

# Onde meccaniche 1 (Intro : proprietà elastiche dei solidi)

martedì 15 aprile 2025 18:16

Prima di introdurre veramente il concetto delle onde, andiamo ora a studiare le **proprietà elastiche dei solidi**, le quali sono intese sotto sollecitazione di forza meccanica ed a temperatura costante, provocando una **deformazione elastica del corpo** (il corpo torna allo stato iniziale dopo la cessazione della forza applicata). Andiamo ora a vederle in dettaglio :

## 1. Trazione e compressione

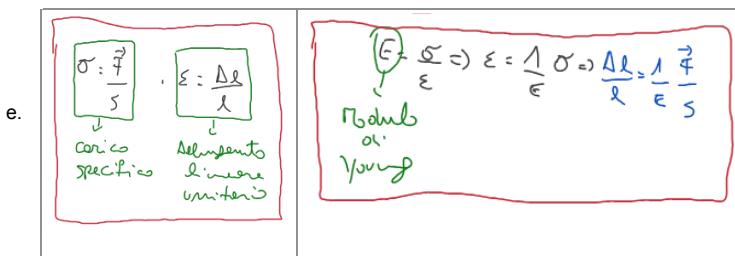
- Si è in questo caso quando un materiale, sottoposto a forza esterna agente, si deforma in modo proporzionale
- La proporzionalità tra la deformazione ed il carico viene descritta dalla **legge di Hooke** : se applico una forza ad un corpo vincolato ad un estremo, esso si allunga o restringe in modo proporzionale alla forza. Vediamo un esempio:



Figura 7.42

Schema del dispositivo per lo studio delle deformazioni elastiche di un corpo rigido.

- Definiamo ora in dettaglio la legge di Hooke : per **carico specifico** si intende il rapporto tra la forza applicata ortogonalmente ad una superficie e la superficie stessa mentre per **allungamento lineare unitario** si intende l'allungamento subito dal materiale :



- La quale legge segue andamento seguente :

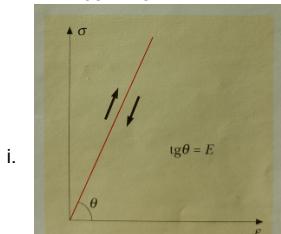


Figura 7.43

Legge di Hooke per le deformazioni lineari.

- Mentre per quanto riguarda tipici del modulo di Young / modulo di elasticità :

TABELLA 7.2 Modulo di Young	
Materiale	E
acciaio	$2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$
argento	$7.5 \cdot 10^{10}$
ferro	$2.0 \cdot 10^{11}$
gomma	$5.80 \cdot 10^6$
ottone	$9.1 \cdot 10^{10}$
piombo	$1.4 \cdot 10^{10}$
platino	$1.5 \cdot 10^{11}$
polietilene	$1.14 \cdot 10^9$
rame	$1.1 \cdot 10^{11}$
tungsteno	$3.5 \cdot 10^{11}$
vetro per finestre	$7.0 \cdot 10^{10}$

- Vediamo infine un esempio :

**Esempio 7.20** L'allungamento elastico di un filo di alluminio

Determinare, per un filo di alluminio, di diametro  $d = 2$  mm e lunghezza  $l = 1.2$  m, l'allungamento per effetto di una sollecitazione a trazione con carico  $F = 120$  N, figura 7.44.

**Soluzione** La sezione del filo è

$$S = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 = \pi (10^{-3})^2 = 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2,$$

pertanto il carico specifico vale

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{120}{3.14 \cdot 10^{-6}} = 3.82 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2.$$

L'allungamento è dato da (7.27), con  $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  (vedi tabella 7.2) :

$$\Delta l = l \frac{\sigma}{E} = 1.2 \frac{3.82 \cdot 10^7}{7 \cdot 10^{10}} = 0.65 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.65 \text{ mm};$$

l'allungamento unitario è vale  $\Delta l/l = 0.54 \cdot 10^{-3}$ .

- i. Ma se per effetto della trazione, il corpo riduce anche la sezione: se è sezione trasversale, si arriva alla **legge di Poisson**

$$\frac{\Delta l}{l} = -\nu \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \sqrt{\varepsilon} = -\sqrt{\frac{\sigma}{E}}$$

Coefficiente di Poisson

- ii. Dove il coefficiente di Poisson è adimensionale e i suoi valori tipici sono i seguenti :

TABELLA 7.3 Coefficiente di Poisson	
Materiale	v
acciaio	0.30
alluminio	0.33
caucciù	0.50
ferro	0.30
ottone	0.35
piombo	0.40
platino	0.38
rame	0.34
vetro per finestre	0.25

## 2. Deformazione plastica, rottura ed isteresi elastica

- a. Ricordiamo che il comportamento elastico in seguito a trazione compressione, si manifesta entro un certo limite il quale è detto **valore critico del carico**: oltre questo limite (**carico di snervamento**) il materiale si deforma: **deformazione plastica (trasformazione irreversibile)**, il quale limite (inferiore) specifica dove e come avviene la deformazione, fino ad arrivare al limite (superiore) che il corpo si spezza: **carico unitario di rottura**

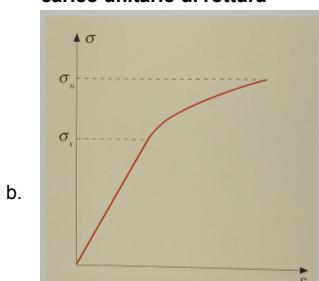


Figura 7.45

Definizione del carico specifico di snervamento  $\sigma_s$  e di rottura  $\sigma_u$ .

