VARIABILI ALEATORIE

Def. Dato lo spazio di prob. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si dice variabile aleatoria un'applicazione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\forall\, t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{\omega : X(\omega) \le t\} \in \mathcal{A}$.

Più in generale, è fondamentale per le v.a. la stima di $P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$, ove $A \subset \mathbb{R}$.

L'applicazione $A \to P\{\omega : X(\omega) \in A\} = P\{X^{-1}(A)\}$ che associa ad ogni s.i. A di $\mathbb{R}$ la prob. che X prenda valori in A, si chiama <u>legge</u> o <u>distribuzione</u> della v.a. X

Es. Se supponiamo di giocare alla roulette, sia

X = ammontare del nostro capitale dopo n partite

X è una v.a.

OSS.

$\{\omega : X(\omega) > a\}$ è un evento $\forall\, a \in \mathbb{R}$, essendo il complementare di $\{\omega : X(\omega) \le a\}$.

Inoltre $\{\omega : a < X(\omega) \le b\} = \{X(\omega) \le b\} \cap \{X(\omega) > a\}$ è un evento perché $\cap$ di eventi.

$\{\omega : X(\omega) = x\}$, $x \in \mathbb{R}$, è un evento:

$$\{\omega : X(\omega) = x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : x - \tfrac{1}{n} < X(\omega) \le x\}$$

Variabili aleatorie discrete

Supponiamo che X (v.a.) assuma solo un'infinità numerabile di valori : $\{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$

X si dirà v.a. discreta.

Data una v.a. discreta X, consideriamo la funzione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definita da
$p(x) = P\{X = x\}$, $x \in \mathbb{R}$. $p(x)$ gode delle proprietà:

(i) $p(x) = 0$ tranne se $x \in \{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$

(ii) $\sum_{x \in \mathbb{R}} p(x) = 1$

Chiameremo densità discreta una funzione p che soddisfi (i) e (ii).

Nel caso di una v.a. discreta, più semplicemente, si definisce $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ funzione di probabilità.

Se $A \subset \mathbb{R}$:

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} P(X = x_i) = \sum_{x_i \in A} p_i$$

Esempio (v.a. indicatrice)

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di prob. e $A \in \mathcal{A}$. Sia 1_A la funzione indicatrice di A : $1_A : \Omega \to \mathbb{R}$

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$$

$X = 1_A$ è una v.a. discreta

$p_1 = P\{X = 1\} = P\{\omega \in \Omega : 1_A(\omega) = 1\} = P(A)$

$p_0 = P\{X = 0\} = P(A^c) = 1 - P(A)$

1. Esempio (legge Binomiale)

Riprendiamo l'esempio della moneta equilibrata lanciata n volte ove abbiamo calcolato la prob. che ~~su n lanci~~ esce K volte testa e $(n-K)$ volte croce.

E' un tipico schema successo-insuccesso.

Poniamo $X_K = 1$ se al K-esimo lancio esce testa

$X_K = 0$ " croce

Allora $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ è una v.a. tale che $P(X = K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$ $p \in (0,1)$

Dunque la funzione di prob. della v.a. discreta $X \in \{0, 1, \dots, n\}$ è $p_K = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$

(distrib. binomiale di parametri n e p : $B(n,p)$)

Per $n = 1$, X si riduce ad una v.a. che assume valori 0 e 1 con $p_0 = 1 - p$; $p_1 = p$.

(distrib. di Bernoulli $(B(1,p))$)

2. Esempio (schema successo-insuccesso senza rimpiazzo)

Un'urna contiene 8 palline rosse e 2 bianche. Ne vengono estratte 3 senza rimpiazzo. Qual è la prob. di estrarne al più 1 bianca?

