Математическое моделирование и оптимизация сложных систем

Лабораторная работа 2

Колотков Алексей
Прикладная математика и информатика
Аналитическая логистика

Задание 2.1.12

Нарисуйте все качественно различные векторные поля, которые возможны в системе при изменении r. Покажите, что при некотором критическом значении $r = r^*$ происходит бифуркация. Определите тип бифуркации и укажите точку

$$\dot{x} = rx - 4x^3$$

Пусть $f(x) = \dot{x} = rx - 4x^3$. Для определения особых точек системы примем $f(x) = 0$. Получаем две ситуации:

1. $r \leq 0$ – одна особая точка $x = 0$. Данная точка является устойчивой.
2. $r > 0$ – три особые точки:
   - $x = 0$, неустойчивая
   - $x = -\sqrt{\frac{r}{4}}$, устойчивая
   - $x = \sqrt{\frac{r}{4}}$, устойчивая

На рисунке 1 представлен график $f(x)$ при различных значениях параметра r.

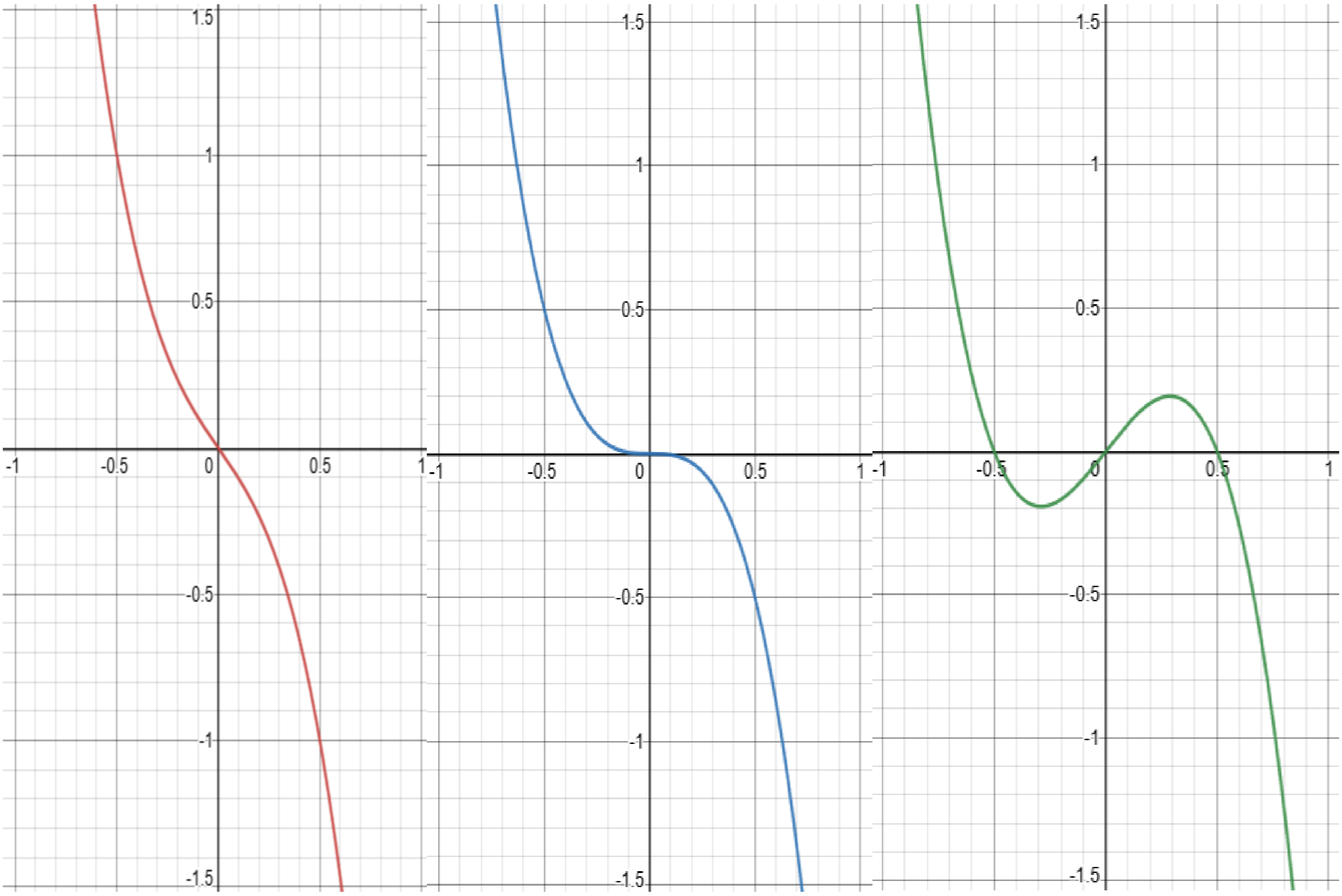

Рис. 1. График функции $\dot{x} = rx - 4x^3$ при $r = -1$ (красный), $r = 0$ (синий), $r = 1$ (зеленый).

Перед нами суперкритическая вилкообразная бифуркация. Точкой бифуркации для системы является $r^* = 0$.

