Controllo del motore di un automobile - Progetto c2

Parametri progetto	
γ_1	0.75
γ_2	0.15
β	1.3
ψ	0.04
δ_1	$3 * 10^4$
δ_2	0.2
δ_3	0.02
J	20
ω_e	30

Presentazione del progetto

Dinamica del sistema

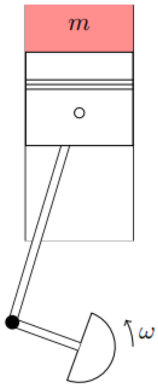
$$\dot{m} = \gamma_1(1 - \cos(\beta\theta - \psi)) - \gamma_2\omega m$$

$$J\dot{\omega} = \delta_1 m - \delta_2\omega - \delta_3\omega^2$$

dove:

- $\theta(t)$ indica l'angolo di accelerazione
- $\gamma_1(1 - \cos(\beta\theta - \psi))$ modella la caratteristica intrinseca della valvola
- J rappresenta il momento d'inerzia equivalente del sistema automobile
- $\delta_1 m$ descrive la coppia trasmessa all'albero motore
- $\delta_2\omega$ modella l'attrito nel motore
- $\delta_3\omega^2$ descrive la resistenza dell'aria

con $\gamma_1 \in \mathbb{R}, \psi \in \mathbb{R}, J \in \mathbb{R}, \delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_3 \in \mathbb{R}$



Sistema in forma di stato

Considerando la velocità angolare $\omega(t)$ come uscita del sistema, possiamo scrivere la forma di stato del sistema in questo modo:

$$x_1 = m \ , \ x_2 = \omega$$

$$\dot{x} = f(x,u) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1(1 - \cos(\beta u - \psi)) - \gamma_2 x_1 x_2 \\ \frac{1}{J}(\delta_1 x_1 - \delta_2 x_2 - \delta_3 x_2^2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$y = h(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$$

Ricerca dell'equilibrio

Utilizzando la rappresentazione in forma di stato del nostro sistema e i parametri forniti, ricerchiamo l'intera coppia di equilibrio (x_e, u_e) del sistema:

Dato l'equilibrio $\omega_e = 30$, ricaviamo il valore di equilibrio per la massa (x_1) dalla seguente formula:

$$\begin{gathered} f_2(x_e, u_e) = 0 \\ \rightarrow \frac{1}{J}(\delta_1 m_e - \delta_2 \omega_e - \delta_3 \omega_e^2) = 0 \\ \rightarrow m_e = \frac{1}{\delta_1}(\delta_2 \omega_e + \delta_3 \omega_e^2) = 8 \cdot 10^{-4} \end{gathered}$$

Grazie agli equilibri degli stati appena trovati, dalla prima componente del sistema, possiamo ricavare l'ingresso d'equilibrio:

$$\begin{gathered} f_1(x_e, u_e) = 0 \\ \rightarrow \gamma_1(1 - \cos(\beta u - \psi)) - \gamma_2 m_e \omega_e = 0 \\ \rightarrow u_e = \frac{1}{\beta}(\arccos(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \omega_e \cdot m_e) + \psi) \approx 0.1062 \end{gathered}$$

Coppia di equilibrio:

$$x_e = \begin{bmatrix} m_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \cdot 10^{-4} \\ 30 \end{bmatrix} \ , \ u_e = 0,1062$$

Linearizzazione nell'intorno dell'equilibrio

$$\begin{gathered} \delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{gathered}$$

$$\delta\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \end{bmatrix}$$

$$\delta y(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1 = m_e \\ x_2 = \omega_e}} = \begin{bmatrix} -4,5 & -1,2 * 10^{-4} \\ \\ 1500 & -0,07 \end{bmatrix} \; , \; B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{u = u_e} = \begin{bmatrix} 0.0954 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x_1 = m_e \\ x_2 = \omega_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \; , \; D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Funzione di trasferimento

Dopo aver trovato il sistema linearizzato nell'intorno di equilibrio, si ricava la funzione di trasferimento grazie alla seguente formula:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Possiamo ricavare la matrice inversa come segue:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} \rightarrow G(s) = C \; \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} B + D$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 4,5 & +1,2 \cdot 10^{-4} \\ \\ -1500 & s + 0,07 \end{bmatrix}$$

