Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Seconda prova di valutazione in itinere - 14 Giugno 2019
A.A. 2018-2019

Durata della prova 2 ore
Punteggi: 1) $5+5+6+6$; 2) $4+4$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 15\,x^2 y & \text{se } 0 < x < y < 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità di X e Y e calcolare $Cov(X, Y)$.

(ii) Trovare la densità condizionale di X dato $Y = 1/2$ e calcolare $E[X|Y = 1/2]$.

(iii) Calcolare $P(Y < \frac{1}{2}|X < \frac{1}{4})$ e $P(X + Y \leq 1)$;

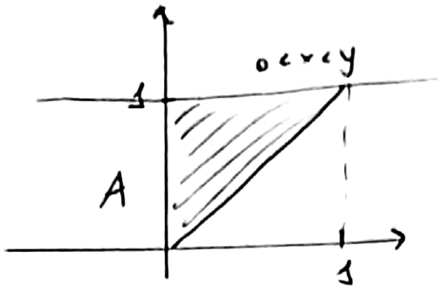
(iv) Trovare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $Z = \frac{X}{Y}$ e determinarne la densità. Calcolare inoltre la densità della v.a. $W = -\ln Z$

Esercizio 2 Si commissiona uno studio per valutare la proporzione θ di incidenti mortali sul numero totale di incidenti automobilistici avvenuti nei fine settimana. A tale proposito si osserva un campione di 100 incidenti e per ogni $i \leq 100$ si pone $X_i = 1$ se l' i-esimo incidente è stato mortale, $X_i = 0$ altrimenti. Si rileva che sul campione in esame, 16 incidenti sono stati mortali.

(i) Calcolare un intervallo di confidenza di livello 0.99 per il parametro θ;

(ii) Sia $\theta = \frac{1}{5}$. Ultilizzando l'approssimazione normale, stimare la probabilità che su 400 incidenti almeno 20 siano stati mortali.

$$f(x,y)=\begin{cases}15x^2y & \text{se } 0<x<y<1\\ 0 & \text{ALTRIMENTI}\end{cases}$$



$$f_x(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\notin[0,1]\\ \int_x^1 15x^2y\,dy = 15x^2\frac{y^2}{2}\Big|_x^1 = 15x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{15x^2}{2}-\frac{15x^4}{2} & \text{se } x\in[0,1]\end{cases}$$

$$f_y(y)=\begin{cases}0 & \text{se } y\notin[0,1]\\ \int_0^y 15x^2y\,dx = 15\frac{x^3}{3}y\Big|_0^y = 15\frac{y^3}{3}y = 5y^4 & \text{se } y\in[0,1]\end{cases}$$

X, Y NON SONO INDIP $f(x,y)\neq f_x(x)f_y(y)$

$$\text{COV}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{15}{28}-\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{336}$$

$$E(XY)=\iint_A xy\,15x^2y\,dx\,dy = \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x<y \text{ e } 0<y<1\}$$

$$\int_0^1 dx\int_x^1 xy\,15x^2y\,dy = \int_0^1 15x^3dx\int_x^1 y^2dy = \int_0^1 \frac{15x^3}{3}dx - \int_0^1 5x^6 =$$

$$=\frac{35-20}{28}=\frac{15}{28}$$

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot\frac{15x^2}{2}(1-x^2)=\frac{15}{2}\left(\int x^3dx-\int x^5dx\right)=\frac{15x^4}{8}-\frac{5x^6}{4}\Big|_0^1=\frac{5}{8}$$

$$E(Y)=\int_0^1 y\cdot 5y^4\,dy = 5y^5\Big|_0^1=\frac{5}{6}$$

(ii) $$f_{(x|y)}(x|\tfrac{1}{2})=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\frac{15x^2\frac{1}{2}}{5(\frac{1}{2})^4}\cdot\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{2})}(x)=24x^2\cdot\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{2})}(x)$$

$$E(X|\tfrac{1}{2})=\int_0^{1/2}x\,24x^2\,dx = 24x^3\Big|_0^{1/2}=24\frac{(\frac{1}{2})^4}{4}=\frac{3}{8}$$

(iii) $$P(Y<\tfrac{1}{2}\mid X<\tfrac{1}{4})=\frac{\int_0^{1/2}dy\int_0^{1/4}f(x,y)dx}{\int_0^{1/4}f_x(x)\,dx}=\frac{\int_0^{1/2}dy\int_0^{1/4}15x^2y\,dx}{\int_0^{1/4}\frac{15x^2}{2}(1-x^2)dx}$$

$$\frac{\int_0^{1/2}\frac{5}{64}y\,dy}{\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x^5\right)\Big|_0^{1/4}}=\frac{\frac{5}{512}}{\frac{47}{2048}}=\frac{20}{47}\simeq 0{,}259$$

$$P(X+Y<1) = \iint_{A\{(x,y\};\,0<x<y<1,\ y\le 1-x\}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^{1/2} dx \int_x^{1/2} 15x^2 y\,dy + \int_0^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}}^{x-1} 15x^2 y\,dy =$$

$$\int_0^{1/2} \frac{15x^2}{8} - \frac{15x^4}{2}\,dx + \int_0^{1/2} \frac{60x^4 - 120x^3 + 45x^2}{8}\,dx$$

$$\frac{1}{32} + \frac{3}{64} = \frac{5}{64}$$

(iv) $F_Z(z) = (Z \le z) = P\left(\frac{X}{Y} \le z\right) = P\left(Y \ge \frac{X}{z}\right)$

$$F_Z(z) = \int_0^{z} dx \int_{\frac{x}{z}}^{1} 15x^2 y\,dy = \int_0^{z} \frac{15x^2 z^2 - 15x^4}{2z^2}\,dx =$$

$$\Rightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0,1] \\ z^3 & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica A.A. 2009/10

Calcolo delle Probabilità e Statistica

II Prova di valutazione in Itinere

Punteggi: **1.** 4+4+4; **2.** 4+4+4 ; **3.** 4+4; totale = 32 .

Esercizio 1. Sia $X \sim U[2,6]$

i) Calcolare la densità della variabile aleatoria $Y = [X]-2$, $E(Y)$, $Var(Y)$, avendo indicato con $[\cdot]$ la funzione parte intera;

ii) Calcolare la densità della variabile aleatoria $Z = -\log\left(\frac{6-X}{4}\right)$; si tratta di una densità nota?

iii) Sia $V = 2 - 10Z$; calcolare $E[V]$, $Var(V)$, $P(V \geq 1)$.

Esercizio 2. Un elettrodomestico ha un tempo di vita T che segue una legge esponenziale. Sapendo che la vita media del prodotto è 30 mesi, e che la ditta per garanzia si impegna a sostituirlo se si rompe entro 2 anni, calcolare:

i) la probabilità che la ditta non debba intervenire;

ii) il tempo di garanzia che dovrebbe stabilire la ditta in modo da dover intervenire in non più del 10% dei casi;

iii) la probabilità che l'elettrodomestico si rompa entro 3 anni sapendo che la garanzia è scaduta.

Esercizio 3. Un'industria produce 100 lampade al giorno. Ogni lampada risulta difettosa con probabilità 0.05 ed indipendentemente dalle altre.

i) Stimare la probabilità che la produzione giornaliera non presenti più di 7 pezzi difettosi usando il teorema del limite centrale;

ii) stimare la probabilità che la produzione giornaliera non presenti più di 3 pezzi difettosi usando l'approssimazione di Poisson.

