Comment les mathématiques permettent-elles d'expliquer la valeur des actifs boursiers ?

Martin-Junior ADECHI

March 16, 2025

Plan

1. Introduction
2. Modélisation mathématique
   - Modélisation du prix des actions
   - Modélisation de la valeur des options
3. Conclusion,limites et perspectives

1 Introduction

2 Modélisation mathématique
- Modélisation du prix des actions
- Modélisation de la valeur des options

3 Conclusion,limites et perspectives

Introduction

Motivation

L'essor des marchés financiers a conduit les mathématiciens à formaliser la dynamique des prix des actions en bourse. Comprendre ces évolutions à travers des modèles mathématiques est essentiel pour les acteurs financiers, notamment dans la gestion des risques, la prévision des rendements d'un portefeuille et l'évaluation de la volatilité d'une actif financier. Ce travail vise à répondre à la question fondamentale : **comment les mathématiques permettent-elles d'expliquer et de modéliser l'évolution des prix des actions sur les marchés financiers ?**

Notions clés I

- **Actif:**Un actif financier est un instrument représentant une valeur monétaire, pouvant être échangé sur les marchés et générer des revenus ou des gains en capital. Il comprend les actions, les options, les obligations et autres titres financiers
- **Action:** Une action est un titre de propriété représentant une part du capital d'une entreprise. En d'autres termes, elle correspond à une fraction de l'entreprise détenue par un investisseur.Les actions reflètent la valeur économique d'une société et sont directement liées à sa capitalisation boursière, selon la relation suivante:

$$Action = \frac{Capitalisation\ boursi\grave{e}re}{nombre\ d'actions}$$

Notions clés II

- **Option:** Une option est un titre donnant le droit d'acheter ou de vendre un actif, sous certaines conditions, pendant une période donnée. Une option américaine peut être exercée à tout moment jusqu'à son expiration. Une option européenne ne peut être exercée qu'à une date spécifiée. Le prix payé pour l'actif lors de l'exercice de l'option est appelé **prix d'exercice ou prix de levée**. La dernière date à laquelle l'option peut être exercée est appelée **date d'expiration ou date de maturité**.
- **Rendement:** Le **rendement** représente le bénéfice d'une entreprise à un moment donné. Il peut être calculé à différentes fréquences : rendement journalier, mensuel ou annuel. Le rendement journalier simple mesure le bénéfice relatif des activités d'une entreprise à un instant t et se calcule par la formule suivante :

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1}$$

Notions clés III

Une autre forme de rendement est le **rendement continu** (ou rendement composé), qui exprime le changement marginal du prix d'une action entre les périodes $t-1$ et t. Lorsque r_t tend vers zéro, on observe que $\log(r_t+1) \sim r_t$. Ainsi, on peut reformuler le rendement continu de la manière suivante :

$$r_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \implies$$

$$r_t + 1 = \frac{P_t}{P_{t-1}} \implies$$

$$\log(r_t+1) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \implies$$

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \tag{2}$$

Notions clés IV

Le **rendement continu** est aussi appelé **rendement logarithmique**. Ce type de rendement est couramment utilisé en finance pour la modélisation, car il repose sur l'hypothèse que le rendement des actifs financiers suit une distribution à moyenne nulle.

1. Introduction
2. Modélisation mathématique
   - Modélisation du prix des actions
   - Modélisation de la valeur des options
3. Conclusion,limites et perspectives

Mouvement brownien I

- Le prix des actions est modélisé par un **mouvement brownien géométrique**.
- Le modèle mathématique est exprimé par l'équation suivante :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t \tag{3}$$

  où W_t est un mouvement brownien standard
- Les paramètres μ et σ sont des constantes représentant respectivement la dérive et la volatilité de l'action.
- Pour pouvoir utiliser ce modèle, il est nécessaire de déterminer ces paramètres.