Теперь изобразим векторные поля для различных r.

```
In[9]:= Manipulate[VectorPlot[{1, r*x - 4*x^3}, {t, 0, 1}, {x, -1, 1}, VectorStyle → Arrowheads[0.02]], {r, -5, 5}, ControlPlacement → Right]
        варьировать  векторная диаграмма                                    стиль векторов  наконечники                  расположение элеме···  справа
```

Out[9]=

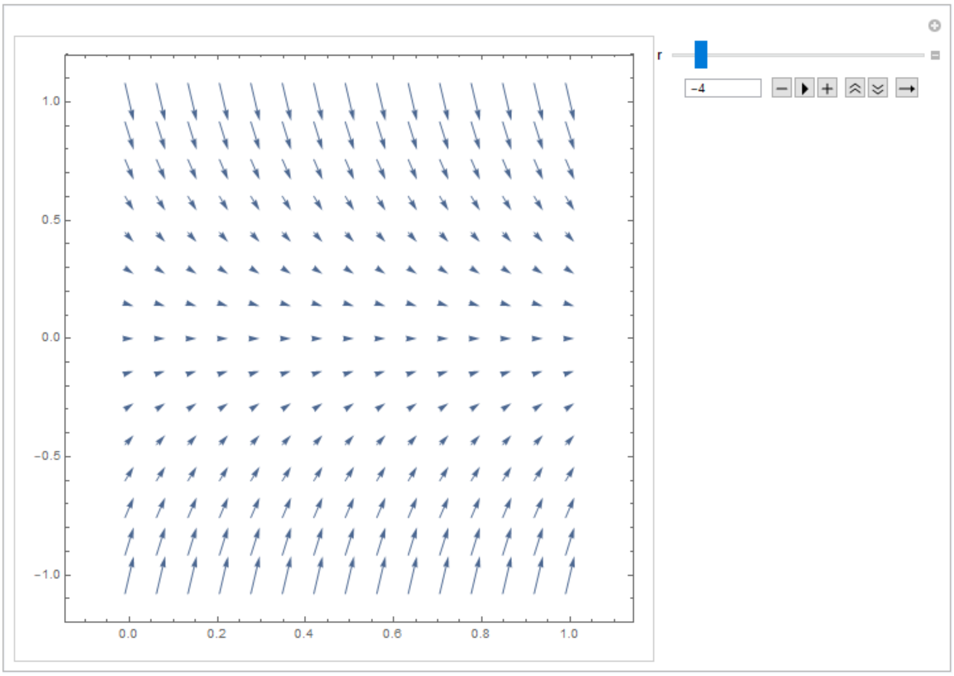

Рис. 2. Векторное поле при $r = -4$

```
In[9]:= Manipulate[VectorPlot[{1, r*x - 4*x^3}, {t, 0, 1}, {x, -1, 1}, VectorStyle → Arrowheads[0.02]], {r, -5, 5}, ControlPlacement → Right]
        варьировать  векторная диаграмма                                    стиль векторов  наконечники                  расположение элеме···  справа
```