Abbiamo già visto che per le estrazioni senza rimpiazzo il n° totale X di palline bianche estratte ha distribuzione ipergeometrica:

$$P(X = K) = \frac{\binom{2}{K}\binom{8}{3-K}}{\binom{10}{3}} \Rightarrow P(X=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}}$$ e la prob. richiesta è la prob.

di $A = \{\omega : X(\omega) \leq 1\} = \{X=0\} \cup \{X=1\}$

$$P(A) = P(X=0) + P(X=1) = 0.933$$

3. Esempio (schema successo-insuccesso con rimpiazzo)

I bulloni prodotti da una ditta sono difettosi con una probabilità del 20% e vengono messi in commercio in confezioni da 3 pezzi ciascuna. Qual è la prob. che in una confezione vi sia al più un bullone difettoso?

Supponiamo che il fatto che uno dei bulloni sia difettoso è indip. dal fatto che lo siano o meno gli altri.
Usiamo lo schema successo-insuccesso con $n=3$ e $p=0.2$.
Il num. X di bulloni difettosi è una v.a. $B(3, 0.2)$
Dunque la prob. richiesta è:

$$P(X=0) + P(X=1) = \binom{3}{0} 0.8^3 + \binom{3}{1} 0.2 \cdot 0.8^2 = 0.896$$

Nei 2 esempi precedenti abbiamo considerato una v.a. X che conta quante volte un determinato fenomeno si verifica in una sequenza di prove ripetute.
In entrambe le situazioni la prob. che il fenomeno si verifichi in ogni singola prova (il bullone difettoso o la pallina bianca estratta, risp.) è la stessa (0.2 - infatti in 10 palline (8+2), due sono le possibilità di estrarre 1 bianca). La differenza risiede nel fatto che nel 1° esempio le prove ripetute non sono indipendenti.

4. Esempio

Sapendo che il 30% dei passeggeri che hanno prenotato non si presenta alla partenza, una compagnia aerea accetta fino a 28 prenotazioni su un volo con la capienza di 24 posti. Qual è la prob. che (almeno) un passeggero che ha regolarmente prenotato resti a terra?

- Usiamo lo schema successo-insuccesso (binomiale)

Il n° X di passeggeri che si presentano è il n° di successi in 28 prove indipendenti, dove in ogni prova si ha successo con prob. $p = 1 - 0.3 = 0.7$.

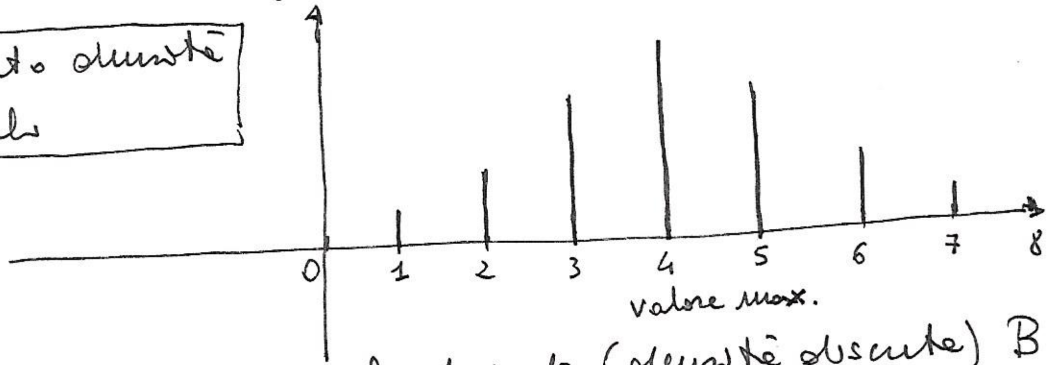
X ha legge $B(28, 0.7)$. La prob. richiesta è:

$$P(X \geq 25) = \sum_{k=25}^{28} \binom{28}{k} 0.7^{k}\, 0.3^{28-k} = P(X=25) + P(X=26)$$

