

Математическое моделирование и оптимизация сложных систем

Лабораторная работа 3

Колотков Алексей

Прикладная математика и информатика

Аналитическая логистика

Задание 3.3.9

Изобразите фазовый портрет для системы, определите тип точки равновесия. В случае вещественных собственных векторов изобразите на портрете инвариантные прямые.

$$\dot{x} = -y, \dot{y} = 1$$

Для начала найдем уравнения нульклин:

$$\dot{x} = 0; \Rightarrow y = 0$$

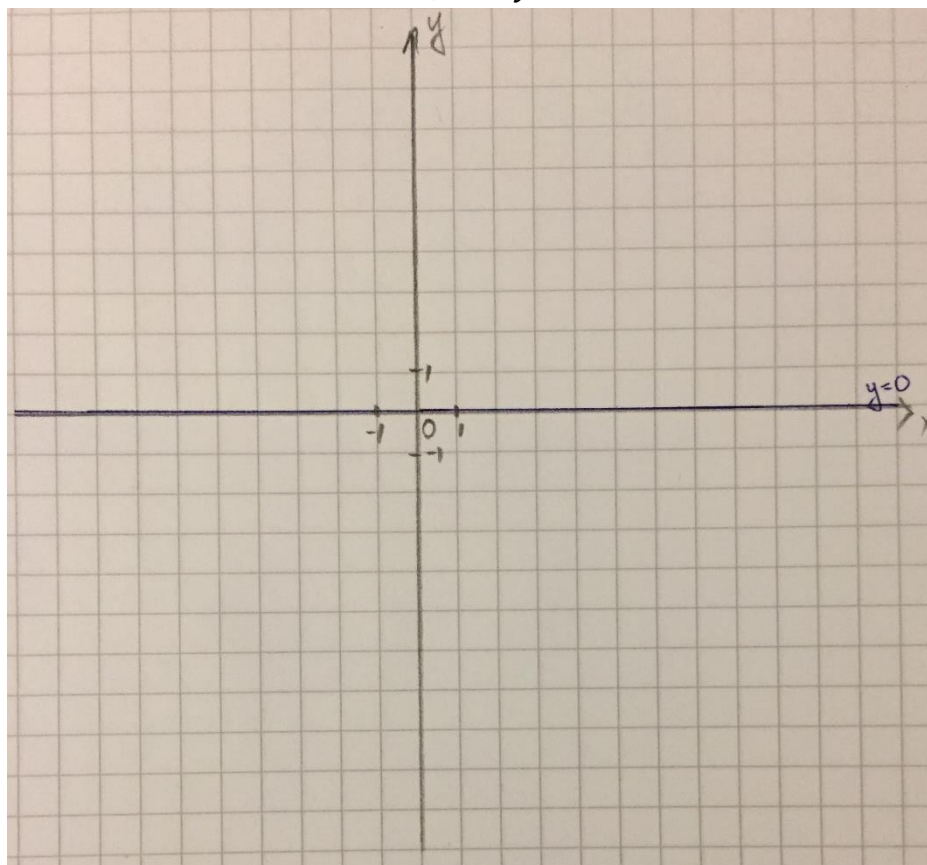


Рис. 1. Уравнение нульклины $y = 0$

Матрица Якоби:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы A :

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2$$

Получаем, что: $p = 0, q = 0$.

$$\lambda^2 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В исходной системе отсутствуют точки пересечения нульклин, соответственно, в данном случае будет бесконечное число особых точек на оси абсцисс.

