Математическое моделирование и оптимизация сложных систем

Лабораторная работа 1

Колотков Алексей
Прикладная математика и информатика
Аналитическая логистика

Задание 1.1.12

Проведите графический анализ данного уравнения. Изобразите векторное поле скоростей на прямой, определите особые точки и их тип устойчивости, изобразите график решения для различных начальных условий.

$$\dot{x} = (x-2)^2 + \cos x$$

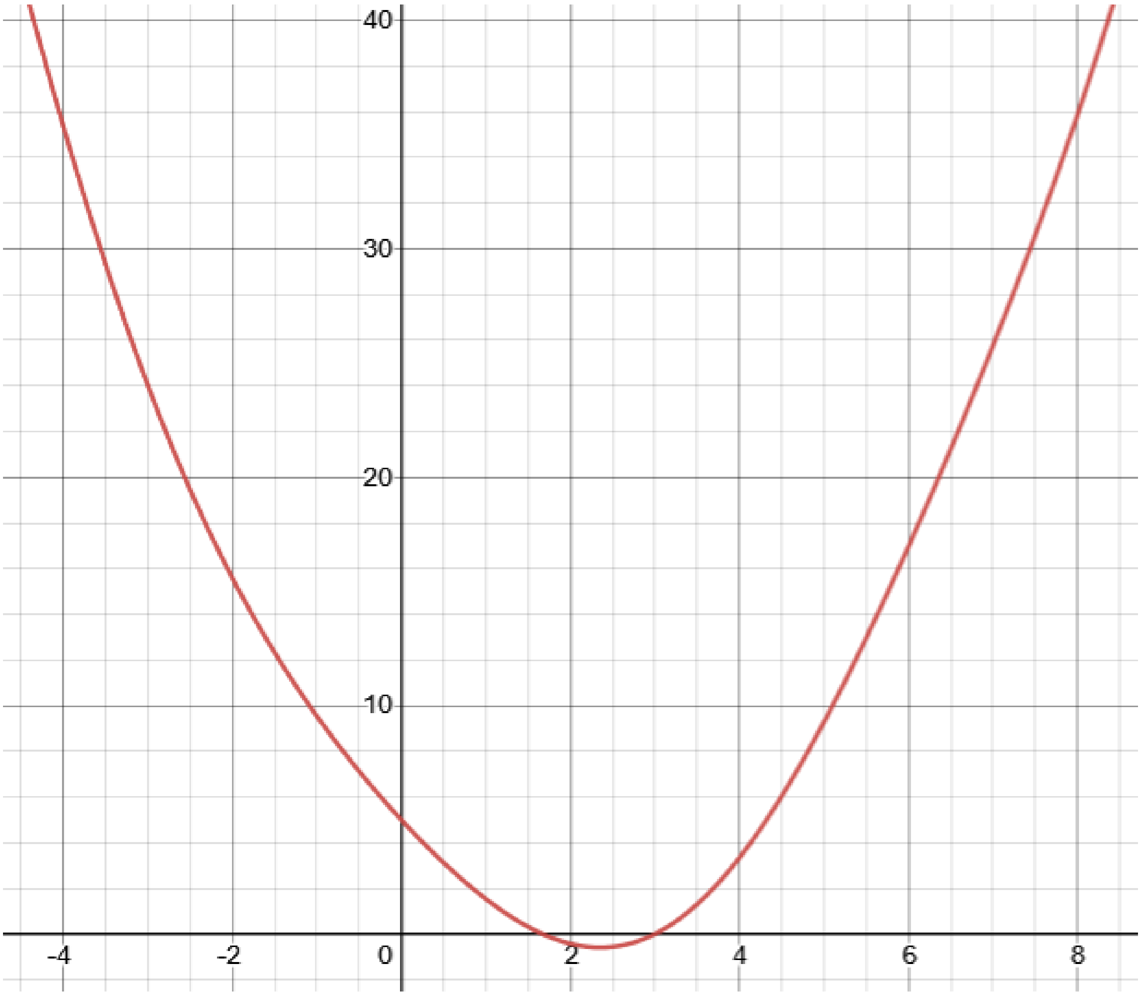

Рис. 1. График функции $\dot{x} = (x-2)^2 + \cos x$ на промежутке от -4 до 8.