Out[9]=

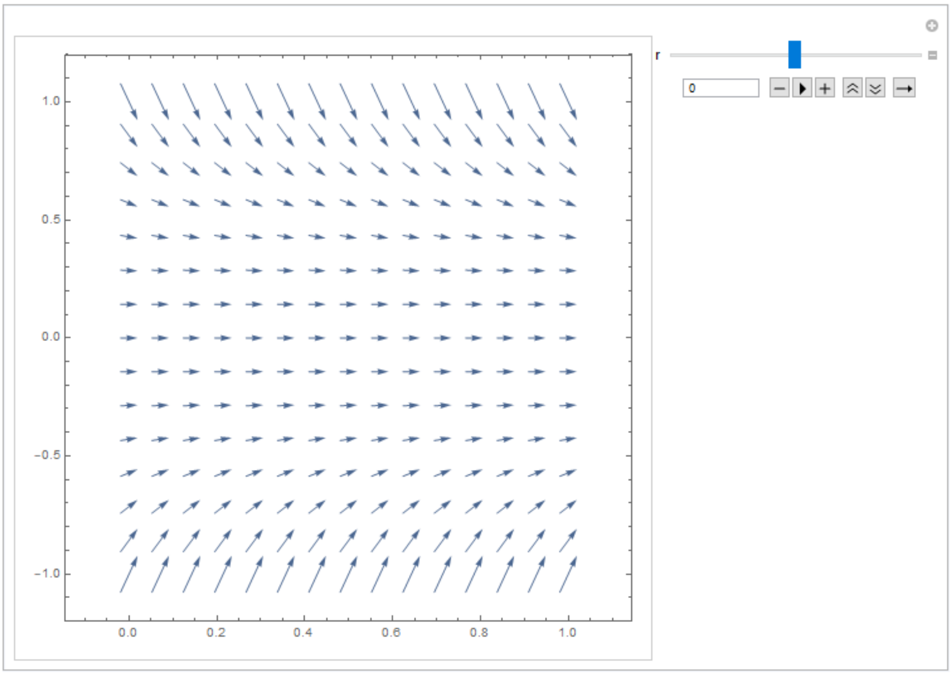

Рис. 3. Векторное поле при $r = 0$

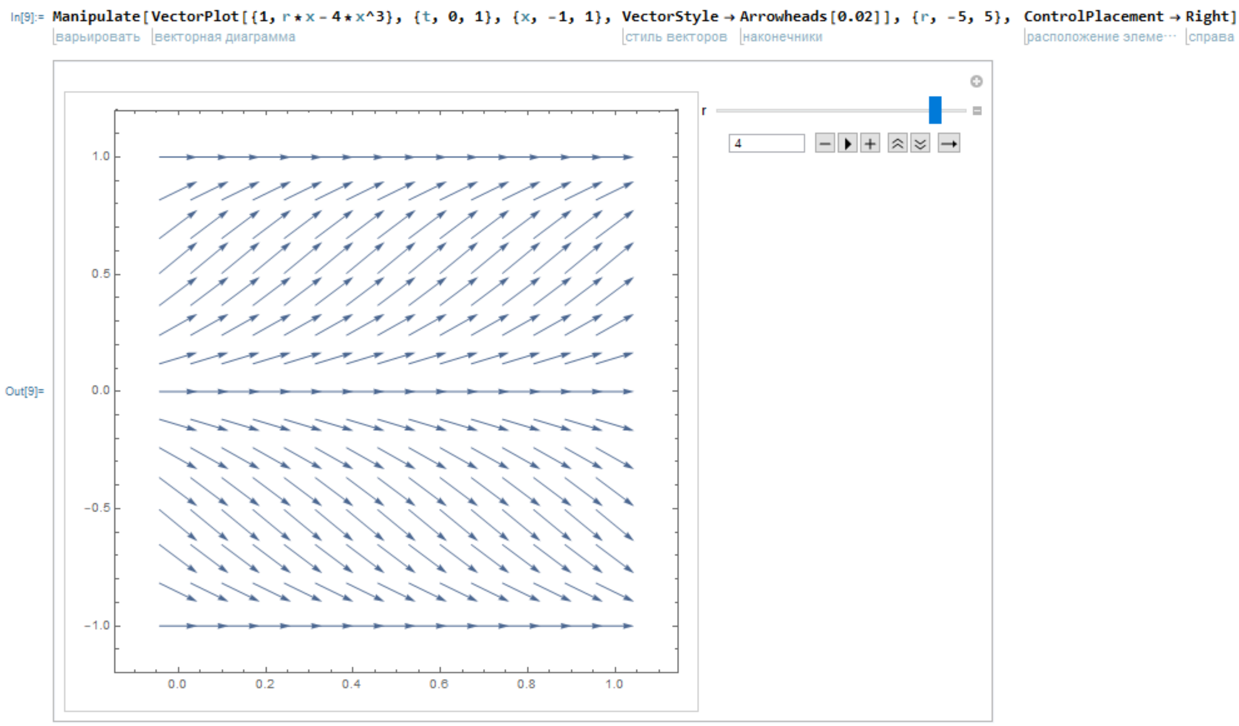

Рис. 4. Векторное поле при $r = 4$

Бифуркационная диаграмма будет выглядеть следующим образом:

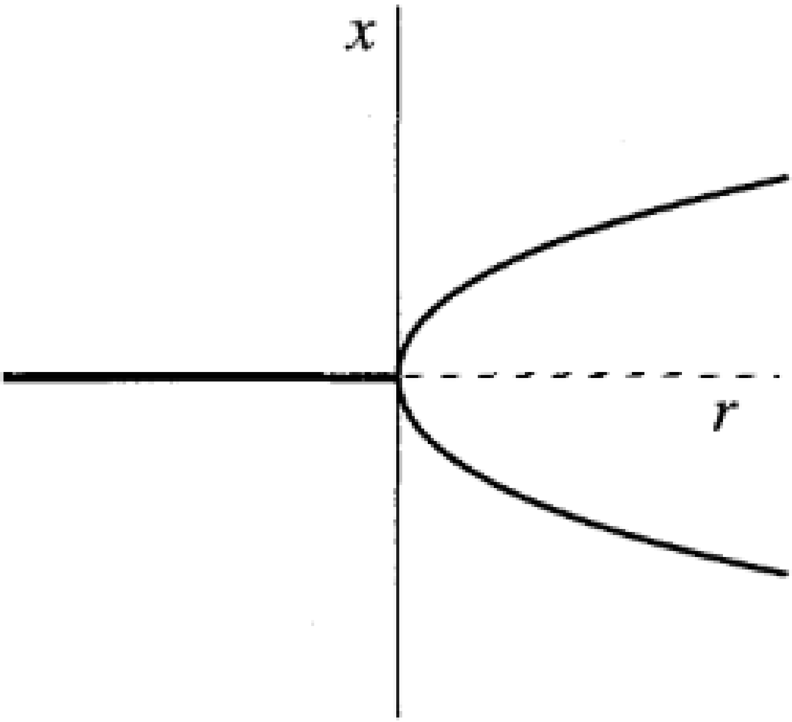

Рис. 5. Бифуркационная диаграмма.

