Математическое моделирование и оптимизация сложных систем

Лабораторная работа 4

Колотков Алексей
Прикладная математика и информатика
Аналитическая логистика

Задание 4.1.6

Для данной системы определите точки равновесия, определите их тип, изобразите соседние траектории и попробуйте дорисовать полный фазовый портрет (без помощи компьютера!). Затем нарисуйте фазовый портрет на компьютере и сравните результаты.

$$\dot{x} = xy - 1, \dot{y} = x - y^3$$

Для начала найдем особые точки системы как точки пересечения нульклин.

Уравнения нульклин:

$$\dot{x} = 0; => x = \frac{1}{y}$$

$$\dot{y} = 0; => \ x = y^3$$

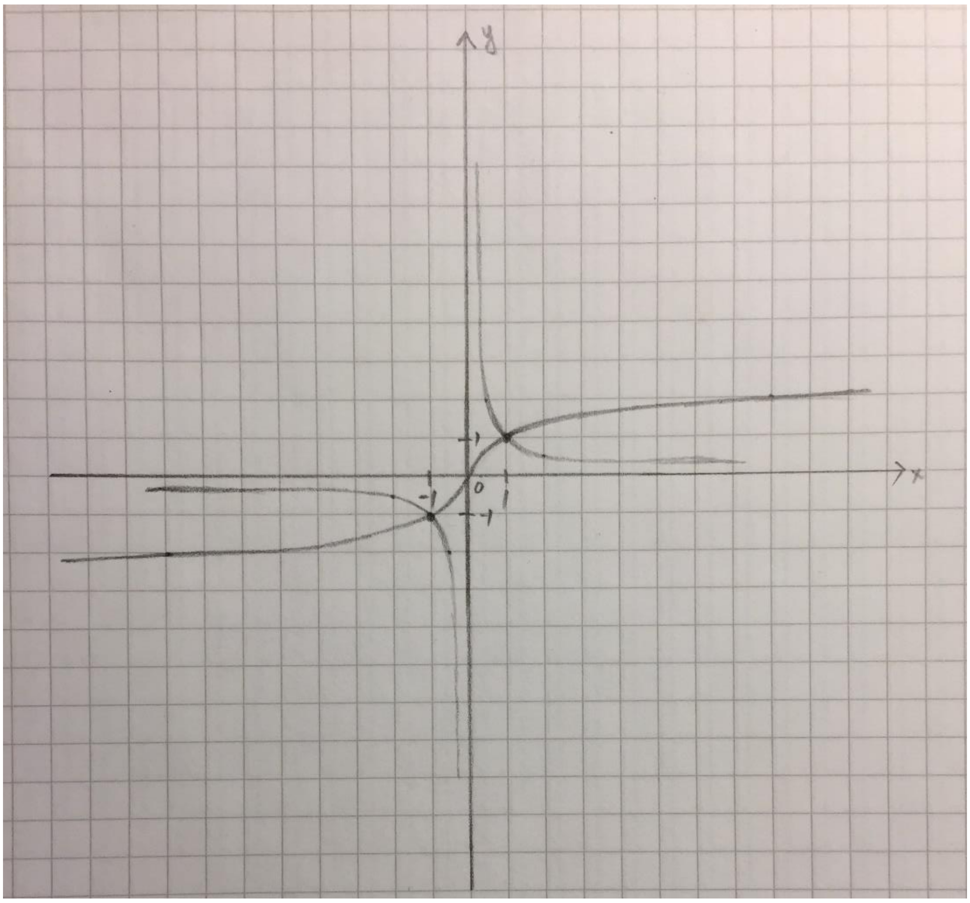

Рис. 1. Нульклины системы $\dot{x} = xy - 1, \dot{y} = x - y^3$

Точки пересечения нульклин: $(-1; -1)$, $(1; 1)$.

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

Точка $(-1; -1)$:

$$det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)(-3-\lambda)+1$$
$$= 3+\lambda+3\lambda+\lambda^2+1 = \lambda^2+4\lambda+4$$
$\lambda^2+4\lambda+4=0, => \lambda \;\; = \; -2.$

Точка гиперболическая.

Получаем, что: $p=-4, q=4.$

Собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(-1;-1)$ – звезда.

Точка $(1;1)$:

$$det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda)-1$$
$$= -3-\lambda+3\lambda+\lambda^2-1 = \lambda^2+2\lambda-4$$
$\lambda^2-4\lambda+3=0, => \lambda_1=-1+\sqrt{5}, \lambda_2=-1-\sqrt{5}.$

Точка гиперболическая.