- c. In base alla resistenza meccanica del corpo si definisce come **tenace** se la sua resistenza è altra, **fragile** altrimenti. Un materiale può essere sia **duttile** che **tenace**, dove per **duttile** intendiamo la capacità di deformarsi prima di rompersi  
d. Vediamo ora una proprietà dei corpi solidi: **l'isteresi elastica** ovvero quel ciclo descritto come quella caratteristica di un sistema di reagire in ritardo alle sollecitazioni applicate e in dipendenza dallo stato precedente:

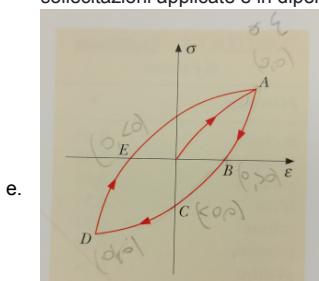


Figura 7.46

Ciclo d'isteresi elastica di una sbarra.

## 3. Scorrimento

- a. Consideriamo un parallelepipedo bloccato ad una parete da una parte, ma da altra è libero ed applicando una forza F si osserva uno **scorrimento** di una delle due facce rispetto all'altra, il quale provoca un angolo  $\theta$ . In dettaglio:

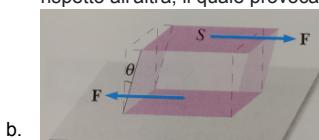


Figura 7.47

Scorrimento di un corpo di forma rettangolare.

c. Ed applicando la legge di Hooke si ha che :

i.

$$\sigma = G \cdot \epsilon$$

modulo di rigidità

d. I quali valori tipici sono i seguenti :

TABELLA 7.4 Modulo di rigidità	
Materiale	G
acciaio	$8.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \cdot \text{rad}$
alluminio	$2.5 \cdot 10^{10}$
ferro	$8.0 \cdot 10^{10}$
ottone	$3.0 \cdot 10^{10}$
piombo	$5.0 \cdot 10^9$
platino	$6.0 \cdot 10^{10}$
rame	$4.0 \cdot 10^{10}$
tungsteno	$1.4 \cdot 10^{11}$
vetro	$2.5-3.2 \cdot 10^{10}$

e. Quindi riepilogando : tra le costanti elastiche viste finora , esiste la relazione :

i.

$$G = \frac{E}{2(1+v)}$$

vale per piccole deformazioni.

#### 4. Torsione e pendolo di torsione

a. Consideriamo una sbarra cilindrica di raggio  $r$  e lunghezza  $l$  , bloccata ad un estremo (base) ed ad altro estremo applico una forza (coppia di forze con momento  $M$  parallelo ad asse di rotazione), le quali sottopongono la sbarra a **torsione**

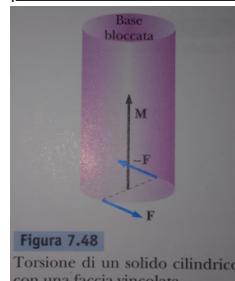


Figura 7.48  
Torsione di un solido cilindrico con una faccia vincolata.

c. Dove il valore del momento ( $M$ ) necessario per far ruotare la base superiore rispetto a quella inferiore vale :

i.

$$M = \frac{\pi G r^4}{2 l} \theta = K \theta$$

d. Mentre la reazione della sbarra si manifesta **con momento opposto (-M)** ovvero **-k\*teta** proporzionale all'angolo di torsione. Su questa reazione si basa sia il **pendolo che la bilancia di torsione**

i. Il lavoro quindi compiuto per effettuare la torsione è uguale a:

1.

$$W = \int_0^\theta \pi r^2 d\theta = K \theta^2 / 2$$

2. Il quale viene immagazzinato nel sistema come **energia potenziale elastica**

3. Vediamo un esempio

Esempio 7.22 La torsione di una sbarra cilindrica

a. Determinare il momento necessario per provocare la torsione di  $\theta = 1^\circ$  di una sbarra cilindrica di ferro ( $G = 8.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \cdot \text{rad}$ ) con  $r = 1 \text{ cm}$  e  $l = 1 \text{ m}$ .

Soluzione Il coefficiente  $k$  nella (7.31) vale

$$k = \frac{\pi}{2} \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{10^{-8}}{1} = 1.26 \cdot 10^5 \text{ Nm/rad}$$

Dato che  $\theta = 1^\circ$  corrisponde a  $1.7 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ ,  $M = 21.4 \text{ Nm}$ .

e. Studiamo ora il **pendolo di torsione** : ovvero sospendendo un corpo solido attaccata ad un filo :

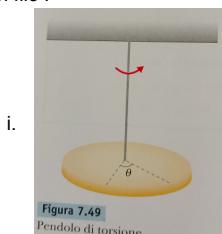


Figura 7.49  
Pendolo di torsione.

- ii. Se ruotiamo il disco di angolo teta mantenendo il filo orizzontale, il filo subisce una torsione e sviluppa un momento elastico  $-k^*teta$ . Appena viene rilasciato si ha che il filo si mette in rotazione sotto l'azione del momento elastico :

$$-k\theta = I\ddot{\theta} \quad (I \frac{d^2\theta}{dt^2})$$

$\downarrow$   
Salvo che  
 $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$

Momento  
interno  
rispetto  
ad uno di  
rotazione

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

2. Quindi il sistema descrive **oscillazione armonica**

- iii. Nota : durante l'oscillazione del pendolo di torsione si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica(trascurando attrito dell'aria e dissipazioni di energia del filo) :

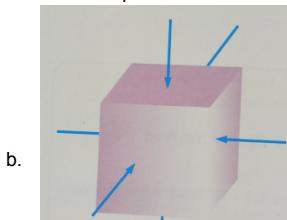
In generale perizone

$$\frac{1}{2}K\theta^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \text{costante}$$

$\downarrow$   
velocità  
angolare

## 5. Pressione e compressione uniforme

- a. Andiamo ora a trattare le proprietà elastiche dei solidi : andiamo a vedere la **pressione** definita come una forza applicata su una superficie ( $F/s$ ). Dedichiamoci a studiare quella **uniforme** ovvero applichiamo su una superficie una forza costante



**Figura 7.50**  
Compressione uniforme di un solido cubico.

- c. Quindi se  $V$  è il volume occupato dal corpo in corrispondenza della **pressione esterna  $p$** , ad una variazione di pressione  $\Delta p$  corrisponde una **variazione di volume  $\Delta V$**  si ha

i.

