

Controllo del motore di un automobile - Progetto c2

[Presentazione del progetto c2](#)

[Gruppo BB:](#)

[Dinamica del sistema](#)

[Sistema in forma di stato](#)

[Ricerca dell'equilibrio](#)

[Linearizzazione nell'intorno dell'equilibrio](#)

[Funzione di trasferimento](#)

[Progetto del regolatore \$R\(s\) = R_s\(s\)R_d\(s\)\$](#)

[Specifiche](#)

[Regolatore statico \$R_s\(s\) = \frac{\mu_s}{s^k}\$](#)

[Punto 3.1](#)

[Regolatore dinamico](#)

[Punto 3.2 - Punto 3.3](#)

[Punto 3.4](#)

[Punto 3.5 - Attenuazione del disturbo in uscita \$d\(t\)\$](#)

[Punto 3.6 - Attenuazione del rumore di misura \$n\(t\)\$](#)

[Testing del sistema di controllo](#)

[Testing del sistema di controllo modello non lineare](#)

Parametri progetto	
γ_1	0.75
γ_2	0.15
β	1.3
ψ	0.04
δ_1	$3 * 10^4$
δ_2	0.2
δ_3	0.02
J	20
ω_e	30

Presentazione del progetto c2

Gruppo BB:

Bernardini Claudio

Corsetti Luca

Straccali Leonardo

Dinamica del sistema

$$\dot{m} = \gamma_1(1 - \cos(\beta\theta - \psi)) - \gamma_2\omega m$$

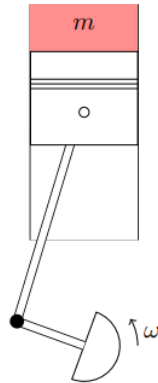
$$J\dot{\omega} = \delta_1 m - \delta_2\omega - \delta_3\omega^2$$

dove:

- $\theta(t)$ indica l'**angolo di accelerazione**
- $\gamma_1(1 - \cos(\beta\theta - \psi))$ modella la **caratteristica intrinseca della valvola**
- J rappresenta il **momento d'inerzia** equivalente del sistema automobile
- $\delta_1 m$ descrive la **coppia trasmessa all'albero motore**
- $\delta_2\omega$ modella l'**attrito nel motore**

- $\delta_3 \omega^2$ descrive la **resistenza dell'aria**

con $\gamma_1, \psi, J, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$



Sistema in forma di stato

Considerando la **velocità angolare** $\omega(t)$ come **uscita del sistema**, possiamo scrivere il **sistema in forma di stato** nel seguente modo :

$$x_1 = m, \quad x_2 = \omega$$

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1(1 - \cos(\beta u - \psi)) - \gamma_2 x_1 x_2 \\ \frac{1}{J}(\delta_1 x_1 - \delta_2 x_2 - \delta_3 x_2^2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$y = h(x, u) = [x_2] \in \mathbb{R}$$

Ricerca dell'equilibrio

Utilizzando la **rappresentazione in forma di stato del nostro sistema** e i parametri forniti, ricerchiamo l'**intera coppia di equilibrio** (x_e, u_e) del sistema:

Dato l'equilibrio $\omega_e = 30$, ricaviamo il valore di equilibrio per la massa (m_e) nel seguente modo :

$$\begin{aligned} f_2(x_e, u_e) &= 0 \\ \rightarrow \frac{1}{J}(\delta_1 m_e - \delta_2 \omega_e - \delta_3 \omega_e^2) &= 0 \\ \rightarrow m_e &= \frac{1}{\delta_1}(\delta_2 \omega_e + \delta_3 \omega_e^2) = 8 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Grazie agli **equilibri degli stati** appena trovati, dalla prima componente del sistema, possiamo ricavare l'**ingresso d'equilibrio**:

$$\begin{aligned} f_1(x_e, u_e) &= 0 \\ \rightarrow \gamma_1(1 - \cos(\beta u_e - \psi)) - \gamma_2 m_e \omega_e &= 0 \\ \rightarrow u_e &= \frac{(\arccos(-\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \omega_e \cdot m_e + 1) + \psi)}{\beta} \end{aligned}$$

L'intera coppia di equilibrio è :

$$x_e = \begin{bmatrix} m_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \cdot 10^{-4} \\ 30 \end{bmatrix}, \quad u_e = 0,1062$$

Linearizzazione nell'intorno dell'equilibrio

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t)\end{aligned}$$

$$\delta \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} [\delta u]$$

$$\delta y(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + [0] [\delta u]$$

$$A = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{\substack{x_1=m_e \\ x_2=\omega_e}} = \begin{bmatrix} -4.5 & -1.2 \cdot 10^{-4} \\ 1500 & -0.07 \end{bmatrix}, \quad B = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} \right|_{u=u_e} = \begin{bmatrix} 0.0954 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{\substack{x_1=m_e \\ x_2=\omega_e}} = [0 \quad 1], \quad D = [0]$$