Получаем, что: $p=-2, q=-4.$

Собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1;1)$ – седло

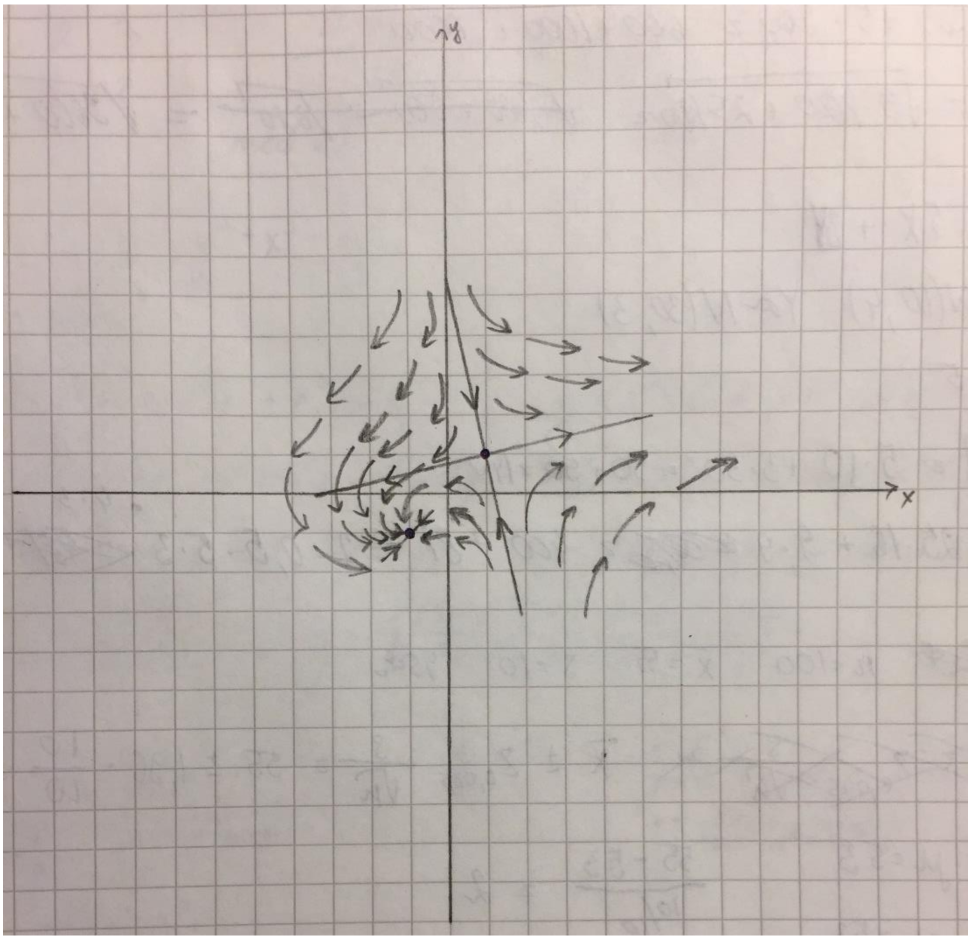

Рис. 2. Фазовый портрет системы $\dot{x}=xy-1, \dot{y}=x-y^3$, построенный вручную

```
In[3]:= StreamDensityPlot[{x*y - 1, x - y^3}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
        диаграмма плотности потока
```

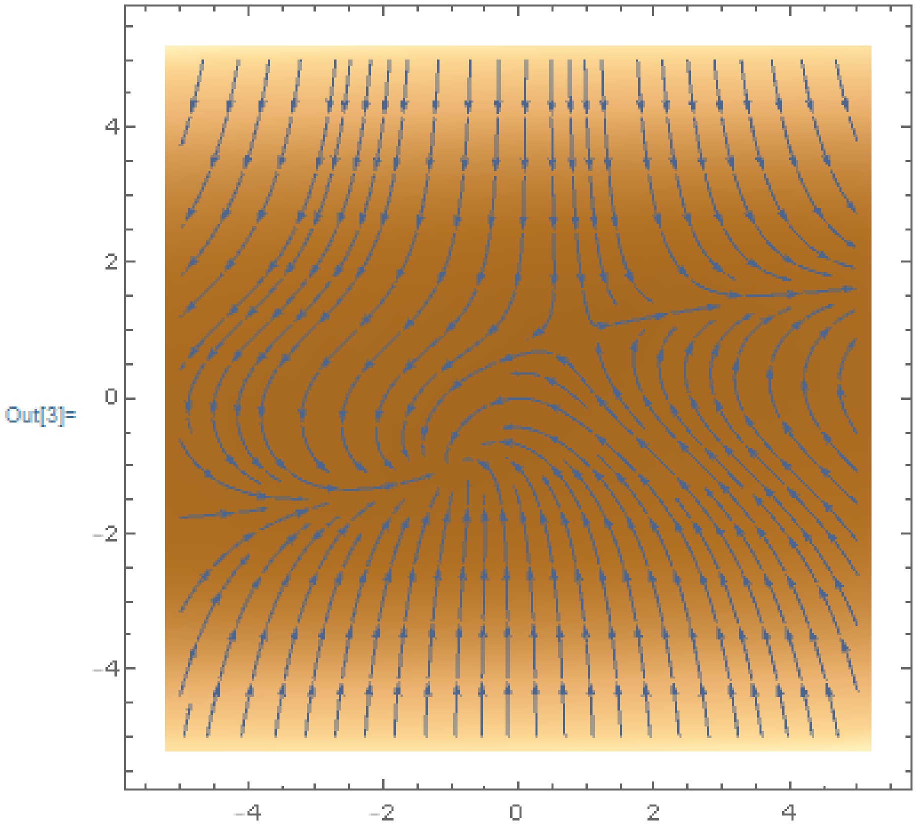

Рис. 3. Фазовый портрет системы $\dot{x} = xy - 1, \dot{y} = x - y^3$, построенный при помощи Wolfram Mathematica