Sfruttando le potenzialità offerte da Matlab, ricaviamo la matrice aggiunga (definita come la trasposta della matrice dei cofattori) e il determinante definiti come segue:

$$cofattori(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 0,07 & 1500 \\ \\ +1,2 \cdot 10^{-4} & s + 4,5 \end{bmatrix} \qquad adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 0,07 & +1,2 \cdot 10^{-4} \\ \\ 1500 & s + 4,5 \end{bmatrix}$$

$$det(sI - A) = (s + 4,5) \cdot (s + 0,07) - (+1,2 \cdot 10^{-4} \cdot -1500) = s^2 + 4.57s + 0.495$$

partendo dai dati precedenti ricaviamo

$$G(s) = \frac{C \cdot adj(sI - A) \cdot B}{det(sI - A)} + C$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 0,07 & +1,2 \cdot 10^{-4} \\ 1500 & s + 4,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0954 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + 4.57s + 0.495} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1500 & s + 4,5 \end{bmatrix}}{s^2 + 4.57s + 0.495} \cdot \begin{bmatrix} 0.0954 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1500}{s^2+4.57s+0.495} & \frac{s+4,5}{s^2+4.57s+0.495} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0954 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1500 \cdot 0.0954}{s^2 + 4.57s + 0.495}$$

$$= \frac{123.1}{s^2 + 4.57s + 0.495}$$

Le radici del denominatore, ovvero i poli del sistema risultano essere :

$$p1 = -4.458 \ , \ p2 = -0.111$$

Riscriviamo i poli trovati come costanti di tempo

$$T_1 = -\frac{1}{p_1} = 0.224 \ , \ T_2 = -\frac{1}{p_2} = 9.01$$

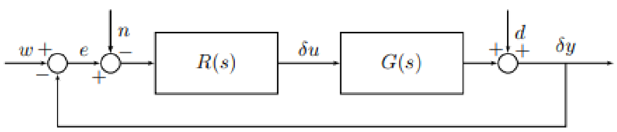
Riscriviamo la $G(s)$ come

$$G(s) = \frac{143.1}{s^2 + 4.57s + 0.495} = \frac{143.1}{(s - 4.458)(s - 0.111)}$$

Di seguito è possibile visionare il codice Matlab per poter ricavare facilmente la funzione di trasferimento del sistema preso in esame.

```
%% Definiamo le matrici nel punto di equilibrio trovato
%% [m_e,w_e] = [8e-4,30]
A = [-gamma_2*x_2e, -gamma_2*x_1e;
    delta_1/J     , -delta_2/J-(2*delta_3*x_2e)/J];
B = [beta*gamma_1*sin(beta*u_e-phi); 0];
C = [0, 1];
D = 0;

%% Funzione di trasferimento
s = tf('s');
[N, D] = ss2tf(A, B, C, D);
G = tf(N,D);
```

Progetto del regolatore $R(s) = R_s(s)R_d(s)$



1. Errore a regime $|e_\infty| \leq e^* = 0.01$ in risposta a un gradino $\omega(t) = 9 \cdot 1(t)$ e $d(t) = 8 \cdot 1(t)$

2. Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase $M_f \geq 55^\circ$
3. Il sistema può accettare una sovraelongazione percentuale al massimo dell'$5\% : S\% \leq 5\%$
4. Il tempo di assestamento all'$\epsilon\% = 5\%$ deve essere inferiore al valore fissato: $T_{a,\epsilon} = 0.08s$
5. l disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0, 0.05]$, deve essere abbattuto di almeno $55db$
6. Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[8 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno $45db$

Regolatore statico $R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^k}$

Punto 3.1

Partendo dalla funzione di trasferimento $G(s)$ ricavata al punto precedente, progettiamo il regolatore che rispetti le seguenti specifiche:

Scriviamo la funzione di trasferimento in anello aperto

$$L(s) = R(s)G(s)$$

dove possiamo scrivere $R(s) = R_s(s)R_d(s)$ con $R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^k}$

$$e_\infty = \frac{D+W}{1+\mu} \rightarrow \mu = \frac{D+W}{e_\infty} - 1$$

la formula è valida solamente quando il numero di poli(k) in $s = 0$ della $L(s)$ è uguale a 0.

$$R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^0} = \mu_s$$

$\mu = \mu_s \mu_g = L(0) = R(0)G(0)$,

possiamo quindi ricavare

$$e_\infty = \frac{D+W}{1+\mu} \leq 0.01 \rightarrow \frac{17}{1+\mu} \leq 0.01$$

$$\mu \geq \frac{17}{0.01} - 1 \geq 1699$$

quindi

$$\mu_s = \frac{L(0)}{G(0)} = \frac{\mu}{\mu_g} = \frac{1699}{289.1376} = 5.8761$$

Definiamo la nuova funzione di trasferimento estesa:

$$G_e(s) = R_s(s)G(s) = \mu_s G(s)$$

Di seguito è possibile visionare il codice Matlab.