Задание 2.4

(Субкритическая вилка) Рассмотрим систему $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$, которая испытывает субкритическую бифуркацию типа «вилка».

а) Найдите выражения для всех неподвижных точек в зависимости от r.

Пусть $f(x) = \dot{x} = rx + x^3 - x^5$. Для определения особых точек системы примем $f(x) = 0$. Получаем выражения для всех особых точек вне зависимости от параметра r: $x = 0$, $x = \pm\frac{\sqrt{1-\sqrt{1+4r}}}{\sqrt{2}}$, $x = \pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4r}}}{\sqrt{2}}$. Теперь рассмотрим различные значения r.

Особые точки $x = \pm\frac{\sqrt{1-\sqrt{1+4r}}}{\sqrt{2}}$, очевидно, должны возникать только при определенных значениях r, поскольку в числителе находится квадратный корень. Эти значения несложно вычислить, они будут находиться в диапазоне $(-0{,}25; 0)$. Обе границы не входят в интервал, поскольку при $r = -0{,}25$ и $r = 0$ числитель выражения для особой точки обращается в 0.

Получаем:

1. $r < -0{,}25$ – одна особая точка $x = 0$, устойчивая
2. $r = -0{,}25$ – три особые точки:
   - $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, полуустойчивая слева
   - $x = 0$, устойчивая
   - $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, полуустойчивая справа
3. $-0{,}25 < r < 0$ – пять особых точек:
   - $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4r}}}{\sqrt{2}}$, устойчивая
   - $x = -\frac{\sqrt{1-\sqrt{1+4r}}}{\sqrt{2}}$, неустойчивая
   - $x = 0$, устойчивая
   - $x = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1+4r}}}{\sqrt{2}}$, неустойчивая
   - $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4r}}}{\sqrt{2}}$, устойчивая
4. $r = 0$ – три особые точки:
   - $x = -1$, устойчивая
   - $x = 0$, неустойчивая
   - $x = 1$, устойчивая
5. $r > 0$ – три особые точки:
   - $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4r}}}{\sqrt{2}}$, устойчивая
   - $x = 0$, неустойчивая
   - $x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4r}}}{\sqrt{2}}$, устойчивая

Таким образом, $r = 0$ – точка субкритической бифуркации, $r = -0{,}25$ – точка, в которой в результате седлоузловой бифуркации в системе возникают новые равновесные состояния.

Ниже представлены графики $f(x)$ при различных значениях параметра r.

Рис. 6. График функции $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$ при $r = -1$ (красный), $r = -0{,}25$ (черный).