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta} \Delta p$$

$\beta$   
Modulo compressione  
isotermico  $\Delta T = 0$

- ii. Dove  $\beta$  assume i seguenti valori :

TABELLA 7.5 Modulo di compressibilità isotermica		
Materiale	$\beta$	
acciaio	$1.6 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$	
acqua	$2.1 \cdot 10^9$	
alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$	
ferro	$1.7 \cdot 10^{11}$	
mercurio	$2.8 \cdot 10^{10}$	
ottone	$6.1 \cdot 10^{10}$	
rame	$1.4 \cdot 10^{11}$	
tungsteno	$2.0 \cdot 10^{11}$	
vetro per finestre	$5.0-5.5 \cdot 10^{10}$	

- d. Quindi facendo un riepilogo , ovvero vedendo la relazione tra  $\beta$  e le altre costanti elastiche si ha che :

i.

$$\beta = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

- ii. Quindi si evince che **solo due costanti elastiche sono indipendenti E e G, mentre  $\beta$  e  $\nu$  sono calcolate**

- e. Completamente diverso invece è il discorso dei gas : ricordiamo che vale la legge di Boyle  **$pV=costante$**  e differenziando si ha  $p\Delta V + V\Delta P = 0$  ovvero :

i.

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow \beta = p$$

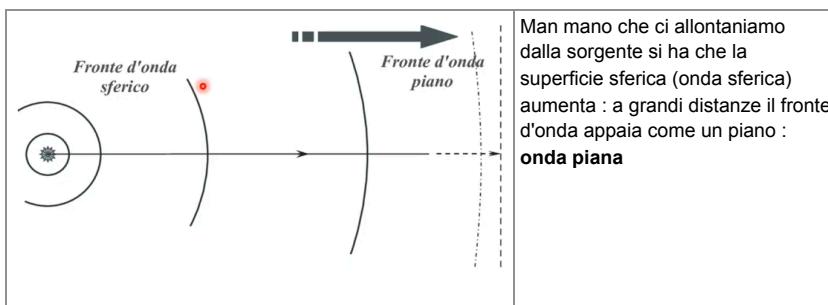
- ii. Quindi il **modulo di compressibilità per un gas** isotermica è uguale alla **pressione stessa** : quindi questa costante (modulo di compressibilità) è l'unica grandezza caratteristica di una deformazione elastica che possiamo definire per un fluido

## Onde meccaniche 2 (Onde + Onde armoniche + sovrapposizione + interferenza)

giovedì 24 aprile 2025 11:19

Vediamo ora un concetto importante : **l'onda** ovvero una perturbazione che si propaga nello spazio trasportando energia **con velocità finita**. Per perturbazione si intende un disturbo generato in una grandezza fisica, come per esempio se si getta un sasso in un lago : le particelle del fluido cominciano a muoversi in varie direzioni (perturba la posizione delle particelle dell'acqua). Queste onde si dividono in due : **quelle meccaniche e quelle**

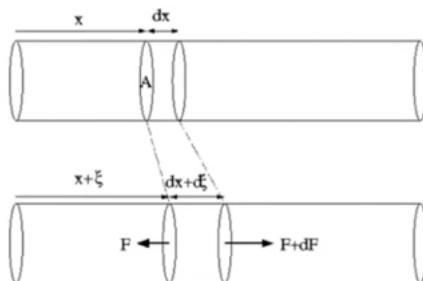
**elettromagnetiche**: questa tipologia di onde che hanno bisogno di un supporto materiale per propagarsi (esempio suono) -> **materiale**: quindi rappresentano l'oscillazione del mezzo nel quale si propagano; mentre per le seconde non c'è bisogno di un supporto materiale : si possono propagare anche nel vuoto e materia (esempio luce) . In questa tipologia la grandezza perturbata è il campo elettromagnetico. Dopo questa intro vediamo ora come nasce una perturbazione (esempio del sasso nell'acqua) : c'è una sorgente che perturba la grandezza fisica , e questa sorgente fornisce energia all'onda (energia meccanica si trasferisce alle particelle). Per quanto riguarda la propagazione(anelli concentrici o meglio **creste ed avvallamenti dell'onda**) parte dalla posizione centrale , e questi anelli prendono il nome di **fronte d'onda -> luogo in cui i punti hanno la stessa fase (massimo) o la stessa velocità** . Per quanto riguarda le particelle, appena vengono interessate dall'arrivo dell'onda, cominciano ad oscillare verticalmente ed in parte orizzontalmente (non spostandosi dalla loro posizione). **Nota si propaga solo la perturbazione e non la materia**. Consideriamo ora la propagazione del suono ad una certa altezza: si propaga nello spazio quindi in questo caso le onde hanno superficie sferica , arrivando così all'**onda sferica** . Vediamo ora in dettaglio :



In generale parleremo di onde **meccaniche – elastiche** ma perché? Perché il modo in cui si comportano dalle forze di richiamo che vengono investite dall'onda : le forze che agiscono sui punti tendono a riportarli nella posizione iniziale . Queste onde elastiche vengono suddivise a loro volta in **longitudinali e trasversali** (bisogna vedere come oscillano le particelle rispetto alla direzione di propagazione dell'onda):



Vediamo ora come studiare le onde, attraverso le equazioni :