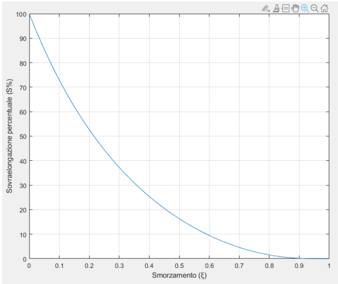
```
mu_s = ((DD + WW) / e_star) - 1;

% L(s)=R(s)G(s) -> mu=L(0)=R(0)G(0) -> R(0)=mu/G(0)
% guadagno minimo del regolatore ottenuto come L(0)/G(0)
G_0 = abs(evalfr(GG, 0));
RR_s = mu_s / G_0; % RR_s = 5.88

% Sistema esteso
GG_e = RR_s * GG;
```

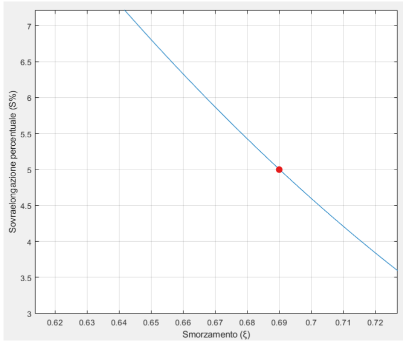
Regolatore dinamico

Punto 3.2 - Punto 3.3

Dal grafico della seguente equazione

$$S\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$





Ricaviamo lo smorzamento ξ^*affinché venga rispettato il requisito sulla sovraelongazione percentuale di $S\% \leq 5\%$.

Da ciò che si evince dal grafico, il valore dello smorzamento minimo desiderato è $\xi^* \cong 0.69$. Data la seguente equazione $M_f \geq 100\xi^*$, possiamo concludere che il **margine di fase** desiderato è:

$$M_f \geq 100\xi^* \rightarrow M_f \geq 69\%$$

Notiamo che il valore di M_f trovato **è più elevato rispetto a quello richiesto dalle specifiche**, ciò garantirà performance del sistema migliori.

Punto 3.4

Il **tempo di assestamento** al 5% deve essere minore di $T^* = 0.08s$, possiamo quindi trovare $w_{c,min}$ tramite la seguente formula:

$$T_{a,5} < T^*$$

dove

$$T_{a,5} \cong \frac{3}{\xi\omega_n} \cong \frac{3}{\xi\omega_c}$$

di conseguenza

$$\frac{3}{\xi\omega_{c,min}} < T^* \rightarrow \frac{3}{\xi\omega_{c,min}} < 0.08 \rightarrow \omega_{c,min} > \frac{3}{\frac{M_f}{100} \cdot 0.08}$$
$$\rightarrow \omega_{c,min} > \frac{300}{69.1 \cdot 0.08}$$
$$\rightarrow \omega_{c,min} > 54.27$$

Per i punti 3.5 e 3.6 andremo a sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti, che indica la seguente:

$$Y(s) = Y_\omega(s) + Y_d(s) + Y_n(s)$$

Punto 3.5

Specifica per il disturbo in uscita $d(t)$.

> Per il principio di sovrapposizione degli effetti ,'ignoriamo' l'uscita con ingresso $W(t)$ e $N(s)$ ponendo $W(s) = N(S) = 0$

Sappiamo che un generico disturbo in uscita si presenta in questa forma:

$$d(t) = D \cdot cos(\omega_d t + \psi_d)$$

la funzione di sensitività risulta essere:

$$S(s) = \frac{1}{1 - R(s)G(s)} = \frac{1}{1 - L(s)}$$

quindi la relativa uscita del disturbo sarà

$$y_d(t) = |S(j\omega_d)| \cdot Dcos(\omega_d t + \psi_d + arg(S(j\omega_d)))$$

Per rispettare la specifica dovremo imporre $|S(j\omega_d)|_{db} \leq -55db$.
Sapendo che $|S(j\omega)|_{db} \approx -|L(j\omega)|_{db}$ a **basse frequenze**, possiamo ricavare il vincolo sull'ampiezza della $L(s)$ nel range di frequenze $[0, 0.05]$ come

$$-|L(j\omega)|_{db} \leq -55db \rightarrow |L(j\omega)|_{db} \geq 55db$$

<u>Punto 3.6</u>

Specifica per il rumore di misura $n(t)$.

> I passaggi effettuati sono analoghi a quelli per la $d(t)$

> Per il principio di sovrapposizione degli effetti ,'ignoriamo' l'uscita con ingresso $W(t)$ e $D(s)$ ponendo $W(s) = D(S) = 0$

Viene richiesta un'attenuazione del rumore di misura di $45db$. Sapendo che la funzione di sensitività corrispondente è