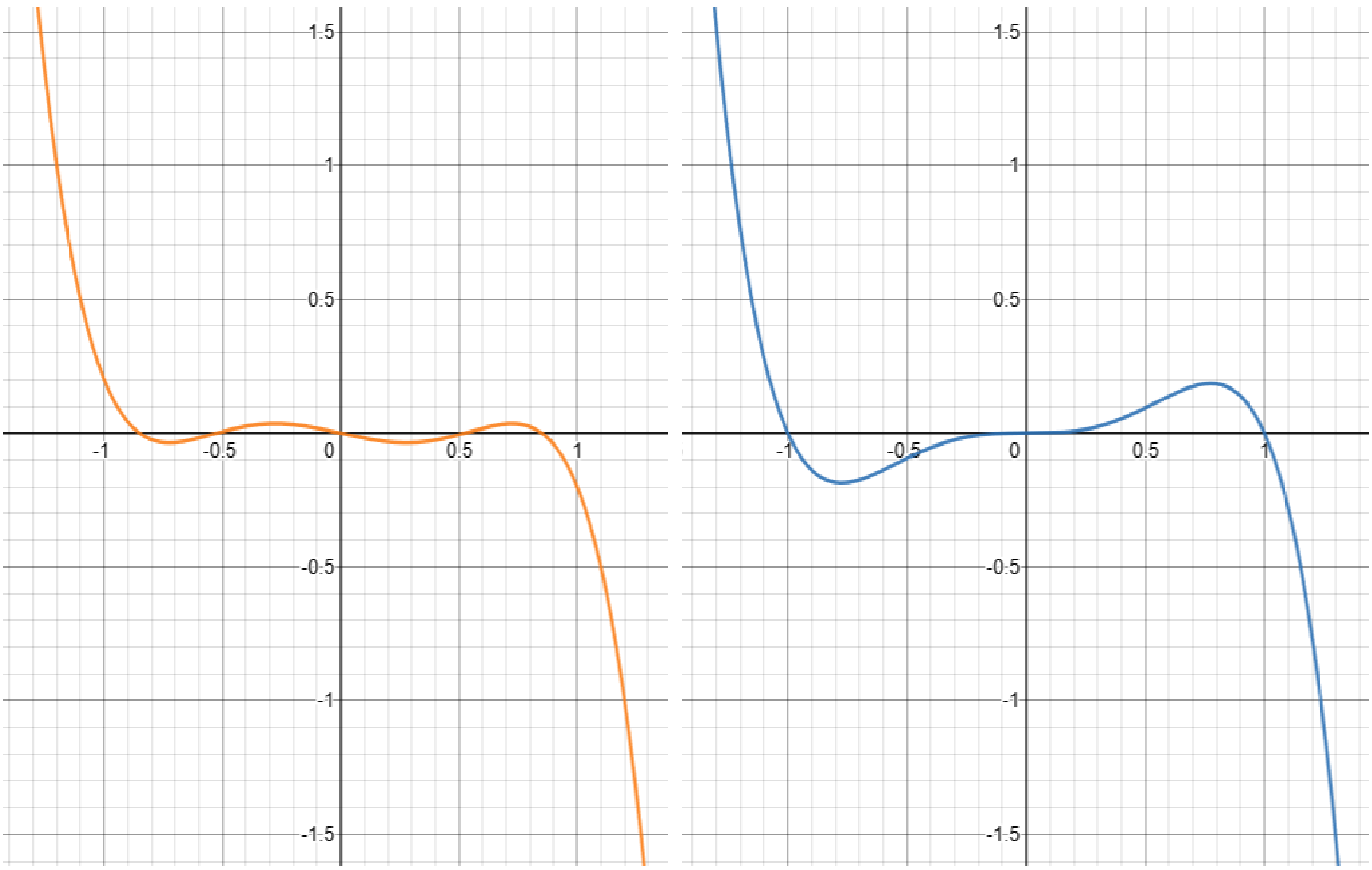

Рис. 7. График функции $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$ при $r = -0{,}20$ (оранжевый), $r = 0$ (синий).

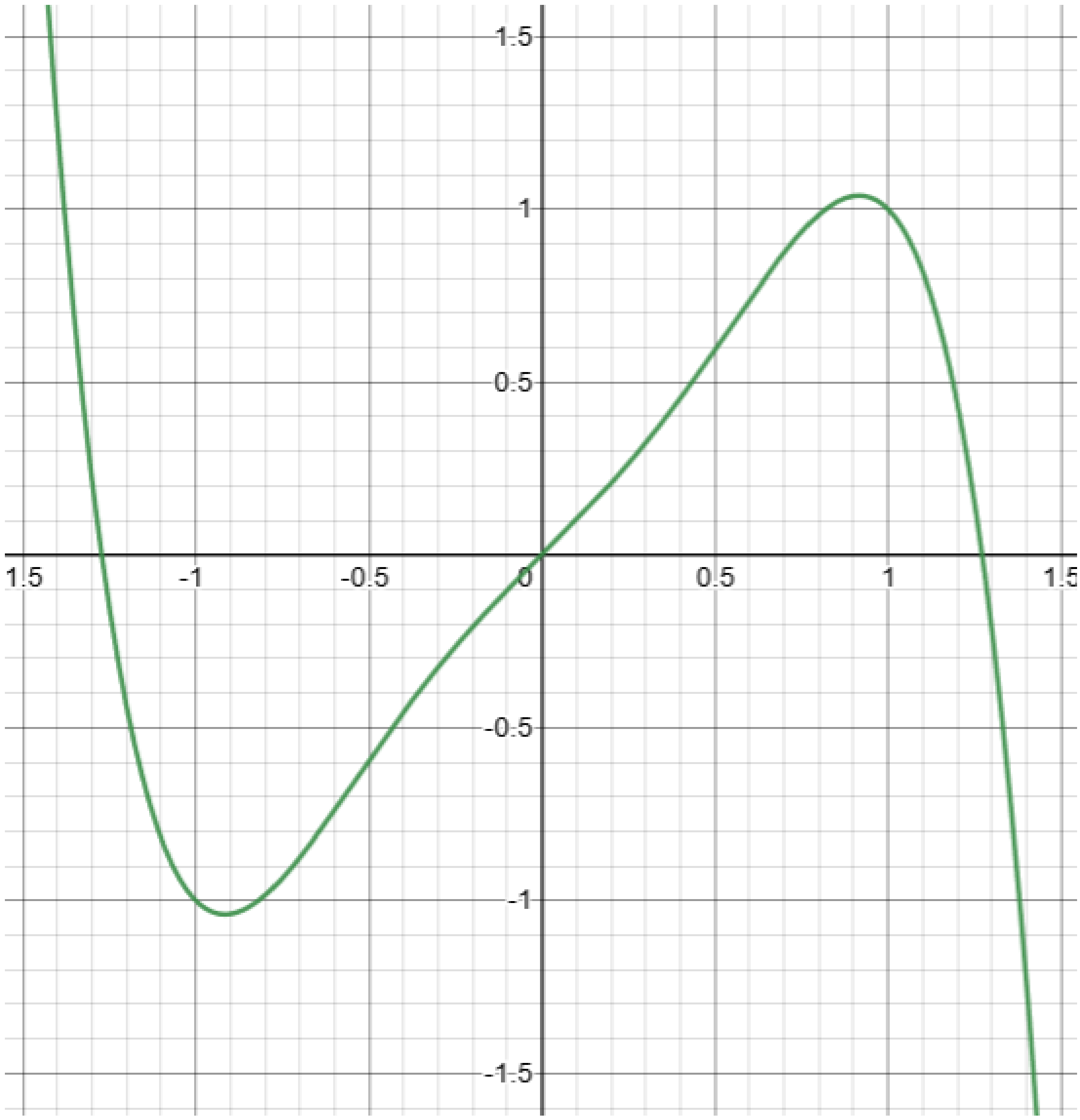

Рис. 8. График функции $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$ при $r = 1$.