Supponiamo di perturbare la sbarra con una martellata : la perturbazione si trasmette tutto lungo la sbarra : onda longitudinale . Con A rappresentiamo la sezione della sbarra e dx uno spostamento infinitesimo , il volume comincia ad oscillare sotto effetto forze elastiche : le forze

agenti sono diverse , provocando avvicinamento ed allontanamento delle sezioni . Quindi studiando il moto lungo l'asse x si ha che :

$$dF = dm \cdot a = \rho S dx \cdot a = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} , \text{ dove } a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

La quale messa insieme alla legge di Hooke

$$F(x) = -ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = -ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{dove } \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ è l'estensione per unità di lunghezza} \left( \frac{\Delta l}{l} \right) \text{ che le sbarre subisce}$$

Quindi analizzando i termini :

$$dF = [F(x) - F(x + dx)] = F(x) - [F(x) + \frac{\partial F}{\partial x} dx] = -\frac{\partial F}{\partial x} dx$$

Sostituendo a F, l'espressione della legge di Hooke =>

$$dF = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad \text{e quindi, delle piane espansione,}$$

$$ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{equazione d'onda}$$

Dove al primo membro c'è una derivata parziale che dipende sia da x che dal tempo, mentre al secondo membro ho derivata parziale rispetto al tempo ed un coefficiente (non sempre uguale, ma dipende dal mezzo dove si sta propagando l'onda) , dove  $\rho$  indica la densità e E il modulo di Young; quindi questo coefficiente rappresenta l'inverso della velocità al quadrato (velocità dell'onda alla quale si propaga nel mezzo) , arrivando così a:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{con } v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Se poniamo in un paes } v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \text{ su un corde} \\ v = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \end{array} \right]$$

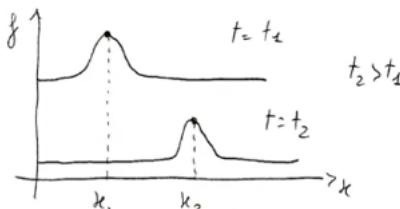
Quindi in generale l'equazione delle onde ha questa forma (equazione di d'Alembert):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Dove f rappresenta la perturbazione . Quindi questa equazione rappresenta un'onda piana sia longitudinale che trasversale. La soluzione di questa equazione è di due soli tipi: o soluzione positiva->regressiva o negativa->progressiva , ma in generale si ha

$$f(\kappa \pm vt)$$

E studiandolo in un grafico (onda progressiva):



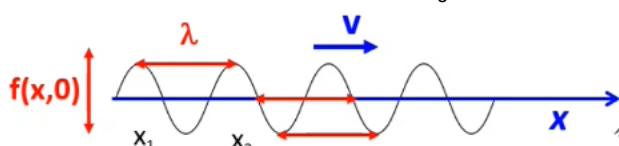
Dove ad ascissa  $x_1$  c'è il massimo dell'impulso. Notiamo che l'onda trasla rigidamente su asse x. Quindi nel tempo  $\Delta t$  l'onda trasla di  $\Delta x = v \Delta t$  quindi si ha :

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > 0$$

Quindi se osservo che l'onda viaggia sia nel tempo che nello spazio , ed imponendo l'uguaglianza del valore del picco dell'onda si arriva alla formula sopra. Andiamo ora a vedere un particolare tipo di onde : quelle armoniche (espressa in seno o coseno)

$$f(x, t) = A \sin K(x - vt) = A \sin(Kx - \omega t) \quad \text{con } \omega = Kv \quad \text{e } K = \text{numero d'onda.}$$

Dove A rappresenta l'ampiezza dell'onda ,  $\omega$  rappresenta la pulsazione dell'onda ,  $K$  rappresenta il numero d'onda ->  $K=2\pi/\lambda$  . In dettaglio :



Dove si è scelto il tempo T=0 . Se consideriamo la distanza tra due massimi si parla di lunghezza d'onda (lambda) e si ha che :

$$\text{neanche } f(x_1, 0) = A \sin(Kx_1) \times f(x_2, 0) = A \sin(Kx_2)$$

$$\text{cioè } Kx_1 = Kx_2 , \text{ma } x_2 = x_1 + \lambda \Rightarrow$$

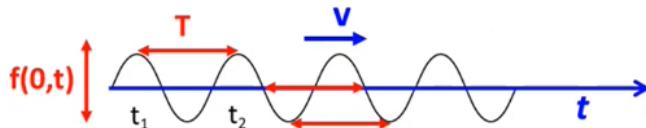
$$A \sin Kx_1 = A \sin(Kx_1 + K\lambda) \quad \text{ormai}$$

$$K\lambda = 2\pi \Rightarrow K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Dove  $K$  (numero d'onda) rappresenta il numero di lunghezze d'onda contenuti in  $2\pi$  metri (periodicità spaziale dell'onda) quindi  $w$  diventa :

$$\omega = Kv = \frac{2\pi}{\lambda} v$$

Analogamente a quanto fatto prima , stavolta invece fissiamo la posizione e facciamo variare il tempo:



Dove  $T$  (periodo) definisce la periodicità temporale dell'onda ovvero da differenza tra due massimi / minimi (tempo dopo il quale la funzione assume lo stesso valore della precedente). Quindi si ha che :

$$f(0, t_1) = f(0, t_1 + T) \Rightarrow A \sin \omega t_1 = A \sin (\omega t_1 + \omega T)$$

che è vero se  $\omega T = 2\pi$  e dunque

$T = \frac{2\pi}{\omega}$  che si può anche definire come il tempo necessario a compiere una oscillazione completa.