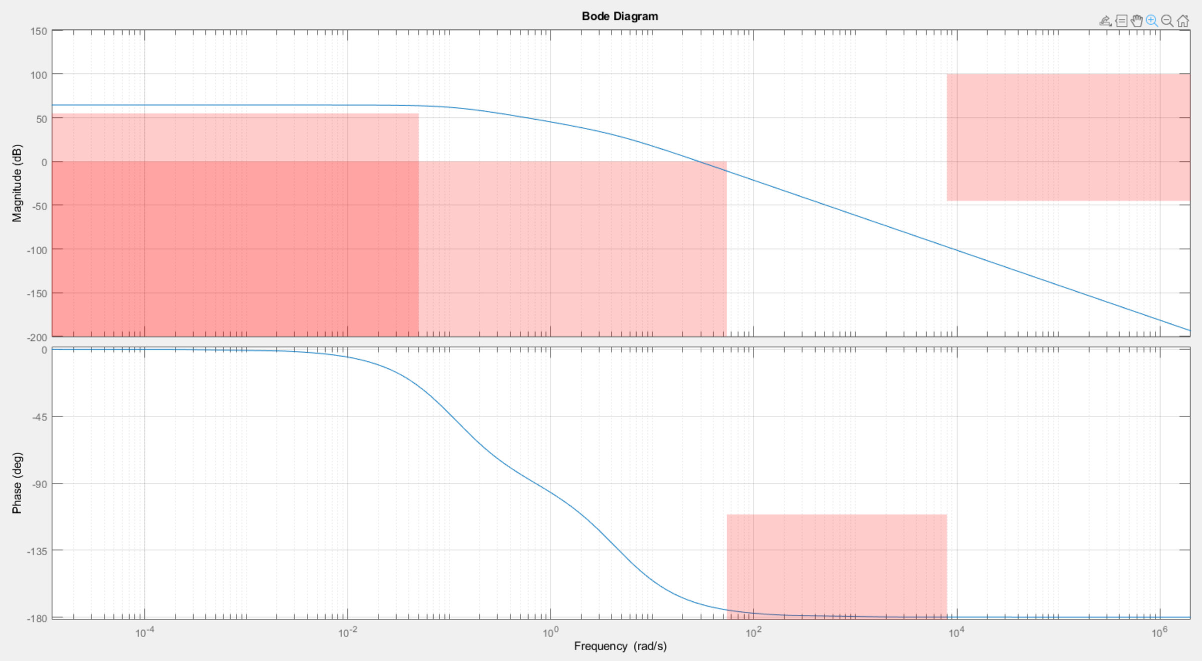
$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 - R(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 - L(s)}$$

Dovremo quindi imporre $|F(j\omega_n)|_{db} \leq -45db$.

Sapendo che $|F(j\omega_n)|_{db} \approx |L(J\omega_n)|_{db}$ ad **alte frequenze**, possiamo ricavare il vincolo sull'ampiezza della $L(s)$ nel range di frequenze $[8 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^6]$ come

$$|L(J\omega_n)|_{db} \leq -45db$$

Possiamo ora tracciare il diagramma di Bode della $G_e(s)$ con le patch dei vincoli trovati



Da una prima analisi del diagramma di Bode prodotto dal nostro sistema, emerge la vicinanza allo scenario B visto durante le lezioni: nell'intervallo di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento ω_c, non esistono pulsazioni in cui la fase di $G_e(j\omega)$ rispetta il vincolo sul margine di fase.

Progettiamo quindi il regolatore dinamico per il nostro sistema di controllo utilizzando la formula che definisce la rete anticipatrice:

$$R_d(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \; con \; 0 < \alpha < 1$$

consideriamo la funzione della rete anticipatrice in $s = j\omega_c^*$ otteniamo

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\varphi^*} \rightarrow$$

$$\frac{1+j\tau\omega_c^*}{1+j\alpha\tau\omega_c^*} = M^*(cos\varphi^* + jsin\varphi^*)$$

valgono le seguenti uguaglianze

$$\tau = \frac{M^* - cos\varphi^*}{\omega_c^* sin\varphi^*} \quad , \quad \alpha\tau = \frac{cos\varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* sin\varphi^*}$$

Quindi il nostro obiettivo è trovare i valori di M^* e φ^* in modo da ricavare τ e $\alpha\tau$,
imponiamo $|G_e(j\omega_c^*)|_{dB} + 20 \; log \; M^* = 0$, $M_f^* = 180^\circ + arg(G_e(j\omega_c^*)) + \varphi^*$

e considerando i valori

$$\omega_c^* = 200 \; , \; M_f^* = 69$$

$$arg(G_e(j\omega_c^*)) = -178,69 \; , \; |G_e(j\omega_c^*)|_{dB} = -33,54$$

così facendo otteniamo i valori

$$M^* = 10^{-\frac{|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} \approx 47,535$$

$$\varphi^* = \frac{\pi}{180}(M_f^* - 180^\circ - arg(G_e(j\omega_c^*))) = 1,1814$$