б) Изобразите векторное поле, обозначьте особые точки и их устойчивость.

Векторные поля при различных значениях r представлены на рисунках 9-13.

In[9]:=
```
Manipulate[VectorPlot[{1, r*x + x^3 - x^5}, {t, 0, 1}, {x, -1, 1}, VectorStyle → Arrowheads[0.02]], {r, -5, 5}, ControlPlacement → Right]
```
варьировать | векторная диаграмма | стиль векторов | наконечники | расположение элеме··· | справа

Out[9]=

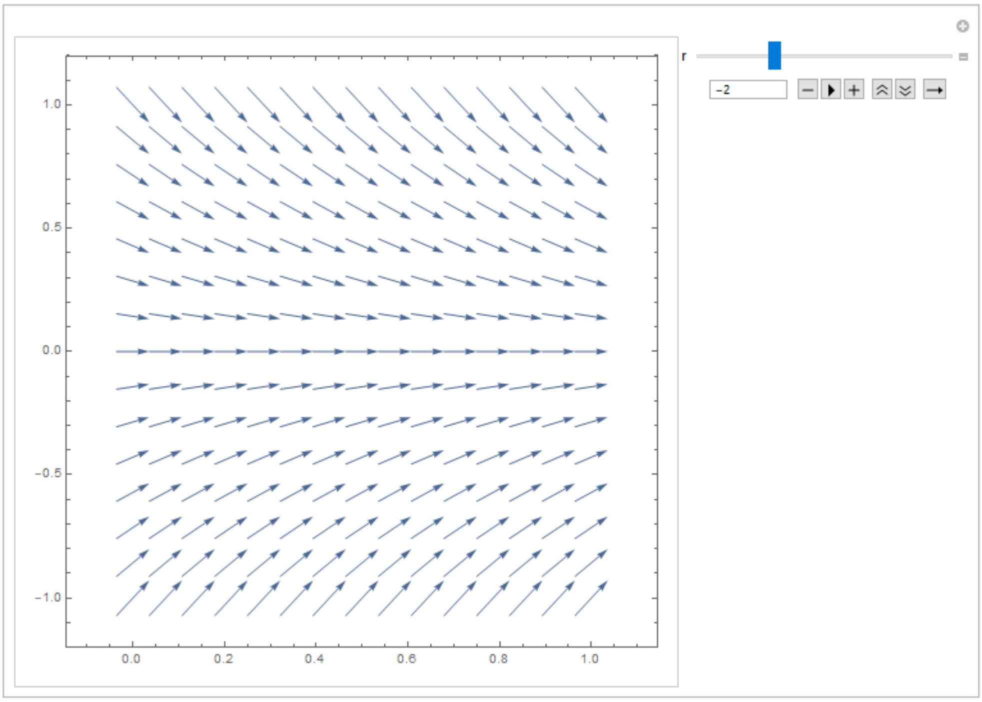

Рис. 9. Векторное поле при $r = -2$.

In[11]:=
```
Manipulate[VectorPlot[{1, r*x + x^3 - x^5}, {t, 0, 1}, {x, -1, 1}, VectorStyle → Arrowheads[0.02]], {r, -5, 5}, ControlPlacement → Right]
```
варьировать | векторная диаграмма | стиль векторов | наконечники | расположение элеме··· | справа