Soluzioni della II prova di valutazione in itinere a.a. 2009/10

1. Se $X \sim U([2,6])$, allora la sua densità è $f_X(x) = \mathbf{1}_{(2,6)}(x) \cdot \frac{1}{4}$.
(i) $Y = [X] - 2 \in \{0, 1, 2.3, 4\}$ Si ha:

$$P(Y = 0) = P(X \in [2,3)) = \int_2^3 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 1) = P(X \in [3,4)) = \int_3^4 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 2) = P(X \in [4,5)) = \int_4^5 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 3) = P(X \in [5,6)) = \int_5^6 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 4) = P(X = 6) = 0$$

Pertanto Y ha distribuzione uniforme su $\{0, 1, 2, 3\}$. Risulta $E(Y) = \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 + 3) = \frac{3}{2}$ e $E(Y^2) = \frac{1}{4}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{7}{2}$. Quindi $Var(Y) = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$.
(ii) Si ha $Z = -\ln\left(\frac{6-X}{4}\right) \geq 0$; inoltre per $t \geq 0$:

$$P(Z \leq t) = P\left(-\ln\left(\frac{6-X}{4}\right) \leq t\right) = P\left(\ln\left(\frac{6-X}{4}\right) \geq -t\right) =$$

$$= P\left(\left(\frac{6-X}{4}\right) \geq e^{-t}\right) = P(X \leq 6 - 4e^{-t}) = F_X(6 - 4e^{-t}).$$

Derivando:

$$f_Z(t) = f_X(6 - 4e^{-t}) \cdot 4e^{-t} =$$

$$= \mathbf{1}_{(2,6)}(6 - 4e^{-t}) \cdot \frac{1}{4} \cdot 4e^{-t} = e^{-t},$$

visto che $6 - 4e^{-t} \in [2, 6)$ per $t \geq 0$. Dunque Z ha densità esponenziale di parametro $\lambda = 1$ e $E(Z) = Var(Z) = \lambda = 1$.
(iii) Se $V = 2 - 10Z$, si ha:

$$E(V) = 2 - 10E(Z) = 2 - 10 = -8$$

$$Var(V) = 100Var(Z) = 100$$

$$P(V \geq 1) = P(2 - 10Z \geq 1) = P(Z \leq 1/10) = 1 - e^{-1/10},$$

visto che Z ha densità esponenziale di parametro 1.

2. Se T ha distribuzione esponenziale di parametro λ e $E(T) = 1/\lambda = 30$ (mesi), allora deve essere $\lambda = 1/30$.
(i)

$$P(T \geq 2 \text{ anni }) = P(T \geq 24 \text{ mesi }) =$$

$$1 - P(T \leq 24) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 24}) = e^{-4/5}$$

(ii) Detto τ il nuovo tempo di garanzia, deve eversi:

$$P(T \leq \tau) \leq 1/10,$$

ovvero $1 - e^{-\tau/30} \leq 1/10$, $9/10 \leq e^{-\tau/30}$ e passando al logaritmo:

$$\tau \leq -30 \ln(9/10) \approx 3.16 \text{ mesi}$$

(iii)

$$P(T \leq 3 \text{ anni } |T > 2 \text{ anni}) = P(T \leq 36 \text{ mesi } |T > 24 \text{ mesi}) =$$

(grazie alla mancanza di memoria della legge esponenziale)

$$= P(T \leq 12) = 1 - e^{-12/30} = 1 - e^{-2/5} \approx 0.329$$

3. Sia X il numero delle lampade difettose prodotte in un giorno. Allora $X \sim B(100, 0.05)$.
(i) Per $a \in [0, 100]$:

$$P(X \leq a) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} \leq a)$$

dove le $X_i \sim B(1, 0.05)$ e sono indipendenti. Dunque:

$$P(X \leq a) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} - 100 \cdot 0.05}{\sigma\sqrt{100}} \leq \frac{a-5}{10\sigma}\right) =$$

(utilizzando l'approssimazione del TLC, dove Φ indica la funzione di ripartizione della Normale standard)

$$= \Phi\left(\frac{a-5}{10\sigma}\right)$$

Poichè $\sigma = \sqrt{0.05 * 0.95} = 0.217$, la probabilità cercata vale approssimativamente $\Phi\left(\frac{a-5}{2.17}\right)$; per $a = 7$, tale quantità è $\Phi(0.92) = 0.82$.
(ii) Utilizzando l'approssimazione di Poisson, se Y ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 100 \cdot 0.05 = 5$, si ha:

$$P(X \leq 3) \approx P(Y \leq 3) = e^{-5}(1 + 5 + 25/2 + 125/6) = 0.265$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
II prova di valutazione in itinere a.a. 2011/12

Punteggi:
1. 3+4; **2.** (5 CFU) 4+3+3+5 ; **2.** (6 CFU) 3+3+5+4; **3.** 2+3+3; totale = 30.

1. (5 e 6 CFU) Un componente A è formato da 2 elementi in serie; un secondo componente, B, è invece formato da un solo elemento. Siano T_A e T_B i tempi di vita del componente A e B rispettivamente.
(i) Supponiamo che i tre elementi abbiano tempi di vita indipendenti ed esponenziali di media 1/2. Trovare la densità di T_A, e calcolare $P(T_A \geq 1/2)$ e $P(T_B \geq 1/2)$. Quale delle due probabilità è più grande?
(ii) Supponiamo ora che i tre elementi abbiano tempi di vita indipendenti ed uniformemente distribuiti in $[0, 1]$, rispondere alle stesse domande di (i).

2. (5 CFU) Sia X una v.a. di densità

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\theta > 0$.
i) Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ di X.
ii) Calcolare media e varianza di X.
iii) Calcolare $P(1/9 < X \leq 1/3)$
iv) Trovare la densità di $Y = X^2$, e calcolare media e varianza di Y.

2. (6 CFU) Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità di X e Y. Risultano v.a. indipendenti?
(ii) Calcolare $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$ e $Cov(X, Y)$.
(iii) Calcolare $P(Y - 4X^2 > 0)$.
(iv) Trovare la densità di $Z = X + Y$ e calcolare:
  (a) $P(\ln(X + Y) < 0)$;
  (b) il quantile di Z di ordine 1/3, cioé il valore q per cui $P(Z \leq q) = 1/3$.

3. (5 e 6 CFU) La probabilità che uno studente dimentichi (in maniera indipendente dagli altri) di portare con sé la calcolatrice alla prova scritta dell'esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica è $p = 1/100$. Supponiamo che 200 studenti si presentino all'esame scritto.
i) Calcolare la probabilità che tutti gli studenti abbiano la calcolatrice e la probabilità che vi siano più (>) di 2 studenti senza calcolatrice.
ii) Stimare il valore di quest'ultima probabilità utilizzando l'approssimazione di Poisson;
iii) Stimare lo stesso valore utilizzando l'approsimazione normale. Che valutazione si può dare per queste due approsimazioni? Quale di esse non dovrebbe essere utilizzata, e perché?