Задание 4.6

Рассмотрим систему $\dot{x} = xy - x^2y + y^3, \dot{y} = y^2 + x^3 - xy^2$. *В чем состоит сложность анализа неподвижной точки в начале координат? Используя полярные координаты, изобразите фазовый портрет данной системы. Подтвердите результат с помощью компьютера.*

Приравняв $\dot{x}$ к нулю, получаем:

$$\left[\begin{array}{c} y = 0 \\ y = -\sqrt{x-1}\sqrt{x} \\ y = \sqrt{x-1}\sqrt{x} \end{array}\right]$$

Приравняв $\dot{y}$ к нулю, получаем:

$$\left[\begin{array}{c} y = -\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x-1}} \\ y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x-1}} \end{array}\right]$$

Последовательно приравняв полученные выражения, найдем особые точки.

Особая точка системы – $(0; 0)$.

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} y - 2xy & x - x^2 + 3y^2 \\ 3x^2 - y^2 & 2y - 2xy \end{pmatrix}$$

Точка $(0; 0)$:

$$det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2$$

$\lambda^2 = 0, => \lambda \;\; = \; -0.$

Точка не гиперболическая.

Сложность анализа неподвижной точки в начале координат заключается в том, что точка не гиперболическая.

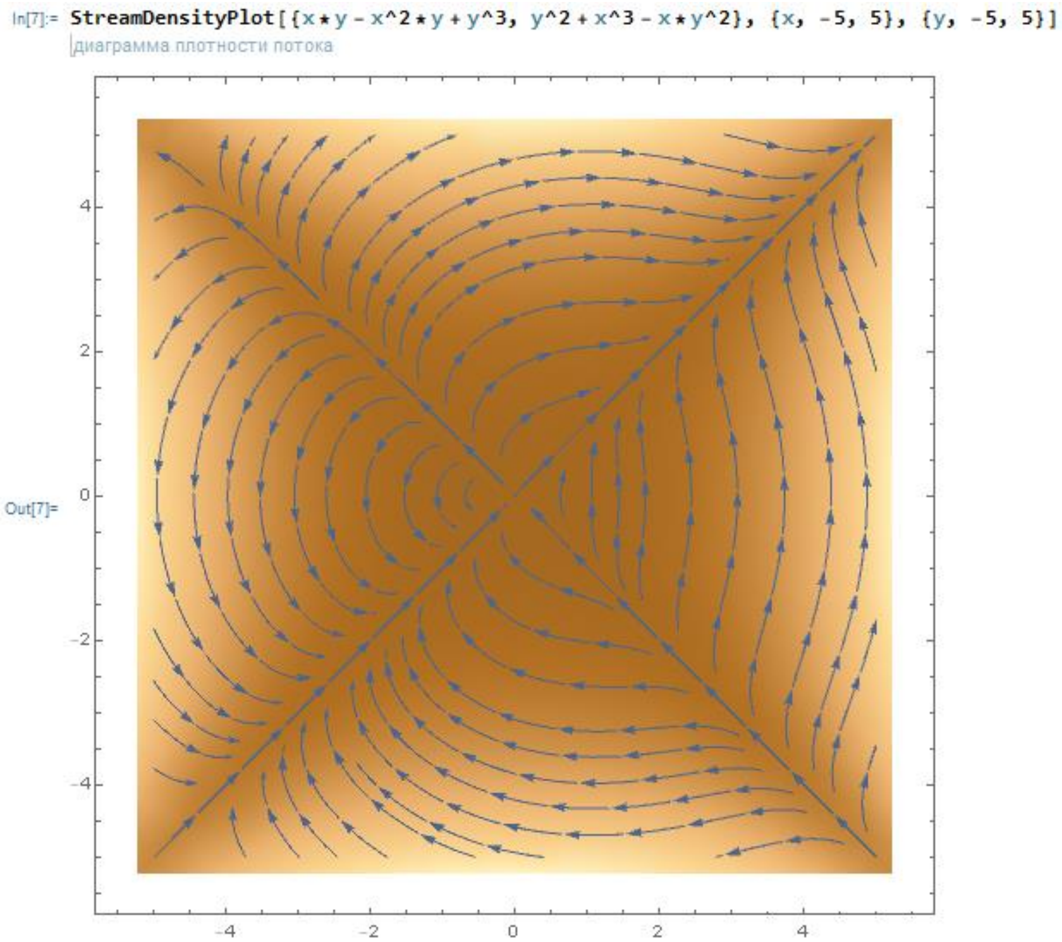

Рис. 4. Фазовый портрет системы $\dot{x} = xy - x^2y + y^3, \dot{y} = y^2 + x^3 - xy^2$, построенный при помощи Wolfram Mathematica