Out[11]=

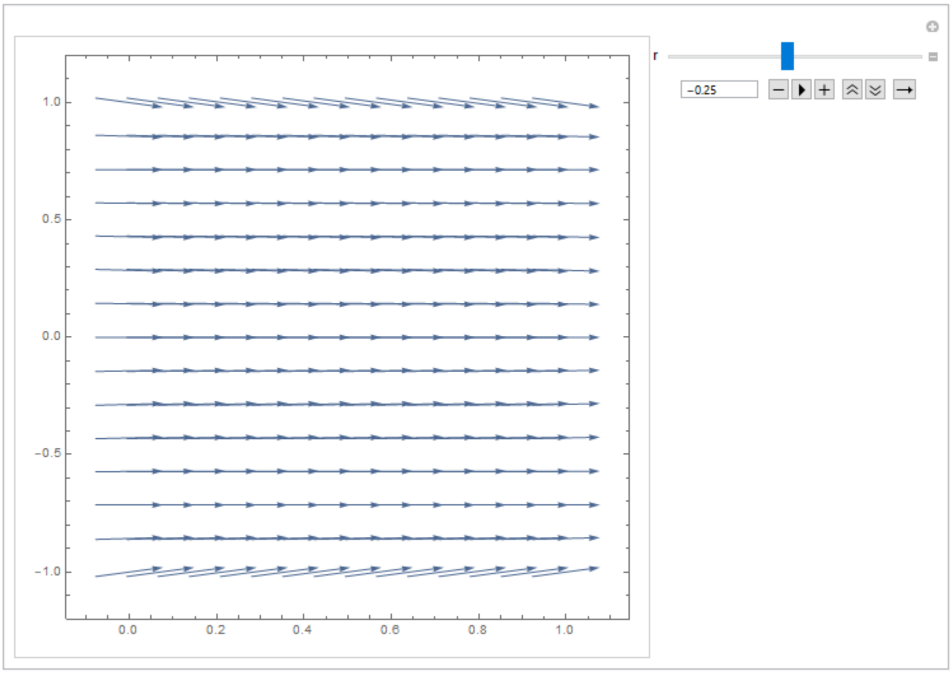

Рис. 10. Векторное поле при $r = -0{,}25$.

```
In[11]:= Manipulate[VectorPlot[{1, r*x+x^3-x^5}, {t, 0, 1}, {x, -1, 1}, VectorStyle→Arrowheads[0.02]], {r, -5, 5}, ControlPlacement→Right]
         варьировать  векторная диаграмма                  стиль векторов  наконечники                 расположение элеме···  справа
```

Out[11]=

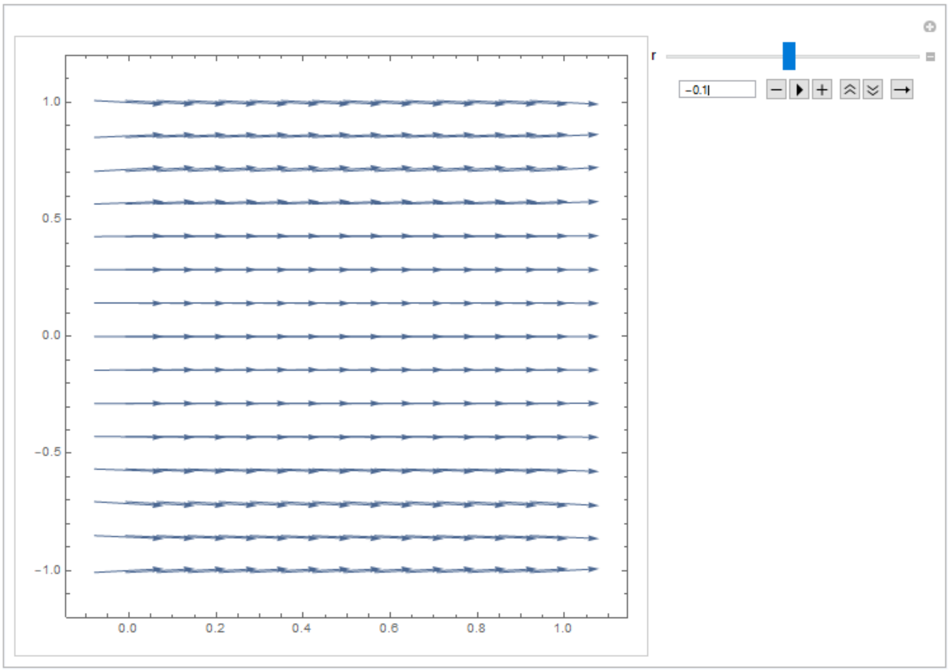

Рис. 11. Векторное поле при $r = -0{,}10$.


```
In[11]:= Manipulate[VectorPlot[{1, r*x+x^3-x^5}, {t, 0, 1}, {x, -1, 1}, VectorStyle→Arrowheads[0.02]], {r, -5, 5}, ControlPlacement→Right]
         варьировать  векторная диаграмма                  стиль векторов  наконечники                 расположение элеме···  справа
```

Out[11]=

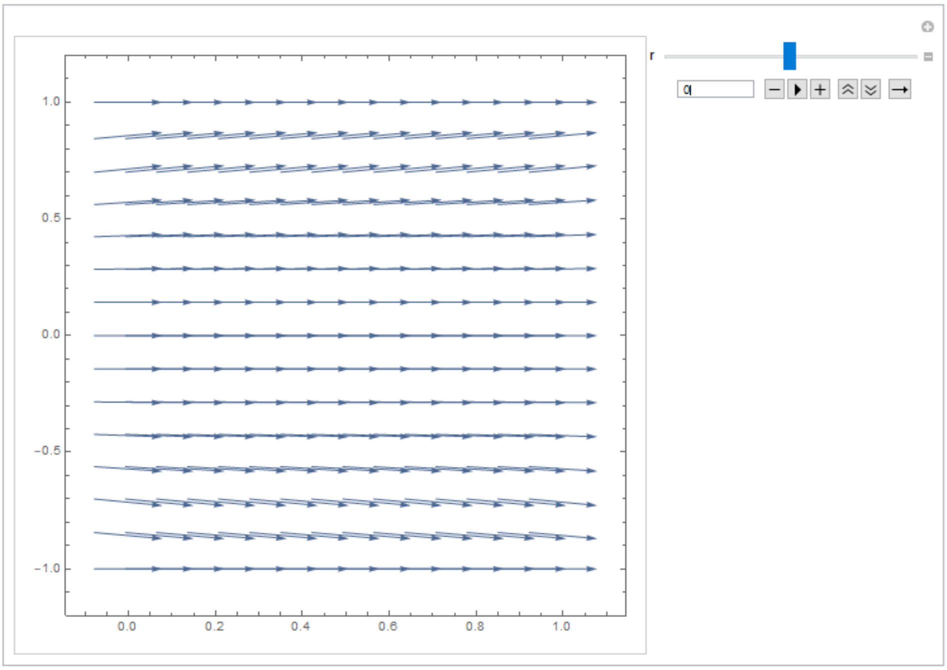

Рис. 12. Векторное поле при $r = 0$.

```
In[11]:= Manipulate[VectorPlot[{1, r*x + x^3 - x^5}, {t, 0, 1}, {x, -1, 1}, VectorStyle → Arrowheads[0.02]], {r, -5, 5}, ControlPlacement → Right]
```
варьировать | векторная диаграмма | стиль векторов | наконечники | расположение элеме··· | справа