Funzione di trasferimento

Dopo aver trovato il **sistema linearizzato nell'intorno di equilibrio**, ci viene richiesto di trovare la funzione di trasferimento che lega $\delta U(s)$ e $\delta Y(s)$, rispettivamente la trasformata dell'ingresso e dell'uscita del sistema linearizzato precedentemente trovato, si ricava la **funzione di trasferimento**

$$\delta Y(s) = G(s)\delta U(s)$$

definita dalla seguente formula:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Possiamo ricavare la matrice inversa come segue:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} \rightarrow$$

$$G(s) = C \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} B + D$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 4,5 & +1.2 \cdot 10^{-4} \\ -1500 & s + 0.07 \end{bmatrix}$$

Sfruttando le potenzialità offerte da Matlab, ricaviamo la **matrice aggiunta** (definita come la **trasposta della matrice dei cofattori**) e il **determinante** definiti come segue:

$$cofattori(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 0.07 & 1500 \\ +1.2 \cdot 10^{-4} & s + 4.5 \end{bmatrix} \quad adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 0.07 & +1.2 \cdot 10^{-4} \\ 1500 & s + 4.5 \end{bmatrix}$$

$$det(sI - A) = (s + 4.5) \cdot (s + 0.07) - (+1.2 \cdot 10^{-4} \cdot -1500) = s^2 + 4.57s + 0.495$$

partendo dai dati precedenti ricaviamo

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{C \cdot \text{adj}(sI - A) \cdot B}{\det(sI - A)} + C \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 0.07 & +1.2 \cdot 10^{-4} \\ 1500 & s + 4.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0954 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + 4.57s + 0.495} + [0] \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 1500 & s + 4.5 \end{bmatrix}}{s^2 + 4.57s + 0.495} \cdot \begin{bmatrix} 0.0954 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1500}{s^2 + 4.57s + 0.495} & \frac{s + 4.5}{s^2 + 4.57s + 0.495} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0954 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1500 \cdot 0.0954}{s^2 + 4.57s + 0.495} \\
&= \frac{143.1}{s^2 + 4.57s + 0.495}
\end{aligned}$$

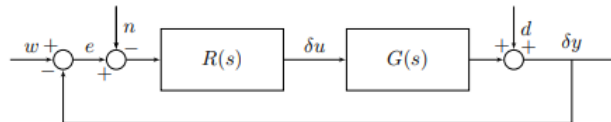
Le radici del denominatore, ovvero i poli del sistema risultano essere :

$$p1 = -4.458, p2 = -0.111$$

Riscriviamo la $G(s)$

$$G(s) = \frac{143.1}{s^2 + 4.57s + 0.495}$$

Progetto del regolatore $R(s) = R_s(s)R_d(s)$



Specifiche

1. Errore a regime $|e_\infty| \leq e^* = 0.01$ in risposta a un gradino $w(t) = 9 \cdot 1(t)$ e $d(t) = 8 \cdot 1(t)$
2. Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase $M_f \geq 55^\circ$
3. Il sistema può accettare una sovralongazione percentuale al massimo dell'5% : $S\% \leq 5\%$
4. Il tempo di assestamento all'ε% = 5% deve essere inferiore al valore fissato: $T_{a,\epsilon} = 0.08s$
5. Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0, 0.05]$, deve essere abbattuto di almeno 55db
6. Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[8 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 45db

Regolatore statico $R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^k}$

Punto 3.1

Partendo dalla funzione di trasferimento $G(s)$ ricavata al punto precedente, progettiamo un regolatore che rispetti le precedenti specifiche:

Scriviamo la funzione di trasferimento in anello aperto

$$L(s) = R(s)G(s)$$

dove possiamo scrivere $R(s) = R_s(s)R_d(s)$ con $R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^k}$

$$e_\infty = \frac{D+W}{1+\mu} \implies \mu = \frac{D+W}{e_\infty} - 1$$

ove:

- D è l'ampiezza del rumore di misura
- W è l'ampiezza del segnale di riferimento del nostro sistema
- e_∞ è l'errore a $t \rightarrow \infty$
- μ è il guadagno del nostro sistema

la formula è valida solamente quando non abbiamo poli nell'origine in $L(s)$.

$$R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^0} = \mu_s$$

$$\mu = L(0) = R(0)G(0) = \mu_s \mu_g$$

possiamo quindi ricavare

$$\begin{aligned} e_\infty = \frac{D+W}{1+\mu} \leq 0.01 &\rightarrow \frac{17}{1+\mu} \leq 0.01 \\ &\rightarrow \mu \geq \frac{17}{0.01} - 1 \geq 1699 \end{aligned}$$

quindi

$$\mu_s = \frac{L(0)}{G(0)} = \frac{\mu}{\mu_g} = \frac{1699}{289.1376} = 5.8761$$

