Calcolo delle probabilità e Statistica
laurea triennale in Ingegneria, a.a. 2011-12
Prima prova scritta di esonero
Durata della prova 2.5 h

Punteggi: 1) 3+2+2+3; 2) 4+4; 3) 2+3+3+4

1. Sia (X,Y) una v.a. bidimensionale con densità congiunta:

$$p(x,y) = \left(\frac{1}{4}\right)^y, \text{ per } (x,y) \in \{1,2,3\} \times \mathbb{N}$$

$(\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\})$.
(i) Trovare le densità marginali di X e Y; si tratta di densità note?
(ii) Calcolare $E(X)$, $Var(X)$ e $E(Y)$.
(iii) Verificare che X e Y sono v.a. indipendenti.
(iv) Calcolare $P(X+Y=4)$.

2. Si considerano due urne, U_1 e U_2. L'urna U_1 ha 2 biglie con i numeri 1 e 3, l'urna U_2 ha 2 biglie rosse. Si estrae a caso una biglia da U_1 e sia X la v.a. che indica il numero estratto. A questo punto, vengono messe X biglie gialle nell'urna U_2 e poi si estrae una biglia a caso da U_2.
(i) Calcolare la probabilità di estrarre una biglia rossa da U_2.
(ii) Calcolare la probabilità di aver estratto il numero 3 da U_1, sapendo che è stata estratta una biglia rossa da U_2.

3. Si lancia ripetutamente una moneta truccata; indichiamo con T il numero di lanci necessario ad ottenere Testa per la prima volta, e supponiamo che $E(T) = 3$.
(i) Trovare la distribuzione di T e calcolare $P(2 \leq T < \sqrt{20})$.
(ii) Sia S una v.a. discreta a valori sugli interi positivi, indipendente da T e con la stessa distribuzione di T. Trovare la densità discreta di $U := \min(S,T)$; si tratta di una densità nota?
(iii) Calcolare $E(U+2T)$ e $Var(U) + Var(2T+\sqrt{3})$.
(iv) Calcolare $P(S \neq T)$.

Soluzioni della prima prova di esonero di CPS, Maggio 2012

1. (i) Si ha:

$$p_X(x) = P(X=x) = \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{1}{1-1/4} - 1 = \frac{1}{3},\ x \in \{1,2,3\}$$

$$p_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x=1}^{3} \left(\frac{1}{4}\right)^y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{y-1},\ y \in \mathbb{N}$$

Pertanto, si riconosce che $X \sim \mathrm{Unif}(\{1,2,3\})$ e Y ha legge geometrica modificata di parametro $p = \frac{3}{4}$.
(ii) Si trova facilmente che $E(X) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2,\ E(X^2) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^2) = \frac{14}{3}$, da cui $Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}$. La media di Y, come si sa dalla teoria, è $E(Y) = 1/p = 4/3$.
(iii) Si ha:

$$p_X(x)p_Y(y) = \frac{1}{3} \cdot 3\left(\frac{1}{4}\right)^y = \left(\frac{1}{4}\right)^y = p(x,y)$$

e quindi X e Y sono indipendenti.
(iii) Si ha:

$$P(X+Y=4) = p(1,3)+p(2,2)+p(3,1) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{21}{64}\ .$$

2. (i) Denotiamo con R l'evento "si estrae una biglia rossa da U_2"; allora:

$$P(R) = P(R|X=1)P(X=1) + P(R|X=3)P(X=3) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}\ .$$

(ii) Per la formula di Bayes:

$$P(X=3|R) = \frac{P(R|X=3)P(X=3)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}\ .$$

3. (i) T è l'istante di primo successo in una successione di prove di Bernoulli indipendenti, in ciascuna delle quali la probabilità del successo p è incognita; essendo la moneta truccata, deve essere $p \neq 1/2$. Ricordando che $P(T=k) = p(1-p)^{k-1},\ k = 1,2,\ldots$ e che $E(T) = 1/p$, si ha $3 = 1/p$ che implica $P(Testa) = p = 1/3$. Allora:

$$P(2 \leq T < \sqrt{20}) = P(T=2) + P(T=3) + P(T=4)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] \approx 0.46\ .$$

(ii) La v.a. $U = \min(S,T)$ assume valori in $\{1,2,\ldots\}$. Per l'indipendenza di S e T, si ha per $k = 1,2,\ldots$ $P(U \geq k) = P(S \geq k, T \geq k) = P(S \geq k)P(T \geq k)$. Ricordando che, per una v.a. T geometrica modificata di parametro p, risulta $P(T > k) = (1-p)^k$ e quindi $P(T \geq k) = P(T > k-1) = (1-p)^{k-1}$, otteniamo:

$$P(U \geq k) = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right]^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

ed infine

$$P(U = k) = P(U \geq k) - P(U \geq k+1) = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} - \left(\frac{4}{9}\right)^{k} = \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

da cui segue che U ha distribuzione geometrica modificata di parametro $5/9$.

(iii) Si ha:

$$E(U + 2T) = E(U) + 2E(T) = 9/5 + 2 \cdot 3 = \frac{39}{5} \ .$$

Ricordando che $Var(T) = (1-p)/p^2$ e che, per ogni numero a, risulta $Var(X + a) = Var(X)$ e $Var(aX) = a^2 Var(X)$, si ottiene:

$$Var(U) + Var(2T + \sqrt{3}) = (1 - 5/9)/(5/9)^2 + 4 \cdot (1 - 1/3)/(1/3)^2 = 25.44$$

(iv) Si ha:

$$P(S = T) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S = k, T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S = k)P(T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5},$$

e quindi $P(S \neq T) = 1 - P(S = T) = 1 - 1/5 = 4/5$.