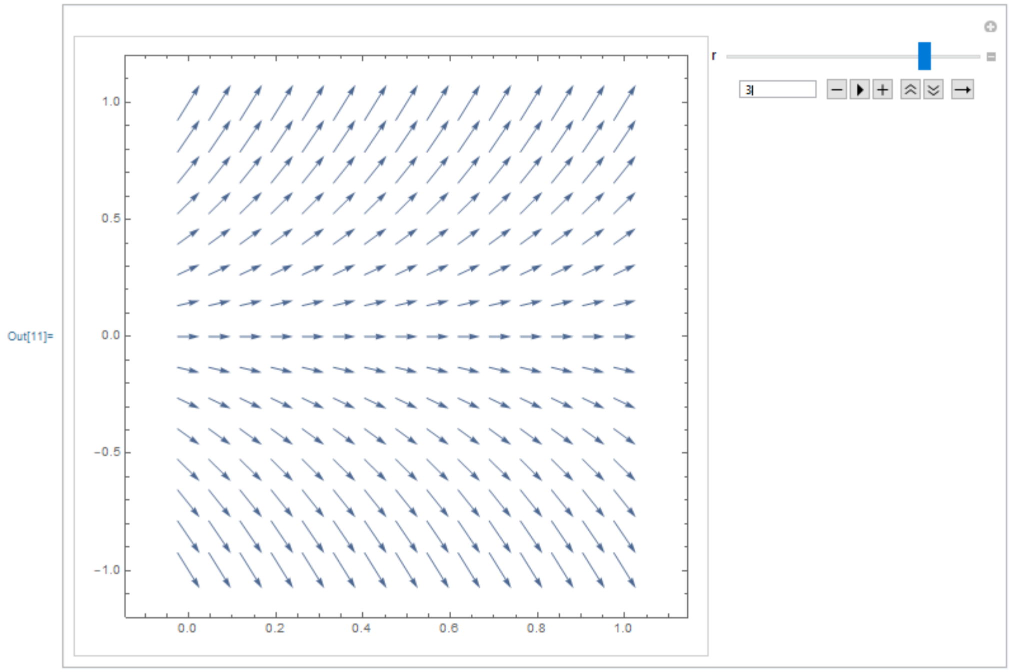

Рис. 13. Векторное поле при $r = 3$.

в) Вычислите значение параметра, при котором в результате субкритической бифуркации появляются ненулевые особые точки.

Значение параметра, при котором в результате субкритической бифуркации появляются ненулевые особые точки, равно $r_s = -0{,}25$.

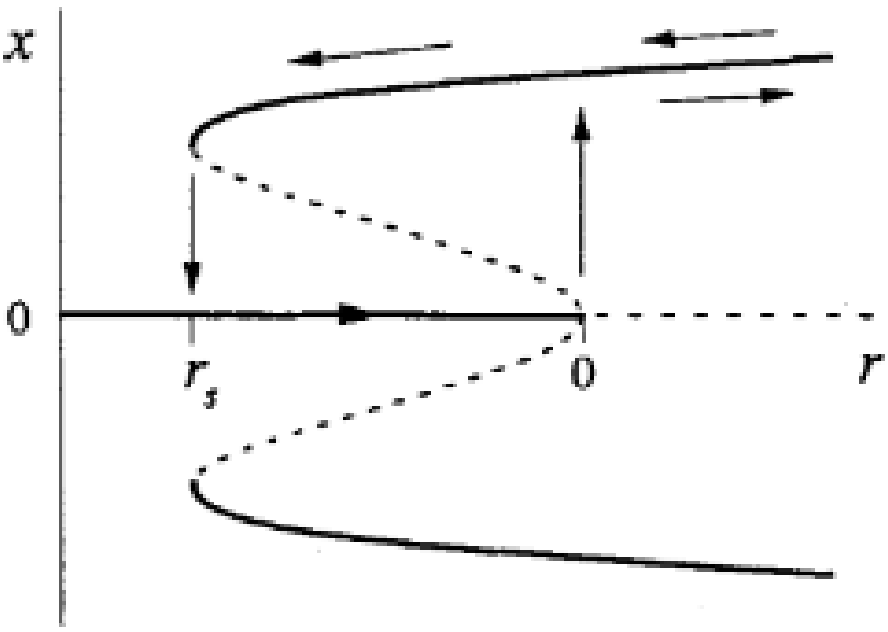

Рис. 14. Бифуркационная диаграмма.