Mouvement brownien II

Posons $Y_t = \log(X_t)$, où log désigne le logarithme naturel. D'après la formule d'Ito, nous avons :

$$dY_t = \frac{1}{X_t}\,dX_t - \frac{1}{2X_t^2}\,dX_t^2 \tag{4}$$

ayant dX_t, cette expression peut être calculé et on obtient:

$$dY_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\,dt + \sigma\,dW_t \tag{5}$$

En intégrant cette expression, nous avons :

$$Y_t = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW_s \tag{6}$$

Mouvement brownien III

Ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$Y_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t \tag{7}$$

Ainsi, le processus X_t peut être exprimé comme l'exponentielle de Y_t :

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right) \tag{8}$$

Nous avons ainsi l'expression directe du mouvement brownien géométrique. Toutefois, pour utiliser ce modèle, nous devons déterminer les paramètres μ et σ.

Mouvement brownien IV

En prenant le logarithme des deux côtés, on obtient :

$$\log(X_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t$$

$$\log(X_{t-1}) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) (t-1) + \sigma W_{t-1} \implies$$

$$\Delta \log(X_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma \Delta W_t \implies$$

$$r_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma \Delta W_t$$

Mouvement brownien V

La valeur espéré du processus est alors

$$E(r_t) = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \tag{9}$$

$$\mathrm{Var}(r_t) = \sigma^2 \tag{10}$$

Ainsi les paramètres μ et σ sont donnés par :

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(r_t)} \tag{11}$$

$$\mu = E(r_t) + \frac{\sigma^2}{2} \tag{12}$$

où r_t est le rendement de l'action.

Simulation I

Pour illustrer, nous simulons un mouvement brownien relatif au prix de l'action Apple. Nous considérons le prix de l'action Apple sur la période 2022-2024. Ces valeurs historiques sont utilisées dans la modélisation. Les valeurs des paramètres obtenues sont à leur tour utilisées pour la prévision de l'année 2025.