Definiamo la nuova funzione di trasferimento estesa:

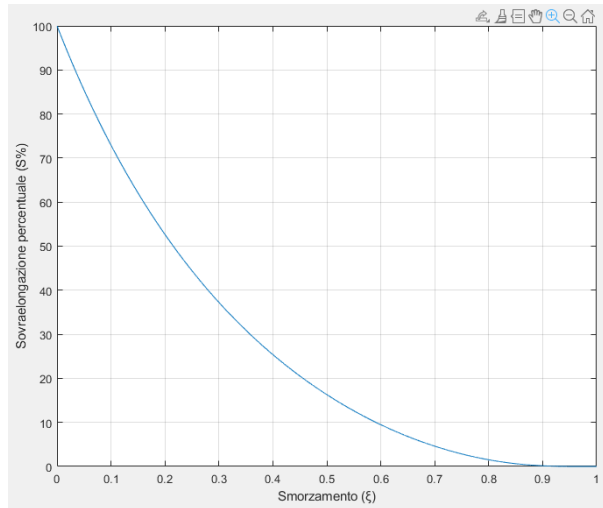
$$G_e(s) = R_s(s)G(s) = \mu_s G(s)$$

Regolatore dinamico

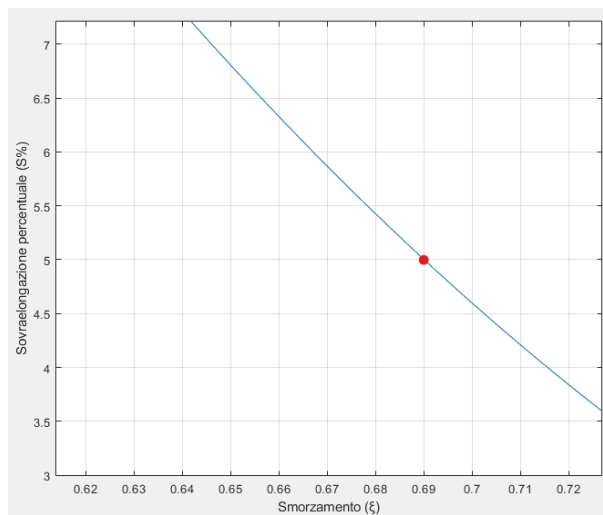
Punto 3.2 - Punto 3.3

Dal grafico della seguente equazione

$$S\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



Ricaviamo graficamente lo smorzamento ξ^* affinché venga rispettato il requisito sulla sovraelongazione percentuale di $S\% \leq 5\%$.



Da ciò che si evince dal grafico, il **valore dello smorzamento minimo** desiderato è $\xi^* \cong 0.69$. Data la seguente equazione $M_f \geq 100\xi^*$, possiamo concludere che il **margin di fase** desiderato è:

$$M_f \geq 100\xi^* \rightarrow M_f \geq 69^\circ$$

Notiamo che il valore di M_f trovato è **più elevato rispetto a quello richiesto dalle specifiche**, ciò garantirà **maggior robustezza del sistema migliori**.

Punto 3.4

Il **tempo di assestamento** al 5% deve essere minore di $T^* = 0.08s$, possiamo quindi trovare $w_{c,min}$ tramite la seguente formula:

$$T_{a,5} < T^*$$

dove grazie all'approssimazione a poli dominanti possiamo scrivere $\omega_n \cong \omega_c$

$$T_{a,5} \cong \frac{3}{\xi\omega_n} \cong \frac{3}{\xi\omega_c}$$

di conseguenza

$$\begin{aligned}\frac{3}{\xi\omega_{c,min}} < T^* &\rightarrow \frac{3}{\xi\omega_{c,min}} < 0.08 \rightarrow \omega_{c,min} > \frac{3}{\frac{M_f}{100} \cdot 0.08} \\ &\rightarrow \omega_{c,min} > \frac{300}{69.1 \cdot 0.08} \\ &\rightarrow \omega_{c,min} > 54.27\end{aligned}$$

Per i punti 3.5 e 3.6 andremo a **sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti** che ci consente di considerare l'uscita del sistema come somma dei singoli contributi :

$$Y(s) = Y_w(s) + Y_d(s) + Y_n(s)$$

Punto 3.5 - Attenuazione del disturbo in uscita $d(t)$

Scogliendo gli ingressi $W(s) = N(s) = 0$ sappiamo che un generico disturbo in uscita si presenta in questa forma:

$$d(t) = D \cdot \cos(\omega_d t + \psi_d)$$

la funzione di sensitività risulta essere:

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} = \frac{1}{1 + L(s)}$$

quindi la relativa uscita del disturbo sarà

$$y_d(t) = |S(j\omega_d)| \cdot D \cos(\omega_d t + \psi_d + \arg(S(j\omega_d)))$$

Per rispettare la specifica dovremo imporre $|S(j\omega_d)|_{db} \leq -55db$.

