

局部波动率模型期权定价实证研究

——衍生品系列研究之（七）



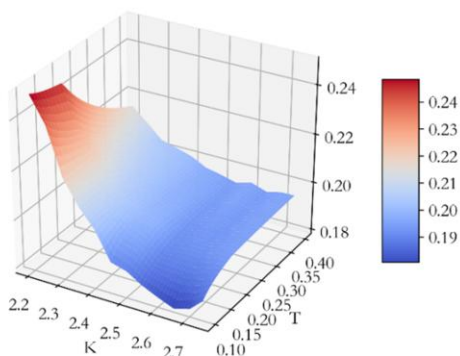
研究结论

- 上证 50ETF 期权的隐含波动率曲面具有明显的微笑或倾斜的特征，与 BS 模型波动率常数的假设相违背。场外期权定价方面，若使用 BS 模型则无法反映市场真实的隐含波动率曲面，对奇异期权的定价效果影响将更为显著。本文通过实证研究证明了应用局部波动率模型可以在很大程度上提高期权定价准确度，并可以降低机构的对冲成本。
- 本文在局部波动率模型中选取 SVI 模型（Stochastic Volatility Inspired Model），其在海外业界较为常用的，采用基于不同到期日的隐含方差曲线进行优化拟合的方法，具有优化效率高、参数拟合结果稳定、可排除跨期套利等优势。本文基于上证 50ETF 期权 455 个交易日的数据进行实证研究，得到以下关键结论：
- 首先，基于 SVI 模型成功拟合出与实际情况相符的隐含波动率微笑，且可以有效排除跨期套利；其次，SVI 模型的样本内定价准确度远高于 BS 模型；此外，SVI 模型的样本外动态对冲误差在不同时间与行权价样本上均显著低于 BS 模型；最后，随着市场活跃度的提升，SVI 模型相对 BS 模型优势增大，说明使用 SVI 模型进行期权定价与对冲的应用前景广阔。

风险提示

- 市场不稳定性加剧，突破无套利条件，影响模型拟合或模型价格与市场价格发生较大偏离。
- 量化模型失效的风险

图：上证 50ETF 期权隐含波动率曲面



报告发布日期

2017 年 09 月 08 日

证券分析师

朱剑涛

021-63325888*6077

zhujiantao@orientsec.com.cn

执业证书编号：S0860515060001

相关报告

商品期货中的 alpha 策略	2017-07-11
商品期货套利策略实证	2017-01-10
基于单特征因子的隐马尔科夫模型在商品期货上的应用	2017-01-04
国内商品期货常用日内 CTA 策略测试	2016-10-13

东方证券股份有限公司经相关主管机关核准具备证券投资咨询业务资格，据此开展发布证券研究报告业务。

东方证券股份有限公司及其关联机构在法律许可的范围内正在或将要与本研究报告所分析的企业发展业务关系。因此，投资者应当考虑到本公司可能存在对报告的客观性产生影响的利益冲突，不应视本证券研究报告为作出投资决策的唯一因素。

有关分析师的申明，见本报告最后部分。其他重要信息披露见分析师申明之后部分，或请与您的投资代表联系。并请阅读本证券研究报告最后一页的免责申明。

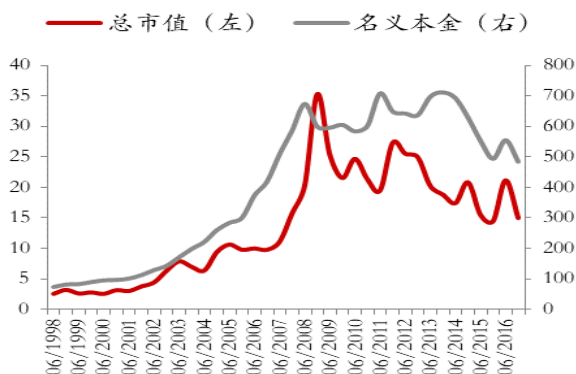
目录

一、背景	3
二、模型选择	5
2.1 什么是局部波动率模型	5
2.2 为什么要选择 SVI 模型	6
2.3 SVI 模型期权定价步骤	6
三、SVI 模型基本原理	8
3.1 SVI 模型参数刻画	8
3.1.1 原始 SVI 模型表达式	8
3.1.2 基于无套利条件的参数取值范围	9
3.2 Quasi-Explicit 优化法	10
四、基于 50ETF 期权的实证分析	12
4.1 SVI 模型数据准备	12
4.2 SVI 参数校准结果	13
4.3 SVI 模型样本内定价误差	15
4.4 SVI 模型动态对冲误差	17
4.4.1 动态对冲方法	17
4.4.2 波动率曲面平滑	17
4.4.3 SVI 模型动态对冲结果	18
五、对商品期货标的期权的说明	23
六、附录	24
6.1 附录 1：隐含波动率计算	24
6.2 附录 2：隐含波动率曲面无套利条件	24
6.3 附录 3：SVI 模型参数约束条件	25
参考文献	27
风险提示	27

一、背景

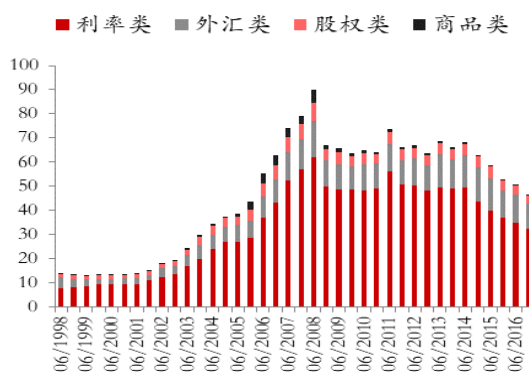
20 世纪 80 年代起至 2008 年金融危机前，是全球场外衍生品市场飞速发展的时期，图表 1 可以看出，场外衍生品总市值由约 2.6 万亿美金增长至约 15 万亿美金，名义本金总量由约 72 万亿美金增长至约 483 万亿美金。受 08 年金融危机的影响，全球场外衍生品交易量有一定下滑，但仍维持较高的水平。2016 年下半年，全球场外衍生品中期权类产品名义本金总量约为 47 万亿美金，占比约 9.7%，而期权以利率类为主，2016 年下半年占比约 69%，股权类期权产品占比仅为 7.7% 左右（图表 2）。

图 1：全球场外衍生品名义本金与市值总量（单位：万亿美金）



数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

图 2：全球场外期权名义本金（单位：万亿美金）

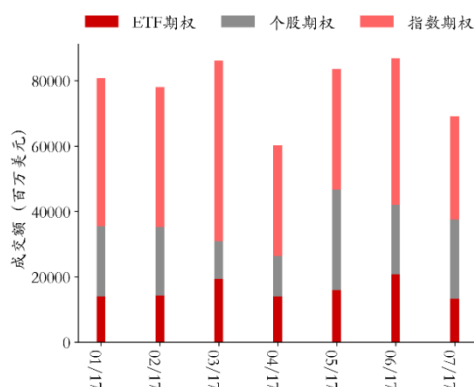


数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

我国场外衍生品的发展处于起步的阶段，据统计，2016 年我国证券公司场外期权业务累计交易 20848 笔，对应初始名义本金约 3474 亿元。场外期权合约标的有沪深 300 股指期货、中证 500 股指期货、上证 50 股指期货、A 股个股、黄金期现货，以及少数境外标的。目前，上海证券交易所正在进行沪深 300 指数期权的模拟，个股期权在场外市场也越来越受欢迎，沪深 300 指数期权上市后其活跃度预计会较上证 50ETF 期权有显著提高。

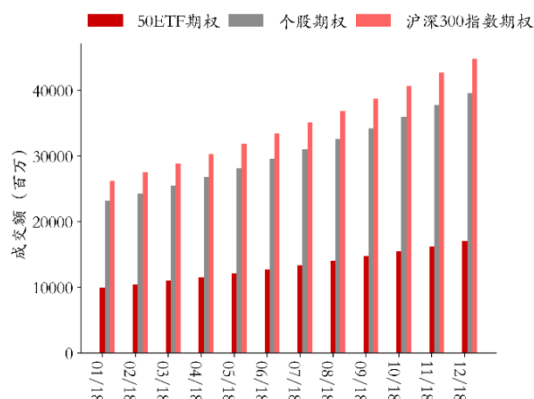
我们基于美国 ETF 期权、个股期权、指数期权市场份额对沪深 300 指数期权、个股期权预期成交量进行推算。图表 3 美国全部交易所 2017 年 1-7 月汇总数据显示，指数期权成交额约为 ETF 期权成交额的 2.6 倍，个股期权成交额约为 ETF 期权的 2.3 倍。我们将此倍数直接用于我国市场，现阶段 50ETF 期权成交额的增长速度很快，2017 年至今其成交额的平均增长速度 21.7%，我们保守估计设定未来 50ETF 增长速度为 5%，对 2018 年 50ETF 期权、沪深 300 指数期权、个股期权的成交量做出预估（图表 4），到 2018 年 12 月预计 50ETF 成交额为 170 亿元、沪深 300 指数期权若能较早上市预计成交额达到 448 亿元。

