

Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
IV prova finale a.a. 2020/21

Punteggi: **1:** $3 + 4 + 3$; **2 :** $4 + 4 + 4$; **3:** $4 + 4$.

1. Si lanciano ripetutamente e contemporaneamente due monete (M_1 e M_2): M_1 è equilibrata, mentre M_2 è truccata in modo che la probabilità di ottenere Testa è $1/9$. Sia T il numero di lanci necessario per ottenere la prima volta Testa lanciando M_1 e S il numero di lanci necessario per ottenere la prima volta Testa lanciando M_2 . Si può ritenere che T ed S siano v.a. indipendenti?

- (i) Se $X = \min(T, S)$, trovare la densità discreta di X e $P(X = 2)$.
- (ii) Calcolare $P(T - 3S = 0)$.
- (iii) Calcolare $P(T/3 + S/3 = 1)$.

2. Determinare l'intero $n > 0$ affinché

$$f(x, y) = \begin{cases} x^n + y^n & \text{se } 0 < x < n, 0 < y < n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia la densità congiunta di un vettore aleatorio bidimensionale (X, Y) .

- (i) Per il valore di n trovato, trovare le densità marginali di X e Y e dire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.
- (ii) Posto $Z = X + Y$, trovare la funzione di ripartizione e la densità di Z .
- (iii) Calcolare $P(Y \geq 4X^2)$ e trovare $a > 0$ tale che $P(Z \leq a) = 1/24$.

3. Sia X una v.a. con distribuzione normale di media μ e varianza $\sigma^2 = 25$.

- (i) Per $\mu = 4$, trovare a e b tali che $P(X \leq a) = 1/2$ e $P(X \leq b) = 0.84$.
- (ii) Supponiamo ora che μ sia incognito e che la media campionaria \bar{x}_n di $n = 400$ v.a. indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di X sia uguale a 3.6; trovare un intervallo di confidenza per μ al livello $1 - \alpha = 0.95$.

Soluzioni della IV prova finale a.a. 2020/21

1. (i) T è l'istante di primo successo in una successione di prove indipendenti e Bernoulliane in cui la probabilità del successo è $p = \frac{1}{2}$, dunque:

$$P(T = k) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Invece, S è l'istante di primo successo in una successione di prove indipendenti e Bernoulliane in cui la probabilità del successo è $p' = \frac{1}{9}$. Quindi:

$$P(S = k) = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Considerato che il risultato del lancio di M_1 non influenza quello di M_2 , T e S si possono ritenere v.a. indipendenti.

Si ha, per l'indipendenza di T ed S :

$$\begin{aligned} P(X > k) &= P(\min(T, S) > k) = P(T > k, S > k) = \\ &= P(T > k) \cdot P(S > k) = \end{aligned}$$

(ricordando la formula per $P(T > k)$)

$$\begin{aligned} (1-p)^k (1-p')^k &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9}\right)^k \\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^k = (1 - 5/9)^k \end{aligned}$$

e quindi X ha distribuzione geometrica modificata di parametro $q = 5/9$, ovvero:

$$P(X = k) = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Sostituendo $k = 2$, si ottiene:

$$P(X = 2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{81}$$

(ii)

$$P(T - 3S = 0) = P(T = 3S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S = k, T = 3k)$$

e, siccome T ed S sono indipendenti, questa serie è uguale a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(S = k) \cdot P(T = 3k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} \right)^k = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^k \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{9}{8} - 1 \right) = \frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

(iii) Risulta $P(T/3 + Z/3 = 1) = P(T + S = 3)$; se $Z = T + S$, si ha:

$$P(Z = k) = \sum_{h=1}^{k-1} P(T = h)P(S = k-h) = \sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{2^h} \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9} \right)^{k-h-1}.$$

Sostituendo $k = 3$, si ottiene $P(T/3 + Z/3 = 1) = \frac{25}{324} = 0.077$.

2. (i) Si ha:

$$\int_0^n dx \int_0^n dy (x^n + y^n) = 2n^{n+2}/(n+1),$$

per cui deve essere $2n^{n+2} = n+1$, da cui si ottiene, procedendo per tentativi, $n = 1$.

Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{(0,1)^2}(x, y) \cdot (x+y) dy$$

Dunque, per $x \notin (0, 1)$ risulta $f_X(x) = 0$, mentre per $x \in (0, 1)$ si ottiene:

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y) dy = x + \frac{1}{2}$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 (x+y) dx & \text{se } y \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & \text{se } y \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto, X e Y hanno stessa legge, ma non sono indipendenti, in quanto $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

(ii) Per $z \in (0, 2)$, la densità di $Z = X + Y$ è data dalla formula:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \\
&= \int_0^1 \mathbf{1}_{(0,1)}(z-x) \cdot (x+z-x) dx = \int_0^1 \mathbf{1}_{(z-1 \vee 0, z \wedge 1)}(x) \cdot z dx
\end{aligned}$$

Pertanto:

se $z \in (0, 1)$, si ottiene:

$$f_Z(z) = \int_0^z z dx = z^2$$

se $z \in (1, 2)$, si ottiene:

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 z dx = z(2-z)$$

In conclusione:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \leq 0 \\ z^2 & \text{se } z \in (0, 1) \\ z(2-z) & \text{se } z \in (1, 2) \\ 0 & \text{se } z \geq 2 \end{cases}$$

Dunque, poiché $F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z f_Z(t) dt$, si ottiene

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \leq 0 \\ z^3/3 & \text{se } z \in (0, 1) \\ z^2 - z^3/3 - 1/3 & \text{se } z \in (1, 2) \\ 1 & \text{se } z \geq 2 \end{cases}$$

(iii) Considerando che deve essere $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$, si ottiene (è utile fare la figura):

$$\begin{aligned} P(Y \geq 4X^2) &= \int_0^{1/2} dx \int_{4x^2}^1 (x+y) dy = \int_0^{1/2} dx \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=4x^2}^{y=1} = \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + x - 4x^3 - 8x^4 \right) dx = \dots = \frac{21}{80}. \end{aligned}$$

Affinché sia $P(Z \leq a) = 1/24$, deve essere $a^3/3 = 1/24$, ovvero $a = 1/2$.

3. (i) Si ha:

$$P(X \leq a) = P((X-4)/5 \leq (a-4)/5) = \Phi((a-4)/5)$$

Pertanto: $P(X \leq a) = 1/2 = \Phi(0) \Rightarrow (a-4)/5 = 0$, ovvero $a = 4$.

$P(X \leq b) = 0.84 = \Phi(1) \Rightarrow (b-4)/5 = 1$, ovvero $b = 9$.

(ii) Come noto, un intervallo di confidenza a livello $1 - \alpha$ per la media incognita μ di una distribuzione di cui è nota la varianza σ^2 è il seguente:

$$I = \left[\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2}, \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2} \right],$$

dove \bar{x}_n denota la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso attuale, risulta $\bar{x}_n = 3.6$, $\sigma = \sqrt{25} = 5$, $n = 400$. Essendo $1 - \alpha = 0.95$, si ha $\alpha/2 = 0.025$, $1 - \alpha/2 = 0.975$ e $\phi_{1-\alpha/2} = 1.96$. In conclusione, un intervallo di confidenza per μ al livello 0.95 è

$$\left[3.6 - \frac{5}{\sqrt{400}} \cdot 1.96, 3.6 + \frac{5}{\sqrt{400}} \cdot 1.96 \right] = [3.11, 4.09].$$