Sapendo che $|S(j\omega)|_{db} \approx -|L(j\omega)|_{db}$ a **basse frequenze**, possiamo ricavare il vincolo sull'ampiezza della $L(s)$ nel range di frequenze $[0, 0.05]$ come

$$-|L(j\omega)|_{db} \leq -55db \rightarrow |L(j\omega)|_{db} \geq 55db$$

Punto 3.6 - Attenuazione del rumore di misura $n(t)$

I passaggi effettuati sono analoghi a quelli per la $d(t)$

Viene richiesta un'attenuazione del rumore di misura di **45db**. Sapendo che la funzione di sensitività corrispondente è

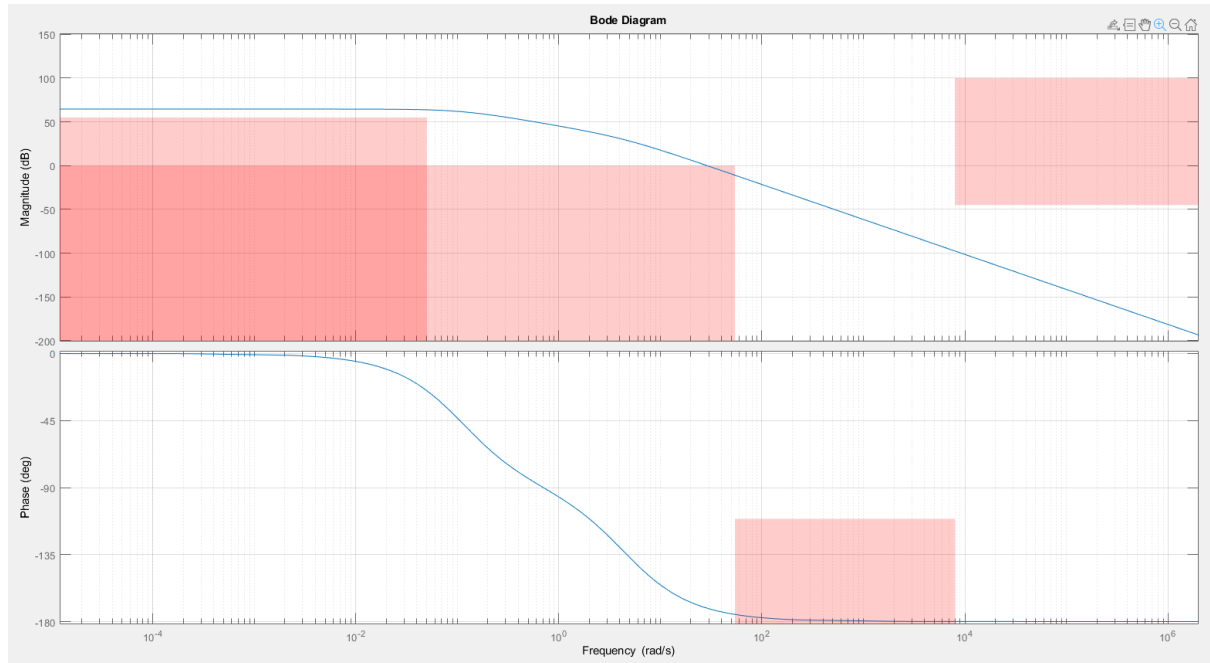
$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Dovremo quindi imporre $|F(j\omega_n)|_{db} \leq -45db$.

Sapendo che $|F(j\omega_n)|_{db} \approx |L(j\omega_n)|_{db}$ ad **alte frequenze**, possiamo ricavare il vincolo sull'ampiezza della $L(s)$ nel range di frequenze $[8 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^6]$ come

$$|L(j\omega_n)|_{db} \leq -45db$$

Possiamo ora tracciare il diagramma di Bode della $G_e(s)$ con le patch dei vincoli trovati



Da una prima analisi del diagramma di Bode prodotto dal nostro sistema, emerge la vicinanza allo **scenario B** visto durante le lezioni ovvero nell'intervallo di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento ω_c , non esistono pulsazioni in cui la fase di $G_e(j\omega)$ rispetta il vincolo sul margine di fase.