图 3：美国市场不同类型期权成交额



数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

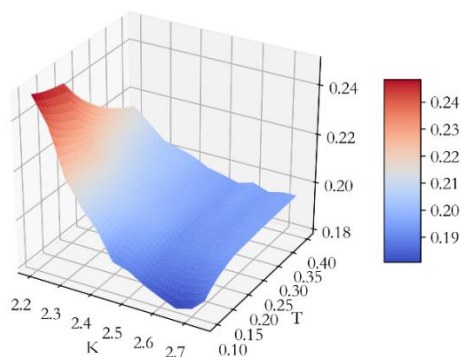
图 4：我国不同类型期权成交量预估



数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

隐含波动率随行权价与到期日的变化而呈现微笑或倾斜的状态。我们以 2017 年 7 月 19 日的上证 50ETF 期权收盘数据为例，采用附件 1 方法计算 BS 模型隐含波动率，并构造隐含波动率曲面，如图表 5 所示，波动率曲面具有明显的微笑特征。说明对于 50ETF 期权，BS 模型波动率常数的假设与隐含波动率微笑现象相违背，进行复杂的波动率模型的定价实证研究是十分必要的。

图 5：上证 50ETF 期权隐含波动率曲面



资料来源：东方证券研究所 & wind 资讯

而研究复杂的波动率模型的根本目的是场外期权的精确定价与高效对冲。场外期权的首要作用是投资者提供风险对冲，其次还可以作为构建工具为投资者提供不同风险收益配比的多样化投资产品。场外期权的定价模型方面，基于 BS 模型进行定价与对冲效率较低，BS 模型结构简单，而且是基于历史波动率，无法反映市场对未来波动的预期，对奇异期权的定价效果较差，导致机构只能设置较高的期权价格来覆盖模型风险。海外在 20 世纪 90 年代起对随机波动率模型、局部波动率模型已有完善的理论研究成果与业界应用实践。我国上证 50ETF 期权上市已超过两年的时间，其交易量也在不断增长，我们可以获得较高质量的场内交易数据进行复杂波动率模型的实证研究。在模型

的选择上，我们兼顾定价效率与计算效率，在局部波动率模型中选取 SVI 模型（Stochastic Volatility Inspired Model），基于上证 50ETF 期权日频交易数据，进行期权定价与动态对冲的实证研究。

二、模型选择

2.1 什么是局部波动率模型

海外期权定价的相关研究与业界实践中，局部波动率模型与随机波动率模型的应用已相当普遍，局部波动率模型是随机波动率模型的一种简化。随机波动率模型能够解释波动率随行权价与到期日而变化，即隐含波动率微笑的现象，Wilmott（2000）提出随机波动率模型的偏微分方程为：

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1 \\ (1) \quad dv_t &= \alpha(S_t, v_t, t) dt + \eta \beta(S_t, v_t, t) \sqrt{v_t} dZ_2 \end{aligned}$$

其中，

$$\langle dZ_1, dZ_2 \rangle = \rho dt$$

这与 Black and Scholes（1973）提出的带有时间 t 变量的波动率模型具有一致性，公式（1）中当 $\eta \rightarrow 0$ 时，可得到只与时间 t 有关的波动率模型。

随机波动率模型能够很好地解释隐含波动率微笑的现象，但其计算过程较为复杂耗时，对计算资源要求高。局部波动率模型是随机波动率模型的一种特例，将波动率定义为标的价格 S 与时间 t 的函数 $\sigma(S_t, t)$ ，简化了随机波动率模型的复杂计算，并且可以较好地拟合隐含波动率微笑并用于奇异期权的定价。局部波动率模型由 Dupire (1994)，Derman and Kani (1994) 提出，对于标的价格 S 和时间 t ，其偏微分方程为：

$$(2) \quad dS_t = \mu(S_t, t) dt + \sigma(S_t, t) dz_t$$

考虑到随机波动率模型计算复杂性、计算资源需求高，我们从局部波动率模型入手，采用局部波动率模型中较为常用的 SVI 模型（Stochastic Volatility Inspired Model）进行基于上证 50ETF 的隐含波动率微笑拟合、样本内定价误差分析、动态对冲效果分析与场外奇异期权定价。

2.2 为什么要选择 SVI 模型

SVI 模型 (Stochastic Volatility Inspired Model) 最早于 1999 年 Merrill Lynch 发现与应用, 并由 Gatheral, J (2006) 的演讲向业界公开。作者展示了 SVI 模型对于 SPX 期权隐含波动率的完美拟合, 并且不同到期日波动率曲线没有交叉说明定价结果不存在跨期套利。SVI 模型是业界较为流行的一种局部波动率模型, 其具有以下关键优势:

首先, SVI 模型刻画的是期权的隐含方差以期权虚实值程度 (forward log-moneyness) 为自变量的微笑曲线, 可以通过参数灵活的取值对方差的总体水平、左右渐近线角度、顶点的平滑程度、曲线的方向以及曲线在水平方向上的位置进行调整, 得到符合市场实际情况的隐含波动率曲线, 并且模型满足期权定价模型所必须满足的边界条件, 有严谨的理论支撑。

其次, Gatheral, J (2006) 提出的原始 SVI 模型拟合结果可排除跨期套利, 即拟合得到不同到期日的隐含方差曲线不相交。基于原始 SVI 模型进行一定拓展, Gatheral, J (2012) 得到的 Surface SVI 模型可以排除蝶式套利。

再次, 基于 Quasi-Explicit 优化算法对 SVI 模型波动率进行参数拟合计算效率高且稳定性强。Zeliade Systems (2009) 提出的 SVI 模型 Quasi-Explicit 优化法效率高且参数拟合结果稳健、实用性强。Quasi-Explicit 优化法将原始优化问题拆分、将维, 转化为内层、外层两个优化问题, 并选取 Nelder-Mead Simplex 优化算法, 该算法引入模式搜索, 对初始点的选择包含对过去的记忆, 因而优化过程中反复得到相同的局部最优解的概率较低, 优化结果优于纯随机初始点选择的方法。我们在实证研究过程中发现, SVI 模型波动率参数拟合程序的计算效率很高且稳定性强, 同基于 BS 模型计算隐含波动率的方法相比, 计算所需时间相差并不大。

最后, 随着期权到期时间增长, SVI 模型拟合结果收敛于随机波动率 Heston 模型。Gatheral, J (2011) 在 A Convergence of Heston to SVI 一文中对此做出详细论证。Heston 模型是较为常用的一种随机波动率模型, 但其参数拟合过程比较复杂。SVI 模型提供了一个更为简洁并在长到期日端收敛于 Heston 模型的定价方法, 说明 SVI 模型的应用价值很高。

2.3 SVI 模型期权定价步骤

先将本文的研究思路进行梳理, 基于 SVI 模型进行场外期权定价可以分为如下 7 个主要步骤:

1. **模型选择**: 选取合适的 SVI 模型, 刻画模型参数, 将隐含方差表示为行权价、时间、标的价格的参数表达式 (本文选取原始 SVI 模型涉及 5 个模型参数 $\{a, b, \sigma, \rho, m\}$)。⁴¹



2. **无套利条件**: 基于 Kellerer's theorem 隐含波动率曲面表达式的无套利条件, 将无套利条件转化为 SVI 模型优化参数的约束条件。⁴²



3. **优化问题描述**: 基于 Quasi-Explicit 优化法, 将 SVI 参数模型描述为具体可操作的优化问题, 分为外层优化和内层优化两部分, 包涵优化问题的参数取值域。⁴³



4. **数据处理**: 处理与筛选市场数据, 计算隐含方差 ω_i 、远期价值状态 (forward log-moneyness) x_i , 得到优化所需数据集, 进行优化。⁴⁴



5. **构造波动率曲面**: 基于 SVI 模型的参数优化结果, 得到不同到期日期权合约的隐含方差 ω_i 关于远期价值状态 x_i 的表达式, 构造完整的隐含波动率曲面。⁴⁵



6. **对冲效率分析**: 基于某样本区间, 选取与其他定价模型相比较的方法, 分析 SVI 模型样本内定价误差与动态对冲效率。⁴⁶



7. **场外期权定价**: 应用 Monte-Carlo, 模拟 SVI 模型隐含波动率曲面刻画的标的资产价格运动路径, 进行场外期权定价。⁴⁷

三、SVI 模型基本原理

Gatheral, J. (2004) 第一次提出的 SVI 模型也称为原始 SVI 模型，除原始 SVI 模型之外还有诸多研究对 SVI 模型的参数设置进行了一定的延伸，比如 Natural SVI 模型、Jump-Wing SVI 模型、Surface SVI 模型等，这些拓展模型在复杂度上均高于原始 SVI 模型，各有其优势，但我们在本篇文章中仅关注原始 SVI 模型。