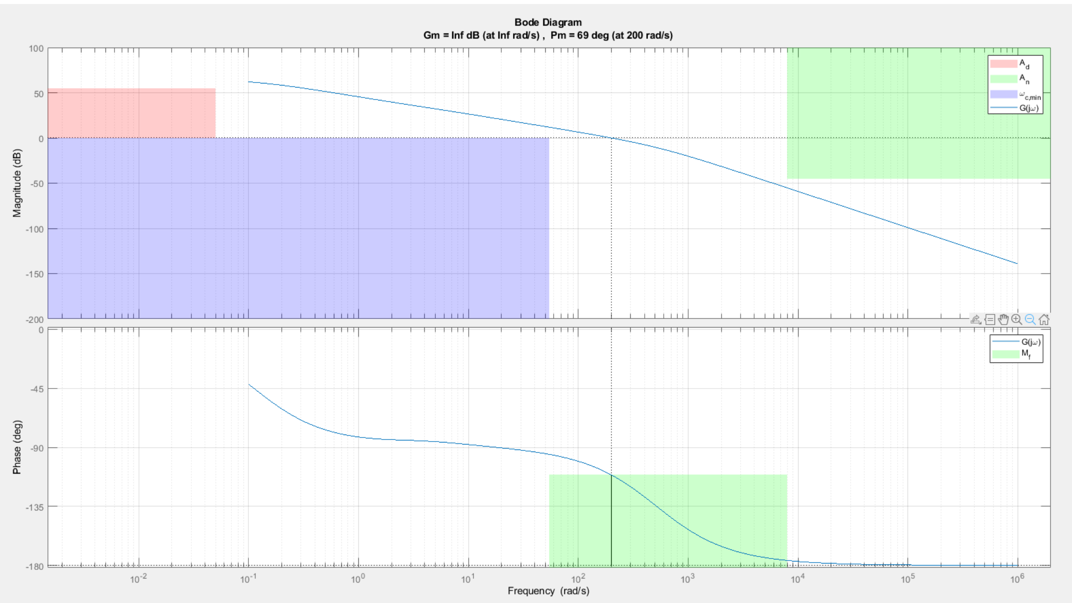
in fine i valori di τ e $\alpha\tau$ sono

$$\tau \approx 0.2549\ rad\ ,\ \alpha\tau \approx 0.0019\ rad$$

codice MATLAB relativo

```
% Rete anticipatrice

Mf_star = Mf_spec; % Mf_star = 69
omega_c_star = 200;
[mag_omega_c_star, arg_omega_c_star, omega_c_star] = bode(GG_e, omega_c_star)

mag_omega_c_star_dB = 20 * log10(mag_omega_c_star)

M_star = 10^(-mag_omega_c_star_dB / 20)
phi_star = Mf_star - 180 - arg_omega_c_star;

% Formule di inversione
tau = (M_star - cos(phi_star * pi / 180)) / omega_c_star / sin(phi_star * pi / 180)
alpha_tau = (cos(phi_star * pi / 180) - inv(M_star)) / omega_c_star / sin(phi_star * pi / 180)
alpha = alpha_tau / tau

R_d = (1 + tau*s)/(1 + alpha*tau*s); % rete anticipatrice
```

```
% Test parametri

if M_star <= 1
    disp('Errore: M_start non soddisfa le specifiche (M_star > 1)')
    return;
end

phi_star_rad = phi_star*pi/180
if phi_star_rad < 0 | phi_star_rad > pi/2
    disp('Errore: phi_star non soddisfa le specifiche: 0<phi_star<pi/2')
    return;
end

check_flag = cos(phi_star*pi/180) - inv(M_star)
if check_flag < 0
    disp('Errore: alpha negativo');
    return;
end
```



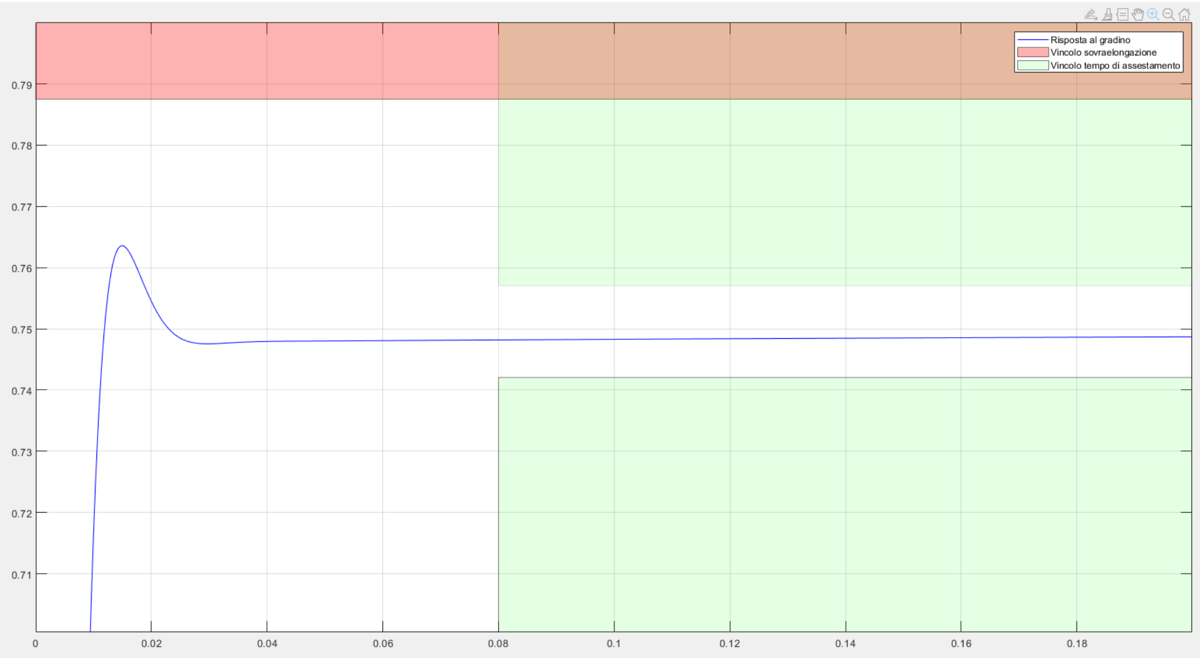
Il regolatore è fisicamente realizzabile in quanto il numero di poli del regolatore è uguale al numero di zeri e da ciò consegue che la pendenza dell'ampiezza di $L(s)$ è uguale alla pendenza della $G(s)$.

```
% check regolatore fisicamente realizzabile
% poli-zero >= 0
check_reg = R_d * RR_s;

if size(pole(check_reg)) - size(zero(check_reg)) < 0
    fprintf('Il regolatore NON è fisicamente realizzabile!');
    return;
else
    fprintf('Il regolatore è fisicamente realizzabile!');
end
```