Функция убывает от $-\infty$ до точки $x = 2{,}3542$. Функция возрастает от $x = 2{,}3542$ до $+\infty$.

Найдем особые точки как корни уравнения $f(x) = 0$: $x = 1{,}676, x = 2{,}9946$.

Для определения устойчивости особых точек можно график функции $\dot{x}$ или значение второй производной ($\ddot{x} = 2x - 4 - \sin x$) в данных точках.

Воспользуемся графиком функции. Поскольку слева от точки $1{,}676$ значение $\dot{x}$ больше нуля, а справа – меньше, точка является устойчивой.

Слева от точки $x = 2{,}9946$ производная принимает отрицательное значение, справа – положительное, значит, точка является неустойчивой.

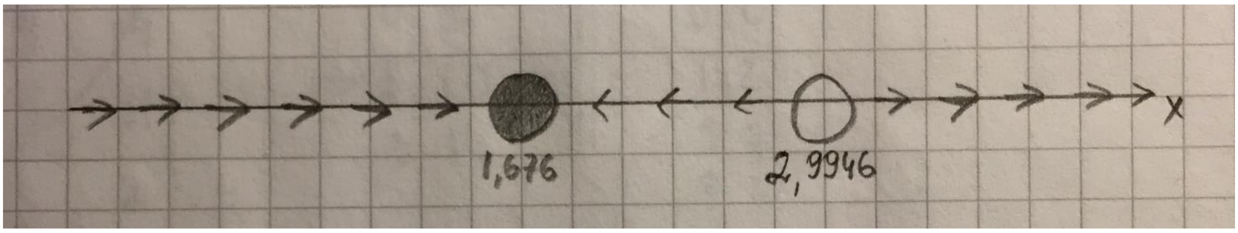

Рис. 2. Векторное поле скоростей

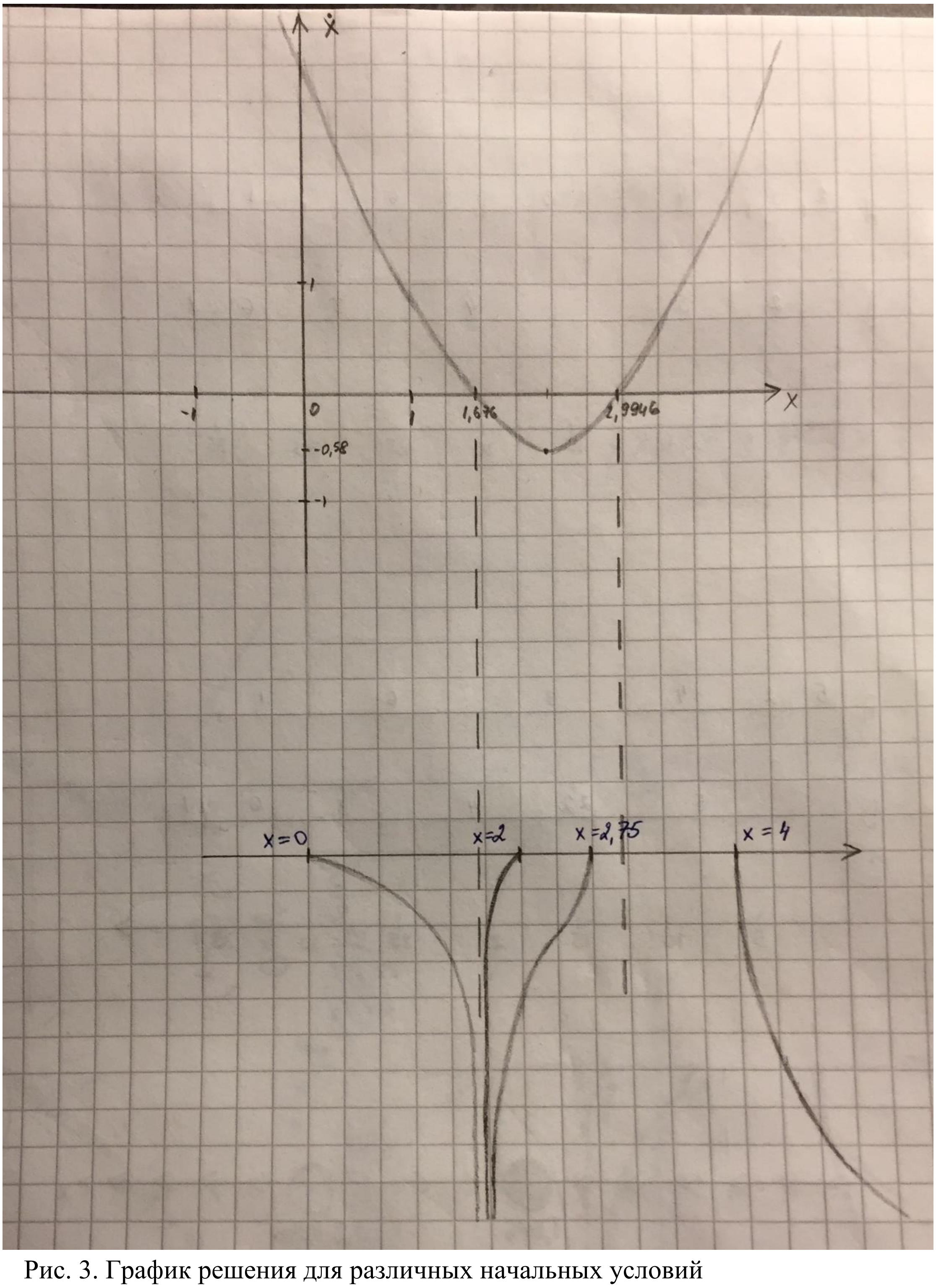

Рис. 3. График решения для различных начальных условий

Задание 1.2.6

Для указанных ниже случаев укажите уравнение $\dot{x} = f(x)$ с заданными свойствами. В случае, если таких уравнений не существует, необходимо объяснить почему. Во всех вариантах подразумевается, что функция f гладкая.

Существует ровно шесть особых точек: две устойчивые и четыре неустойчивые.

Таких уравнений не существует, поскольку особые точки в данном случае невозможно расположить таким образом, чтобы знак значения второй производной в этих точках чередовался. Следовательно, будут присутствовать линии разрыва, что, в свою очередь, противоречит начальному условию (функция f гладкая).

Задание 1.3.9

На фазовой прямой даны особые точки некоторого ОДУ и указан тип их устойчивости. Запишите уравнение $\dot{x} = f(x)$, соответствующее этому портрету. Правильных вариантов может быть бесконечно много (неправильных тоже). Если же таких уравнений не существует, необходимо объяснить почему.

Таких уравнений не существует, поскольку знак значения второй производной в особых точках должен чередоваться, а две идущие друг за другом устойчивые особые точки означают, что производная и в том, и в другом случае принимает отрицательное значение.

Следовательно, данная фазовая прямая подразумевает наличие линий разрыва, что, в свою очередь, противоречит начальному условию (ОДУ предполагает, что $f(tx, ty) = f(x, y)$ для всех значений t).

В случае, когда по условию возможно наличие линий разрыва, функция f(x) и её график могли бы выглядеть подобным образом:

$$f(x) = x(\frac{1}{x-1})(x+1)(x-2)(x-4)$$

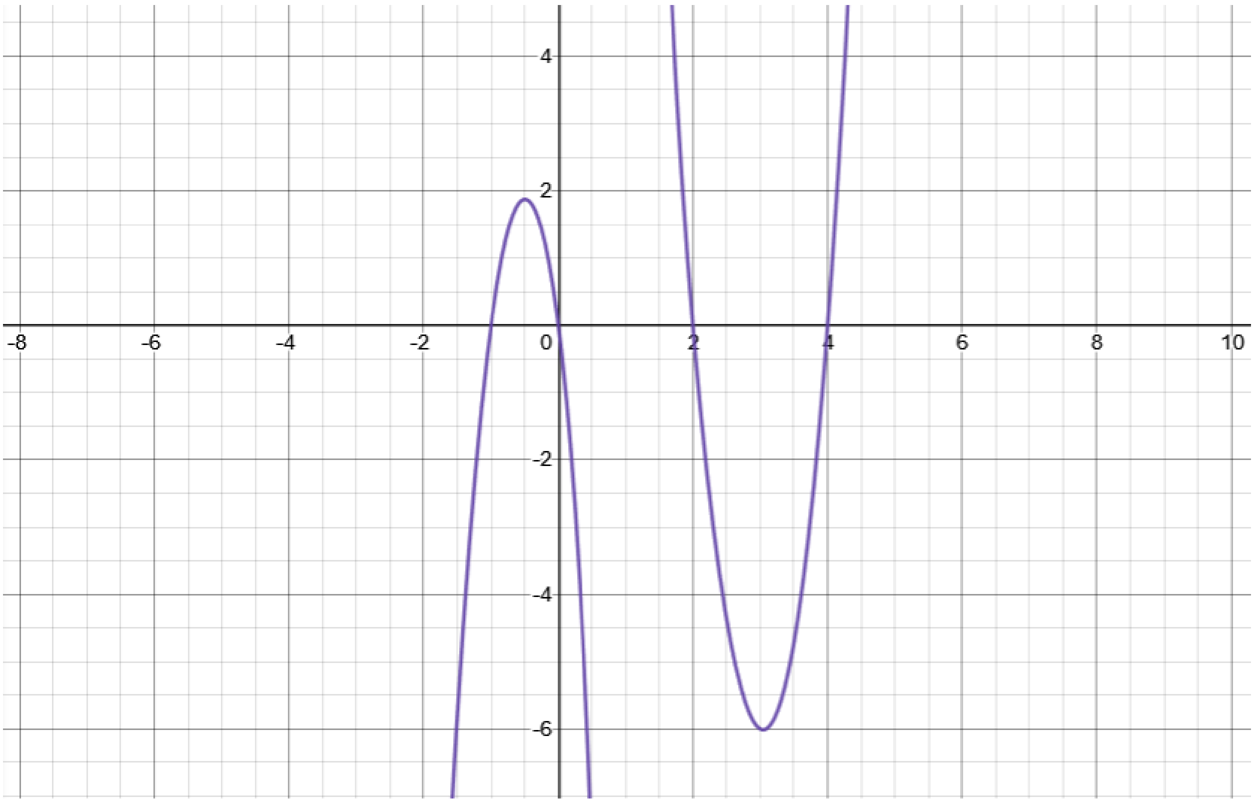

Рис. 4. График функции $f(x) = x(\frac{1}{x-1})(x+1)(x-2)(x-4)$

Задание 1.4.5

Используя линеаризацию уравнения в окрестности особой точки, исследуйте устойчивость неподвижных точек следующих систем. Если $f'(x^*) = 0$*, используйте графический метод.*

$$\dot{x} = x^2(6 - x)$$

Пусть $f(x) = \dot{x} = x^2(6 - x)$, тогда $f'(x) = 12x - 3x^2$. Особые точки функции $f(x)$: $x = 0, x = 6$. Проведем линеаризацию функции в окрестностях особых точек.

$$L(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$$

Точка $x = 0$:

$$L(0) = 0 + 0(x - 0) = 0$$

Используем графический метод.