3.1 SVI 模型参数刻画

3.1.1 原始 SVI 模型表达式

基于 Gatheral, J. (2004) 提出的原始 SVI 模型，隐含方差 ω_{imp} 的估计 ω_{imp}^{SVI} ，在固定期权到期日的情况下，表达式为

$$(3) \quad \omega_{imp}^{SVI}(x) = a + b \left(\rho(x - m) + \sqrt{(x - m)^2 + \sigma^2} \right)$$

其中， x 为远期价值状态（Forward log-moneyness），指期权价格相对标的远期价格的虚实值状态，记为 x ，对于行权价为 K 、标的资产为 S 的，距到期日为 τ 的看涨期权，其远期价值状态 x 为：

$$(4) \quad x = \log(K / F_{[t, t+\tau]})$$

用期权的远期价值状态 x 取代行权价 K 与标的价格 S 可以大幅简化 SVI 模型参数刻画表达式。

ω_{imp} 为隐含方差（Total Implied Variance），记为，在 SVI 模型用隐含方差 ω_{imp} 取代对隐含波动率 σ_{imp} 进行拟合，其定义为：

$$(5) \quad \omega_{imp} = \tau \sigma_{imp}^2$$

此外， θ_{imp} 与 ν_{imp} 定义如下：

$$(6) \quad \begin{aligned} \theta_{imp} &= \sqrt{\tau} \sigma_{imp} \\ \nu_{imp} &= \sigma_{imp}^2 \end{aligned}$$

基于远期价值状态 x 和隐含方差 ω_{imp} ，可将 BS 模型定价公式中的 d_1, d_2 （公式 23）化简为：

$$(7) \quad \begin{aligned} d_1 &= -\frac{x}{\theta_{imp}} + \frac{\theta_{imp}}{2} \\ d_2 &= -\frac{x}{\theta_{imp}} - \frac{\theta_{imp}}{2} \end{aligned}$$

模型待拟合的参数集 $\{a, b, \sigma, \rho, m\}$ 中各参数的含义如下：

a ：代表方差的总体水平，增加 a 使图形向垂直方向的正向平移。

b ：代表左右渐近线的角度，增加 b 会减小该角度，加大波动率微笑的程度。

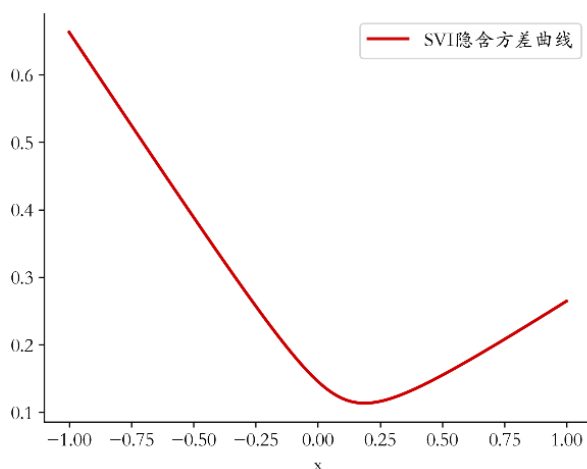
σ ：代表曲线顶点的平滑程度，增加 σ 会减小曲线顶点，也就是期权实值区域的曲率。

ρ ：代表曲线的方向，增加 ρ 使曲线沿逆时针方向旋转。

m ：代表曲线在水平方向的位置，增加 m 使曲线向水平方向的正向平移。

例如，当 $a=0.04, b=0.4, \sigma=0.1, \rho=-0.4, m=0.2$ 时，SVI 隐含方差曲线如图表 6 所示：

图 6：SVI 隐含方差曲线示例



资料来源：东方证券研究所 & wind 资讯

3.1.2 基于无套利条件的参数取值范围

Hirsch, F., Roynette, B. & Yor, M. (2012) 基于 Kellerer's theorem 推导出欧式看涨期权价格曲面

$C(\tau, K)$ 无套利条件，Gatheral, J (2012) 将其转化为对于隐含波动率曲线的条件约束（详细说

明请见附件 2）。将上述无套利条件以及优化过程的约束条件转化为 SVI 模型的参数取值范围（详细说明请见附件 3），即

$$\begin{aligned}
 0 &\leq a \leq \max_i \{\omega_i\} \\
 0 &\leq b \leq \frac{4}{\tau(1+|\rho|)}, \\
 (8) \quad -1 &\leq \rho \leq 1, \\
 \min_i \{x_i\} &\leq m \leq \max_i \{x_i\}, \\
 0 &< \sigma_{\min} \leq \sigma
 \end{aligned}$$

满足上述参数约束条件的优化结果和可以得到排除跨期套利的隐含波动率曲面，即 Gatheral, J (2006) 论证的，原始 SVI 模型拟合结果可以得到排除跨期套利的波动率曲面，即拟合得到不同到期日的隐含方差曲线 ω_{imp}^{SVI} 不相交。

3.2 Quasi-Explicit 优化法

Zeliade Systems (2009) 提出 SVI 模型优化算法被称为 Quasi-Explicit 优化法，将 SVI 模型进行参数降维，大幅提高了运算效率与参数拟合的稳定性。

令

$$y(x) = \frac{x - m}{\sigma}$$

公式 (3) SVI 原模型可改写为：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \omega_{imp}^{SVI}(x) &= a + b \left(\rho y(x) + \sqrt{y(x)^2 + 1} \right) \\
 &= \hat{a} + d y(x) + c z(x)
 \end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 \hat{a} &= a, \\
 d &= \rho b \sigma, \\
 c &= b \sigma, \\
 z(x) &= \sqrt{y(x)^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

因而，给定 (σ, m) ， $\omega_{imp}^{SVI}(x)$ 是关于 \hat{a}, d, c 的线性函数，Quasi-Explicit 参数法将上述优化参

数分为线性参数 (\hat{a}, d, c) 和非线性参数 (σ, m) ，将整个优化问题分为参数为 (\hat{a}, d, c) 的内层优

化与参数为 (σ, m) 的外层优化。

内层优化问题中，对于给定的 (σ, m) ，优化的目标方程为：

$$(2) \quad p_{m, \sigma} = \min_{(\hat{a}, c, d) \in D} f_{\{x_i, \omega_i\}}(\hat{a}, c, d)$$

其中，

$$(3) \quad f_{\{x_i, \omega_i\}}(\hat{a}, c, d) = \sum_{i=1}^n (\hat{a} + dy(x_i) + cz(x_i) - \omega_i)^2$$

(\hat{a}, d, c) 的定义域为：

$$(4) \quad D = \left\{ (\hat{a}, d, c) : \begin{cases} 0 \leq c \leq 4\sigma \\ |d| \leq c \\ |d| \leq 4\sigma - c \\ 0 \leq \hat{a} \leq \max_i \{\omega_i\} \end{cases} \right\}$$

其中， $\{\omega_i\}$ 是基于市场价格反算出的隐含方差观测值。

目标函数 $f_{\{x_i, \omega_i\}}(\hat{a}, c, d)$ 是一个光滑的凸函数，因而对于每一个给定的 (σ, m) ，均存在唯一的

最小值。同时， f 的导数是关于 (\hat{a}, c, d) 的线性函数，使得内部优化问题非常容易处理。

外层优化问题的参数为 (σ, m) ，记 (\hat{a}^*, d^*, c^*) 为内层优化问题的解，其目标方程为：

$$(5) \quad p = \min_{m, \sigma} \sum_{i=1}^n (\omega_{\sigma, m, \hat{a}^*, d^*, c^*}(x_i) - \omega_i)^2$$

外层优化比内层优化问题复杂，因为 $f_{\{x_i, \omega_i\}}$ 是关于 (σ, m) 的非线性函数，并且 $f_{\{x_i, \omega_i\}}$ 会出现多

个局部最小值。根据 Zeliade Systems (2009) 的研究，外层优化推荐选取 Nelder-Mead Simplex

算法。**Nelder-Mead Simplex** 算法引入模式搜索，对初始点的选择包含对过去的记忆，优于纯随机的初始点选择法，因为其在优化过程中不会选取到与过去相同的初始点而得到相同的局部最优解

(Leursen, M.A. & Le Riche, R (2004))。海外其他诸多关于 SVI 模型的实证研究也均沿用

Quasi-Explicit 优化法与 Nelder-Mead Simplex 算法，得到稳健的参数拟合结果。

四、基于 50ETF 期权的实证分析

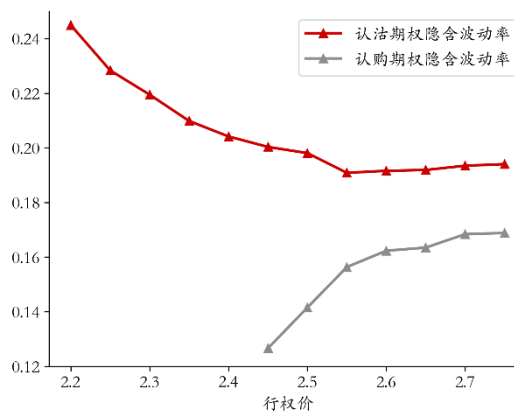
4.1 SVI 模型数据准备

本文按照 Bakshi (1997) 随机波动率模型定价效果的实证研究中所采取的方法进行期权市场数据、隐含波动率筛选。文章指出考虑分红在内的无套利条件，对于 50ETF 期权，我们暂不考虑分红的影响，因而认购认沽期权无套利条件可写为：

$$(6) \quad \begin{aligned} C(t, \tau) &\geq \max \{0, S(t) - KB(t, \tau)\} \\ P(t, \tau) &\geq \max \{0, KB(t, \tau) - S(t)\} \end{aligned}$$