Soluzioni della II prova di valutazione in itinere a.a. 2011/12

1. (i) Indichiamo con T_1, T_2, T_3 i tempi di vita dei 3 elementi, che sono indipendenti ed esponenziali di parametro $\lambda = 2$. Se T_A denota il tempo di vita del componente A, risulta $T_A = \min(T_1, T_2)$, che, come noto, ha legge esponenziale di parametro $2+2=4$. Pertanto,

$$P(T_A \geq 1/2) = e^{-4\cdot\frac{1}{2}} = e^{-2}$$

Siccome $T_B \sim esp(2)$, si ha

$$P(T_B \geq 1/2) = e^{-2\cdot\frac{1}{2}} = e^{-1} > P(T_A \geq 1/2).$$

(ii) Ora T_1, T_2, T_3 sono indipendenti e uniformemente distribuiti su $[0,1]$. Allora, come prima, $T_A = \min(T_1, T_2)$ e quindi, ricordando la f.d.d. di una v.a. uniformemente distribuita in $[0,1]$:

$$P(T_A \geq t) = P(T_1 \geq t)P(T_2 \geq t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < 0 \\ (1-t)^2 & \text{se } t \in [0,1] \\ 0 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

Dunque $P(T_A \geq 1/2) = (1-1/2)^2 = 1/4$, mentre $P(T_B \geq 1/2) = 1 - 1/2 = 1/2 > P(T_A \geq 1/2)$.

2. (5 CFU) (i) Si ha:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_0^x \theta t^{\theta-1} dt & \text{se } x \in (0,1) \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Siccome

$$\int_0^x \theta t^{\theta-1} dt = x^\theta,$$

si ottiene:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^\theta & \text{se } x \in (0,1) \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} .$$

(ii) Si ha:

$$E(X) = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^\theta dx = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+2}$$

e quindi:

$$Var(X) = \frac{\theta}{\theta+2} - \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^2$$

(iii)
$$P(1/9 < X \leq 1/3) = \int_{1/9}^{1/3} \theta x^{\theta-1} dx = \left(\frac{1}{3}\right)^{\theta} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\theta} = \frac{3^{\theta}-1}{9^{\theta}}$$

(iv) Se $Y = X^2$, risulta $Y \in (0,1)$; allora per $y \in (0,1)$:

$$P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) =$$

(poiché $X \in (0,1)$)
$$= P(0 \leq X \leq \sqrt{y}) = (\sqrt{y})^{\theta} = y^{\theta/2}.$$

Pertanto:
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ y^{\theta/2} & \text{se } y \in (0,1) \\ 1 & \text{se } y \geq 1 \end{cases}$$

da cui, derivando, segue la densità di Y :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ \frac{\theta}{2} y^{\theta/2-1} & \text{se } y \in (0,1) \\ 0 & \text{se } y \geq 1 \end{cases}$$

Quindi Y ha densità simile a quella di X; essa si ottiene dalla densità di X, sostituendo $\theta/2$ al posto di θ. Pertanto, utilizzando i calcoli precedenti per la media e la varianza di X, si ottiene:
$$E(Y) = \frac{\theta/2}{\theta/2+1} = \frac{\theta}{\theta+2}$$
$$Var(Y) = \frac{\theta/2}{\theta/2+2} - \left(\frac{\theta}{\theta+2}\right)^2 = \frac{\theta}{\theta+4} - \left(\frac{\theta}{\theta+2}\right)^2.$$

2. (6 CFU) (i) Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{(0,1)^2}(x,y) \cdot (x+y) dy$$

Dunque, per $x \notin (0,1)$ risulta $f_X(x) = 0$, mentre per $x \in (0,1)$ si ottiene:

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y) dy = x + \frac{1}{2}$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 (x+y) dx & \text{se } y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & \text{se } y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto, X e Y hanno stessa legge, ma non sono indipendenti, in quanto $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.

(ii)

$$E(X) = E(Y) = \int_0^1 t(t + \frac{1}{2})dt = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = \int_0^1 t^2(t + \frac{1}{2})dt = \frac{5}{12}$$

da cui $Var(X) = Var(Y) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$;

$$E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(x+y)dy = \int_0^1 xdx \int_0^1 (yx + y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 xdx \Big[xy^2/2 + y^3/3\Big]_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \int_0^1 dx(x^2/2 + x/3) = \frac{1}{3} \ .$$

Infine $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144}$.

(iii) Si ha:

$$P(Y > 4X^2) = \int\int_F (x+y)dx\ dy$$

dove F è l'insieme indicato in Figura 1. Esplicitando il calcolo, si ottiene:

$$P(Y > 4X^2) = \int_0^{1/2} dx \int_{4x^2}^1 (x+y)dy = \int_0^{1/2} dx \Big[xy + \frac{y^2}{2}\Big]_{y=4x^2}^{y=1} =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + x - 4x^3 - 8x^4\right) dx = \ldots = \frac{21}{80}$$

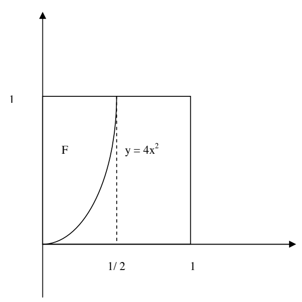


Figura 1

(iv) Per $z \in (0,2)$, la densità di $Z = X + Y$ è data dalla formula:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx =$$

$$= \int_0^1 \mathbf{1}_{(0,1)}(z-x) \cdot (x + z - x)\ dx = \int_0^1 \mathbf{1}_{(z-1,z)}(x) \cdot z\ dx$$

Pertanto:

se $z \in (0,1)$, si ottiene:

$$f_Z(z) = \int_0^z zdx = z^2$$

se $z \in (1,2)$, si ottiene:

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 zdx = z(2-z)$$

In conclusione:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \leq 0 \\ z^2 & \text{se } z \in (0,1) \\ z(2-z) & \text{se } z \in (1,2) \\ 0 & \text{se } z \geq 2 \end{cases}$$

(a) $P(\ln(X+Y) < 0) = P(Z \in (0,1)) = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}$.

(b) Il quantile di Z di ordine $\alpha = \frac{1}{3}$ è $q_\alpha = 1$; infatti $P(Z \leq 1) = \frac{1}{3}$.

3. i) Il numero di studenti dimenticoni, X, è evidentemente una v.a. con distribuzione binomiale $B(200, 1/100)$. Dunque la probabilità che tutti gli studenti abbiano con sé la calcolatrice è

$$(1 - 1/100)^{200} = 0.134.$$

ii) La probabilità richiesta vale

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) =$$

$$1 - \binom{200}{0}\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{200} - \binom{200}{1}\frac{1}{100}\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{199} - \binom{200}{2}\frac{1}{100^2}\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{198} =$$

$$= 0.3233213$$

Secondo l'approssimazione di Poisson, la legge $B(200, 1/100)$ si approssima con una legge di Poisson di parametro $\lambda = np = 200\frac{1}{100} = 2$. La probabilità che una tale v.a. sia più grande ($>$) di 2 è:

$$P(X \geq 3) \approx 1 - e^{-2}(1 + 2 + 2) = 1 - 5e^{-2} = 0.3233236$$

Quindi l'approssimazione poissoniana qui è particolarmente accurata (oltre che molto comoda). L'approssimazione normale (con l'approssimazione di continuità) invece darebbe

$$P(X \geq 3) = P(X \geq 2.5) \approx 1 - \Phi\left(\frac{2.5 - 2}{\sqrt{0.01 \cdot 0.99}\sqrt{200}}\right) = 0.3611695$$

ed è quindi molto meno precisa. Del resto qui $np = 2$, mentre la regola pratica sull'applicabilità dell'approssimazione normale alle somme di v.a. di Bernoulli richiede che sia $np > 5$.

Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Seconda prova di valutazione in itinere - 27 Giugno 2017
A.A. 2016-2017

Durata della prova 2.5 h
Punteggi: 1) $4+4+3$; **2)** $4+4+4$; **3)** $4+3$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Sia dato un parametro $a > 0$. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{se } \ x \in [0, a]; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare a affinché $f(x)$ sia la densità di una variabile aleatoria continua X;

(ii) Si ricavi la funzione di ripartizione F di X e se ne determini il quantile di ordine $\frac{1}{2}$. Calcolare inoltre $P\left(X > \frac{1}{2} | X \leq \frac{3}{4}\right)$.

(iii) Trovare la densità di $Y = 1 - X$; quanto valgono $E(X)$ e $E(1-X)$?

Esercizio 2 Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}(y+1)}, \text{ se } \ x > 0, y > 0; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità delle variabili aleatorie marginali X e Y.

(ii) Calcolare la densità condizionale di Y dato $X = 1$ e $P(Y \leq 2 | X = 1)$.

(iii) Calcolare la legge del vettore aleatorio $(X, Z) = \left(X, \frac{X}{Y}\right)$ e $Cov(X, Z)$.

Esercizio 3 Una ditta produce punte da trapano. Si provano n punte dello stesso diametro producendo n fori. Si indichino con $X_1, \ldots, X_n$ i diametri dei fori prodotti e si supponga che le v.a. X_i siano normali con media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 10^{-2}\ mm^2$.

(i) Se $n = 100$, supponiamo che la media campionaria sia $\bar{X}_{100} = \frac{1}{100}(X_1 + \cdots + X_{100}) = 5\ mm$; calcolare un intervallo di confidenza a livello $1 - \alpha = 0.95$ per la media μ.

(ii) Quanto grande occorre prendere l'ampiezza n del campione affinché con confidenza 95% la stima di μ abbia precisione $10^{-2}\ mm$?

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2016-17

Soluzioni della seconda prova di valutazione in itinere - 27 Giugno 2017

Esercizio 1 (i) Affinché f sia una densità si deve imporre $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$. Nel caso specifico,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \begin{cases} \int_0^a (1-x)\, dx \text{ se } a \in [0,1]; \\ \int_0^1 (1-x)\, dx + \int_1^a (x-1)\, dx \text{ se } a \geq 1. \end{cases}$$

Se $a \in [0,1]$ l'equazione non ammette soluzioni; per $a > 1$ si ottiene

$$\int_0^1 (1-x)\, dx + \int_1^a (x-1)\, dx = 1 \text{ se e solo se } a = 2.$$

$a = 2$ è quindi il valore cercato.

(ii)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0; \\ \int_0^x (1-u)\, du & \text{se } x \in [0,1]; \\ \int_0^1 (1-u)\, dx + \int_1^x (u-1)\, du & \text{se } x \in [1,2]; \\ 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0; \\ x - \frac{x^2}{2} & \text{se } x \in [0,1]; \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 & \text{se } x \in [1,2]; \\ 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Poiché $F(1) = \frac{1}{2}$ allora il quantile cercato coincide con 1.

Applicando la definizione di probabilità condizionata si ha inoltre:

$$P\left(X > \frac{1}{2} | X \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)}{P\left(X \leq \frac{3}{4}\right)} = \frac{F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{F\left(\frac{3}{4}\right)} = \cdots = \frac{1}{5}$$

(iii) Ricordando la formula per la densità di una trasformazione lineare, se $Y = 1 - X$, la densità di Y è, per $y \in (-1, 1)$:

$$f_Y(y) = f_X(1-y) = |1 - 1 + y| I_{[0,2]}(1-y) = |y| I_{[-1,1]}(y).$$

Calcoliamo prima $E(1-X)$.

$$E(1-X) = E(Y) = \int_{-1}^1 y|y|\, dy = 0,$$

perché la funzione integranda è dispari. Allora $0 = 1 - E(X)$, da cui segue $E(X) = 1$.

Esercizio 2 (i)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0; \\ \int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}(y+1)}\, dy = e^{-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0; \\ \int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}(y+1)}\, dx = \frac{2}{(y+1)^3} & \text{se } y \geq 0. \end{cases}$$

Infatti

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}(y+1)}\, dy = e^{-x} \int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}}\, dy$$

e posto $u = \frac{1}{y}$ si ottiene $\int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}}\ dy = \int_0^\infty x^2 u e^{-ux}\ du = 1$ perché è l'integrale una densità $\Gamma(2, x)$. Inoltre

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}(y+1)}\ dx = \frac{1}{y^3} \frac{2}{\left(\frac{y+1}{y}\right)^3} \int_0^\infty \left(\frac{y+1}{y}\right)^3 \frac{1}{2} x^2 e^{-\frac{x}{y}(y+1)}\ dx = \frac{2}{(y+1)^3}$$

perché l'integrale è l'integrale di una densità $\Gamma(3, \frac{y+1}{y})$.
(ii) Risulta facilmente

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} = \frac{y^{-3} e^{-(y+1)/y} I_{(0,+\infty)}(y)}{e^{-1}} = y^{-3} e^{-1/y} I_{(0,+\infty)}(y).$$

Inoltre

$$P(Y \le 2|X = 1) = \int_0^2 y^{-3} e^{-1/y}\ dy.$$

Calcolando l'integrale con la sostituzione $s = 1/y$, si ottiene infine

$$P(Y \le 2|X = 1) = \int_{1/2}^{+\infty} s e^{-s} ds = \frac{3}{2} e^{-1/2}.$$

(iii) Calcoliamo la densità congiunta del vettore aleaotorio $(X, X/Y) = \phi(X, Y)$, ove $(u, v) = \phi(x, y) = (x, x/y)$. Applicando il cambio di variabili, si ha:

$$u = x,\ v = \frac{x}{y}$$

e

$$x = u,\ y = \frac{u}{v},$$

ovvero $\phi^{-1}(u, v) = (u, u/v)$ (si noti che $\phi = \phi^{-1}$).

La matrice Jacobiana di ϕ^{-1} è:

$$J_{\phi^{-1}}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/v & -u/v^2 \end{pmatrix}$$

e $|det(J_{\phi^{-1}}(u, v))| = u/v^2$. Pertanto, la densità del vettore $(X, X/Y)$ è:

$$g(u, v) = \frac{u^2 v^3}{u^3} \cdot \frac{u}{v^2} \exp\left(-v(u/v + 1)\right) = v e^{-(u+v)}$$

Poiché si può scrivere

$$g(u, v) = e^{-u} \cdot v e^{-v}$$

le due v.a. X e X/Y sono indipendenti e si vede subito che X è esponenziale di parametro 1, mentre X/Y ha legge $\Gamma(2, 1)$.

Di conseguenza $cov(X, X/Y) = 0$.

