МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южный федеральный университет»

Институт математики, механики и компьютерных наук им.
И.И.Воровича
Кафедра алгебры и дискретной математики

Мурадьян Илья Валерьевич

Задача поиска графа-паттерна на помеченном графе

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
по направлению 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

Научный руководитель –
доцент, д.ф.-м.н. Скороходов Владимир Александрович

Ростов-на-Дону – 2018

Содержание

Введение

Данная работа посвящена решению одной интересной задачи, возникающей на стыке двух разделов теории графов: нестандартной достижимости и теории случайных графов. Коротко раскроем предмет исследования каждого из разделов, познакомим читателя с основными имеющимися результатами, а затем перейдём к описанию исследуемой задачи.

Задачи на графах с нестандартной достижимостью появляются там, где на прохождение по дугам графа накладываются некоторые ограничения. Пусть, например, стоит задача найти оптимальный по времени путь из Ростова в Москву на автомобиле. Для её решения обычно строят граф дорожной сети, в котором вершинами являются населённые пункты, а рёбрами – соединяющие их дороги, каждому ребру присваивается вес – длина дороги, после чего задача решается одним из известных алгоритмов поиска кратчайшего пути. Однако такое решение рассчитано лишь на случай, когда автомобиль может двигаться по каждой из дорог со своей максимальной скоростью. Возникающие на дорогах пробки могут нарушить это условие, увеличивая вес рёбер, на которых они возникают, в определённые временные интервалы. Задачи подобного рода называются задачами на временную достижимость. Эту же задачу можно сформулировать, например, для гипотетического автомобиля на солнечных батареях, который может беспрепятственно двигаться лишь днём и под открытым небом, а в туннелях и ночью – непродолжительное время. Если сформулировать эту задачу более строго, получим другой тип достижимости, для которого будет применяться подход, отличный от подхода для временной достижимости. Несмотря на это, почти ко всем задачам на нестандартную достижимость уместно применять следующий общий подход (как это делается в, например, в [1]): строится новый граф с большим количеством вершин (как правило, каждой вершине исходного графа в соответствие ставятся n вершин нового графа), затем определённым образом каждому ребру исходного графа в соответствие ставится несколько рёбер нового графа (это соответствие сильно зависит от типа достижимости), а затем доказывается теорема о том, что кратчайший путь в обычном смысле на построенном графе определённым образом соотносится с кратчайшем путём в нестандартном смысле на исходном графе. В отдельных случаях, однако, перестроить граф оказывается либо невозможным, либо такое перестроение сильно (нелинейно) увеличивает исходный граф, что приводит к увеличению асимптотической сложности используемых алгоритмов. В таком случае иногда оказывается удачной идея модифицировать сам алгоритм поиска кратчайших путей.

Эта идея является ключевым моментом данной работы.

Любая задача на нестандартную достижимость имеет дело с весьма определённым графом, для которого всегда существует определённый кратчайший путь (или достоверно известно, что такого пути нет). Теория случайных графов же рассматривает некоторые вполне естественные распределения графов и выясняет свойства "среднего"графа такого распределения. Пожалуй, самой простой и распространённой здесь является модель Эрдеша–Реньи [2]. В обобщённом варианте модели построение случайного графа происходит следующим образом. Задаётся множество $V_n = \{1, ..., n\}$, называемое множеством вершин, а неориентированное ребро, соединяющее вершины $i, j \in V_n, i < j$, появляется независимо от других рёбер с вероятностью $p_{i,j}$. Для удобства обозначим $\overline{p} = \{p_{i,j}\}_{1 \le i < j \le n}$. Все образованные таким образом неориентированные графы образуют вероятностное пространство

$$G(n, \overline{p}) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n,\overline{p}}),$$

где

$$\Omega_n = \{G(V_n, E)\},$$
$$\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n},$$
$$P_{n,\overline{p}}(G) = \prod_{(i,j) \in E} p_{i,j} \cdot \prod_{(i,j) \notin E} (1 - p_{i,j}).$$

Для того, чтобы выяснить, какова вероятность выполнения того или иного утверждения для случайного графа, берут подмножество $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_n$ множества всех случайных графов и вычисляют для него вероятность

$$P(\mathcal{A}) = \sum_{G \in \mathcal{A}} P_{n,\overline{p}}(G).$$

В данной работе решается задача о поиске пути на графе, достижимость на котором определяется случайно, но зависит не только от наперёд заданного закона распределения, но и от предыдущих переходов по дугам графа.

