Provare che $E(X)$ si può calcolare con la formula:

$$E(X) = \sum_{n \geq 0} P(X > n).$$

Utilizzare questa formula per ritrovare la media di una v.a. $X \sim Geom(p),\ p \in (0, 1)$.

Soluzione. Se $p_n = P(X = n)$, si ha:

$$E(X) = \sum_{n \geq 0} nP(X = n) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \dots$$

$$
\begin{aligned}
&= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots \\
&\qquad + p_2 + p_3 + p_4 + \dots \\
&\qquad\qquad + p_3 + p_4 + \dots \\
&\qquad\qquad\qquad + p_4 + \dots
\end{aligned}
$$

$$= P(X > 0) + P(X > 1) + P(X > 2) + \ldots = \sum_{n \geq 0} P(X > n).$$

Se $X \sim Geom(p),\ p \in (0,1)$, risulta, per $n = 0, 1, \ldots$:

$$P(X > n) = P(X + 1 > n + 1) = P(T > n + 1),$$

dove T ha distribuzione Geometrica modificata di parametro p. Siccome, come è noto, $P(T > n + 1) = (1 - p)^{n+1}$, si ottiene

$$P(X > n) = (1 - p)^{n+1}.$$

Allora:

$$E(X) = \sum_{n \geq 0} P(X > n) = \sum_{n \geq 0} (1 - p)^{n+1} = (1 - p) \sum_{n \geq 0} (1 - p)^n$$

$$= (1 - p) \frac{1}{1 - (1 - p)} = (1 - p) \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - 1,$$

che coincide col valore già calcolato, per altra via.
Naturalmente, risulta $E(T) = E(X) + 1 = \frac{1}{p} - 1 + 1 = \frac{1}{p}$.

▷ **Esercizio 1.16**
Sia X una v.a. uniformemente distribuita su $\{1, 2, \ldots, n\}$. Calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.

Soluzione. Siccome X è uniformemente distribuita su $\{1, 2, \ldots, n\}$, si ha $P(X = k) = 1/n$, per $k = 1, 2, \ldots, n$. Allora:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \ ;$$

utilizzando la formula:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2} \ , \qquad (*)$$

si ottiene

$$E(X) = \frac{1}{n} \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n + 1}{2} \ .$$

Inoltre:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 \ ;$$

utilizzando la formula:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ , \qquad (**)$$

si ha

$$E(X^2) = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

Pertanto:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12}) = \frac{n^2-1}{12} \ .$$

▷ **Esercizio 1.17**

Siano X e Y v.a. indipendenti e uniformemente distribuite su $\{1, 2, \ldots, n\}$. Trovare la legge di $Z = \max(X, Y)$. Calcolare anche $E(Z)$.

Soluzione. Se $Z = \max(X, Y)$, si ha $Z \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e, per $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$P(Z = k) = P(X = k, Y = k) + P(X < k, Y = k) + P(X = k, Y < k)$$

$$= P(X = k)P(Y = k) + P(Y = k)\sum_{h<k}\frac{1}{n} + P(X = k)\sum_{h<k}\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{h=1}^{k-1} 1 = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}(k-1) = \frac{2k-1}{n^2} \ .$$

Un altro modo per trovare la densità discreta di Z è il seguente.
Per $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$P(Z \le k) = P(X \le k, Y \le k) =$$

(per l'indipendenza di X e Y)

$$= P(X \le k)P(Y \le k) = \frac{k}{n}\cdot\frac{k}{n} = \frac{k^2}{n^2} \ .$$

Allora:

$$P(Z = k) = P(Z \le k) - P(Z \le k-1) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}(k^2 - k^2 + 2k - 1) = \frac{2k-1}{n^2} \ ,$$

che coincide col valore trovato sopra. Per quanto riguarda la media:

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{2k-1}{n^2}$$

e, ricordando che la somma dei primi n interi è $n(n+1)/2$, mentre la somma dei quadrati dei primi n interi è $n(n+1)(2n+1)/6$ (v. formule $(*)$ e $(**)$ dell' Esercizio 1.16), si ottiene:

$$E(Z) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k(2k-1) = \frac{1}{n^2} \left(2 \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(2n(n+1)(2n+1)/6 - n(n+1)/2\right) = \frac{1}{n} \left(2(n+1)(2n+1)/6 - (n+1)/2\right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(2\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2} \right) = \frac{4n^2+3n-1}{6n} \ .$$