Progettiamo quindi il regolatore dinamico per il nostro sistema di controllo utilizzando la formula che definisce la rete anticipatrice:

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \text{ con } 0 < \alpha < 1$$

consideriamo la funzione della rete anticipatrice in $s = j\omega_c^*$ otteniamo

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\varphi^*} \rightarrow \frac{1 + j\tau\omega_c^*}{1 + j\alpha\tau\omega_c^*} = M^* (\cos\varphi^* + j\sin\varphi^*)$$

valgono le seguenti uguaglianze

$$\tau = \frac{M^* - \cos\varphi^*}{\omega_c^* \sin\varphi^*}, \quad \alpha\tau = \frac{\cos\varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin\varphi^*}$$

Quindi il nostro obiettivo è trovare i valori di M^* e φ^* in modo da ricavare τ e $\alpha\tau$, imponiamo $|G_e(j\omega_c^*)|_{dB} + 20 \log M^* = 0$, $M_f^* = 180^\circ + \arg(G_e(j\omega_c^*)) + \varphi^*$ e considerando i valori

$$\omega_c^* = 200, \quad M_f^* = 69^\circ$$

$$\arg(G_e(j\omega_c^*)) = -178.69, \quad |G_e(j\omega_c^*)|_{dB} = -33.54$$

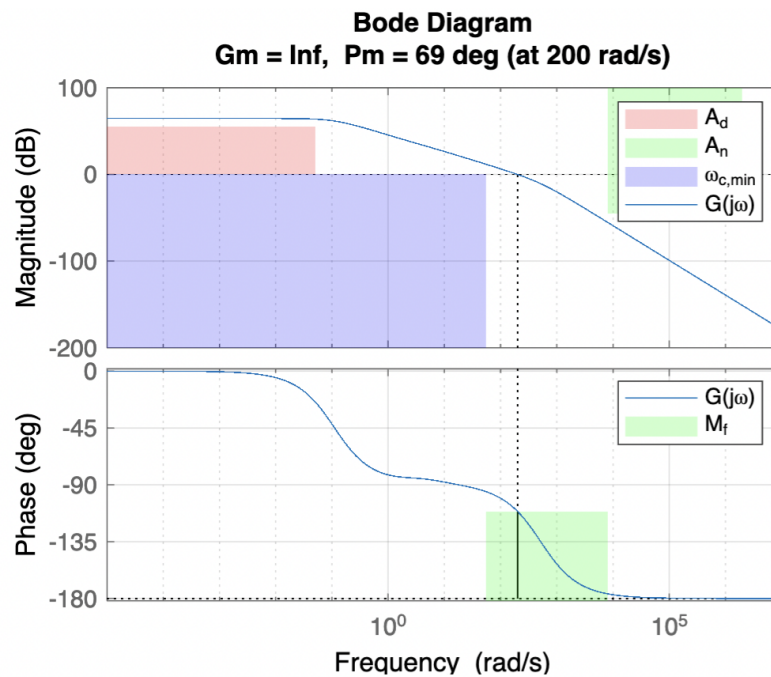
così facendo otteniamo i valori

$$M^* = 10^{-\frac{|G_e(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} \approx 47.535$$

$$\varphi^* = \frac{\pi}{180} (M_f^* - 180^\circ - \arg(G_e(j\omega_c^*))) \approx 1.1814$$