Esercizio 3 (i) Un intervallo I di confidenza a livello $1 - \alpha$ per la media incognita di una distribuzione avente varianza σ^2, è:

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2}\right] \qquad (*)$$

dove $\bar{x}$ è la media campionaria, e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso in esame, si ha $n = 100$, $\bar{x} = 5$ e $\sigma = 1/10$. Da $1 - \alpha = 0.95$ segue $1 - \alpha/2 = 0.975$, e quindi dalla tavola dei valori di Φ si ricava $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Sostituendo in $(*)$, si ottiene l'intervallo $I = (4.98,\ 5.02)$.

(ii) Per soddisfare la condizione di precisione richiesta, l'ampiezza dell'intervallo fornito al punto (i) deve essere inferiore a $2 \cdot 10^{-2}$; pertanto deve essere

$$2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2} \leq 2 \cdot 10^{-2},$$

ovvero $n \geq 10^4 \cdot (1.96)^2 \cdot 10^{-2} = 384.16$, e quindi occorre prendere $n \geq 385$.

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA
INGEGNERIA CIVILE E A&T E INFORMATICA

SECONDA PROVA DI VALUTAZIONE IN ITINERE - 15 GIUGNO 2018
A.A. 2017-2018

Durata della prova 2 h
Punteggi: 1) $6 + 6 + 6$; **2)** $4 + 4 + 4$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x, y) = \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)}, \ x > 0, y > 0.$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y. Calcolare inoltre la densità condizionale di Y dato $\{X = 1\}$ e $E[Y|X = 1]$.

(ii) Calcolare la legge congiunta del vettore aleatorio (U, V), dove $U = X$ e $V = XY$. U e V sono indipendenti?

(iii) Calcolare la densità della v.a. $Z = \frac{U}{U+V}$ e $P(Z \leq \frac{1}{2}|Z > \frac{1}{4})$, essendo (U, V) il vettore di cui al punto precedente.

Esercizio 2 È noto che il peso X delle mele prodotte in un certo frutteto ha una distribuzione $N(210, 400)$. Sapendo che i frutti con peso minore di 200 sono considerati di seconda scelta, calcolare

(i) la probabilità p che una mela scelta a caso sia di seconda scelta.

Si scelgono ora n mele a ciascuna delle quale si associa la v.a.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esima mela è di seconda scelta;} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Utilizzando l'approssimazione normale stabilita dal teorema limite centrale stimare

(ii) la probabilità che in una cassetta di 200 mele ve ne siano non più di 50 di seconda scelta;

(iii) la probabilità in una cassetta di 250 pezzi ve ne siano almeno 215 di prima scelta.

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2017-18

Soluzioni della seconda prova di valutazione in itinere - 15 Giugno 2018

Esercizio 1 (i) Calcoliamo le densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)} dy & x \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $x > 0$ si ha

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x y} dy = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Analogamente

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \lambda^2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x(y+1)} dx & y \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $y > 0$ si ha

$$f_Y(y) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x(y+1)} dx = \frac{\lambda^2 \Gamma(2)}{(\lambda(y+1))^2} = \frac{1}{(y+1)^2}.$$

La densità condizionale di Y dato $\{X = 1\}$ ha la seguente espressione

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f(y,1)}{f_X(1)} = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \frac{\lambda^2 e^{-\lambda(y+1)}}{\lambda e^{-\lambda}} & y \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $y > 0$

$$f_{Y|X}(y|1) = \lambda e^{-\lambda y}$$

ovvero è una densità esponenziale di parametro λ. Di conseguenza $E[Y|X = 1] = \frac{1}{\lambda}$.

(ii) Cominciamo col calcolare la densità congiunta del vettore aleatorio $(X, XY) = \phi(X,Y)$, ove $(u,v) = \phi(x,y) = (x, xy)$. Applicando il cambio di variabili, si ha:

$$u = x, \ v = xy$$

e

$$x = u, \ y = \frac{v}{u},$$

ovvero $\phi^{-1}(u,v) = (u, v/u)$.

La matrice Jacobiana di ϕ^{-1} è:

$$J_{\phi^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v/u^2 & 1/u \end{pmatrix}$$

e $|det(J_{\phi^{-1}}(u,v))| = 1/u$. Pertanto, la densità del vettore (X, XY) è:

$$g(u,v) = \lambda^2 u e^{-\lambda u(\frac{v}{u}+1)} \cdot \frac{1}{u} = \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)}$$

Poiché si può scrivere

$$g(u,v) = \lambda e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda v}$$

le due v.a. X e XY sono indipendenti esponenziali di parametro λ.

(iii) Notiamo intanto che $Im\{Z\} = [0,1]$ e quindi la funzione di ripartizione di Z è nulla per $z \leq 0$ ed è 1 per $z \geq 1$. Per $z \in [0,1]$ si ha

$$F_Z(z) = P\left(\frac{U}{U+V} \leq z\right) = P\left(V \geq \frac{(1-z)}{z}U\right) =$$
$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} du \int_{\frac{(1-z)}{z}u}^\infty \lambda e^{-\lambda v} dv = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} e^{-\lambda \frac{(1-z)}{z} u} du = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \frac{u}{z}} du = z.$$

Di conseguenza Z è uniformemente distribuita nell'intervallo $[0,1]$.
Infine

$$P\left(Z \leq \frac{1}{2} | Z > \frac{1}{4}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{4} < Z \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(Z > \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 2 (i) $p = P\left(X \leq 200\right) = P\left(\frac{X-210}{20} \leq \frac{200-210}{20}\right) = \Phi(-0.5) =$
$= 1 - \Phi(0.5) \cong 1 - 0.69 = 0.31$

(ii) La sequenza $X_1, ..., X_{200}$ è una sequenza di variabili aleatorie i.i.d. bernoulliane di parametro p. Indichiamo inoltre con $S_{200} = X_1, ..., X_{200}$, con $\overline{X}_{200} = \frac{S_{200}}{200}$, e con X una v.a. gaussiana standard.

$$P(S_{200} \leq 50) = P\left(\frac{S_{200} - 200p}{\sqrt{200p(1-p)}} \leq \frac{50 - 200p}{\sqrt{200p(1-p)}}\right).$$

Posto $p = 0.31$ si ha quindi

$$P\left(\frac{S_{200} - 200p}{\sqrt{200p(1-p)}} \leq \frac{50 - 200p}{\sqrt{200p(1-p)}}\right) = P\left(\frac{S_{200} - 62}{6.54} \leq \frac{50 - 62}{6.54}\right) \approx P\left(X \leq -1.835\right) =$$

$$= \Phi(-1.835) = 1 - \Phi(1.835) = 1 - 0.966 = 0.034.$$

(iii) L'evento "in una cassetta di 250 pezzi ci sono almeno 215 mele di prima scelta" coincide con L'evento "in una cassetta di 250 pezzi ci sono al più 35 mele di seconda scelta". Quindi, analogamente al punto precedente si ha

$$P(S_{250} \leq 35) = P\left(\frac{S_{250} - 250p}{\sqrt{250p(1-p)}} \leq \frac{35 - 250p}{\sqrt{250p(1-p)}}\right)$$

che, per $p = 0.31$ diventa

$$P\left(\frac{S_{250} - 77.5}{7.31} \leq \frac{35 - 77.5}{7.31}\right) \approx P\left(X \leq -5.81\right) \cong 0.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Informatica A-I
II prova di valutazione in itinere a.a. 2005/06

1. Si consideri la v.a. X con densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\ e^{-(\ln x)^2/2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Trovare la densità della v.a. $Y = \ln X$, e calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$.
(ii) Calcolare $P(e^{-2} \leq X < e)$.
(iii) Calcolare $P(Y > 2 | Y > 1)$.