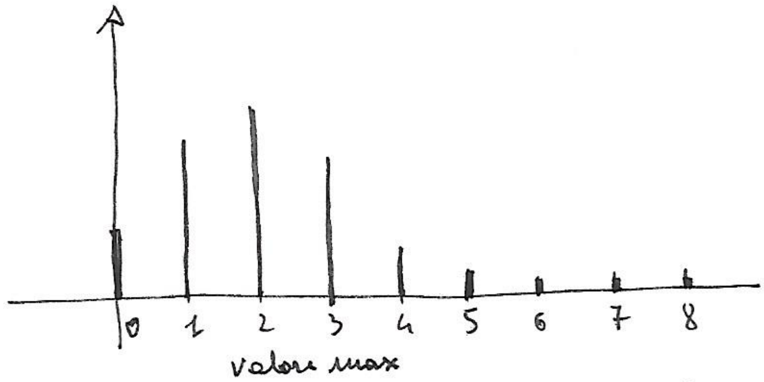
$$+ P(X=27) + P(X=28) = 0.0157.$$

Come si vede è piuttosto piccola!

$\boxed{\text{Andamento densità Binomiale}}$



Andamento di una f. di prob. (densità discreta) $B(8, 0.5)$



Il valore max non si trova lontano da np

Andamento di una f. di prob. $B(8, 0.2)$

5. Esempio

Un dado viene lanciato più volte fino a che si ottiene 6. Qual è la prob. che occorrano esattamente K lanci?

Sia $T = \#$ lanci necessari ;

$X_K = \#$ volte in cui si è ottenuto 6 nei primi K lanci.

L'evento "nei primi K lanci non è mai apparso il 6."

è dato da $\{T > K\}$ oppure $\{X_K = 0\}$.

Ma X_K ha distrib. $B(K, \frac{1}{6})$, dunque:

$$P(T>K) = P(X_K = 0) = \binom{K}{0} p^0 (1-p)^K = (1-p)^K = \left(\frac{5}{6}\right)^K$$

A noi serve $P(T = K)$; ma:

$$\{T = K\} \cup \{T > K\} = \{T > K-1\} \quad \text{(insieme disgiunte)}$$

$$\Rightarrow P(T=K) = P(T>K-1) - P(T>K) =$$
$$= (1-p)^{K-1} - (1-p)^K = p(1-p)^{K-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{K-1}$$

Se $K=1$, la prob. che occorra un solo lancio perché esca un 6 è $\frac{1}{6}$, come è ovvio.

Si chiama <u>distribuzione geometrica</u> quella di una v.a. X che ha per funzione di ~~distribuzione~~ prob.

$$P(X=K) = p_K = p(1-p)^K \quad , K = 0, 1, 2 \ldots , \quad p \in (0,1)$$

Si ha, ovviamente,

$$\sum_{K=0}^{\infty} p_K = p \sum_{K=0}^{\infty} (1-p)^K = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

(ricordando la somma di una serie geometrica)

<u>Nell'es. precedente $T-1$ ha distrib. geometrica di parametro p.</u> (infatti $P\{T-1 = K\} = P\{T = K+1\} = p(1-p)^K$)

Richiamiamo prima alcune cose sulle somme geometriche.

Si ha:

$$\sum_{i=0}^{N} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots + q^N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q};$$

inoltre, se $|q| < 1$, la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i$$

converge e risulta:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \qquad (*)$$

Se X ha distribuzione Geometrica di parametro $p \in (0,1)$, per $k \geq 0$:

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} p(1-p)^i,$$

che, posto $j = i - k$, diventa:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^{j+k} = (1-p)^k \sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^j;$$

Siccome

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^j = 1,$$

[infatti

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^j = p \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1,$$

grazie a (*)],
otteniamo infine:

$$P(X \geq k) = (1-p)^k, \ k = 0, 1, \ldots$$

Allora, se T è l'istante di primo successo in una sequenza di prove indipendenti e Bernoulliane, in cui la probabilità del successo è costante, ed uguale a p, otteniamo, per $k = 1, 2, \ldots$:

$$P(T > k) = P(T-1 > k-1) = P(T-1 \geq k) = P(X \geq k) = (1-p)^k,$$

dove abbiamo posto $T - 1 = X$, e la v.a. X ha distribuzione geometrica di parametro p.