▷ **Esercizio 1.54** (prova in itinere a.a. 2004/05)
Nello scaffale di un negozio vi sono 20 CD-Rom di software, di cui 2 di grafica e gli altri di calcolo numerico e applicazioni. I CD di grafica costano 800 Euro ciascuno, mentre gli altri costano 600 Euro ognuno. Un cliente compra 3 CD che sceglie a caso e sia X = numero dei CD di grafica acquistati dal cliente.
(i) Calcolare $P(X=0)$ e $P(X=2)$.
(ii) Calcolare $E(X)$.
(iii) Se S è la spesa (in euro) sostenuta dal cliente per comprare i tre CD, calcolare $E(S)$.

Soluzione. X risulta una v.a ipergeometrica: l'esperimento aleatorio sottostante è assimilabile al problema di trovare il numero delle palline rosse ottenute in 3 estrazioni senza rimpiazzo di una pallina da un' urna contenente r=2 palline rosse e b=18 bianche. Si ottiene pertanto, per $k = 0, 1, 2$:

$$P(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$$

Dunque:
(i)

$$P(X=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{18}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{16 \cdot 17}{19 \cdot 20} = 0.7157$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{18}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{6}{19 \cdot 20} = 0.0157$$

(ii) Come noto, la media di una v.a. ipergeometrica siffatta è:

$$E(X) = n \cdot \frac{r}{r+b} = 3 \cdot \frac{2}{20} = 0.3 \ .$$

(iii) Si ha $S = 800 \cdot X + 600 \cdot (3 - X) = 200 \cdot X + 1800$, quindi:

$$E(S) = 200 \cdot E(X) + 1800 = 200 \cdot 0.3 + 1800 = 1860.$$

$\triangleright$ **Esercizio 1.55** (prova in itinere a.a. 2004/05)
Luca e Giovanni estraggono delle carte, ognuno dal proprio mazzo di carte napoletane ben mescolate, rimettendo ogni volta la carta estratta nel mazzo; il mazzo di Luca è regolare, mentre a quello di Giovanni è stato tolto l'asso di denari. Sia T il primo istante in cui Luca estrae un asso e S il primo istante in cui Giovanni estrae un asso.
(i) Quanto vale $P(T > 5)$?
(ii) Qual è la probabilità che Giovanni estragga per primo un asso, cioé che sia $T > S$?
(iii) Mostrare che $E[T - S] < 0$ e calcolare $E[4T - 3S]$.

Soluzione. T è l'istante di primo successo in una successione di prove di Bernoulli indipendenti, in ciascuna delle quali la probabilità del successo è $p = \frac{1}{10}$, essendo la probabilità di estrarre un asso dal mazzo di Luca uguale a $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$. Il testo del quesito lascia all'interpretazione del lettore se il secondo mazzo contenga 40 carte (cioé se un asso è stato sostituito con un'altra qualunque carta) o se ne contenga 39 (essendo stata eliminata una carta). Di seguito, riportiamo la soluzione, riferendoci alla prima interpretazione; se si accetta la seconda, la soluzione si ottiene in modo analogo, ma risulta $E(4T - 3S) = 1$, anziché 0. Secondo la prima interpretazione, S è l'istante di primo successo in una successione di prove di Bernoulli indipendenti, in ciascuna delle quali la probabilità del successo è $q = \frac{3}{40}$, essendo la probabilità di estrarre un asso dal mazzo di Giovanni uguale a $\frac{3}{40}$ (in base alla seconda interpretazione, si avrebbe invece $q = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$). Dunque T e S hanno legge geometrica modificata di parametri p e q, rispettivamente, ovvero, per $k = 1, 2, ...$:

$$P(T = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad P(S = k) = q(1 - q)^{k-1}.$$

Inoltre, T ed S sono v.a. stocasticamente indipendenti.