2. Un lampadario A è costituito da due lampadine A_1 e A_2, collegate tra loro in parallelo; un altro lampadario B è costituito da due lampadine B_1 e B_2, collegate in serie tra loro. I tempi di vita di A_1 e A_2 sono esponenziali di parametro $\lambda = 2$, quelli di B_1 e B_2 sono esponenziali di parametro $\mu = 1$; inoltre i quattro tempi di vita sono stocasticamente indipendenti tra loro.
(i) Trovare le densità dei tempi di vita, T_A e T_B, del lampadario A e del lampadario B; calcolare poi $E(T_A)$ e $E(T_B)$.
(ii) Si sceglie a caso uno dei lampadari (A o B) e lo si collega alla corrente: sia T il suo tempo di vita.
    (a) Calcolare $P(T > 5)$
    (b) Sapendo che $T > 5$, calcolare la probabilità che sia stato scelto il lampadario A.

3. Sono dati $n = 100$ componenti uguali tra loro, che vengono utilizzati come pezzi di ricambio in una certa apparecchiatura. Supponiamo che essi abbiano tempi di vita T_i indipendenti tra loro e che il rischio istantaneo di guasto per ciascuno sia
    $r_i(t) = 5$, $i = 1, \ldots 100$ ($t \geq 0$ è misurato in mesi).
Appena un componente si guasta viene sostituito.
(i) Stimare approssimativamente la probabilità che i 100 dispositivi siano sufficienti a garantire il funzionamento dell'apparecchiatura per 21 mesi.
(ii) Se le v.a. T_i fossero indipendenti tra loro e ciascuna avesse distribuzione Gaussiana di media 1/5 e varianza 1/25, quanto varrebbe
    $P(20 < T_1 + T_2 + \ldots T_{100} \leq 21)$? e $P(2T_1 + 2T_2 > \frac{4}{5})$?
(iii) Trovare il più grande valore di β per cui risulta $P(T_1 + T_2 + \ldots T_{100} \leq \beta) \leq 0.975$.

Soluzioni della II prova di valutazione in itinere a.a. 2005/06

1. (i) Si ha:

$$P(Y \le y) = P(\ln X \le y) = P(X \le e^y) = F_X(e^y)$$

Derivando, si ottiene la densità di Y :

$$f_Y(y) = f(e^y) \cdot e^y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

Dunque, risuta $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, e quindi $E(Y) = 0,\ Var(Y) = 1$.
(ii)

$$P(e^{-2} \le X < e) = P(-2 \le Y < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi(2) = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185$$

(iii)

$$P(Y > 2 | Y > 1) = \frac{P(Y > 2, Y > 1)}{P(Y > 1)} = \frac{P(Y > 2)}{P(Y > 1)} =$$

$$= \frac{1 - \Phi(2)}{1 - \Phi(1)} = \frac{1 - 0.9772}{1 - 0.8413} = 0.1436673$$

2. (i) Si ha $T_A = \max(T_{A_1}, T_{A_2}),\ T_B = \min(T_{B_1}, T_{B_2})$. Siccome T_{A_1} e T_{A_2} sono indipendenti ed hanno densità esponenziale di parametro $\lambda = 2$, ricordando la formula per la f.d.d. di una v.a. esponenziale, si ha:

$$P(T_A \le t) = P(T_{A_1} \le t, T_{A_2} \le t) =$$

$$P(T_{A_1} \le t) P(T_{A_2} \le t) = (1 - e^{-2t})^2$$

Analogamente, siccome T_{B_1} e T_{B_2} sono indipendenti ed hanno densità esponenziale di parametro $\mu = 1$, si ottiene:

$$P(T_B \ge t) = P(T_{B_1} \ge t, T_{B_2} \ge t) =$$

$$= P(T_{B_1} \ge t) P(T_{B_2} \ge t) = e^{-2t}$$

Si ha poi

$$E(T_A) = \int_0^\infty P(T_A > t) = \int_0^\infty (1 - (1 - e^{-2t})^2) dt =$$

$$= \int_0^\infty 2e^{-2t} dt - \int_0^\infty e^{-4t} dt = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$E(T_B) = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

(ii)

$$P(T>5) = P(T>5|A)P(A) + P(T>5|B)P(B) =$$

$$= \frac{1}{2}\{1-(1-e^{-10})^2 + e^{-10}\} = \frac{1}{2}(3e^{-10} - e^{-20}) = 0.0000681$$

(iii) Per la formula di Bayes:

$$P(A|T>5) = \frac{P(T>5|A)P(A)}{P(T>5)} =$$

$$= \frac{(1-(1-e^{-10})^2)*0.5}{0.0000681} = 0.6666616$$

3. (i) Siccome il tasso istantaneo di guasto dei componenti è costante ed uguale a 5,, i tempi di guasto T_i risultano esponenziali di parametro 5. Allora:

$$P(T_1 + \ldots + T_{100} > 21) = P\left(\frac{T_1 + \ldots + T_{100} - 100 \cdot (1/5)}{10/5} > \frac{21-20}{2}\right)$$

Per l'approssimazione Gaussiana fornita dal Teorema limite centrale, tale probabilità vale circa $1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$.
(ii) Se $T_i \sim \mathcal{N}(1/5, 1/25)$ allora $T_1 + \ldots + T_{100}$ ha distribuzione Gaussiana di media $100/5 = 20$ e varianza $100/25 = 4$. Pertanto

$$P(20 < T_1+T_2+\ldots T_{100} \leq 21) = P((20-20)/2 < (T_1+T_2+\ldots T_{100}-20)/2 \leq (21-20)/2) =$$

$$= \Phi(0.5) - \Phi(0) = 0.6915 - 0.5 = 0.1915$$

Per il teorema di addizione di v.a. Gaussiane e indipendenti, si ha $T_1 + T_2 \sim \mathcal{N}(2/5, 2/25)$, e quindi $W \doteq 2(T_1 + T_2) \sim \mathcal{N}(4/5, 8/25)$. Allora $P(2T_1 + 2T_2 > \frac{4}{5}) = P(W > \frac{4}{5})$ e, passando alla variabile standardizzata, tale probabilità vale $1 - \Phi(0) = 0.5$.
(iii) Se $T = T_1 + T_2 + \ldots T_{100}$, si ha:

$$P(T_1 + T_2 + \ldots T_{100} \leq \beta) = P(T \leq \beta) =$$

$$= P((T-20)/2 \leq (\beta-20)/2) = \Phi((\beta-20)/2)$$

Affinché tale valore sia $\leq 0.975 = \Phi(1.96)$, deve essere $(\beta - 20)/2 \leq 1.96$,
ovvero $\beta \leq 2 \cdot 1.96 + 20 = 23.92$. Dunque il più grande valore di β cercato è 23.92 .

Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Informatica
II prova di valutazione in itinere a.a. 2006/07

1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che $f(x)$ sia la densità di una v.a. X che abbia per media $E(X) = \frac{1}{2}$;
(ii) calcolare $P(X < \frac{1}{2})$ e $Var(X)$;
(iii) se $Y = e^X$, trovare la densità di Y.