Aurell (2014) 在 SVI 模型基于 SPX 期权的实证研究中提出，计算不同行权价上的隐含波动率仅使用虚值期权的交易价格，基于平价公式将虚值认沽期权转化为等价的实值认购期权计算隐含波动率，进而得到全部行权价上的又认沽认购期权拼接而成的隐含波动率曲面。此种做法在发达金融市场实证分析中效果更好，在交易量太套机会少之又少的市场中，交易价格符合认购认沽期权平价公式，且认购认沽期权隐含波动率的差值极小，我们一开始是照搬此方法构造隐含波动率曲面，但 50ETF 期权的认购认沽隐含波动率差距较大。例如，图表 7 展示了 2017 年 7 月 19 日当季合约认沽与认购期权隐含波动率，当日标的 50ETF 指数处于一轮牛市期，当日收于 2.702，左侧深度实值的认购期权交易量很小，收盘价对应的期权时间价值小于或等于零，与同等行权价与到期日的认沽期权相差较大。50ETF 期权认沽认购波动率分化的情况较为常见，若按照文献方法将两者联合筛选出隐含波动率数据在不同行权价上的连贯性与时间序列上的稳定性将非常差，因而我们选择将认购、认沽期权波动率曲面分别进行拟合。

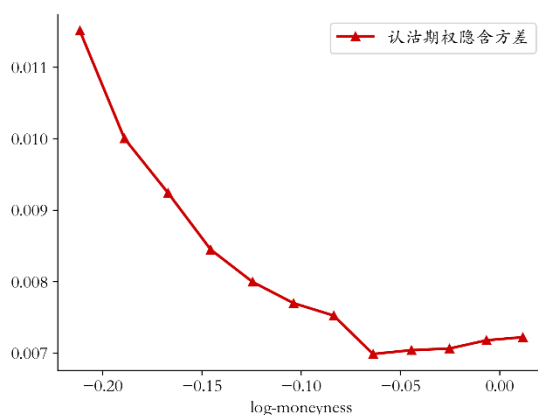
图 7：认沽认购隐含波动率（2017 年 7 月 19 日，当季合约）



资料来源：东方证券研究所 & wind 资讯

以 2017 年 7 月 19 日认沽期权当季合约为例，优化所需数据处理的方法为，基于 50ETF 期权收盘价数据，并应用公式（14）无套利条件，得到离散的隐含波动率数据。然后，基于公式（4）、公式（5）中对远期价值状态（Forward log-moneyness, x ）和隐含方差（Total Implied Variance, $\omega_{imp}(x)$ ）的定义，将行权价与波动率曲面数据点转化成的隐含方差相对远期价值状态的数据点，如图表 8 所示，得到 SVI 模型进行优化拟合所需的原始数据。

图 7：隐含方差数据（2017 年 7 月 19 日，当季合约）



资料来源：东方证券研究所 & wind 资讯

4.2 SVI 参数校准结果

本节以 2017 年 7 月 19 日认沽期权数据为例，展示 SVI 模型 5 个参数的校准结果。基于前文介绍的 Quasi-Explicit 优化法，按照上一节数据准备方法，得到不同到期日合约，SVI 模型拟合所需的远期价值状态和隐含方差数据。当日期权合约距到期日期限（ T ）分别为 0.0192, 0.0959, 0.1918, 0.4411（年），得到表 1 所示 SVI 模型参数。

表 1：SVI 模型参数校准结果

	a	b	ρ	m	σ	SSE
T=0.0192	0.0011	0.9751	-0.715	-0.0514	0.0429	3.65e-08
T=0.0959	0.012	0.2093	-0.2395	-0.0557	0.1009	4.13e-08
T=0.1918	0.0224	0.2449	-0.8166	-0.1652	0.1038	2.15e-07
T=0.4411	0.0003	0.1714	-0.5778	-0.2346	0.2711	4.94e-07

资料来源：东方证券研究所 & wind 资讯

其中，隐含方差观测值与优化值的误差平方和

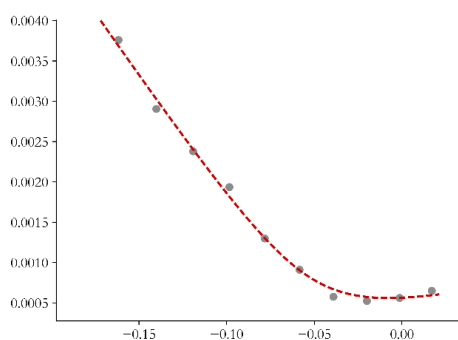
$$(7) \quad SSE = \sum_i \left(\omega_{imp}^{SVI}(x_i) - \omega_i \right)^2$$

也就是公式 (13) 外层优化目标函数值。

SVI 模型对隐含方差 $\omega_{imp}(x)$ 的拟合结果如图表 9-12 所示，其中横轴为远期价值状态

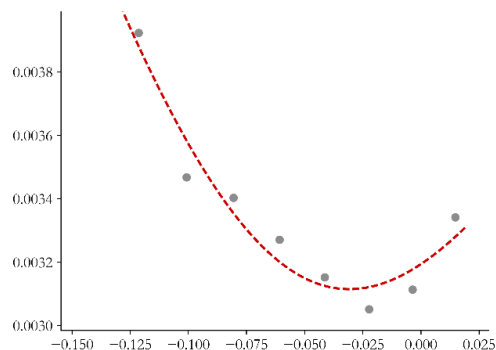
$x = \log(K / F_t)$ ，SVI 模型拟合得到的 $\omega_{imp}^{SVI}(x)$ 拟合结果较为贴切，得到与市场数据吻合的隐含波动率微笑。

图 9：SVI 隐含方差拟合结果，T=0.0192



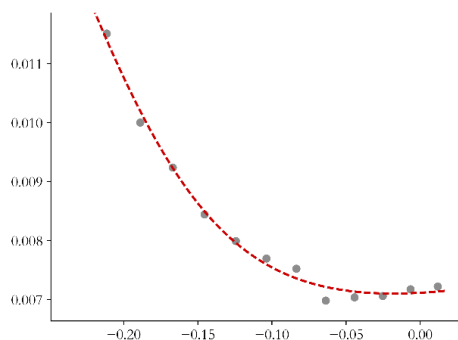
数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

图 10：SVI 隐含方差拟合结果，T=0.0959



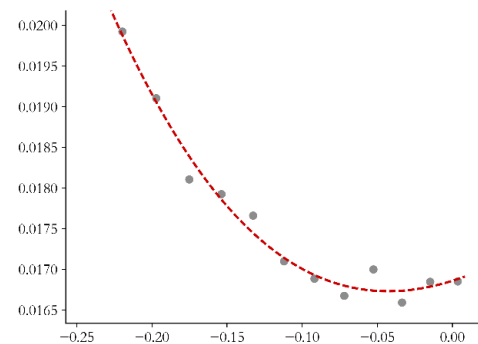
数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

图 11：SVI 隐含方差拟合结果，T=0.1918



数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

图 12：SVI 隐含方差拟合结果，T=0.4411

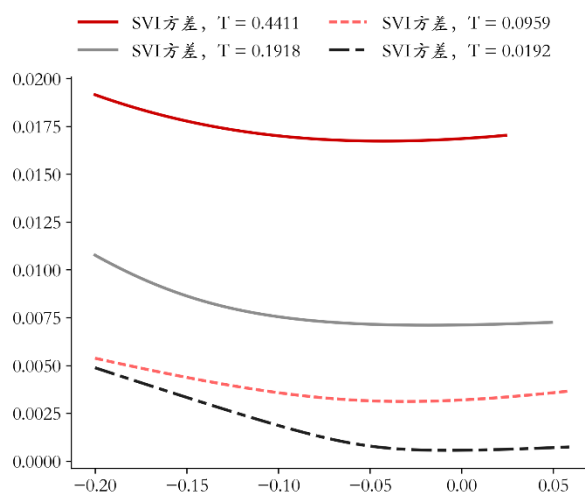


数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

附件 3 中给出 SVI 模型排除跨期套利的参数取值范围限制（公式（29）-（30）），即不同到期日 SVI 隐含方差曲线不相交。基于下季合约（ $T=0.4411$ ）、当季合约（ $T=0.1918$ ）、下月合约（ $T=0.0959$ ）、当月合约（ $T=0.0192$ ）的 SVI 隐含方差曲线如图表 13 所示。其中，当月合约（ $T=0.0192$ ）在深度虚值状态下隐含方差偏高，趋近于下月合约（ $T=0.0959$ ）隐含方差曲线，但该合约距到期日（2017 年 7 月 26 日）只有 3 个交易日，距到期日非常临近的期权合约流动性问题凸显，在此不做重点关注。认为 SVI 模型拟合结果不存在跨期套利，即隐含波动率曲面无套利条件 A：