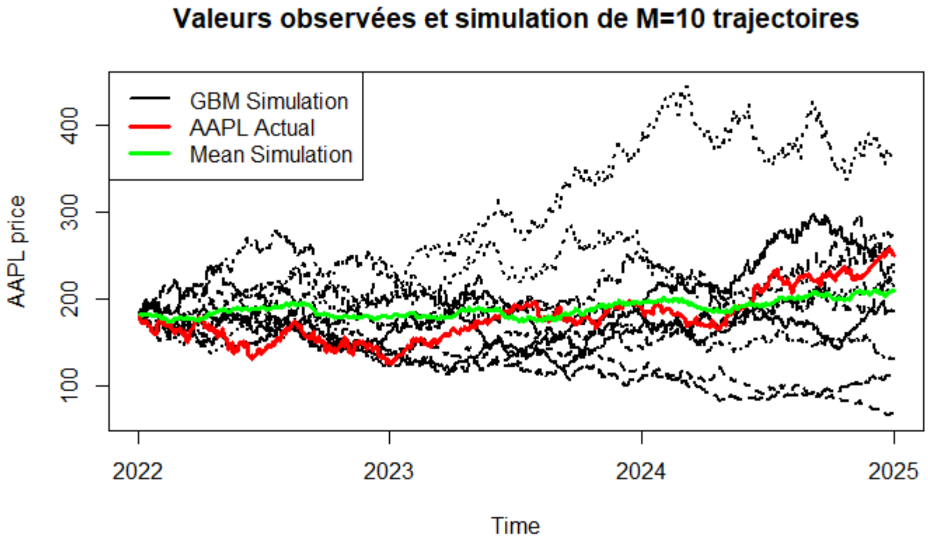
Simulation II

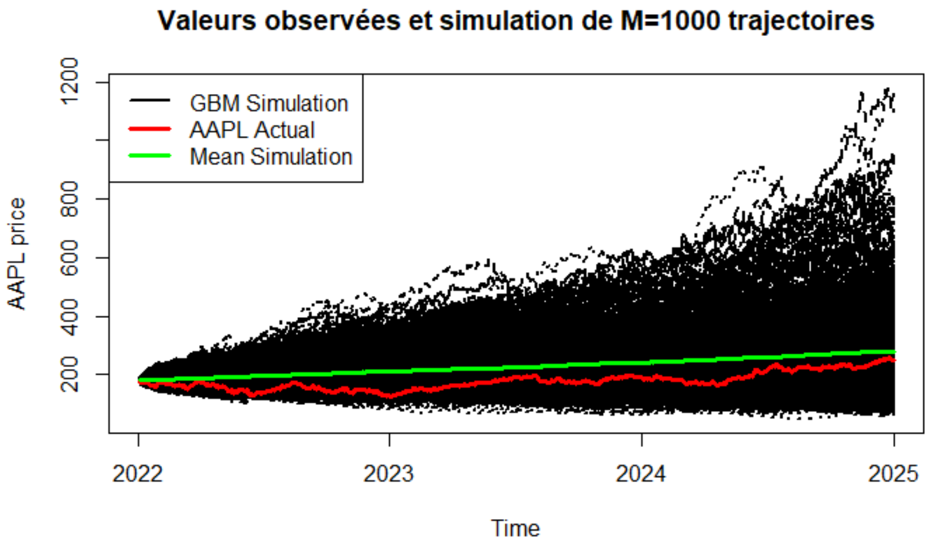
Figure 1: Prix de l'action Apple de Janv 2022- Mars 2025

Simulation III

- En considérant cette période, nous calculons les paramètres empiriquement.
- On obtient: $\mu = 0.0005694353$ et $\sigma = 0.01703699$.
- Nous adoptons l'approche Monte Carlo en simulant plusieurs trajectoires différentes et en prenant la moyenne. Par la loi des grands nombres, cette moyenne converge vers la valeur espérée de notre processus stochastique(le mouvement brownien)

Simulation IV

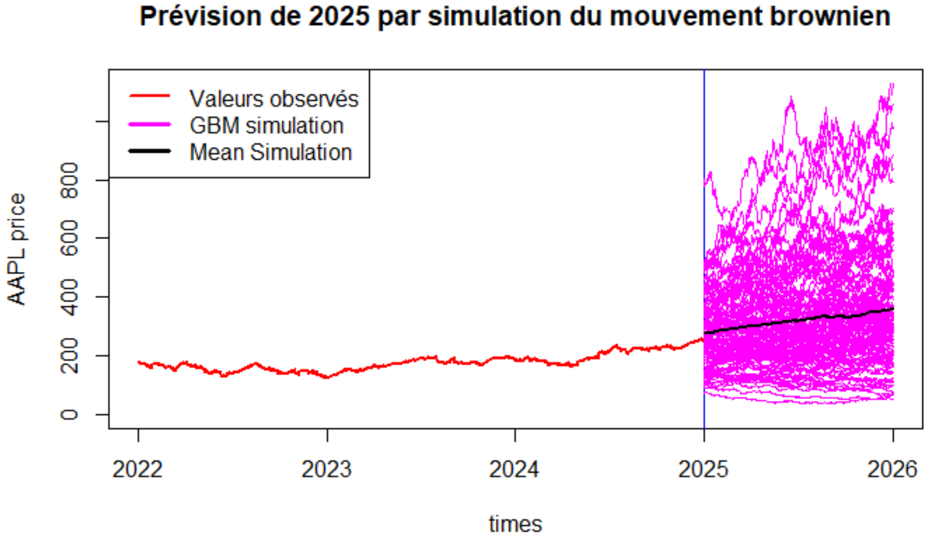



Valeurs observées et simulation de M=1000 trajectoires
GBM Simulation
AAPL Actual
Mean Simulation
AAPL price
200
400
600
800
1200
2022
2023
2024
2025
Time

Prévision I

- Nous pouvons utiliser ce modèle pour la prévision des valeurs futures de l'action Apple.
- Nous insistons sur le fait qu'un mouvement brownien est un processus stochastique donc de nature imprévisible et à caractère non borné. Cependant la valeur espérée d'un mouvement brownien est bien finie. Ceci justifie pourquoi il est important d'adopter l'approche Monte Carlo dans la prévision d'un mouvement brownien.