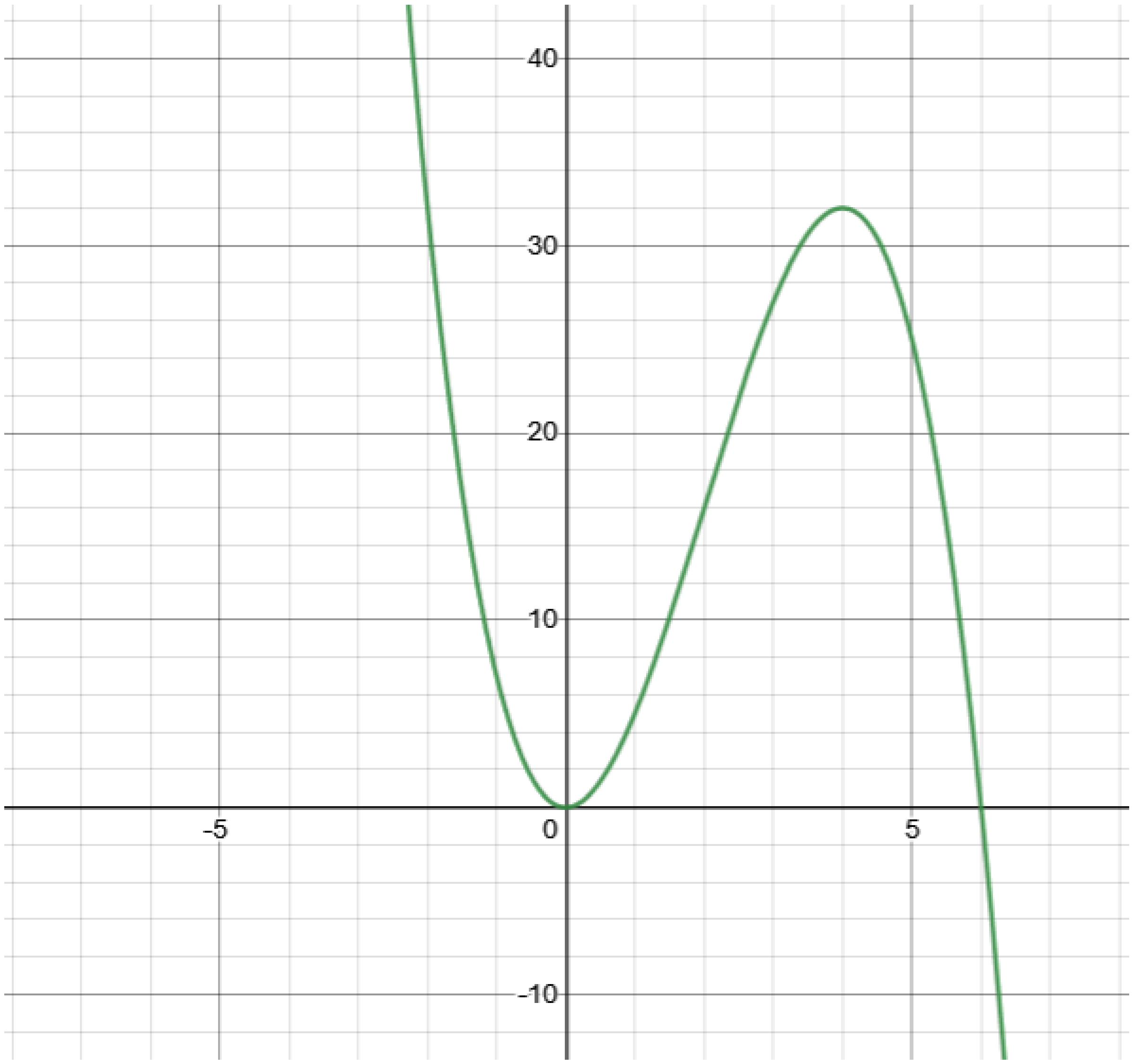

Рис. 5. График функции $\dot{x} = x^2(6 - x)$

Слева от точки $x = 0$ значение $\dot{x}$ больше нуля, справа – также больше нуля. Точка является полуустойчивой слева.

Точка $x = 6$:

$$L(6) = 0 - 36(x - 6) = 216 - 36x$$

В точке $6 - \varepsilon$ значение $L(x)$ положительное, в точке $6 + \varepsilon$ – отрицательное.

Значит, в точке $x = 6$ производная $\dot{x}$ уменьшается, т.е. точка $x = 6$ является устойчивой.

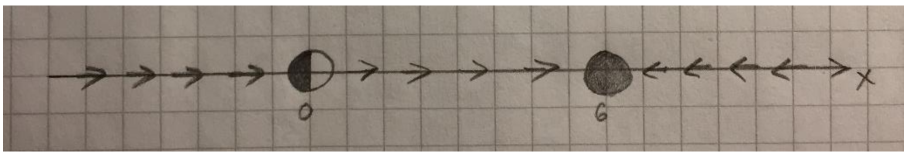

Рис. 6. Векторное поле скоростей