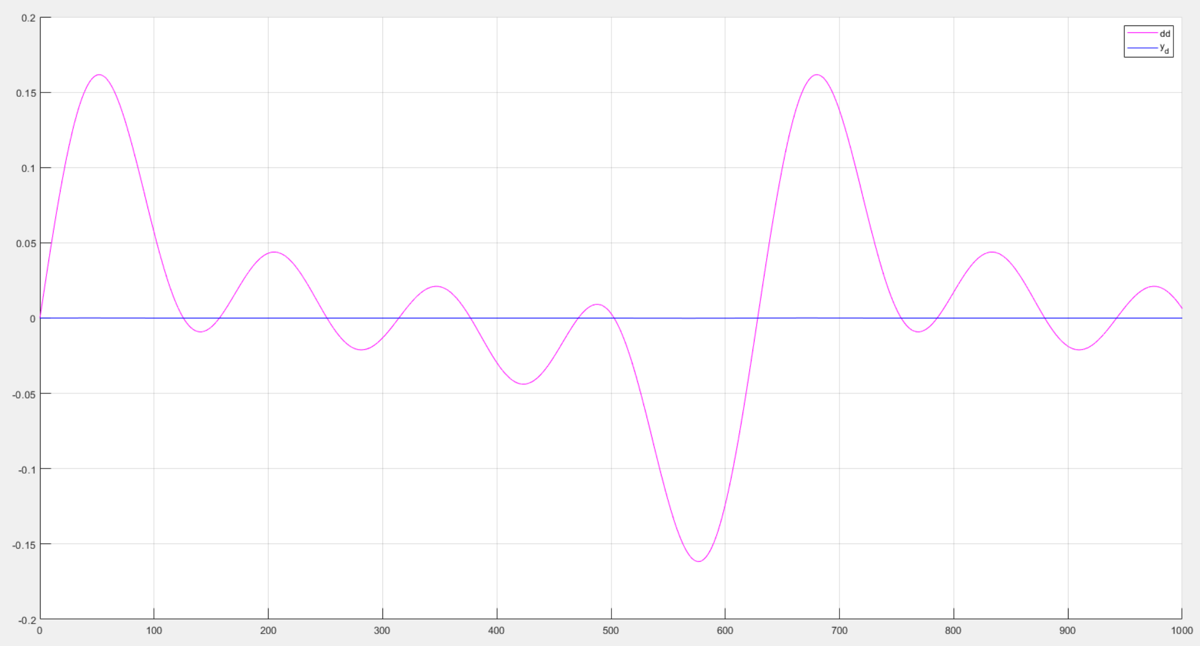
Testing del sistema di controllo

Dopo aver opportunamente realizzato il regolatore per il nostro sistema linearizzato, andiamo a testare il nostro sistema con i seguenti segnali:

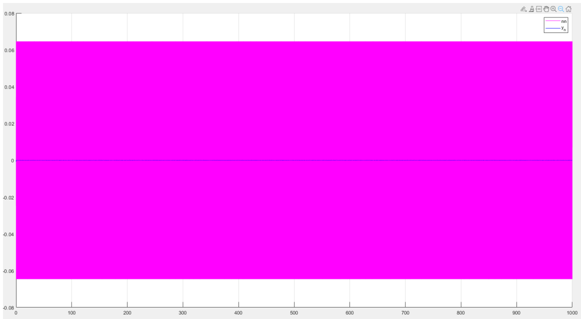
- $w(t) = 0.75 \cdot 1(t)$
- $d(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.05 \cdot \sin(0.01kt)$
- $n(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.02 \cdot \sin(8 \cdot 10^3 kt)$