Основные сведения

Дадим основные определения, которые будут использоваться в этой работе.

Определение 1. Ориентированным графом (в дальнейшем – просто **графом**) будем называть тройку $G(X, U, f)$, где:

- $\triangleright$ $X, |X| > 0$ - множество вершин графа;
- $\triangleright$ U - множество дуг графа;
- $\triangleright$ $f : U \to X \times X$ - отображение, сопоставляющее каждой дуге её начало и конец;

Определение 2. Граф $G(X, U, f)$ будем называть **конечным**, если множества X и U конечны.

Определение 3. Четвёрку $G(X, U, f, \omega)$ будем называть **взвешенным графом**, если $G'(X, U, f)$ – граф, а $\omega : U \to \mathbb{Z}$ – весовая функция.

Определение 4. Будем говорить, что дуга u **исходит** из вершины x и **заходит** в вершину y, если $f(u) = (x, y)$. Обозначим $f_+(u) = x$, $f_-(u) = y$.

Определение 5. Будем говорить, что вершина y **смежна** с вершиной x, если $\exists u : f(u) = (x, y)$. Обозначим множество вершин, смежных с x, через $Adj(x)$. Множество $Inc(x) = \{u \in U | f_+(u) = x\}$ назовём множеством **инцидентных** с x дуг.

Определение 6. Путём называется последовательность дуг $\widehat{u} = (u_i)_{i=1}^m$ такая, что $\forall i \in [1; m-1]_{\mathbb{N}} \quad f_-(u_i) = f_+(u_{i+1})$. Число m назовём **длиной пути** и обозначим через $|\widehat{u}|$. Будем говорить, что $\widehat{u}.s = f_+(u_1)$ – это **начало** пути $\widehat{u}$, а $\widehat{u}.t = f_-(u_m)$ – это **конец** пути $\widehat{u}$. Для удобства будем считать, что на графе G существует $|X|$ путей нулевой длины, каждый из которых представляет собой пустую последовательность дуг, а его начало и одновременно конец суть некоторая вершина графа G. Путь ненулевой длины $\widehat{u}$ называется **контуром**, если его начало совпадает с концом. Если граф не содержит циклов, он называется **бесконтурным**.

Определение 7. Весом пути взвешенного графа назовём сумму весов его рёбер:

$$\omega(\widehat{u}) = \sum_{k=1}^{|\widehat{u}|} \omega(u_k).$$

Определение 8. Тройку $G(G'(X, U, f[, \omega]), C, \{U_c\}_{c \in C})$ будем называть **цветным графом**, если G' – конечный граф, C – конечное непустое множество, $\{U_c\}_{c \in C}$ – семейство множеств таких, что $U_c \subset U$ и $U = \bigcup\limits_{c \in C} U_c$. Заметим, что это семейство не обязательно является разбиением множества U. Множество C будем называть множеством цветов, а каждое из множеств U_c - множеством дуг, допускающих цвет c. Обозначим через $Inc_c(x)$ множество дуг, допускающих цвет c и инцидентных вершине x.

Заметим, что исходя из определения каждая дуга допускает по крайней мере один цвет.

Задача о графе с вероятностной достижимостью

Постановка задачи

Пусть L -

Пример работы алгоритма

Для примера рассмотрим следующий граф G (рис. 1).

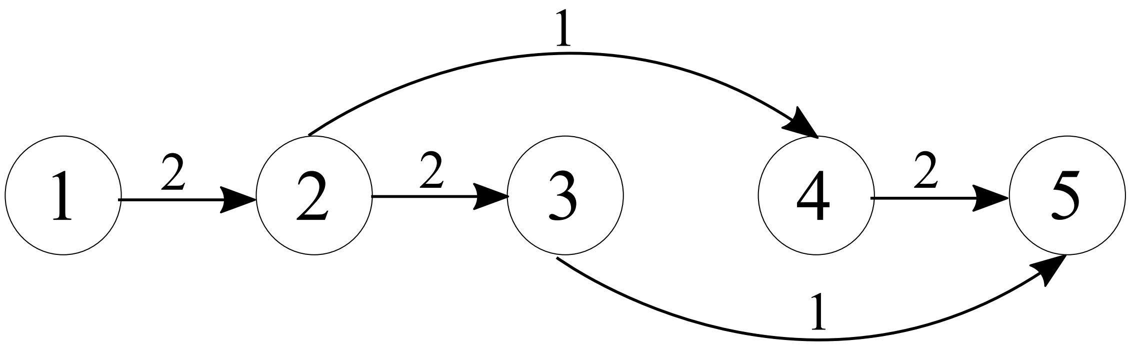

Рис. 1: Граф G.