Prévision II



Évaluation de la valeur des options I

- Une option est toujours liée à un autre actif. Généralement sur les marchés financiers, les options sont liés aux actions.
- Nous considérons le cas où une option est liée à une action
- Ainsi connaitre le prix de l'action implique la capacité d'évaluer la valeur de l'option
- Soit S_t le prix de l'action à l'instant t et K le prix d'exercice de l'option. En se référant à la définition d'une option, il est évident que le vendeur d'une option ne fait pas une opération déficitaire que si à t on a:

$$C_t = max\{(S_t - K), 0\} \tag{13}$$

  où C_t est le prix de l'option.
- L'option de type call fait intervenir une obligation de la part de l'acheteur de payer le prix d'exercice K à la date d'échéance.

Évaluation de la valeur des options II

- On peut considérer le payement à échéance T de K comme une obligation zéro-coupon qui paie K à T. La valeur de cette obligation est donnée par

$$P_t = \frac{K}{(1+r)^{(T-t)}} \tag{14}$$

où r est le taux d'intérêt sans risque et T la date d'échéance.
Et ainsi on a

$$C_t \simeq S_t - P_t \tag{15}$$

Évaluation de la valeur des options III

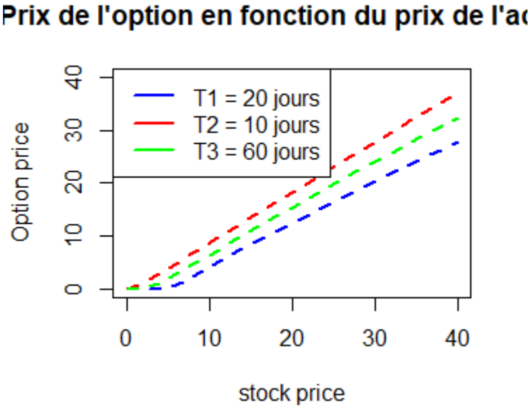


Figure 5: Prix de l'option en fonction du prix de l'action; **K = 20$,r=0.05**

Évaluation de la valeur des options IV

De la figure 5 et de l'équation 15 on a:

- Plus le prix de l'action est élevé, plus la valeur de l'option est grande
- La volatilité relative de l'option n'est pas constante : elle dépend à la fois du prix de l'action et de la maturité de l'option
- La formule 15 fait dépendre la valeur de l'option de celle de l'action. Ceci rend cette formule inapplicable car on ne peut connaitre d'avance la valeur future de l'action.
- Utiliser cette formule suppose déterminer le prix de l'action. On peut se contenter d'utiliser un mouvement brownien.
- Déterminer le prix de l'action à l'aide d'un mouvement brownien crée de l'incertitude dans l'évaluation de la valeur de l'option.

- Pour éliminer l'incertitude dans la valuation de l'option M. Black et M. Scholes ont proposé en 1973 un modèle: le modèle de Black and Scholes (1973)
- L'idée derrière le modèle est d'utiliser une stratégie d'investissement qui rend la valeur de l'option indépendante du prix de l'action de sorte que $\forall S_t$, le risque associé à l'investissement soit nul.
- Ils proposent de créer une position couverte (hedged position), consistant en une position longue sur l'action et une position courte sur l'option, dont la valeur ne dépendra plus du prix de l'action, mais uniquement du temps et des constantes connues. Ils parviennent à l'équation aux dérivés partielles:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r\left(S\frac{\partial C}{\partial S} - C\right) = 0 \tag{16}$$

où le prix de l'option, C, est une fonction du prix du sous-jacent, S et du temps t ; r est le taux d'intérêt sans risque, et σ la volatilité du stock.