(i) Si ha:

$$P(T > 5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - \sum_{k=1}^{5} p(1 - p)^{k-1} =$$

$$= 1 - p \sum_{h=0}^{4} (1 - p)^h = 1 - p \cdot \frac{1 - (1 - p)^5}{1 - (1 - p)} = 1 - (1 - (1 - p)^5) =$$

$$= (1 - p)^5 = (0.9)^5 = 0.59049 \ .$$

(ii) Si ha:

$$P(T > S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S = k, T > k) =$$

(per l'indipendenza di T ed S)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(S=k)P(T>k) = \sum_{k=1}^{\infty} q(1-q)^{k-1}(1-p)^k$$

$$= q(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}[(1-q)(1-p)]^{k-1}$$

(posto $k-1=j$)

$$= q(1-p)\sum_{j=0}^{\infty}[(1-q)(1-p)]^j = q(1-p)\frac{1}{1-(1-q)(1-p)} = \frac{q(1-p)}{1-1+p+q-qp} =$$

$$\frac{q(1-p)}{p+q-qp} = 0.40298 \ .$$

(iii) Ricordando quanto vale la media dell' istante di primo successo in una successione di prove di Bernoulli, indipendenti, si ha:

$$E(T) = \frac{1}{p} = 10, \quad E(S) = \frac{1}{q} = \frac{40}{3},$$

per cui

$$E[T-S] = E(T) - E(S) = 10 - \frac{40}{3} = \frac{30-40}{3} = -\frac{10}{3} < 0.$$

Inoltre

$$E[4T-3S] = 4E(T) - 3E(S) = 4\cdot 10 - 3\cdot\frac{40}{3} = 40 - 40 = 0.$$

Se invece si fosse accettata la seconda interpretazione del testo, si avrebbe avuto $q = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$ e $p = \frac{1}{10}$. Quindi, avremmo avuto $E(T) = 10,\ E(S) = 13$, per cui $E(4T-3S) = 4E(T) - 3E(S) = 40 - 39 = 1$, anziché 0, come nella prima interpretazione.

$\triangleright$ **Esercizio 1.60** (I prova in itinere a.a. 2011-12)
Sia (X,Y) una v.a. bidimensionale con densità congiunta:

$$p(x,y) = \left(\frac{1}{4}\right)^y, \text{ per } (x,y) \in \{1,2,3\}\times \mathbb{N}$$

($\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$).
(i) Trovare le densità marginali di X e Y; si tratta di densità note?
(ii) Calcolare $E(X),\ Var(X)$ e $E(Y)$.
(iii) Quanto vale $cov(X,Y)$? (X e Y sono v.a. indipendenti ?).
(iv) Calcolare $P(X+Y=4)$.

Soluzione. (i) Si ha:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{1}{1 - 1/4} - 1 = \frac{1}{3},\ x \in \{1, 2, 3\}$$

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x=1}^{3} \left(\frac{1}{4}\right)^y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{y-1},\ y \in \mathbb{N}$$

Pertanto, si riconosce che $X \sim \mathrm{Unif}(\{1, 2, 3\})$ e Y ha legge geometrica modificata di parametro $p = \frac{3}{4}$.
(ii) Si trova facilmente che $E(X) = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2,\ E(X^2) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3}$, da cui $Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}$. La media di Y, come si sa dalla teoria, è $E(Y) = 1/p = 4/3$.
(iii) Si ha:

$$p_X(x)p_Y(y) = \frac{1}{3} \cdot 3\left(\frac{1}{4}\right)^y = \left(\frac{1}{4}\right)^y = p(x, y)$$

e quindi X e Y sono indipendenti.
Pertanto $cov(X, Y) = 0$.
(iii) Si ha:

$$P(X + Y = 4) = p(1, 3) + p(2, 2) + p(3, 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 =$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{21}{64}\ .$$

Allo stesso risultato si poteva pervenire, in maniera più complicata, ragionando nel modo seguente.
Prima, troviamo la densità discreta della v.a. $Z = X + Y$, che assume valori $z \in \{2, 3, \ldots\}$. Per la nota formula che fornisce la densità della somma di v.a., si ha:

$$P(Z = z) = \sum_{x \text{ opportune}} p(x, z - x),\ z = 2, 3, \ldots,$$

dove le x opportune sono quelle per cui ha senso l'espressione $p(x, z-x)$, ovvero $x \in \{1, 2, 3\}$ e $z - x \geq 1$, cioè $x \leq z - 1$. Pertanto, riprendendo il calcolo, si ha:

$$P(Z = z)\sum_{x=1}^{z-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{z-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^z \cdot \sum_{x=1}^{z-1} 4^x.$$

Quindi, per $z = 4$:

$$P(Z = 4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \sum_{x=1}^{3} 4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^4 (4 + 4^2 + 4^3) = \frac{21}{64},$$

che coincide col risultato già trovato sopra, per altra via.