$\partial_{\tau} \omega_{imp} = \partial_{\tau} \theta_{imp}^2 > 0$ 成立，进而可以通过线性插值构造无跨期套利的隐含波动率曲面，进行场外期权定价。

图 13：SVI 模型不同到期日合约隐含方差



资料来源：东方证券研究所 & wind 资讯

4.3 SVI 模型样本内定价误差

基于 2015 年 9 月至 2017 年 7 月共 455 个交易日的数据，验证 SVI 模型进行样本内定价结果的稳定性，并与 BS 模型定价结果进行对比。首先，使用 BS 模型估算隐含波动率参数的方法较为简单，

即选取当天所有符合前文无套利条件的期权，记期权模型价与市场价误差为 ε_n ，

$$(8) \quad \varepsilon_{n,t}(\sigma_{imp}) = \hat{C}_n(t, \tau_n, K_n) - C_n(t, \tau_n, K_n)$$

对于交易日 t ，BS 模型隐含的波动率即为求解

$$(9) \quad SSE(t) = \min_{\sigma_{imp}} \sum_{n=1}^N \left| \varepsilon_{n,t}(\sigma_{imp}) \right|^2$$

找到误差平方和最小的隐含波动率 σ_{imp} ，即为 BS 模型推算的隐含波动率。

其次，为更便于比较，我们选取单位金额定价误差，或者说定价误差百分比，作为样本内定价误差的计量标准，计算方法为：

$$pct - E_t = \frac{\left| \hat{C}_n(t, \tau_n, K_n) - C_n(t, \tau_n, K_n) \right|}{C_n(t, \tau_n, K_n)} \quad (10)$$

表 2 展示了 SVI 模型与 BS 模型单位金额定价误差在样本内平均值，可以看出无论从期权合约月份还是虚实值程度（ S/k ）的维度，SVI 模型的样本内定价准确度均远远高于 BS 模型。对于当月合约，BS 模型平均误差约为 SVI 模型的 4.38 倍；对于下月合约，BS 模型平均误差约为 SVI 模型的 6.58 倍；对于当季合约，BS 模型平均误差约为 SVI 模型的 6.27 倍，对于下季合约，BS 模型平均误差约为 SVI 模型的 7.63 倍。

表 2：SVI 模型与 BS 模型样本内定价误差比较

合约月份	虚实值程度（S/k）	单位金额平均定价误差（%）	
		BS 模型	SVI 模型
当月合约	< 0.97	5.10	1.01
	0.97 - 1.00	33.01	6.47
	1.00 - 1.03	64.73	19.68
	> 1.03	83.19	20.44
下月合约	< 0.97	7.18	1.50
	0.97 - 1.00	20.92	3.36
	1.00 - 1.03	35.82	4.55
	> 1.03	52.17	7.02
当季合约	< 0.97	6.40	1.13
	0.97 - 1.00	10.42	1.25
	1.00 - 1.03	10.90	1.73
	> 1.03	18.26	3.78
下季合约	< 0.97	10.33	2.02
	0.97 - 1.00	15.34	1.63
	1.00 - 1.03	16.68	1.61
	> 1.03	18.31	3.24

资料来源：东方证券研究所 & wind 资讯

4.4 SVI 模型动态对冲误差

4.4.1 动态对冲方法

我们选取自 50ETF 期权上市半年以后，从 2015 年 9 月至 2017 年 7 月共 455 个交易日的数据进行场内期权的动态对冲，排除即将到期（距到期日 5 个交易日及以内）的合约。采用 Bakshi (1997) 期权动态对冲的做法，基于 $t-2$ 日的收盘价数据拟合 SVI 模型参数构建隐含波动率曲面，基于 $t-1$ 日的市场数据构建对冲组合，持有一个交易日基于 t 日收盘价计算对冲误差。以对冲认沽期权空头为例，基于 50ETF 指数单一资产采用 Delta 对冲的方法构造期权空头的复制组合 (replicate portfolio)。Delta 描述期权价格 V 的变动相对标的资产价格 S 变动的敏感性，计算公式为：

$$(11) \quad \Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

引入随机波动率模型后，Delta 的计算较为复杂，与 BS 模型常数波动率假设的框架下 Delta 等于 $N(d_1)$ 的计算方法不同，因为随机波动率 $\sigma(S_t, t)$ 是标的资产 S_t 与时间 t 的函数，标的价格的变化同时通过隐含波动率的变化传到给期权价格。我们采用 QuantLib 定价工具包构造局部波动率曲面，进而进行期权 Delta 的计算，需注意的是计算 Delta 时用到的是前一交易日的 SVI 模型参数拟合结果。在 $t-1$ 日，卖出 Δ_{t-1} 的 50ETF 指数，当日现金账户为 (Δ_{t-1}) 未取绝对值，此处为负

$$(12) \quad cash_{t-1} = P(t-1, T) - \Delta_{t-1} \cdot S_{t-1}$$

在下一个交易日 (t 日) 计算对冲误差：

$$(13) \quad H_t = \Delta \cdot S_{t+1} + cash_{t-1} \cdot e^{r_f \Delta t} - P(t, T)$$

其中， Δt 为 1 天， T 为期权距到期期限。

在样本时间序列的实证分析中，对冲误差 H_t 取绝对值，这样更便于不同模型之间的比较。并计算对冲误差绝对值占期权价格的百分比，即每单位金额期权空头对应的对冲误差：

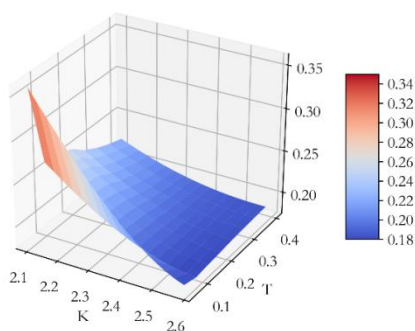
$$(14) \quad pct_H_t = |H_t| / P(t, T)$$

4.4.2 波动率曲面平滑

波动率曲面平滑即用前几个交易日的 SVI 隐含波动率曲面进行平均得到在时间序列上波动更小的平滑后的波动率曲面。当隐含波动率曲面在相邻交易日上跳跃较大，为确保对冲的稳定可采用波动率平滑的方法，图表 14 与图表 15 分别为 5 日平滑后的相邻交易日的波动率曲面，图表 16 与图表 17 分别为这两个交易日的隐含波动率曲面，可以看出从图表 14 到图表 15 的平稳程度要高于图表 16 到图表 17，但平滑后的隐含波动率曲面包含更多过去的交易价格信息，有一定的滞后性。实证

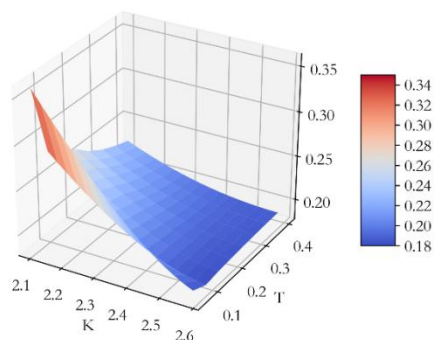
研究发现，进行波动率曲面平滑可以降低出现极端误差的情况，适用于短期的对冲（2个月以下）与市场隐含波动率变化剧烈的情况。

图 14: SVI 隐含波动率曲面 5 日平滑结果 (2017 年 7 月 19 日)



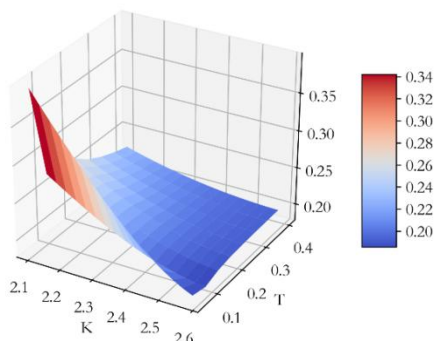
数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

图 15: SVI 隐含波动率曲面 5 日平滑结果 (2017 年 7 月 20 日)



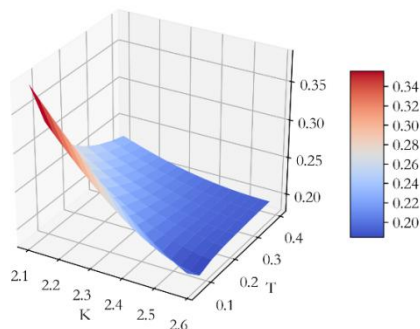
数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

图 16: SVI 隐含波动率曲面 (2017 年 7 月 19 日)



数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

图 17: SVI 隐含波动率曲面 (2017 年 7 月 20 日)