2. Siano X e Y v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $(0, 1)$.
(i) Se $Z = \min(X, Y)$, qual è la densità di Z?
(ii) Se $W = \max(X, Y)$, qual è la densità di W?
(iii) Mostrare che $1 - Z$ ha la stessa legge (ovvero la stessa densità) di W.
(iv) Calcolare $P(1 - Z \leq \frac{\pi}{4})$, $E(Z)$ e $E(W)$.

3. Supponiamo che il numero di studenti che si iscrivono al corso di Laurea in Ingegneria Informatica sia rappresentato da una v.a. di Poisson X di media 100. Se il numero degli studenti effettivamente iscritti supera le 120 unità, si sarà costretti a sdoppiare i corsi di base, mentre se il numero sarà inferiore si farà un unico canale.
(i) Qual è la probabilità che i corsi di base vengano sdoppiati?
(ii) Trovare l'intero m, tale che $P(X \leq m) = 0.9505$.
(Sugger.: si ricordi che una v.a. di Poisson di parametro m intero si può scrivere come somma di m v.a. indipendenti e di Poisson di parametro 1).

Soluzioni della II prova di valutazione in itinere a.a. 2006/07

1. (i) Affinché $f(x)$ sia una densità deve essere:

$$\int_0^1 (ax + bx^2)\ dx = 1$$

Svolgendo l'integrale, si trova $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1$. Sappiamo inoltre che $E(X) = 1/2$, pertanto deve aversi:

$$\int_0^1 x(ax + bx^2)\ dx = \frac{1}{2}$$

ovvero, svolgendo l'integrale, $\frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{1}{2}$. Dunque a e b sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

che, risolto, fornisce $a = 6,\ b = -6$.
(ii) Si ha:

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} (6x - 6x^2)\ dx = \ldots = \frac{1}{2}$$

Inoltre

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\ 6(x - x^2)\ dx = \ldots = \frac{3}{10}$$

Quindi $Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.
(iii) La v.a. $Y = e^X$ assume valori in $[1, e]$. Per $y \in [1, e]$, si ha:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^X \le y) = P(X \le \ln y) = F_X(\ln y),$$

ove abbiamo indicato con F_X e F_Y la f.d.d. di X e Y, rispettivamente. Derivando rispetto a y, si ottiene la densità di Y :

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\ln y)\frac{1}{y} = \mathbf{1}_{(0,1)}(\ln y)\ \frac{6(\ln y - \ln^2 y)}{y} = \begin{cases} \frac{6(\ln y - \ln^2 y)}{y} & \text{se } y \in [1, e] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. (i) Essendo X e Y indipendenti, si ha, per $t \in [0, 1]$:

$$P(Z > t) = P(X > t)P(Y > t) = (1 - t)(1 - t) = (1 - t)^2$$

Allora $P(Z \le t) = 1 - (1 - t)^2$, e derivando si ottiene la densità di Z :

$$f_Z(t) = 2(1 - t)\mathbf{1}_{(0,1)}(t) = \begin{cases} 2(1 - t) & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(ii)
$$P(W \le t) = P(X \le t)P(Y \le t) = t^2$$
e, derivando, si ottiene la densità di W :
$$f_W(t) = 2t \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}(t)$$
(iii) Per la formula della densità di una trasformazione lineare di una v.a., si ottiene che la densità di $1 - Z$ è:
$$f_Z\left(\frac{t-1}{-1}\right) = f_Z(1-t) = 2(1-(1-t))\mathbf{1}_{(0,1)}(1-t) = 2t\mathbf{1}_{(0,1)}(t)$$
che è la densità di W; dunque $1 - Z$ ha la stessa legge di W.
(iv) Si ha:
$$P\left(1 - Z \le \frac{\pi}{4}\right) = P\left(W \le \frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\pi/4} 2t\ dt = \ldots = \pi^2/16$$
$$E(Z) = \int_0^1 2t(1-t)\ dt = \ldots = \frac{1}{3}$$
$$E(W) = \int_0^1 2t^2\ dt = \ldots = \frac{2}{3}$$

3. (i) La probabilità cercata è $P(X \ge 120)$. La soluzione esatta è:
$$P(X \ge 120) = e^{-100} \sum_{i=120}^{\infty} \frac{(100)^i}{i!}$$
che è impossibile da calcolare con una calcolatrice tascabile. Osservando che si può scrivere:
$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100},$$
ove le X_i sono v.a. indipendenti e di Poisson di parametro 1 (quindi hanno tutte media e varianza 1), ed utilizzando l'approssimazione Gaussiana fornita dal Teorema limite centrale, si ottiene:
$$P(X \ge 120) = P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{100} - 100 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{100}} \ge \frac{120 - 100}{10}\right) \approx 1 - \Phi(2) = 1 - 0.977 = 0.023$$
(qui, come usualmente, $\Phi(x)$ denota la f.d.d. di una v.a. Gaussiana standard).
Se avessimo usato l'approssimazione di continuità, avremmo invece ottenuto:
$$P(X \ge 120) = P(X \ge 119.5) \approx 1 - \Phi(1.95) = 0.0256$$
(ii) Occorre trovare m tale che $P(X \le m) = 0.9505 = \Phi(1.65)$. Ragionando come al punto (i), si ha:
$$P(X \le a) = P\left(\frac{X - 100}{10} \le \frac{a - 100}{10}\right) \approx \Phi\left(\frac{a - 100}{10}\right)$$
Uguagliando a $\Phi(1.65)$, si ottiene $\frac{a-100}{10} = 1.65$, che fornisce $a = 116.5$. Dunque, occorre prendere $m = 116$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica A.A. 2007/08

Calcolo delle Probabilità e Statistica

II Prova in Itinere

Esercizio 1. Sia data la funzione $f(x)$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{3}\left(2 - \frac{x}{3}\right)^2 & \text{se } \ |x| \leq 3 \\ 0 & \text{se } \ |x| > 3 \end{cases}$$

i) Determinare k in modo tale che $f(x)$ sia la densità di probabilità di una variabile aleatoria X;

ii) calcolare la funzione di ripartizione di X e la probabilità dell' evento $\{X \in (1,4)\}$;

iii) calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.

Esercizio 2. Due tecnici, Tommaso e Simone, dispongono ciascuno di 2 componenti per costruire un impianto elettrico. Tommaso decide di collegare i suoi componenti in parallelo, mentre Simone decide di utilizzare un solo componente e di sostituirlo in caso di rottura. Se i tempi di vita dei 4 componenti sono variabili aleatorie identicamente distribuite, esponenziali di media 5 (anni), Calcolare

i) Le leggi dei tempi di vita dell' impianto di Tommaso e di quello di Simone. Quale dei 2 impianti ha vita media maggiore?

ii) Calcolare la probabilità che l' impianto di Tommaso duri almeno 3 anni;

iii) calcolare la probabilità che l' impianto di Simone duri al più 5 anni.