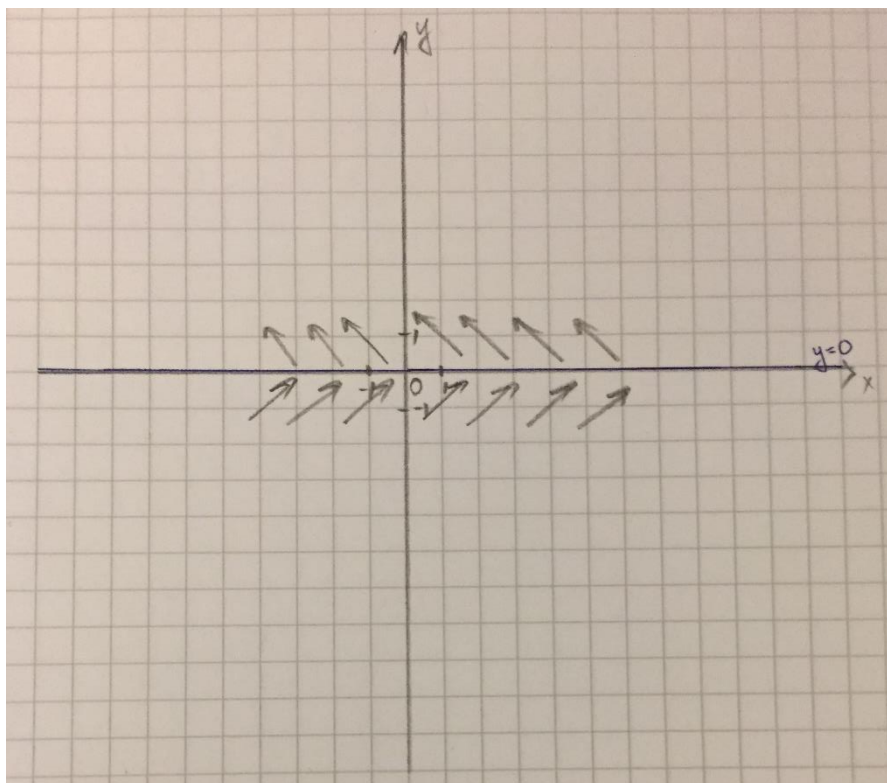


Рис. 2. Направления векторов в окрестностях особых точек

In[6]:= StreamDensityPlot[{-y, 1}, {x, -100, 100}, {y, -100, 100}]
| диаграмма плотности потока

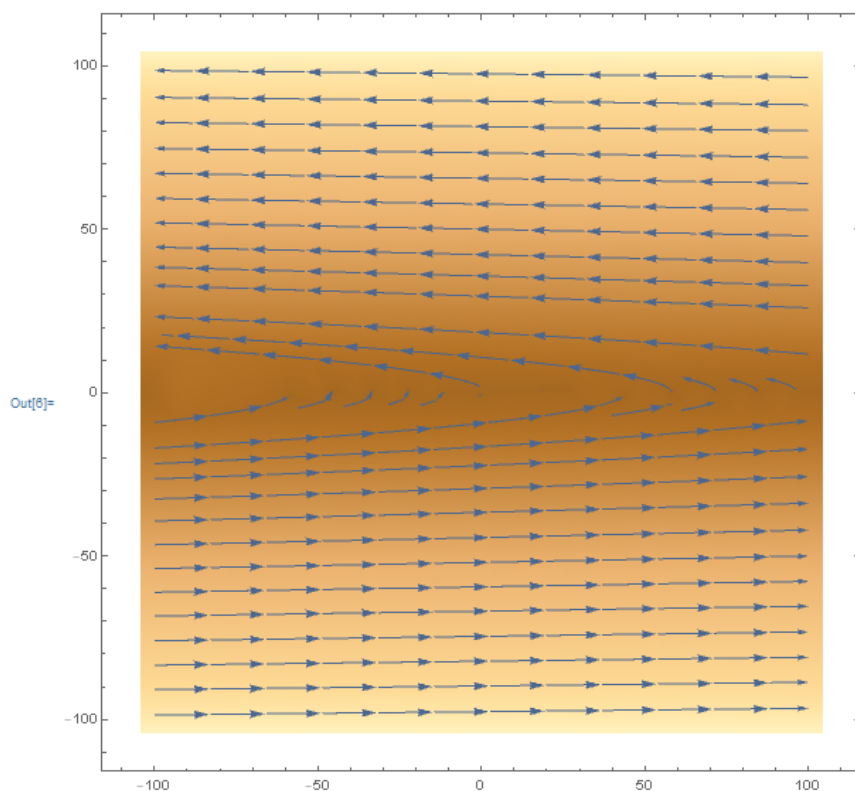


Рис. 3. Фазовый портрет, построенный при помощи Wolfram Mathematica

Задание 3.6.2

(Ромео и Джульетта) Пусть функция $R(t)$ описывает чувства Ромео к Джульетте (нулевое значение означает равнодушие, положительное – любовь, отрицательное – ненависть), $J(t)$ — то же самое для Джульетты. В приведенных заданиях требуется исследовать динамику чувств в этой паре: указать как будут развиваться чувства каждого в зависимости от начальных условий и от значений параметра. То есть, если в начале Ромео любит Джульетту (не любит / равнодушен), а она к нему равнодушна (любит / не любит), как будут развиваться их отношения? Если не указано иное, рассмотрите все возможные варианты.