Proprietà di mancanza di memoria di variabili aleatorie discrete

Una variabile aleatoria discreta Z a valori interi non negativi gode della proprietà di mancanza di memoria se per ogni n ed m interi non negativi:

$$P(Z > n+m|Z > n) = P(Z > m) \qquad (A1)$$

1. Sia T l'istante di primo successo in una successione di prove ripetute di Bernoulli e indipendenti, in ciascuna delle quali la probabilità del succeso è costante, ed è ugale a $p \in (0,1)$; sappiamo che T ha distribuzione geometrica modificata di parametro p, ovvero $X = T - 1$ ha distribuzione geometrica di parametro p. Ebbene, T gode della proprietà di mancanza di memoria, ovvero vale (A1); infatti, si ha:

$$P(T > n+m|T > n) = \frac{P(T > n+m, T > n)}{P(T > n)} = \frac{P(T > n+m)}{P(T > n)}$$

$$= \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^n} = (1-p)^m = P(T > m).$$

Per illustare il significato della proprietà di assenza di memoria, osserviamo che, se nelle prime n prove non si è avuto alcun successo, la probabilità che non si verifichi alcun succeso fino alla prova $n+m$ non dipende da n, ossia da quanto si è atteso, ma solo dal numero m di prove ancora da effettuarsi.
Ad esempio, calcoliamo la probabilità che nel gioco del lotto il numero 34 non esca in n successive estrazioni su una ruota fissata. Denotiamo con E_k l'evento " nella $k-$esima estrazione esce il numero 34 sulla fissata ruota ", per $k = 1, 2, \ldots$ Utilizzando lo schema succeso-insuccesso in estrazioni senza rimpiazzo (distribuzione ipergeometrica), si trova facilmente che $P(E_k) = 1/18$. Sia ora T il numero minimo di estrazioni sulla ruota fissata, affinché si presenti per la prima volta il numero 34. Come si sa, T ha distribuzione geometrica modificata di parametro $p = 1/18$. Se indichiamo con A_n l'evento " il numero 34 non esce nelle prossime n estrazioni sulla ruota fissata ", allora

$$P(A_n) = P(T > n) = \left(1 - \frac{1}{18}\right)^n = \left(\frac{17}{18}\right)^n, \ n = 1, 2, \ldots$$

Osserviamo che la probabilità che il numero 34 non esca in n estrazioni successive è strettamente decrescente in n; ciò significa che ritardi via via più lunghi diventano sempre meno probabili.
Comunque, dalla (A1) si ottiene:

$$P(A_{n+m}|A_n) = P(A_m)$$

ovvero, la probabilità che il numero 34 non esca nelle successive $n+m$ estrazioni, avendo osservato che esso non è uscito nelle prime n estrazioni, non dipende da n, cioè dal cosiddetto "ritardo " dell'evento.

2. Mostriamo ora che la geometrica modificata è l'unica distribuzione discreta, a valori interi positivi, che ha la proprietà di mancanza di memoria.

Infatti, supponiamo che per Z valga (A1); posto $q_h = P(Z > h),\ h = 1, 2, \ldots$ essa si scrive:

$$q_{n+m} = q_m \cdot q_n$$

Intanto, per $m = 0$ si ha $q_n = q_0 \cdot q_n$ e quindi, semplificando q_n, si ottiene $q_0 = P(Z > 0) = 1$. Inoltre, per $m = 1$, si ha $q_{n+1} = q_1 \cdot q_n$, e quindi, procedendo per induzione, si ottiene $q_n = P(Z > n) = q_1^n$. Allora $P(Z \geq n+1) = q_1^n$ e $P(Z \geq n) = q_1^{n-1}$. Ma $P(Z = n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1) = q_1^{n-1} - q_1^n = q_1^{n-1}(1 - q_1)$. Posto $p = 1 - q_1$, si ottiene infine:

$$P(Z = n) = p(1-p)^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$$

ovvero Z ha distribuzione geometrica modificata di parametro p.