数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

4.4.3 SVI 模型动态对冲结果

根据上述动态对冲方法进行基于 SVI 模型、5 日隐含波动率曲面平滑的 SVI 模型与 BS 模型的动态对冲，将从 2015 年 9 月至 2017 年 7 月共 455 个交易日的数据分为样本 1（2015 年 9 月-2016 年 1 月）、样本 2（2016 年 2 月至 2016 年 7 月）、样本 3（2016 年 8 月至 2017 年 1 月）、样本 4（2017 年 2 月至 2017 年 7 月）四大样本区间，我们得到表 3 所示的单位金额平均对冲误差数据。

从误差数据的整体规律上来看，对冲误差随着虚实值程度（ S/k ）的增大而增加，随合约期限的增长而减小。对于认沽期权， S/k 值越大说明期权的虚值程度越高，虚值与深度虚值期权对冲误差高的原因，一方面因为深度虚值期权市场交易不够活跃，模型定价的准确性相对较低，这点从样本内定价误差结果中看出（表 2），另一方面源于深度虚值期权价格变化与标的价格变化相关性小，基于单个 50ETF 指数资产的对冲效率相对较低是在预期之中。

表 3：SVI 模型与 BS 模型样本内定价误差比较

样本区间	合约月份	虚实值程度 (S/k)	单位金额平均对冲误差 (%)		
			BS 模型	SVI 模型	SVI 模型- 5 日波动率曲面平滑
2015.9-2016.1 (样本 1)	当月合约	< 0.97	16.12	10.29	13.36
		0.97 - 1.00	33.65	20.09	19.99
		1.00 - 1.03	80.33	29.75	28.59
		> 1.03	75.37	55.69	69.07
	下月合约	< 0.97	8.40	5.26	4.97
		0.97 - 1.00	16.22	10.52	10.31
		1.00 - 1.03	21.63	13.29	12.96
		> 1.03	41.64	23.89	24.50
	当季合约	< 0.97	5.43	3.87	3.63
		0.97 - 1.00	11.13	6.34	5.86
		1.00 - 1.03	12.51	7.49	7.33
		> 1.03	21.24	12.51	12.36
	下季合约	< 0.97	6.13	4.00	3.83
		0.97 - 1.00	7.43	4.57	4.23
		1.00 - 1.03	8.04	4.85	4.67
		> 1.03	14.37	7.97	7.94
2016.2-2016.7 (样本 2)	当月合约	< 0.97	13.00	8.29	6.60
		0.97 - 1.00	48.97	18.90	19.86
		1.00 - 1.03	87.35	28.06	30.00
		> 1.03	80.58	39.75	53.89
	下月合约	< 0.97	7.32	4.66	4.69
		0.97 - 1.00	15.43	9.07	9.17
		1.00 - 1.03	24.56	12.88	13.24
		> 1.03	36.45	18.26	19.45
	当季合约	< 0.97	5.33	3.43	3.34

		0.97 - 1.00	9.63	4.81	4.77
		1.00 - 1.03	12.50	6.95	7.02
		> 1.03	19.59	10.97	11.27
	下季合约	< 0.97	5.85	3.20	3.17
		0.97 - 1.00	7.51	3.81	3.78
		1.00 - 1.03	8.11	4.22	4.15
		> 1.03	10.30	5.52	5.53
2016.8-2017.1 (样本 3)	当月合约	< 0.97	3.97	2.25	2.21
		0.97 - 1.00	36.34	17.19	20.16
		1.00 - 1.03	81.72	35.64	40.56
		> 1.03	90.35	46.39	61.77
	下月合约	< 0.97	4.15	3.09	3.19
		0.97 - 1.00	15.34	8.57	8.66
		1.00 - 1.03	35.09	15.50	16.09
		> 1.03	41.01	26.88	27.55
	当季合约	< 0.97	5.77	2.90	2.90
		0.97 - 1.00	9.14	4.12	4.12
		1.00 - 1.03	12.18	5.49	5.48
		> 1.03	24.43	12.30	12.40
	下季合约	< 0.97	4.87	2.58	2.58
		0.97 - 1.00	7.23	3.54	3.54
		1.00 - 1.03	8.39	4.04	4.04
		> 1.03	12.80	6.94	6.93
2017.2-2017.7 (样本 4)	当月合约	< 0.97	3.59	2.01	2.22
		0.97 - 1.00	25.29	10.03	10.00
		1.00 - 1.03	69.45	21.06	21.24
		> 1.03	67.77	45.23	64.87
	下月合约	< 0.97	4.07	1.74	1.75
		0.97 - 1.00	9.96	4.37	4.43
		1.00 - 1.03	27.42	12.74	13.10
		> 1.03	38.77	24.25	25.31
	当季合约	< 0.97	4.23	2.21	2.23
		0.97 - 1.00	8.10	3.92	3.95
		1.00 - 1.03	15.15	7.93	7.97

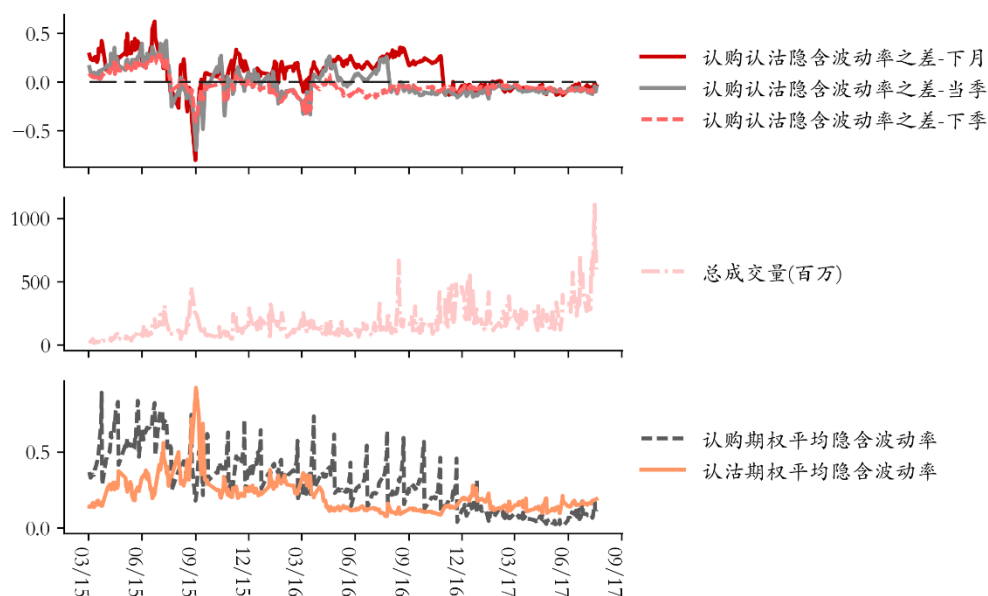
	下季合约	> 1.03	28.08	16.90	16.51
		< 0.97	5.04	2.25	2.26
		0.97 - 1.00	6.69	3.10	3.11
		1.00 - 1.03	9.71	5.16	5.18
		> 1.03	19.92	10.55	10.40

数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

我们将四个时间段样本内的 SVI 模型对冲误差与 BS 模型对冲误差进行比较，可以得到以下结论：
首先，SVI 模型的单位金额平均对冲误差在四个时间序列样本上均显著优于 BS 模型。参照图表 20 中动态对冲误差数据可清晰看出，SVI 模型在动态对冲效率上较 BS 模型优势显著。其中，样本 1 中 BS 模型的平均对冲误差最大为 SVI 模型的 2.70 倍，最小为 1.35 倍，平均为 1.68 倍；样本 2 中 BS 模型的平均对冲误差最大为 SVI 模型的 3.11 倍，最小为 1.55 倍，平均为 1.95 倍；样本 3 中 BS 模型的平均对冲误差最大为 SVI 模型的 2.29 倍，最小为 1.34 倍，平均为 1.96 倍；样本 4 中 BS 模型的平均对冲误差最大为 SVI 模型的 3.30 倍，最小为 1.50 倍，平均为 2.07 倍。SVI 模型对隐含波动率微笑估计更为准确，因而对于不同行权价、期限的期权对冲比率的计算也更为恰当。

其次，从样本 1 到样本 4，随着 50ETF 期权市场活跃度的提升，对冲误差整体上均有减小的趋势，SVI 模型相对 BS 模型的优势逐步增大。图表 18 展示了 50ETF 期权市场隐含波动率与成交量基本情况，样本 1（2015 年 9 月至 2016 年 1 月）的时间区间内，认沽期权隐含波动率的下降速度非常快，认沽认购期权波动率差的绝对值处于较高的水平且波动较大，说明市场的不稳定性较高，因而样本 1 的对冲误差在四个样本中最高。样本 2（2016 年 2 月至 2016 年 7 月）隐含波动率的波动减小，认购认沽期权隐含波动率之差仍处在较高的水平。2016 年 8 月份，上海证券交易所对 50ETF 期权实施新的仓位管理办法放松了期权交易的仓位限制，8 月份以后期权成交量显著增加，此后认购认沽隐含波动率差渐渐收窄、并趋向平稳，即样本 3（2016 年 8 月至 2017 年 1 月）到样本 4（2017 年 2 月至 2017 年 7 月）的时间内，50ETF 期权市场的定价效率与交易活跃程度进一步提升。在 50ETF 期权市场发展完善的过程中模型对冲误差也在逐渐减小，并且 SVI 模型相比 BS 模型的对冲误差减小程度更大，模型优势更加显著。