C'è una relazione tra la periodicità spaziale e quella temporale ?? Assolutamente , ovvero :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = Kv = \frac{2\pi}{\lambda} v \Rightarrow \lambda = vT$$

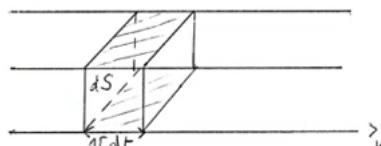
Per quanto riguarda il periodo , c'è una grandezza che è il suo inverso : la frequenza (Hz) la quale è calcolata come  $f=1/T$  , quindi usando il periodo si ha che la velocità dell'onda si calcola così :

$$f = \frac{1}{T}, \text{ o } \omega = \lambda f = v$$

Quindi in generale , se considero una fase ( $f_0$ ) ovvero argomento della funzione seno se  $x=0$  e  $t=0$  ho che la fase si può scrivere così:

$$\varphi(x, t) = Kx - \omega t + \varphi_0$$

Notiamo che se un'onda si propaga attraverso mezzi differenti solo la sua frequenza (determinata dalla sorgente) rimane costante , invece la velocità e la grandezza d'onda variano in quanto dipendono dal mezzo. Vediamo ora gli aspetti energetici studiando così l'espressione dell'energia e dell'intensità di un'onda :



Dove se colpisco la massa  $m$ , il volumetto infinitesimo  $dV$  si muove, acquista energia e si comporta come oscillatore armonico , la cui energia vale :

$$dE = \frac{1}{2} dm \omega^2 A^2$$

Mentre per quanto riguarda l'intensità :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \frac{dm \omega^2 A^2}{dS dt} = \frac{1}{2} \rho \frac{dV \omega^2 A^2}{dS dt} = \frac{1}{2} \rho \frac{\int dS v^2 dV \omega^2 A^2}{dS dt} = \\ &= \frac{1}{2} \rho v^2 \omega^2 A^2 \quad \text{dove la quantità } \frac{1}{2} \rho v^2 \omega^2 = u \text{ si chiama "densità} \end{aligned}$$

di energia , cioè energia per unità di volume, per cui si può scrivere

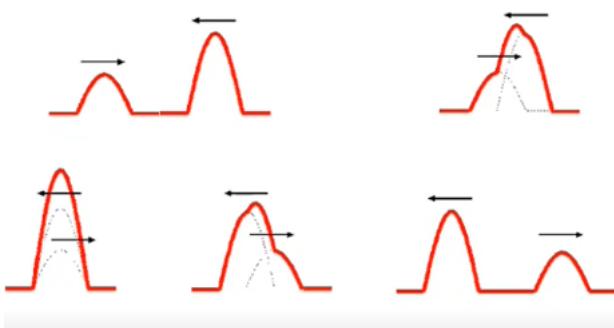
$$I = u v \quad \text{dove } u \text{ si esprime in } J/m^3$$

Vediamo un esempio : la relazione tra un'onda espressa in decibel ed un'onda espressa nel sistema internazionale:

$$I_{(dB)} = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad \text{Es.: } 70dB = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \rightarrow 7 = \log_{10} \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow 10^7 = \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow I = 10^{-5} W/m^2$$

Quanto detto finora vale per una sola onda nel mezzo , ma che succede se nello stesso mezzo si ha la propagazione di più onde? Si arriva alla sovrapposizione delle onde che sfrutta il

principio della sovrapposizione: ovvero date due perturbazioni  $f_1(x, t)$  ed  $f_2(x, t)$  quella totale è uguale a  $f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)$ . Vediamo un esempio :



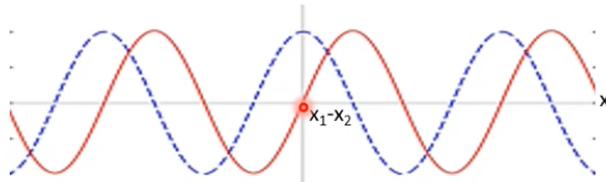
Il quale esempio ci fa capire il fenomeno dell'**interferenza** : ovvero se due onde sono ISO frequenziali (stessa frequenza) -> stessa pulsazione e lo sfasamento dove rimanere costante-> coerenza si ha questo fenomeno. Quindi in dettaglio :

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= A_0 \sin(Kx - \omega t) \\ f_2(x, t) &= A_0 \sin(Kx - \omega t + \varphi) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{anche } f_1(x, t) = A_0 \sin(Kx, -\omega t) \\ \text{oppure } f_2(x, t) = A_0 \sin(Kx_2 - \omega t) \end{array} \right.$$

$\Downarrow$

$$\text{da cui } \varphi = (Kx_1 - \omega t) - (Kx_2 - \omega t) = K(x_1 - x_2)$$

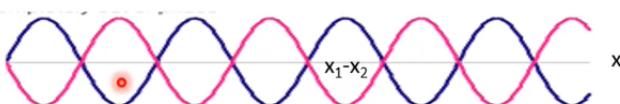
Dove la differenza di fase tra le due onde (f1) è data dalla lunghezza d'onda per la differenza di cammino ( $\Delta x$ ). In dettaglio :



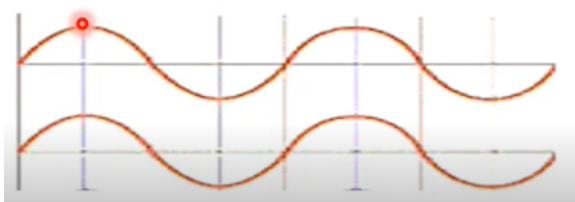
E supponiamo di osservare il fenomeno quando l'onda rossa passa per l'origine : si ha sfasamento di  $\pi/2$  quindi :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 - x_2) \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{\lambda}{4}$$

Vediamo altro esempio (sfasamento di  $\pi$  quindi  $\Delta x = \lambda/2$ ) : il massimo dell'una è uguale al minimo dell'altra



Mentre se le onde fossero in fase ( $0\pi$ ) oppure  $2\pi$  non si riuscirebbe a distinguerle : **perfetta sovrapposizione**



## Onde meccaniche 3 (Sfasamento + battimenti + stazionarie + Doppler)

giovedì 24 aprile 2025 17:25

Riprendendo il discorso dello sfasamento delle onde si arriva a determinare l'ampiezza dell'onda risultante, ma come?? Attraverso le formule di Prostaferesi :

$$f(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t) = 2A_0 \cos \frac{\varphi}{2} \sin(Kx - \omega t + \frac{\varphi}{2})$$