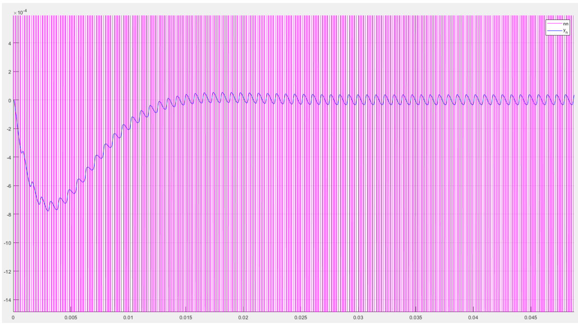


Nel precedente diagramma è possibile visionare l'uscita del nostro sistema sollecitato dall'ingresso $\omega(t) = 0.75 \cdot 1(t)$ e con le componenti $d(t)$ e n(t) nulle. Le patch verdi delimitano l'area in cui la risposta al nostro gradino dovrà assestarsi affinchè vengano rispettati i requisiti.

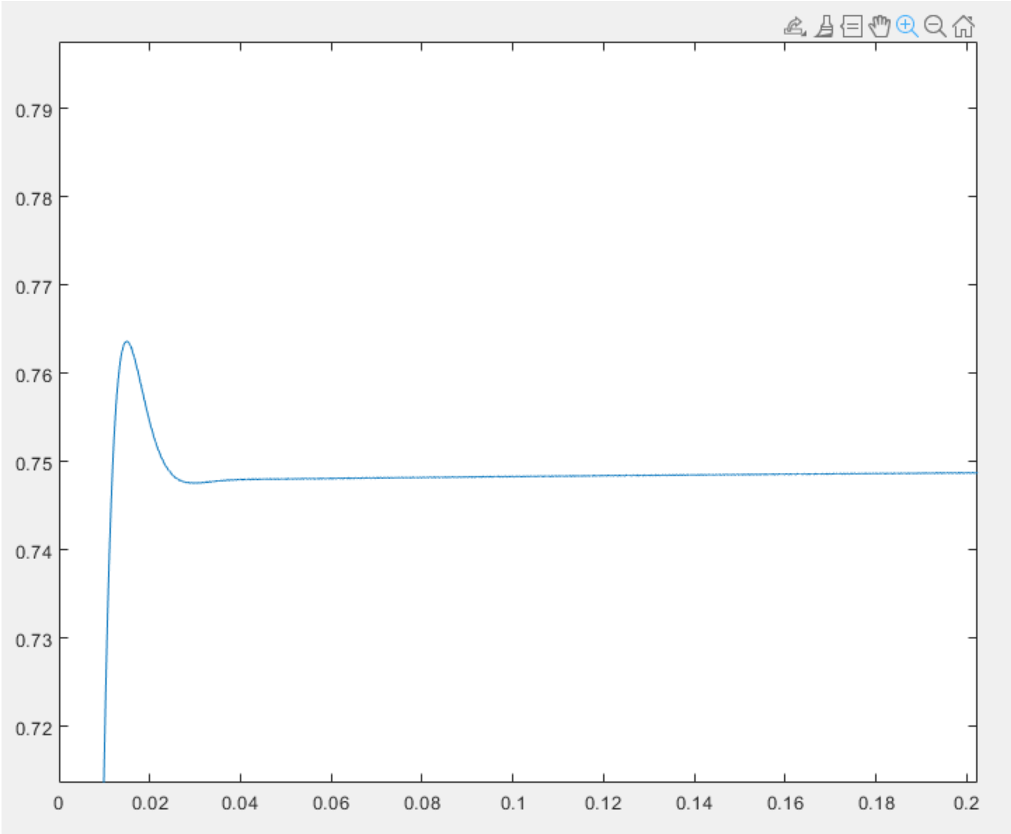


Nel precedente diagramma è possibile visionare l'uscita del nostro sistema sollecitato dall'ingresso $d(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.05 \cdot \sin(0.01kt)$ e con le componenti $w(t)$ e n(t) nulle.