图 18：认购认沽期权隐含波动率差（成交量加权平均）



资料来源：东方证券研究所 & wind 资讯

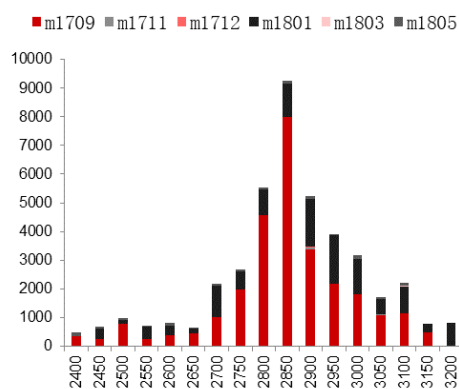
最后，对于隐含波动率的波动较大的样本可选取 SVI 模型 5 日隐含波动率曲面平滑的方法，得到更平稳的对冲效果（样本 1）。从表 3 中样本 1 的数据可以看出，5 日隐含波动率曲面平滑的 SVI 模型表现较好，样本 1 内隐含波动率在时间序列上的波动剧烈，仅仅采用前一日的隐含波动率曲面拟合结果作为对冲比率计算依据会造成较大的对冲误差，而采用 5 日隐含波动率曲面平滑的方法得到的对冲比率更为平稳，降低了极端对冲误差出现的概率，得到更优的对冲效果。

综上所述，SVI 模型不仅在样本定价准确性方面显著优于 BS 模型，并且可以得到高效率的动态对冲效果，基于 50ETF 期权的定价与对冲实证研究也为相应的场外复杂奇异期权的定价找到更优的方法。

五、对商品期货标的的期权的说明

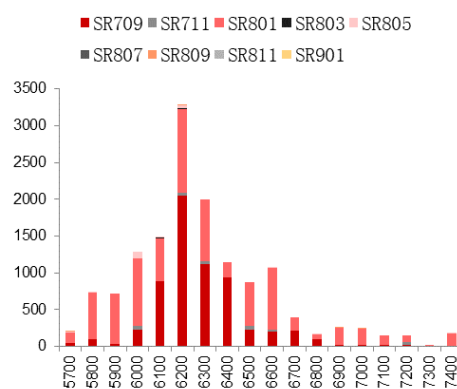
目前市场上常见的以商品期货为标的的场外期权有豆粕、白糖、沪银、沪金、螺纹钢、铁矿石、双焦、PTA、玉米等，涵盖主要的期货合约。然而，对于商品期货标的的场外期权，直接应用 SVI 模型有一定的困难。首先，除了白糖和豆粕之外，以其他商品期货为标的的场外期权均不存在相应的场内期权，故而其隐含波动率曲面不存在；其次，对于豆粕和白糖的场内期权，其成交量主要集中在对应的期货主力合约与次主力合约标的，其他到期日的合约标的交易量微乎其微，由图表 19 和图表 20 可以看出，以 2017 年 7 月 19 日为例，豆粕与白糖期权不同期限合约在各行权价上的单日成交量（单位：手）主要来自标的期货主力与次主力合约。基于两个到期日构造波动率曲面有一定的难度，更何况主力与次主力合约到期日期较为临近，由此来构造波动率曲面来估计近月与远月波动率都会产生较大误差。因此，我们在本篇研究中暂不包括有关商品期权的实证研究，我们将在后期的针对其特殊性对商品期权波动率估计与商品标的场外期权定价做专门的详细研究与论证。

图 19：豆粕期权合约不同行权价单日成交量



数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

图 20：白糖期权合约不同行权价单日成交量



数据来源：东方证券研究所 & wind 资讯

六、附录

6.1 附录 1：隐含波动率计算

隐含波动率的计算是基于 BS 模型，将不同到期日、行权价的期权市场价格观测数据代入模型反算出隐含波动率 σ_{imp} 。将隐含波动率 σ_{imp} 代入 BS 定价公式可得到：

$$(15) \quad C^{BS}(\tau, K, \tau \sigma_{imp}^2; S, r, \tau) = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2)$$

其中 $N(x)$ 是标准正态分布的累积密度函数， τ 是期权距到期时间，参数 d_1, d_2 可表示为：

$$(16) \quad d_1 = \frac{(\log(S_t/K) + \tau r + (\tau \sigma_{imp}^2)/2)}{\sqrt{\tau \sigma_{imp}^2}}$$

$$d_2 = \frac{(\log(S_t/K) + \tau r - (\tau \sigma_{imp}^2)/2)}{\sqrt{\tau \sigma_{imp}^2}}$$

以看涨期权为例，从市场交易数据中取得期权价格 C ，标的资产价格 S ，时间为 t ，期权到期日为 T ，该期权的隐含波动率为满足下述公式的唯一的 σ_{imp} ：

$$(17) \quad C = C^{BS}(\tau, K, \tau \sigma_{imp}^2; S, r, \tau)$$

6.2 附录 2：隐含波动率曲面无套利条件

隐含波动率曲面的无套利条件可由 Kellerer's theorem 推导得出，Hirsch, F., Roynette, B. & Yor, M.

(2012) 基于 Kellerer's theorem 推导出欧式看涨期权价格曲面 $C(\tau, K)$ 无套利条件：

- a. $\partial_\tau C > 0$.
- b. $\lim_{K \rightarrow \infty} C(\tau, K) = 0$.
- c. $\lim_{K \rightarrow \infty} C(\tau, K) + K = a, a \in \mathbb{R}$.
- d. $C(\tau, K)$ 是 K 上的凸函数
- e. $C(\tau, K)$ 非负

Gatheral, J (2012) 将期权价格曲面无套利条件 a-e 转化为对于隐含波动率曲线的条件约束（涉及的参数定义参见公式（4）-（6））：

$$A. \quad \partial_{\tau} \omega_{imp} = \partial_{\tau} \theta_{imp}^2 > 0$$

$$B. \quad \lim_{K \rightarrow \infty} d_1 = -\infty$$

$$C. \quad \theta_{imp} \geq 0$$

$$D. \quad \left(1 - \frac{x}{\theta_{imp}} \partial_x (\theta_{imp}) \right)^2 - \frac{\theta_{imp}^2}{4} (\partial_x (\theta_{imp}))^2 + \theta_{imp} \partial_{xx} (\theta_{imp}) \geq 0$$

对于**蝶式套利**，隐含波动率微笑 $\sigma_{imp}(\tau, K)$ 在给定 τ 的情况下不存在蝶式套利的条件是当且仅

当条件 B 与条件 D 成立，条件 D 即 Durrleman's condition，由 Durrleman, V. (2003) 在 A note on initial volatility surface 一文中提出。本文使用的原始 SVI 模型不能够排除蝶式套利，但对模型进行一定拓展的情况下，根据 Gatheral, J (2012) 提出的 SVI 模型的延伸 Surface SVI 模型即可以排除蝶式套利。

对于**跨期套利**，隐含波动率微笑 $\sigma_{imp}(\tau, K)$ 不存在跨期套利当且仅当条件（A）成立，Gatheral, J (2006) 指出原始 SVI 模型拟合结果可排除跨期套利，即拟合得到不同到期日的隐含方差曲线

ω_{imp}^{SVI} 不相交。

6.3 附录 3：SVI 模型参数约束条件

对于 ρ ，如果 $\rho^2 \neq 1$ ，公式（3）中 SVI 表达式 $\omega_{imp}^{SVI}(x)$ 具有唯一的最小值 $a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2}$ ；

如果 $\rho^2 = 1$ ，当 $\rho = 1$ ， $\omega_{imp}^{SVI}(x)$ 随 x 非递减，当 $\rho = -1$ ， $\omega_{imp}^{SVI}(x)$ 随 x 非递增。

对于 σ, a ，当 $\sigma \rightarrow 0$ ，隐含方差可表示为 $\omega_{imp}^{SVI}(x) = c_1 x + c_2$ ，不适合用于隐含波动率的拟合。令 σ 趋于无穷大， a 趋于负无穷大，由泰勒展开式可得：

$$\begin{aligned} \omega_{imp}^{SVI}(x) &= a + b \left(\rho(x - m) + \sqrt{(x - m)^2 + \sigma^2} \right) \\ (18) \quad &= -|a| + b\rho(x - m) + b\sigma \sqrt{1 + \left(\frac{x - m}{\sigma} \right)^2} \\ &\approx -|a| + b\rho(x - m) + b\sigma \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - m}{\sigma} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