Для этого графа $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2\}$. Этот граф не имеет кратных дуг, поэтому их можно представлять как пары (x, y) вершин графа, где x – начало дуги, y – её конец. Каждая дуга допускает ровно один цвет, надписанный над ней. Таким образом, $U = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5)\}$, $U_1 = \{(2, 4), (3, 5)\}$, $U_2 = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$. Непосредственно можно убедиться, что граф G не содержит контуров, а его вершины топологически упорядочены.

Пусть $s = 1$, $t = 5$, а стохастическая матрица P имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Применяя вышеизложенный алгоритм, найдём матрицу вероятностей $P^{(1)}$ для вершины $s = 1$, а также стратегию $(v_{i,n})_{1 \le n < 5, i=1,2}$.

Для вершины 5 имеем:

$$P^{(5)} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для дальнейшего нам понадобится одно обозначение.

Будем обозначать $L_k(A)$ взятие k-й строки матрицы A, т.е.

$$L_k((a_{i,j})_{i,j=1}^{M}) = (a_{k,1}, a_{k,2}, ..., a_{k,M}).$$

Из определения умножения матриц следует, что:

$$L_k(A \cdot B) = L_k(A) \cdot B.$$

Для вершины 4 имеем $X_1(4) = \emptyset$, поэтому $v_{1,4} = \bigotimes$.

$X_2(4) = \{5\}$, поэтому:

$$L_2(P^{(4,5)}) = L_2(P) \cdot P^{(5)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Здесь $v_{2,4} = 5$ как единственная вершина множества $X_2(4)$.
Таким образом,

$$P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Для вершины 3 имеем $X_1(3) = \{5\}$, поэтому:

$$L_1(P^{(3,5)}) = L_1(P) \cdot P^{(5)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Здесь $v_{1,3} = 5$ как единственная вершина множества $X_1(3)$.
$X_2(3) = \emptyset$, поэтому $v_{2,3} = \bigotimes$.
Таким образом,

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вершины 2 имеем $X_1(2) = \{4\}$, поэтому:

$$L_1(P^{(2,4)}) = L_1(P) \cdot P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,21 \end{pmatrix}$$

Здесь $v_{1,2} = 4$ как единственная вершина множества $X_1(2)$.
$X_2(2) = \{3\}$, поэтому:

$$L_2(P^{(2,3)}) = L_2(P) \cdot P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,09 \end{pmatrix}$$

Здесь $v_{2,2} = 3$ как единственная вершина множества $X_2(2)$.
Таким образом,

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,21 \\ 0,21 & 0,09 \end{pmatrix}.$$

Для вершины 1 имеем $X_1(1) = \emptyset$, поэтому $v_{1,1} = \bigotimes$.
$X_2(1) = \{2\}$, поэтому:

$$L_2(P^{(1,2)}) = L_2(P) \cdot P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,09 & 0,21 \\ 0,21 & 0,09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,174 & 0,126 \end{pmatrix}$$

Здесь $v_{2,1} = 2$ как единственная вершина множества $X_2(1)$.
Таким образом,

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,174 & 0,126 \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, в случае, если путешественник находится в стартовой вершине в цвете 1, он не сможет достичь вершины 5 ни при каком условии: $p_1 = 0$. Если же он изначально находится в цвете 2, он может достичь вершины 5 с вероятностью $p_2 = 0,174 + 0,126 = 0,3$. Найденные вершины стратегии укажут путешественнику наиболее оптимальный маршрут.

Список литературы

[1] Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения: моногр. / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов, М.В. Кузьминова [и др.]. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. 195 с.

[2] Райгородский А.М. Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2017. 144 с.

[3] Stochastic matrix. https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_matrix. Просмотрено: 3 мая 2017г.