La quale onda ha ancora stessa pulsazione e lunghezza d'onda delle due componenti, ma l'ampiezza varia : dipende dallo sfasamento iniziale. In dettaglio :

$$A = 2A_0 \cos \frac{\varphi}{2}$$

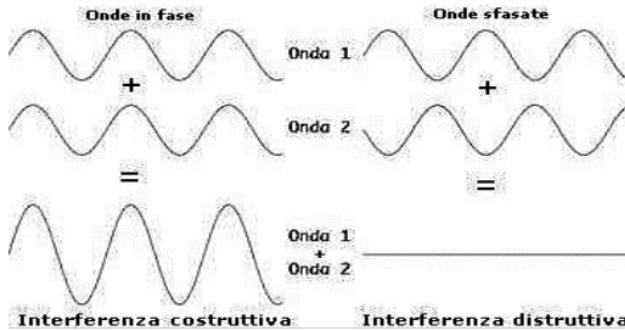
Vediamo ora due casi limite : **interferenza costruttiva e distruttiva**. Nel primo caso si fa sfasamento iniziale multiplo di  $2\pi$ , ovvero della forma  $2m\pi \rightarrow \Delta x = m\lambda$  quindi si ha che :

$$\text{dove, per } \varphi = 2m\pi \Rightarrow A = \pm 2A_0 \\ \text{fornie } \Delta x = m\lambda$$

Mentre nel secondo caso si hanno sfasamenti dispari  $2(m+1)\pi \rightarrow \Delta x = (2m+1)/\lambda$  ovvero :

$$\text{e, per } \varphi = (2m+1)\pi \Rightarrow A = 0 \\ \text{fornie } \Delta x = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

Vediamo ora un esempio :



Nel primo caso le onde sono in fase (i massimi e minimi coincidono) mentre nel secondo si ha uno sfasamento di  $\pi$ ->**opposizione di fase**. Ricordiamoci che l'ampiezza è proporzionale all'energia, la quale è legata all'intensità, quindi l'ampiezza è proporzionale all'intensità secondo :

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \sigma \left(2A_0 \cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \sigma 4A_0^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

Che nel caso di interferenza costruttiva si ha il massimo dell'ampiezza si ha che :

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1 \Rightarrow I = 4I_0$$

Mentre nel caso di quella distruttiva (opposizione di fase) :

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow I = 0$$

Quindi quanto detto finora ci porta a ribadire quanto sia importante **la condizione di coerenza delle onde**, altrimenti se la fase variasse casualmente si ritornerebbe nel caso già studiato della sovrapposizione :

$$I_{\text{media}} = 2I_0 \text{ in quanto il valore medio di } \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vediamo ora i **battimenti** ovvero sovrapposizione di onde con frequenze molto vicine tra loro (il rapporto tra differenza e somma vale 0.01) si propagano nello stesso mezzo e con velocità data da :

$$\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \approx 10^{-2} \quad \nu = \frac{\omega_1}{K_1} = \frac{\omega_2}{K_2}$$

Quindi in dettaglio ed avendo due onde :

$$f_1(x,t) = A \sin(K_1 x - \omega_1 t) \quad \text{e} \quad f_2(x,t) = A \sin(K_2 x - \omega_2 t)$$

Delle quali la pulsazione e la lunghezza d'onda differiscono di poco si ha che :

$$\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{e} \quad K_1 \approx K_2 \Rightarrow K = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

Ed usando la duplicazione del seno di Prostaferesi :

$$f(x,t) = 2A \sin \left[ \frac{(k_1+k_2)}{2} x - \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2} t \right] \cos \left[ \frac{(k_1-k_2)}{2} x - \frac{(\omega_1-\omega_2)}{2} t \right]$$

$$*\left[ \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \right]$$

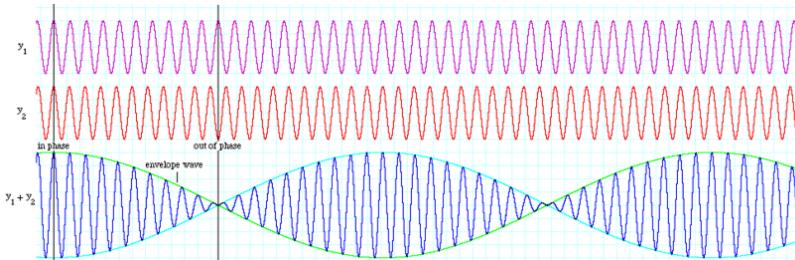
Quindi introducendo le approssimazioni di k e w si arriva alla seguente formula per i battimenti

$$f(x,t) = 2A \sin(Kx - \omega t) \cos \left[ \frac{(k_1-k_2)}{2} x - \frac{(\omega_1-\omega_2)}{2} t \right] \quad \text{dove chiama}$$

$$B(x,t) = 2A \cos \left[ \frac{(k_1-k_2)}{2} x - \frac{(\omega_1-\omega_2)}{2} t \right] \quad \text{scrivendo quindi l'onda risultante come:}$$

$$f(x,t) = B(x,t) \sin(Kx - \omega t)$$

Attenzione però : sia pulsazione che lunghezza d'onda di B(x, t) sono **delle medie di quelli delle singole onde** , mentre per l'ampiezza è ancora un'onda in quanto data dal termine B(x, t) è onda : ampiezza non costante in quanto w e k sono molto piccoli -> quindi si ha lunghezza d'onda molto grande in quanto frequenza molto piccola . Vediamo un esempio :