令 $|a| = b\sigma$ ，可得出：

$$(19) \quad \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty \\ |a| = b\sigma}} \omega_{imp}^{SVI}(x) = b\rho(x - m)$$

对于任意的 x ，再次出现仿射函数的问题，在这种情况下可以通过优化得到唯一的 $b\rho$ 和 m ，但是不存在唯一的 $\{b, \rho, m\}$ 。因而，为了提高 SVI 模型拟合的稳定性，尽量避免陷入其在边界问题上的上述模型固有缺陷，选取一个较小的数值 σ_{\min} （在本文的实证研究中取 $\sigma_{\min} = 0.001$ ）作为 σ 的最小值，设定 σ, a 的取值范围如下：

$$(20) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \sigma_{\min} < \sigma, \\ 0 &\leq a \leq \max_i \{v_i\} \end{aligned}$$

其中， v_i 是在给定到期日下，市场数据隐含的标的方差。

对于无套利条件对参数的限定，Rogers, L.C.G. Tehranchi, M.R. (2010) 研究得到隐含方差

$\omega_{imp}(x)$ 排除动态套利的条件：

$$\left| \partial_x \omega_{imp}(x) \right| \leq 4, \quad \forall x, \forall \tau$$

对应到 $\omega_{imp}^{SVI}(x)$ 的参数取值范围，Gatheral, J (2004) 将其转换为参数 b 的上限条件：

$$b \leq \frac{4}{\tau(1 + |\rho|)}$$

原始 SVI 模型在特定条件价可以排除跨期套利 (Gatheral, J (2012))，即对于不同到期日期权合约对应的两组 SVI 参数，如果

$$(21) \quad \begin{aligned} a_1 + b_1 \left(\rho_1(x - m_1) + \sqrt{(x - m_1)^2 + \sigma_1^2} \right) \\ = a_2 + b_2 \left(\rho_2(x - m_2) + \sqrt{(x - m_2)^2 + \sigma_2^2} \right) \end{aligned}$$

则两条隐含方差曲线相交，存在跨期套利。进而推导出 SVI 模型不存在跨期套利的条件为公式 (29) 推导出的多项式 (公式 (30)) 不存在实数根。

$$(22) \quad \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

综上，SVI 模型的参数取值范围限定如下：

$$\begin{aligned}
 0 &\leq a \leq \max_i \{\omega_i\}, \\
 0 &\leq b \leq \frac{4}{\tau(1+|\rho|)}, \\
 -1 &\leq \rho \leq 1, \\
 \min_i \{x_i\} &\leq m \leq \max_i \{x_i\}, \\
 0 &< \sigma_{\min} \leq \sigma
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

参考文献

1. Gatheral, J. A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives. Presentation at Global Derivatives & Risk Management, Madrid, 2004.
2. Gatheral, J., Jacquier, A. Arbitrage-free SVI volatility surfaces. Quantitative Finance, 14(1):59 - 71, 2014.
3. Gatheral, J. The Volatility Surface: A Practitioner's Guide. Wiley Finance, 2006.
4. Hirsch, F., Roynette, B. A new proof of Kellerer's theorem. ESAIM: Probability and Statistics, 16:48 - 60, 2012.
5. Hirsch, F., Roynette, B., Yor, M. Kellerer's theorem revisited. Unpublished, 2012.
6. Durrleman, V. A note on initial volatility surface. Unpublished, February 2003.
7. Fengler, R. Arbitrage-Free Smoothing of the Implied Volatility Surface. Quantitative Finance, 9(4):417-428, 2009.
8. Lee, R. The moment formula for implied volatility at extreme strikes. Mathematical Finance, 14(3):469 - 480, 2004.
9. Gatheral, J., Jacquier, A. Convergence of Heston to SVI. Quantitative Finance, 11 (8):1129 - 1132, 2011.
10. Zeliade Systems. Quasi-explicit calibration of Gatheral's SVI model. Zeliade White Papers, 2009.
11. Leursen, M.A., Le Riche, R. Globalized Nelder-Mead method for engineering optimization. Computers & Structures, 82(23-26):2251 - 2260, 2004.

风险提示

1. 市场不稳定性加剧，突破无套利条件，影响模型拟合或模型价格与市场价格发生较大偏离。
2. 量化模型失效的风险

分析师申明

每位负责撰写本研究报告全部或部分内容的研究分析师在此作以下声明：

分析师在本报告中对所提及的证券或发行人发表的任何建议和观点均准确地反映了其个人对该证券或发行人的看法和判断；分析师薪酬的任何组成部分无论是在过去、现在及将来，均与其在本研究报告中所表述的具体建议或观点无任何直接或间接的关系。

投资评级和相关定义

报告发布日后的 12 个月内的公司的涨跌幅相对同期的上证指数/深证成指的涨跌幅为基准；

公司投资评级的量化标准

买入：相对强于市场基准指数收益率 15%以上；

增持：相对强于市场基准指数收益率 5%~15%；

中性：相对于市场基准指数收益率在-5%~+5%之间波动；

减持：相对弱于市场基准指数收益率在-5%以下。

未评级——由于在报告发出之时该股票不在本公司研究覆盖范围内，分析师基于当时对该股票的研究状况，未给予投资评级相关信息。

暂停评级——根据监管制度及本公司相关规定，研究报告发布之时该投资对象可能与本公司存在潜在的利益冲突情形；亦或是研究报告发布当时该股票的价值和价格分析存在重大不确定性，缺乏足够的研究依据支持分析师给出明确投资评级；分析师在上述情况下暂停对该股票给予投资评级等信息，投资者需要注意在此报告发布之前曾给予该股票的投资评级、盈利预测及目标价格等信息不再有效。

行业投资评级的量化标准：

看好：相对强于市场基准指数收益率 5%以上；

中性：相对于市场基准指数收益率在-5%~+5%之间波动；

看淡：相对于市场基准指数收益率在-5%以下。

未评级：由于在报告发出之时该行业不在本公司研究覆盖范围内，分析师基于当时对该行业的研究状况，未给予投资评级等相关信息。

暂停评级：由于研究报告发布当时该行业的投资价值分析存在重大不确定性，缺乏足够的研究依据支持分析师给出明确行业投资评级；分析师在上述情况下暂停对该行业给予投资评级信息，投资者需要注意在此报告发布之前曾给予该行业的投资评级信息不再有效。

免责声明

本证券研究报告（以下简称“本报告”）由东方证券股份有限公司（以下简称“本公司”）制作及发布。

本报告仅供本公司的客户使用。本公司不会因接收人收到本报告而视其为本公司的当然客户。本报告的全体接收人应当采取必要措施防止本报告被转发给他人。

本报告是基于本公司认为可靠的且目前已公开的信息撰写，本公司力求但不保证该信息的准确性和完整性，客户也不应该认为该信息是准确和完整的。同时，本公司不保证文中观点或陈述不会发生任何变更，在不同时期，本公司可发出与本报告所载资料、意见及推测不一致的证券研究报告。本公司会适时更新我们的研究，但可能会因某些规定而无法做到。除了一些定期出版的证券研究报告之外，绝大多数证券研究报告是在分析师认为适当的时候不定期地发布。

在任何情况下，本报告中的信息或所表述的意见并不构成对任何人的投资建议，也没有考虑到个别客户特殊的投资目标、财务状况或需求。客户应考虑本报告中的任何意见或建议是否符合其特定状况，若有必要应寻求专家意见。本报告所载的资料、工具、意见及推测只提供给客户作参考之用，并非作为或被视为出售或购买证券或其他投资标的的邀请或向人作出邀请。

本报告中提及的投资价格和价值以及这些投资带来的收入可能会波动。过去的表现并不代表未来的表现，未来的回报也无法保证，投资者可能会损失本金。外汇汇率波动有可能对某些投资的价值或价格或来自这一投资的收入产生不良影响。那些涉及期货、期权及其它衍生工具的交易，因其包括重大的市场风险，因此并不适合所有投资者。

在任何情况下，本公司不对任何人因使用本报告中的任何内容所引致的任何损失负任何责任，投资者自主作出投资决策并自行承担投资风险，任何形式的分享证券投资收益或者分担证券投资损失的书面或口头承诺均为无效。

本报告主要以电子版形式分发，间或也会辅以印刷品形式分发，所有报告版权均归本公司所有。未经本公司事先书面协议授权，任何机构或个人不得以任何形式复制、转发或公开传播本报告的全部或部分内容。不得将报告内容作为诉讼、仲裁、传媒所引用之证明或依据，不得用于营利或用于未经允许的其它用途。

经本公司事先书面协议授权刊载或转发的，被授权机构承担相关刊载或者转发责任。不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和修改。

提示客户及公众投资者慎重使用未经授权刊载或者转发的本公司证券研究报告，慎重使用公众媒体刊载的证券研究报告。

东方证券研究所

地址：上海市中山南路 318 号东方国际金融广场 26 楼

联系人：王骏飞

电话：021-63325888*1131

传真：021-63326786

网址：www.dfzq.com.cn

Email：wangjunfei@orientsec.com.cn

