Индивидуальное задание 1
"Нерекурсивный и рекурсивный фильтр"
Вариант 7

Илья Мурадьян, группа 4.1

4 апреля 2018 г.

Мой вариант предполагал использование следующих данных для фильтра и входного сигнала:

a_1	a_2	a_3	b_0	b_1	b_2
$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{12}$	1	-1	-2

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
3	5	-2	-4	4	2	-1	-4	2

Рекурсивный фильтр задан следующим соотношением:

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + a_3 y_{n-3} + b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} \tag{1}$$

Чтобы найти импульсную характеристику сигнала, положим

$$x_n = \delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Тогда при $n \geq 3$ получим:

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + a_3 h_{n-3}. \tag{2}$$

С нашими числовыми данными имеем:

$$h_n = -\frac{4}{3} h_{n-1} - \frac{7}{12} h_{n-2} - \frac{1}{12} h_{n-3}$$

$$12 h_n + 16 h_{n-1} + 7 h_{n-2} + h_{n-3} = 0$$

Для этого разностного уравнения выпишем характеристический многочлен и найдём его корни:

$$L(\lambda) = 12\lambda^3 + 16\lambda^2 + 7\lambda + 1$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{3}$$

Оба найденных корня по модулю меньше единицы, так что исследуемая БИХ-система устойчива. Решение ищем в виде:

$$h_n = (C_1 + C_2 n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_3\left(-\frac{1}{3}\right)^n \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (2) единичный сигнал при $n = 0, 1, 2$ имеем:

$$\begin{cases} h_0 = b_0 \\ h_1 = a_1 h_0 + b_1 = a_1 b_0 + b_1 \\ h_2 = a_1 h_1 + a_2 h_0 + b_2 = a_1^2 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + b_2 \end{cases} \tag{4}$$

Подставим теперь в левую часть системы (4) общий вид решения (3), а в правую часть – исходные данные, и получим следующую линейную систему относительно C_1, C_2, C_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{19}{36} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Решая эту систему, получаем:

$$C_1 = 57, C_2 = -15, C_3 = -56. \tag{6}$$

Подставим теперь найденные значения констант в (3) и получим окончательную формулу для импульсной характеристики:

$$h_n = (57 - 15n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 56\left(-\frac{1}{3}\right)^n \tag{7}$$

По полученной формуле вычислим h_5:

$$h_5 \approx 0.79295267489712$$

Такое же значение получается при применении фильтра, что заставляет нас думать, что формула была найдена верно.

Рассмотрим теперь следущие два финитных сигнала:

$$\widetilde{x}_n = \begin{cases} x_n, & 0 \le n \le 8 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{8}$$

$$\widehat{x}_n = \begin{cases} x_n + \frac{1}{10}, & 0 \le n \le 8 \\ \frac{1}{10}, & n \in \{-1, 9\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{9}$$

Найдём тысячный отсчет отклика системы на каждый из этих сигналов:

$$\widetilde{y}_{1000} \approx -1,352278 \cdot 10^{-294}.$$

$$\widehat{y}_{1000} \approx -1,305085 \cdot 10^{-294}.$$

Как видно, порядки и первые две значащие цифры полученных результатов совпадают. Это говорит о хорошей устойчивости системы.

Теперь найдём несколько значений импульсной характеристики:

h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9
$1,000$	$-2,333$	$0,527$	$0,574$	$-0,879$	$0,793$	$-0,592$	$0,401$	$-0,255$	$0,155$

Построим следующий фильтр с конечной импульсной характеристикой:

$$y_n' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \widehat{h}_{n-k},$$

$$\text{где} \quad \widehat{h}_i = \begin{cases} h_i, & 0 \le i \le 9 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Посчитаем теперь 1000-й отсчёт отклика построенного фильтра на сигнал $\widetilde{x}$:

$$\widetilde{y}_{1000}' = 0.$$

Начиная с некоторого n все отсчёты отклика построенного фильтра на заданный финитный сигнал будут нулевыми. Так получилось и сейчас. Однако с учётом того, что тысячный отсчёт фильтра (1) ничтожно мал, можно назвать это приближение удовлетворительным.

Работа была выполнена мною лично, без чьей-либо помощи, без использования нелицензионных программ.