Dove la funzione B(x, t) ->  $y_1+y_2$  è involucro ad altre frequenze. Se queste due onde fossero acustiche , e avendo un osservatore in un dato punto fisso dello spazio , si avrebbe un suono la cui frequenza è **la media delle due frequenze delle onde** , ma l'intensità varia con una frequenza chiamata **di battimento** che vale la differenza tra la prima frequenza e la seconda. Vediamo ora il caso in cui due onde a stessa frequenza si propagano nello stesso mezzo con stessa direzione , ma verso opposto : in questo caso di parla di **onde stazionarie (stessa ampiezza e sono in fase)**. Quindi si ha la seguente situazione l'onda si propaga nel mezzo insieme al suo "riflesso" :

$$f_1(x,t) = A \sin(Kx - \omega t) \quad \times f_2(x,t) = A \sin(Kx + \omega t)$$

Sommando le due onde , uscire con le formule di postafersi , si ha :

$$f(x,t) = 2A \sin Kx \cos \omega t$$

Quindi in questo caso la soluzione differisce dalla soluzione di d'Alembert( soluzione nella quale compare sia spazio che tempo in una singola onda  $f(x \pm vt)$  ) , in quanto sono **in due differenti onde** : quindi in questo caso ci sono due tipi di punti : i **nodi** che sono sempre fermi e **ventri** che oscillano con ampiezza massima pari a 2A :

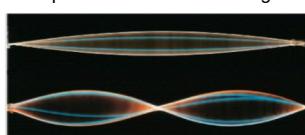
Le posizioni dei nodi saranno quelle in cui  $\sin Kx = 0$  , cioè

$$x = \frac{m\pi}{K} = \frac{m\pi}{2\pi} \lambda = m \frac{\lambda}{2} \quad \text{quindi la distanza fra i nodi è } \frac{\lambda}{2}$$

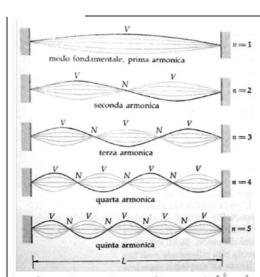
Mentre per i ventri si deve avere  $\sin Kx = \pm 1 \Rightarrow$

$$x = \frac{(2m+1)\pi/2}{K} = \frac{(2m+1)\pi/2}{2\pi} \lambda = m \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

Vediamo ora un esempio : ho una corda di lunghezza L fissata ad entrambi gli estremi



Più in generale :



Quindi in pratica c'è la seguente relazione per i nodi :

$$L = m \frac{\lambda}{2}$$

Quindi in generale :

$$\text{Se } m=1 \Rightarrow L = \frac{\lambda}{2} \quad (\text{due nodi e un solo ventre})$$

$$m=2 \Rightarrow L = \lambda \quad (\text{tre nodi e due ventri})$$

$$m=3 \Rightarrow L = \frac{3}{2} \lambda \quad (\text{quattro nodi e tre ventri})$$

Dove se  $m=1$  si parla di **armonica fondamentale**. La cui frequenza :

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{m v}{2L}$$

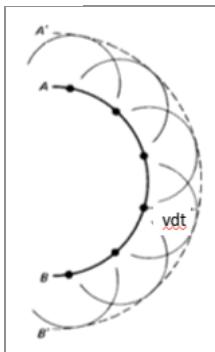
Vediamo degli esempi:

$v = 400 \text{ m/s}$

$L=0.6 \text{ m}$

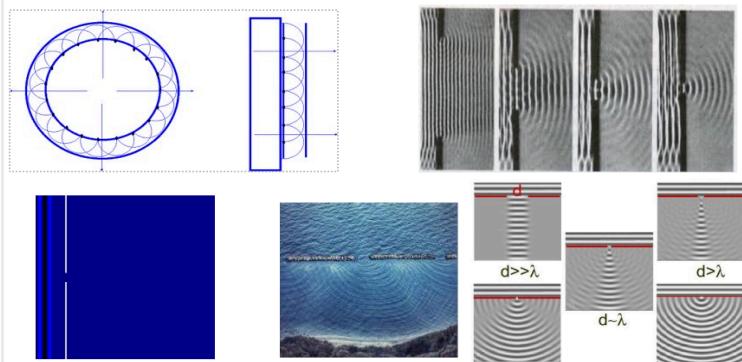
m	$\lambda(\text{m})$	$\nu(\text{Hz})$
1	1.2	333.3
2	0.6	666.7
3	0.4	1000
4	0.3	1333.3

Finiamo la trattazione teorica delle onde andando a vedere il **principio di Huygens** ovvero quel principio che ci permette di costruire il fronte d'onda all'istante successivo  $t+\Delta t$ . Di solito l'onda si propaga in un mezzo elastico di tipo tridimensionale, quindi i fronti d'onda (luogo dei punti dello spazio in cui la perturbazione arriva con la stessa fase) sono costituiti da superfici sferiche: quindi supponendo come fronte d'onda il tratto AB, con questo principio si può costruire il fronte d'onda ad istante successivo. Andiamo a vedere come: supponiamo che ogni punto (infinitesimo) del fronte d'onda generi a sua volta **onde sferiche secondarie**, tutte in fase tra loro:



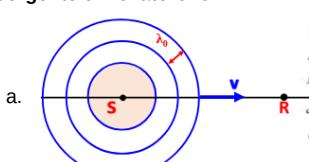
Dove il tratto A'B' rappresenta il fronte d'onda al tempo  $t+\Delta t$ : rappresenta la superficie involucro delle onde secondarie emesse al tempo  $t+\Delta t$ . Quindi ora il tratto da considerare diventa quello appena descritto e questo procedimento si può ripetere. Notiamo inoltre che  $v\Delta t$  rappresenta la distanza tra il vecchio fronte d'onda e quello secondario, che ora diventa quello principale

Vediamo ora degli esempi :