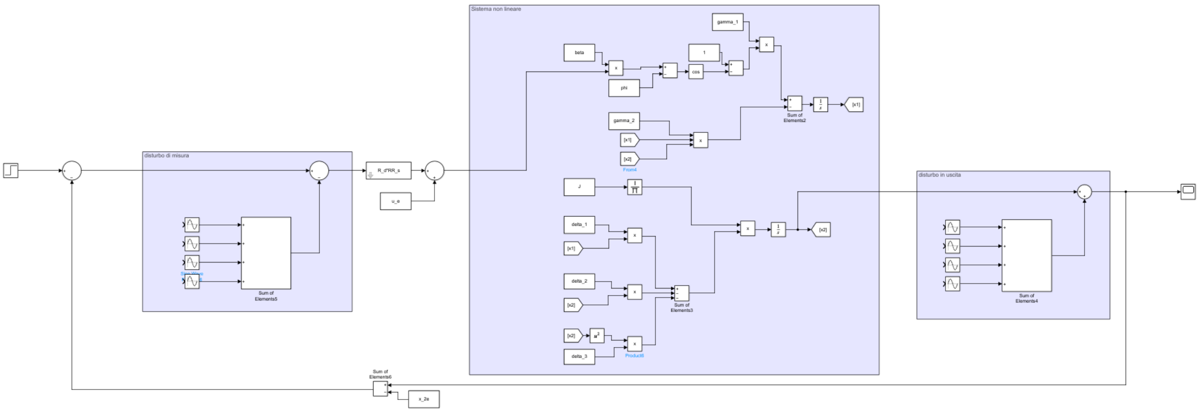


Nel precedente diagramma rappresentiamo il comportamento del rumore di misura ad una sollecitazione in ingresso pari a $n(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.02 \cdot \sin(8 \cdot 10^3 kt)$ quando gli ingressi $\omega(t)$ e $d(t)$ sono nulli. Come possiamo vedere, il rumore viene parzialmente attenuato.

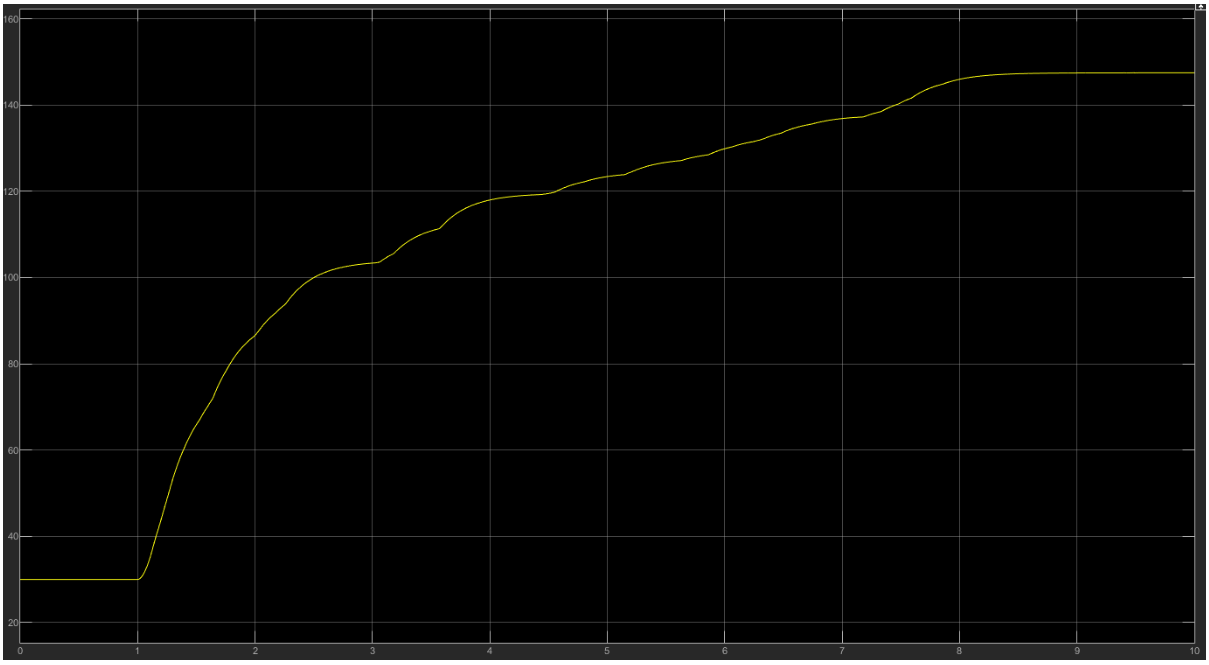


Nel precedente diagramma, sfruttando la proprietà di sovrapposizione degli effetti, rappresentiamo l'uscita del nostro sistema come combinazione lineare delle uscite precedenti: $y(t) = y_\omega(t) + y_n(t) + y_d(t)$.

Testing del sistema di controllo modello non lineare



Dopo aver realizzato il sistema non lineare su SimuLink e collegati i rispettivi segnali, effettuiamo il testing del sistema:



Il diagramma precedente illustra la risposta del sistema non lineare, a partire dall'intorno di equilibrio, ad un gradino di ampiezza data dalle specifiche del progetto ($9 \cdot 1(t)$).

Dopo una prima esecuzione, emerge come il comportamento del sistema non linearizzato diverga notevolmente.

Cambiando l'ampiezza del segnale in ingresso, raggiungiamo il comportamento desiderato: il nuovo setting prevede un ampiezza $10^{-4} \cdot 1(t)$ per il segnale sinusoidale in ingresso.

A questo ingresso il sistema risponde correttamente assestandosi nell'intorno dell'equilibrio.