Esercizio 3. Sia $X_1, ..., X_n$ una sequenza di v. a. indipendenti con legge comune $N(\mu, 16)$ e sia $\overline{X}_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$.

i) Determinare n affinché $[\overline{X}_n - 1, \overline{X}_n + 1]$ sia un intervallo di confidenza a livello $1 - \alpha = 0,95$ per la media incognita μ;

ii) sia $n = 100$; calcolare un intervallo di confidenza a livello $1 - \alpha = 0,90$ per la media incognita μ.

Soluzioni della II prova di valutazione in itinere a.a. 2007/08

Esercizio 1. i) $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi affinché $f(x)$ sia una densità di probabilità è sufficiente imporre la condizione $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, ovvero il parametro k deve essere soluzione dell' equazione

$$\int_{-3}^{3} \frac{k}{3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^2 dx = \int_{-3}^{3} \frac{k}{3}\left(4-\frac{4x}{3}+\frac{x^2}{9}\right) dx = 1$$

$$\text{ovvero } \frac{k}{3}\left(4x-\frac{2x^2}{3}+\frac{x^3}{27}\right)\Big|_{-3}^{3} = \frac{k}{3}\left(12-\frac{18}{3}+\frac{27}{27}+12+\frac{18}{3}+\frac{27}{27}\right) = \frac{26k}{3} = 1$$

cioé $\boxed{k = \frac{3}{26}}$

ii)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -3 \\ \int_{-3}^{x} \frac{1}{26}\left(2-\frac{y}{3}\right)^2 dy = \frac{1}{26}\left(4x-\frac{2x^2}{3}+\frac{x^3}{27}+19\right) & \text{se } |x| \leq 3 \\ 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X \in (1,4)) =& F_X(4) - F_X(1) = 1 - \frac{1}{26}\left(4-\frac{2}{3}+\frac{1}{27}+19\right) = 1 - \frac{1}{26}\left(\frac{108-18+1+513}{27}\right) = \\ =& 1 - \frac{302}{351} = \frac{49}{351} = 0,1396 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} E(X) =& \frac{1}{26}\int_{-3}^{3} x\left(2-\frac{x}{3}\right)^2 dx = \frac{1}{26}\int_{-3}^{3}\left(4x-\frac{4x^2}{3}+\frac{x^3}{9}\right) dx = \\ =& \frac{1}{26}\int_{-3}^{3}\left(-\frac{4x^2}{3}\right) dx = -\frac{12}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) =& \frac{1}{26}\int_{-3}^{3} x^2\left(2-\frac{x}{3}\right)^2 dx = \frac{1}{26}\int_{-3}^{3}\left(4x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^4}{9}\right) dx \\ =& \frac{1}{26}\int_{-3}^{3}\left(4x^2+\frac{x^4}{9}\right) dx = \frac{1}{13}\left(\frac{108}{3}+\frac{243}{45}\right) = \\ =& \frac{1}{13}\,\frac{1620+243}{45} = \frac{1863}{585} = 3.1846 \end{aligned}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1863}{585} - \frac{144}{169} = \frac{24219-6480}{7605} = \frac{17739}{7605} = 2.33$$

Esercizio 2. i) Siano T_1, T_2 le variabili aleatorie associate ai tempi di vita dei componenti di Tommaso e S_1, S_2 quelle associate ai tempi di vita dei componenti di Simone. Si tratta di variabili aleatorie esponenziali di parametro $\frac{1}{5}$.
Il tempo di vita dell' impianto di Tommaso è la variabile aleatoria $T = \max\{T_1, T_2\}$,

mentre il tempo di vita dell' impianto di Simone è la variabile aleatoria $S = S_1 + S_2$.
È noto che $S \sim \Gamma(2, \frac{1}{5})$ e che $E(S) = 2 \times 5 = 10$.
Calcoliamo la funzione di ripartizione e la densità di T.

$$F_T(x) = P(T \leq x) = P(T_1 \leq x, T_2 \leq x) = P(T_1 \leq x)(T_2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0; \\ \left(1 - e^{-\frac{x}{5}}\right)^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0; \\ \frac{2}{5} e^{-\frac{x}{5}} \left(1 - e^{-\frac{x}{5}}\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} E(T) = &\int_0^\infty \frac{2}{5} x e^{-\frac{x}{5}} \left(1 - e^{-\frac{x}{5}}\right) dx = \frac{2}{5} \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{5}} dx - \frac{2}{5} \int_0^\infty x e^{-\frac{2x}{5}} dx = \\ =&10 \int_0^\infty y e^{-y} dy - \frac{5}{2} \int_0^\infty z e^{-z} dz = (10 - \frac{5}{2}) = \frac{15}{2}, \end{aligned}$$

dove, nei precedenti integrali, sono state operate le sostituzioni $y = \frac{x}{5}$, $z = \frac{2x}{5}$, rispettivamente.
Se ne deduce che l'impianto di Tommaso ha una vita media minore rispetto a quello di Simone.

ii)

$$\begin{aligned} P(T \geq 3) =&1 - F_T(3) = 1 - (1 - e^{-\frac{3}{5}})^2 = 1 - (1 - 2e^{-\frac{3}{5}} + e^{-\frac{6}{5}}) = \\ =&2e^{-\frac{3}{5}} - e^{-\frac{6}{5}} \simeq 2 \times 0.5488 - 0.302 = 0.7956 \end{aligned}$$

iii) La funzione di ripartizione $F_S(x)$ di $S \sim \Gamma(2, \frac{1}{5})$ è

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{5}} - \frac{x}{5} e^{-\frac{x}{5}} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

quindi $P(S \leq 5) = F_S(5) = 1 - 2e^{-1} = 1 - 0.736 = 0.264$.
Alternativamente, poiché S ha densità $f_S(x) = \begin{cases} \frac{x}{25} e^{-\frac{x}{5}} \ \text{se } x \geq 0 \\ 0 \ \text{se } x < 0 \end{cases}$:

$$P(S \leq 5) = \int_0^5 \frac{x}{25} e^{-\frac{x}{5}} dx = -\frac{x}{5} e^{-\frac{x}{5}} \Big|_0^5 + \int_0^5 \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} dx = 1 - 2e^{-1}.$$

Esercizio 3. i) L'espressione dell'intervallo di confidenza a livello 0.95 è

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{0,975}, \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{0,975}\right] = \left[\overline{X}_n - \frac{4}{\sqrt{n}} \phi_{0,975}, \overline{X}_n + \frac{4}{\sqrt{n}} \phi_{0,975}\right].$$

Deve pertanto essere soddisfatta l' equazione:

$$\frac{4}{\sqrt{n}} \phi_{0,975} \leq 1 \quad \sqrt{n} \geq 4 \times \phi_{0,975} = 4 \times 1.96 = 7.84 \quad n \geq 61.46 \quad \boxed{n \geq 62}$$

ii) Per $n = 100$ l'intervallo di confidenza a livello 0.90 è

$$\left[\overline{X}_{100} - \frac{4}{10}\phi_{0,95}, \overline{X}_{100} + \frac{4}{10}\phi_{0,95}\right]$$

con $\phi_{0,95} = \cancel{0.64}$ 1,64, quindi

$$\left[\overline{X}_{100} - \frac{4}{10}\cancel{0.64}\,1{,}64, \overline{X}_{100} + \frac{4}{10}\cancel{0.64}\,1{,}64\right] = [\overline{X}_{100} - \cancel{0.256}\,0{,}656, \overline{X}_{100} + \cancel{0.256}\,0{,}656]$$