Vediamo ora un effetto delle onde molto importante: **l'effetto Doppler** ovvero un effetto che si manifesta per qualunque natura delle onde (anche per quelle elettro-magnetiche). Mettiamoci nella seguente situazione: **c'è una sorgente (che emette onde) ed un rilevatore (destinatario delle onde) nella quale la destinazione (rivelatore) riceve una frequenza delle onde diversa da quella emessa dalla sorgente** e vediamo i vari casi nei quali si possono trovare:

### 1. Sorgente e rilevatore fermi



- b. In questo caso la sorgente emette onde, le quali si propagano in modo sferico e prima o poi arrivano al ricevitore:  $v$  è la velocità di propagazione dell'onda mentre  $\lambda_0$  rappresenta la larghezza del fronte d'onda. Ma quanti sono i fronti d'onda che arrivano da sorgente a rilevatore:

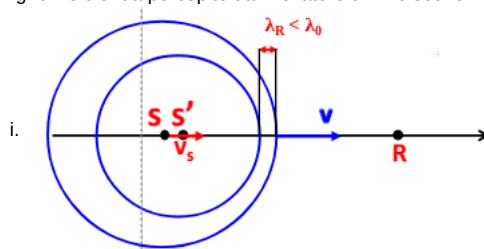
$$N = \frac{v \Delta t}{\lambda_0}$$

- d. Dove  $N$  è il numero dei fronti d'onda,  $v$  è la velocità di propagazione e  $\lambda_0$  la larghezza del fronte d'onda

- e. Quindi in termini di frequenza (fronti d'onda percepiti/rivelati) dal rilevatore si ha che

$$f_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{\frac{v}{\lambda_0} \Delta t}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0 \quad \text{creci} \quad \nu_R > \nu_0 \quad \text{cosicidono.}$$

- g. Quindi riassumendo : se sorgente e rilevatore sono fermi , **la frequenza percepita dal rilevatore è uguale a quella emessa dalla sorgente**
2. Uno dei due si muove
- La sorgente si muove con velocità  $v_s$  verso il rilevatore** la quale velocità è molto minore di quella dell'onda : quindi man mano che la sorgente si avvicina , le lunghezze d'onda percepite dal rilevatore diminuiscono .



ii. Quindi si ha che :

$$\text{iii. } \lambda_R = \lambda_0 - v_s T_0$$

$$\lambda_R = \frac{\nu}{\nu_0} - \frac{v_s}{\nu_0}$$

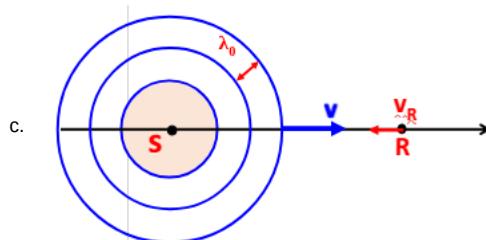
Dove la prima rappresenta l'equazione vista dal rivelatore; Nel secondo caso invece si ha che la larghezza d'onda può essere descritta come rapporto di due frequenze , ed il periodo  $T_0$  viene descritto come reciproco della frequenza

iv. Quindi il numero di fronti d'onda che arriveranno al rivelatore :

$$\text{v. } \nu_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{\nu \Delta t}{\lambda_R \Delta t} = \frac{\nu}{\lambda_R} = \frac{\nu}{\lambda_0 - v_s T_0} = \frac{\nu}{\frac{\nu}{\nu_0} - \frac{v_s}{\nu_0}} = \frac{\nu \nu_0}{\nu - v_s}$$

vi. Quindi frequenza emessa ( $\nu_0$ )risulta diversa da quella percepita ( $\nu_R$ ) : tutto questo dipende dalla convenzione usata : se la sorgente si avvicina al rivelatore si ha velocità positiva , altrimenti negativa

- Il rivelatore si muove verso la sorgente con velocità  $v_r$**  la distanza tra i fronti d'onda è sempre costante  $\lambda_0$



d. E si ha che

$$N = \frac{(\nu + v_r) \Delta t}{\lambda_0} \quad \text{da cui}$$

$$\text{e. } \nu_R = \frac{\nu + v_r}{\lambda_0} = \frac{\nu + \nu R}{\frac{\nu}{\nu_0}} = \nu_0 \frac{\nu + \nu R}{\nu} = \nu_0 \left(1 + \frac{v_r}{\nu}\right)$$

f. Quindi riassumendo

$$\text{g. } v_r > 0 \Leftrightarrow \nu_R > \nu_0 ; \quad v_r < 0 \Leftrightarrow \nu_R < \nu_0$$

h.

3. Entrambi si muovono

$$\text{a. } \nu_R = \nu_0 \frac{\nu + v_R}{\nu - v_s} \quad \text{usando le stesse convenzioni fare i ragionamenti.}$$

- b. Ovvero la sorgente si avvicina al rivelatore ed il rivelatore si allontana

Vediamo ora degli esempi :

$$\nu_0=1000\text{Hz} \quad v_s=20\text{m/s} \quad v=340\text{m/s}$$

$$v_R=1062.5\text{Hz} \quad (v_s>0) \quad \nu_R=944.4\text{Hz} \quad (v_s<0)$$

$$\nu_0=1000\text{Hz} \quad v_s=20\text{m/s} \quad v=340\text{m/s}$$

$$v_R=1058.8\text{Hz} \quad (v_s>0) \quad \nu_R=941.1\text{Hz} \quad (v_s<0)$$

$$\nu_0=1000\text{Hz} \quad v_s=10\text{m/s} \quad v_R=10\text{m/s} \quad v=340\text{m/s}$$

$$v_R=1060.6\text{Hz} \quad (v_s>0) \quad (v_R>0)$$

Tornando al discorso dell'effetto Doppler , vediamo ora il caso in cui lo spostamento della sorgente e del rivelatore non è lungo l'asse ..ma è perpendicolare:



Si ha che se la sorgente e/o il rivelatore si spostano con velocità perpendicolare alla componente SR , l'effetto Doppler non insorge