- Un problème d'évaluation de la valeur d'une option s'exprime naturellement sous forme d'un problème limite de la sorte

$$\begin{cases} C(0,t) = 0, \quad \forall t \in [0,T] \\ \\ \lim\limits_{S \to +\infty} (C(S,t) - S) = 0, \quad \forall t \in [0,T] \\ \\ C(S,T) = \max\{S-K, 0\} \end{cases} \tag{17}$$

- L'équation de Black-Scholes peut être résolue en se ramenant à l'équation de la chaleur.

Modèle de Black-Scholes III

- La solution exacte de l'équation de la chaleur est connue ce qui entraine la capacité d'exprimer la solution de l'équation de Black-Scholes à l'aide de fonctions élémentaires. La solution s'écrit (David and Gosselet):

$$C(S,t) = \frac{S}{K} N\left(\frac{\ln \frac{S}{K}}{\sigma\sqrt{T-t}} - (k+1)\sigma\sqrt{T-t}\right)$$

$$-\frac{e^{-r(T-t)}}{2} N\left(\frac{\ln \frac{S}{K}}{\sigma\sqrt{T-t}} - (k-1)\sigma\sqrt{T-t}\right) \tag{18}$$

où $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est la fonction de distribution de la normale.

Simulation

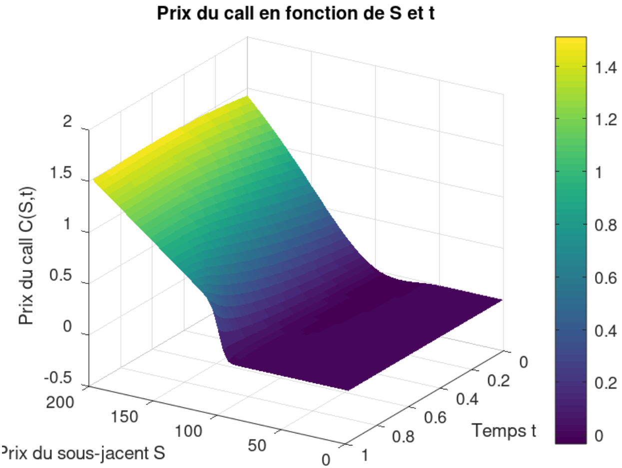


Figure 6: **Le "call" en fonction du prix du stock S et du temps t, pour K = 100, r = 6% ,**$\sigma = 0.3$

1 Introduction

2 Modélisation mathématique
- Modélisation du prix des actions
- Modélisation de la valeur des options

3 Conclusion,limites et perspectives

- Le prix des actions boursiers est modélisé par un **mouvement brownien géométrique**. Mais ce modèle est incapable de prévoir les évènements extrêmes comme les krachs boursiers. Avec le développement des ordinateurs modernes, il est plus facile de faire des simulation Monte Carlo et obtenir la valeur espérée du prix d'une action.
- La valeur des options est modélisée par le **modèle de Black-Scholes**. Le modèle fait l'hypothèse que le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique. Ce qui le rend aussi incapable de gérer les krachs boursiers.
- Le modèle de Black-Scholes suppose que la volatilité de l'action est constante alors que cette dernière n'est en réalité jamais constante. Il est de grande intérêt de proposer un modèle qui tient compte de la dynamique de la volatilité des actions.

Références

Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. 81(3):637–654, 1973. ISSN 0022-3808. doi: 10.1086/260062. URL https://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/260062. Publisher: The University of Chicago Press.

Claire David and Pierre Gosselet. *Equations aux dérivées partielles*. URL https://www.dunod.com/sciences-techniques/equations-aux-derivees-partielles-cours-et-exercices-corrig