in fine i valori di τ e $\alpha\tau$ sono

$$\tau \approx 0.2549 \text{ rad}, \alpha\tau \approx 0.0019 \text{ rad}$$

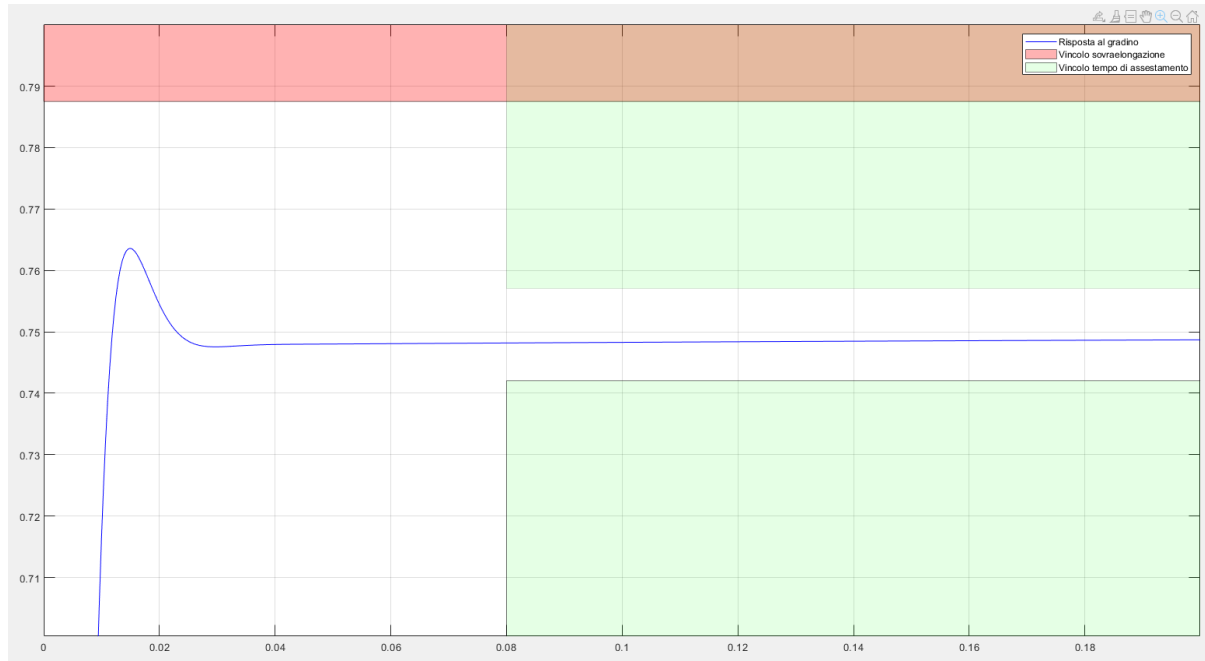


Il regolatore è fisicamente realizzabile in quanto il numero di poli del regolatore è uguale al numero di zeri e da ciò consegue che la pendenza dell'ampiezza di $L(s)$ è uguale alla pendenza della $G(s)$ ad alte frequenze.

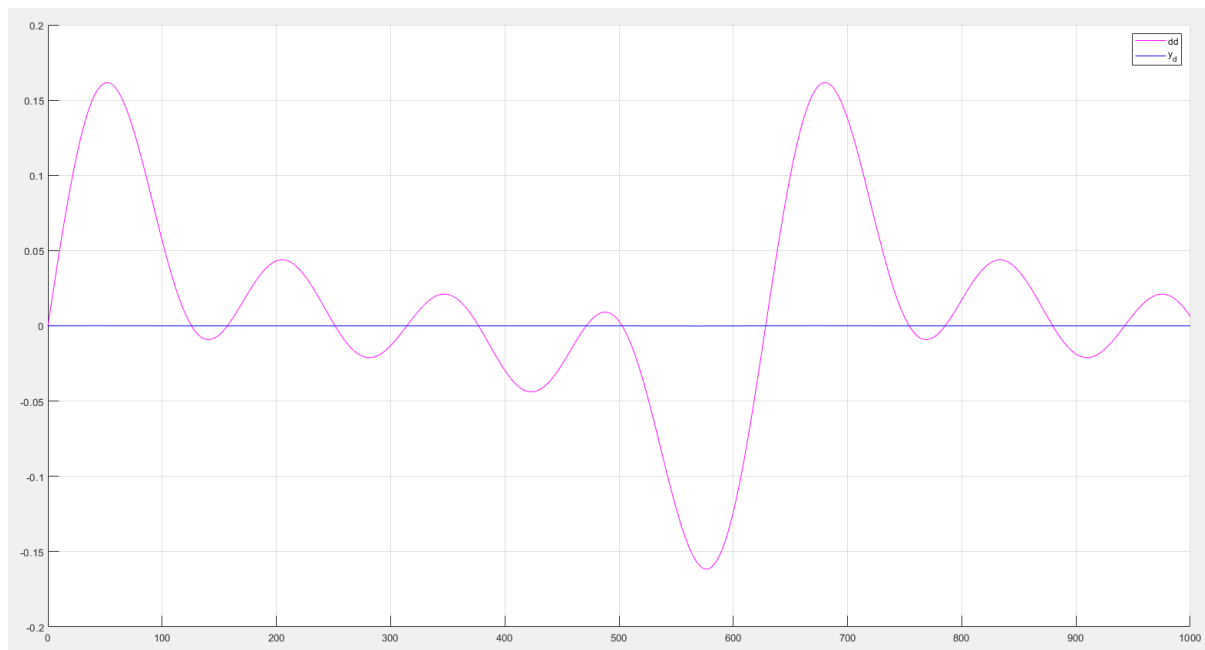
Testing del sistema di controllo

Dopo aver opportunamente realizzato il regolatore per il nostro sistema linearizzato, andiamo a testare il nostro sistema con i seguenti segnali:

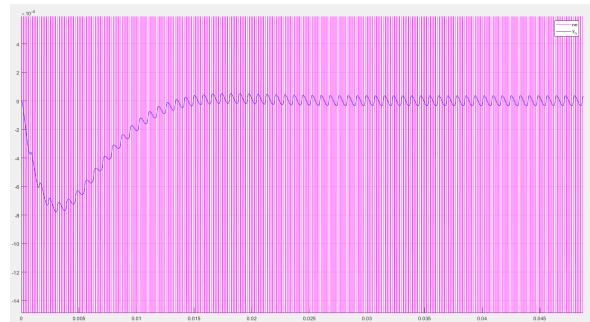
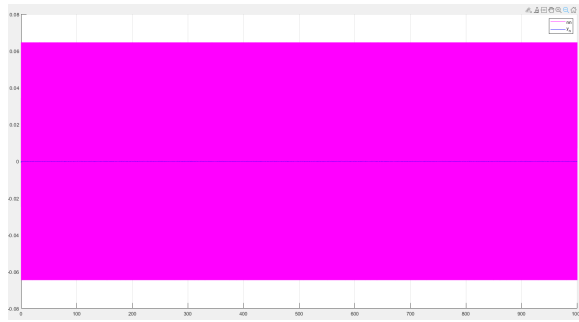
- $w(t) = 0.75 \cdot 1(t)$
- $d(t) = \sum_{k=1}^4 0.05 \cdot \sin(0.01kt)$
- $n(t) = \sum_{k=1}^4 0.02 \cdot \sin(8 \cdot 10^3 kt)$



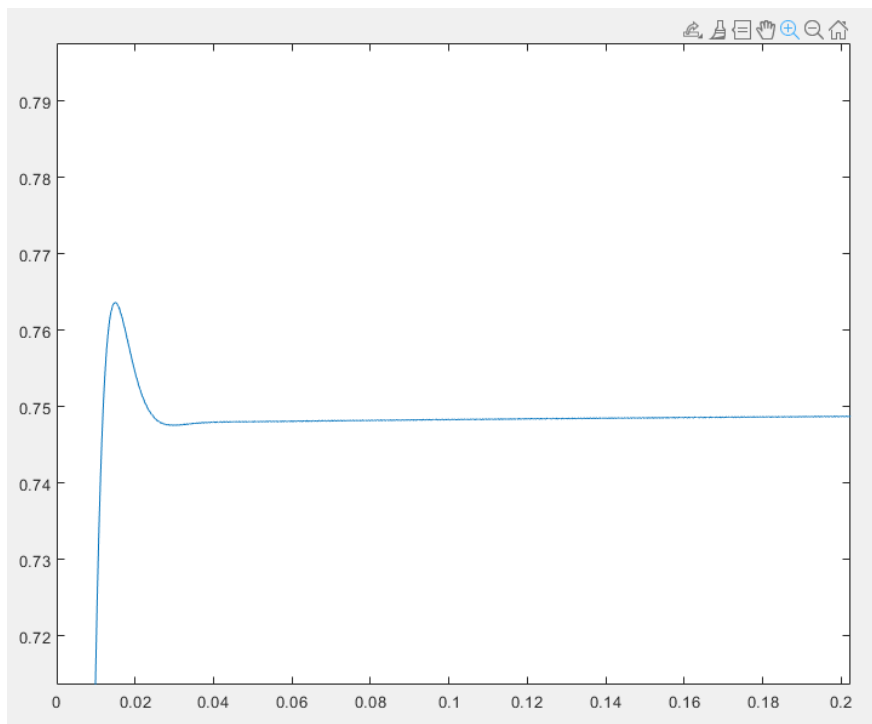
Nel precedente diagramma è possibile visionare l'uscita del nostro sistema sollecitato dall'ingresso $w(t) = 0.75 \cdot 1(t)$ e con le componenti $d(t)$ e $n(t)$ nulle. Le patch verdi delimitano l'area in cui la risposta al nostro gradino dovrà assestarsi affinché vengano rispettati i requisiti, l'uscita del nostro sistema si assesta intorno ai 0.03s quindi molto prima del requisito.



Nel precedente diagramma è possibile visionare l'uscita del nostro sistema sollecitato dall'ingresso $d(t) = \sum_{k=1}^4 0.05 \cdot \sin(0.01kt)$ e con le componenti $w(t)$ e $n(t)$ nulle.