Пусть Ромео и Джульетта реагируют на чувства друг друга, но не на свои собственные: $\dot{R} = aJ$, $\dot{J} = bR$. Сделайте прогноз развития отношений зависимости от значений параметров a и b .

Рассмотрим различные значения параметров a и b :

1) $a < 0, b < 0$

$R < 0, J < 0$ Чувства Ромео и Джульетты увеличиваются

$R < 0, J > 0$ Чувства Ромео уменьшаются, чувства Джульетты увеличиваются

$R > 0, J < 0$ Чувства Ромео увеличиваются, чувства Джульетты уменьшаются

$R > 0, J > 0$ Чувства Ромео и Джульетты уменьшаются

2) $a < 0, b > 0$

$R < 0, J < 0$ Чувства Ромео увеличиваются, чувства Джульетты уменьшаются

$R < 0, J > 0$ Чувства Ромео и Джульетты уменьшаются

$R > 0, J < 0$ Чувства Ромео и Джульетты увеличиваются

$R > 0, J > 0$ Чувства Ромео уменьшаются, чувства Джульетты увеличиваются

3) $a > 0, b < 0$

$R < 0, J < 0$ Чувства Ромео уменьшаются, чувства Джульетты увеличиваются

$R < 0, J > 0$ Чувства Ромео и Джульетты увеличиваются

$R > 0, J < 0$ Чувства Ромео и Джульетты уменьшаются

$R > 0, J > 0$ Чувства Ромео увеличиваются, чувства Джульетты уменьшаются

4) $a > 0, b > 0$

$R < 0, J < 0$ Чувства Ромео и Джульетты уменьшаются

$R < 0, J > 0$ Чувства Ромео увеличиваются, чувства Джульетты уменьшаются

$R > 0, J < 0$ Чувства Ромео уменьшаются, чувства Джульетты увеличиваются

$R > 0, J > 0$ Чувства Ромео и Джульетты увеличиваются

Найдем собственные значения матрицы A :

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & a \\ b & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - ab$$

Получаем, что: $p = 0, q = -ab$.

$$\lambda^2 - ab = 0, \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{ab}, \lambda_2 = -\sqrt{ab}.$$

Собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a}{b}} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Точкой равновесия данной системы является точка $(0; 0)$. Тип точки равновесия – седло.

In[9]:= StreamDensityPlot[{y, x}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
диаграмма плотности потока

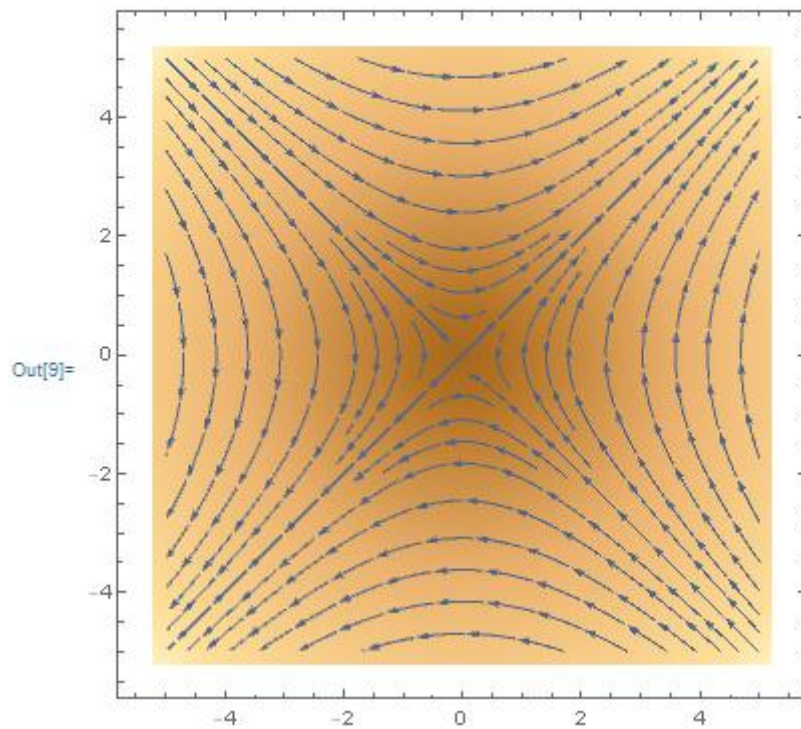


Рис. 4. Фазовый портрет, построенный при помощи Wolfram Mathematica для значения параметров $a=1$, $b=1$.