Università di Roma *Tor Vergata*

Calcolo delle Probabilità e Statistica (Ingegneria A&T, Civile, Informatica)
I prova di valutazione in itinere a.a. 2009/10

Punteggi: **1.** 3+4+3; **2.** 4+4+5 ; **3.** 3+6; totale = 32 .

1. Si considerino tre urne: la prima contiene una biglia rossa e due bianche; la seconda una biglia rossa e una bianca; la terza urna contiene due biglie rosse e una bianca. Si lancia un dado perfetto: se esce 1 si sceglie la prima urna, se esce 2 oppure 3 la seconda, se esce $4, 5$ oppure 6, la terza urna. Si estrae una biglia dall'urna scelta.
(i) Calcolare la probabilità che venga estratta una biglia rossa.
(ii) Sapendo che è stata estratta una biglia rossa, calcolare la probabilità che essa sia stata estratta dalla prima, dalla seconda, o dalla terza urna.
(iii) Supponiamo che sia stata scelta la terza urna, e che si effettuino due estrazioni senza rimpiazzo da quest'urna. Calcolare la probabilità di estrarre una biglia bianca e una rossa, in quest'ordine.

2. Un centralino telefonico internazionale riceve chiamate dall'Italia e dall'estero. Siano X_i ed Y_i le variabili aleatorie che contano il numero di chiamate ricevute il giorno i-esimo rispettivamente dall'estero e dall'Italia. Supponendo che X_i, Y_i siano indipendenti con $X_i \sim Poisson(1)$ ed $Y_i \sim Poisson(2)$ per ogni i e che le chiamate relative a giorni diversi siano indipendenti, calcolare:
(i) la probabilità che in un giorno arrivi almeno una chiamata dall'estero;
(ii) la densità discreta della variabile aleatoria "giorni di attesa per la prima chiamata dall'estero";
(iii) la distribuzione della variabile aleatoria "numero complessivo di telefonate giornaliere" e la probabilità che su n chiamate arrivate in un giorno, k siano dall'estero.

3. Si lancia un dado perfetto finché non esca un numero dispari il cui quadrato è minore di 10; indicato con T il minimo numero di lanci necessari per ottenere questo, trovare la densità di T.
(i) Calcolare $P(T = 201|T > 200)$.
(ii) Se S è una v.a., indipendente da T e con la stessa sua distribuzione, calcolare:
  (a) $P(T = S)$
  (b) $E(T - 3S)$ e $Var(T - 3S)$.

Soluzioni della I prova di valutazione in itinere a.a. 2009/10

1. (i) Sia U_i l'evento "si sceglie l'urna $i-$esima", $i = 1, 2, 3$. Allora, con ovvio significato dei simboli si ha:

$$P(R) = P(R|U_1)P(U_1) + P(R|U_2)P(U_2) + P(R|U_3)P(U_3)$$

dove $P(U_1) = 1/6, P(U_2) = 1/3, P(U_3) = 1/2$;
inoltre $P(R|U_1) = 1/3, P(R|U_2) = 1/2, P(R|U_3) = 2/3$. Pertanto si ottiene:

$$P(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}$$

(ii) Per la formula di Bayes:

$$P(U_1|R) = \frac{P(R|U_1)P(U_1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{10}$$

$$P(U_2|R) = \frac{P(R|U_2)P(U_2)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{10}$$

$$P(U_3|R) = \frac{P(R|U_3)P(U_3)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$$

(iii) Se è stata scelta l'urna U_3, si ha:

$$P(B_1 \cap R_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2. (i) La probabilità da calcolare è: $P(X_i \geq 1) = 1 - P(X_i = 0) = p = 1 - e^{-1}$.
(ii) L'evento che occorra aspettare k giorni per la prima chiamata dall'estero è dato da:

$$\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \ldots \cap \{X_{k-1} = 0\} \cap \{X_k \geq 1\}$$

pertanto la sua probabilità, per l'indipendenza delle X_i, è

$$(1 - e^{-1}) \cdot [e^{-1}]^{k-1}$$

che è la densità discreta di una v.a. Y con distribuzione geometrica modificata di parametro $p = 1 - e^{-1}$. (iii) Il numero complessivo delle chiamate giornaliere è $Z_i = X_i + Y_i \sim Poisson(1 + 2)$ (per l'indipendenza); inoltre

$$P(X_i = k|Z_i = n) = \frac{P(X_i = k, Y_i = n - k)}{P(Z_i = n)} =$$

(per l'indipendenza)

$$= \frac{P(X_i = k)P(Y_i = n-k)}{P(Z_i = n)} = \dots \binom{n}{k} \frac{1^k \cdot 2^{n-k}}{(3)^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

3. Il successo è l'evento $S = \{1, 3\}$, pertanto $P(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
T è l'istante di primo successo in una sequenza di prove indipendenti e Bernoulliane di parametro $p = P(S) = 1/3$, quindi

$$P(T = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, \ k = 1, \dots$$

che è la densità geometrica modificata di parametro p; risulta $E(T) = 1/p = 3$ e $Var(T) = \frac{1-p}{p^2} = 6$.
(i) Per la proprietà di mancanza di memoria della legge geometrica (e anche di quella modificata) si ha:

$$P(T = 200 + 1 | T > 200) = P(T = 1) = 1/3$$

(ii) Per l'indipendenza di T ed S, si ha:

$$P(T = S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T = k)P(S = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{9} / \frac{5}{9} = \frac{1}{5}$$

$$(a) \ E(T - 3S) = E(T) - 3E(S) = 3 - 3 \cdot 3 = -6$$

$$(b) \ Var(T - 3S) = Var(T) + 9 \cdot Var(S) = 10 \cdot Var(T) = 10 \cdot 6 = 60.$$