3. Per una v.a. $X \sim Geom(p)$, la proprietà di mancanza di memoria, si può scrivere:

$$P(X = m + k | X \geq m) = P(X = k) \qquad (A2)$$

E' facile verificare che (A2) vale, poiché:

$$P(X = m + k | X \geq m) = \frac{P(X = m + k)}{P(X \geq m)} = \frac{p(1-p)^{m+k}}{(1-p)^m} =$$

$$= p(1-p)^k = P(X = k)$$

Mostriamo ora, analogamente a quanto fatto prima, che la v.a. geometrica è l'unica v.a discreta a valori interi non negativi che soddisfa la proprietà (A2). Infatti, posto $p_k = P(X = k)$, la (A2) si può scrivere:

$$p_{m+k} = p_k \sum_{k=m}^{\infty} p_k = p_k \left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_k\right)$$

$$= p_k(1 - p_0 - p_1 - \ldots - p_{m-1}).$$

Allora, per $m = 1$ si ottiene: $p_{k+1} = p_k(1 - p_0)$ e, procedendo per induzione:

$$p_k = p_0(1 - p_0)^k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Posto $p_0 = p$, vediamo subito che quella sopra è la densità discreta di una v.a. geometrica di parametro p.

6. Distribuzione di Poisson

è la funzione di prob. di una v.a. X discreta per cui:

$$p_k = P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1\right)$$

Approssimazione di una legge binomiale

Sia $X \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$ e studiamo il comportamento della legge di X per $n \to \infty$.

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Dunque, se n è molto grande, se $X \sim B(n,p)$, la sua legge può essere approssimata con ~~quella~~ una distrib. di Poisson di parametro np.

<u>Esempio</u>

La prob. di centrare un bersaglio è 0.001 per ogni colpo. Qual è la prob. di centrare un bersaglio con due o più pallottole se il n° di colpi sparato è 5000?

Usiamo uno schema ~~di Bernoulli~~ successo-insuccesso, di parametri n e $p = 0.001$.

La prob richiesta è:

$$P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{5000} \binom{5000}{k} p^k (1-p)^{5000-k} = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

~~Dato~~

$$P(X=0) = \binom{5000}{0} (1-p)^{5000} \simeq 0.00672$$

$$P(X=1) = \binom{5000}{1} p (1-p)^{4999}$$

Si ha $np = 0.001 \cdot 5000 = 5$ e per l'approssimazione di Poisson:

$$P(X=0) \sim e^{-5}$$

$$P(X=1) \sim 5e^{-5}.$$

Dunque, la prob. richiesta è $\simeq 1 - 6e^{-5} \sim 0.9596$.

<u>Come si vede l'approx di Poisson è molto utile dal punto di vista computazionale</u> (È ben difficile calcolare $(1-p)^{5000}$!).

$$X \sim \text{Iper}(r, b, n)$$

In un'urna r palline rosse, b bianche.

n estrazioni senza rimpiazzo.

$X = \#$ palline rosse estratte

$P(X=K)$? $K = 0, 1, \dots, \min(r,n)$

$K \geq n-b$

$$\boxed{n-b \leq K \leq \min(r,n)}$$

	Palline	
gruppi	rosse r	bianche b
numero da scegliere	rosse K	bianche $n-K$
n. di modi	$\binom{r}{K}$	$\binom{b}{n-K}$

n. totale di possibilità $\binom{r}{K}\binom{b}{n-K}$

$$\Rightarrow P(X=K) = \frac{\#\{X=K\}}{\#\Omega}$$

; $\#\Omega = \#$ risultati possibili, n. di campioni possibili di n palline rosse su $b+r$ $= \binom{b+r}{n}$

Allora: $$P(X=K) \frac{\binom{r}{K}\binom{b}{n-K}}{\binom{b+r}{n}}$$

$$\frac{\sum_{K=0}^{n} \binom{r}{K}\binom{b}{n-K}}{\binom{b+r}{n}} = \frac{1}{\binom{b+r}{n}} \sum_{K=0}^{n} \frac{r!}{K!\,(r-K)!} \cdot \frac{b!}{(n-K)!\,(b-n+K)!}$$