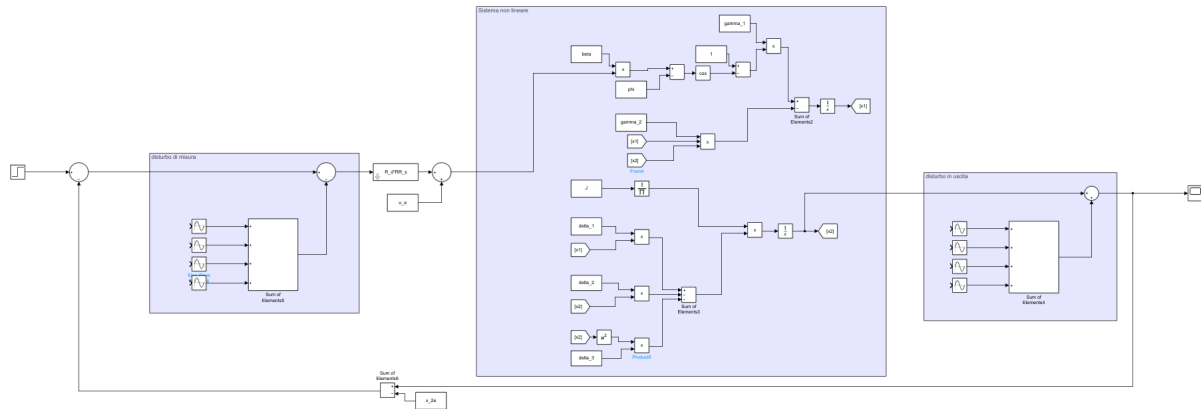


Nel precedente diagramma rappresentiamo il comportamento del rumore di misura ad una sollecitazione in ingresso pari a $n(t) = \sum_{k=1}^4 0.02 \cdot \sin(8 \cdot 10^3 kt)$ quando gli ingressi $w(t)$ e $d(t)$ sono nulli. Come possiamo vedere, il rumore viene attenuato. Nel grafico a destra possiamo vedere un ingrandimento del sistema a basse frequenze prima dell'attenuazione.

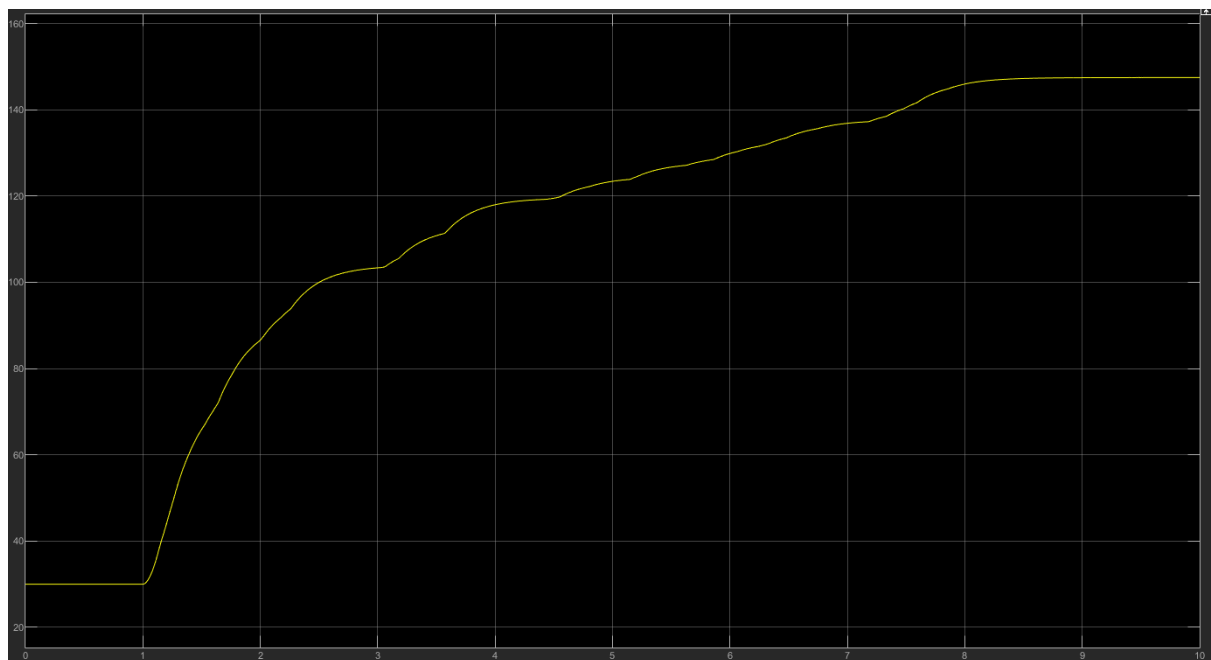


Nel precedente diagramma, sfruttando la proprietà di **sovrapposizione degli effetti**, rappresentiamo l'uscita del nostro sistema come combinazione lineare delle uscite precedenti: $y(t) = y_w(t) + y_n(t) + y_d(t)$.

Testing del sistema di controllo modello non lineare



Dopo aver realizzato il sistema non lineare su SimuLink e collegati i rispettivi segnali, effettuiamo il testing del sistema:



Il diagramma precedente illustra la risposta del sistema non lineare, a partire dall'intorno di equilibrio, ad un gradino di ampiezza pari a 9 dato dalle specifiche del progetto. Dopo una prima esecuzione, emerge come il comportamento del sistema diverga.

Cambiando l'ampiezza del gradino di riferimento, raggiungiamo il comportamento desiderato: il nuovo setting prevede un ampiezza di 10^{-4} .

Grazie questo accorgimento, il controllore rimane efficace sul sistema non lineare.

