МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южный федеральный университет»

Институт математики, механики и компьютерных наук им.
И.И.Воровича
Кафедра алгебры и дискретной математики

Мурадьян Илья Валерьевич

Задача поиска графа-паттерна на помеченном графе

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
по направлению 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

Научный руководитель –
доцент, д.ф.-м.н. Скороходов Владимир Александрович

Ростов-на-Дону – 2018

Содержание

Основные сведения

Дадим основные определения, которые будут использоваться в этой работе.

Определение 1. Ориентированным графом (в дальнейшем – просто **графом**) будем называть тройку $G(X, U, f)$, где:

- $\triangleright$ $X, |X| > 0$ - множество вершин графа;
- $\triangleright$ U - множество дуг графа;
- $\triangleright$ $f : U \to X \times X$ - отображение, сопоставляющее каждой дуге её начало и конец;

Определение 2. Граф $G(X, U, f)$ будем называть **конечным**, если множества X и U конечны.

Определение 3. Четвёрку $G(X, U, f, \omega)$ будем называть **взвешенным графом**, если $G'(X, U, f)$ – граф, а $\omega : U \to \mathbb{Z}$ – весовая функция.

Определение 4. Будем говорить, что дуга u **исходит** из вершины x и **заходит** в вершину y, если $f(u) = (x, y)$. Обозначим $f_+(u) = x$, $f_-(u) = y$.

Определение 5. Будем говорить, что вершина y **смежна** с вершиной x, если $\exists u : f(u) = (x, y)$. Обозначим множество вершин, смежных с x, через $Adj(x)$. Множество $Inc(x) = \{u \in U | f_+(u) = x\}$ назовём множеством **инцидентных** с x дуг.

Определение 6. Путём называется последовательность дуг $\widehat{u} = (u_i)_{i=1}^m$ такая, что $\forall i \in [1; m-1]_{\mathbb{N}} \quad f_-(u_i) = f_+(u_{i+1})$. Число m назовём **длиной пути** и обозначим через $|\widehat{u}|$. Будем говорить, что $\widehat{u}.s = f_+(u_1)$ – это **начало** пути $\widehat{u}$, а $\widehat{u}.t = f_-(u_m)$ – это **конец** пути $\widehat{u}$. Для удобства будем считать, что на графе G существует $|X|$ путей нулевой длины, каждый из которых представляет собой пустую последовательность дуг, а его начало и одновременно конец суть некоторая вершина графа G. Путь ненулевой длины $\widehat{u}$ называется **контуром**, если его начало совпадает с концом. Если граф не содержит циклов, он называется **бесконтурным**.

Определение 7. Весом пути взвешенного графа назовём сумму весов его рёбер:

$$\omega(\widehat{u}) = \sum_{k=1}^{|\widehat{u}|} \omega(u_k).$$

Определение 8. Тройку $G(G'(X, U, f[, \omega]), C, \{U_c\}_{c \in C})$ будем называть **цветным графом**, если G' – конечный граф, C – конечное непустое множество, $\{U_c\}_{c \in C}$ – семейство множеств таких, что $U_c \subset U$ и $U = \bigcup\limits_{c \in C} U_c$. Заметим, что это семейство не обязательно является разбиением множества U. Множество C будем называть множеством цветов, а каждое из множеств U_c - множеством дуг, допускающих цвет c. Обозначим через $Inc_c(x)$ множество дуг, допускающих цвет c и инцидентных вершине x.

Заметим, что исходя из определения каждая дуга допускает по крайней мере один цвет.

Исходная задача

Постановка задачи

Пусть L - непустое конечное множество **(множество меток)**. Пусть $G(V, E)$, $G'(V', E')$ – неориентированные связные графы. Будем называть граф G архивным графом, граф G' – графом-паттерном, или шаблонным графом.

Введём отображения $l : V \to L$, $l' : V' \to L$, сопоставляющие вершинам архивного и шаблонного графов соответствующие метки. При этом мы требуем, чтобы введённые на шаблонном графе метки были уникальны, т.е. отображение l' – инъективно.

Определение 9. Совпадением на графе G будем называть частичный подграф $\widehat{G}(\widehat{V}, \widehat{E})$ графа G такой, что:

1. Существует биективное отображение $m_{\widehat{G}} : V' \to \widehat{V}$.
2. $\forall v' \in V' : l'(v') = l(m_{\widehat{G}}(v'))$
3. $\forall (v'_1, v'_2) \in E' : (m_{\widehat{G}}(v'_1), m_{\widehat{G}}(v'_2)) \in E$

Пусть для вершины $v \in V$ существует некоторое совпадение $\widehat{G}(\widehat{V}, \widehat{E})$ на графе G такое, что $v \in \widehat{V}$. Тогда вершину v будем называть подходящей паттерну G' по совпадению $\widehat{G}$, иначе – неподходящей. В случае, если вершина v подходит по совпадению $\widehat{G}$, вершину $m^{-1}_{\widehat{G}}(v) \in V'$ назовём соответствующей данной вершине v. Заметим, что вершина v может подходить паттерну по нескольким совпадениям, но в силу инъективности отображения l' ей может соответствовать лишь одна вершина $v' \in V'$.

Через $\widetilde{V} \subseteq V$ обозначим множество всех подходящих паттерну G' вершин. Наша задача и будет состоять в отыскании этого подмножества. Опишем используемый нами алгоритм.

Пусть $T = \emptyset \cup \mathcal{C}^1_{V'}$ – все 0-элементные и 1-элементные подмножества множества вершин графа-паттерна. Построим отображение $f_0 : V \to T$, заданное следующим:

$$v' \in f_0(v) \Leftrightarrow l(v) = l'(v'). \tag{1}$$

Нетрудно убедиться, что в силу инъективности отображения l, введённое отображение f_0 действительно имеет областью значений множество T.

Алгоритм будет строиться на изменении отображения f_0, поэтому для удобства нам потребуется ввести операцию над подобными отображениями. Пусть $f_1, f_2 : V \to 2^{V'}$. Обозначим $f_2 = Exclude(f_1, v_0(\in V), v'_0(\in V'))$, если выполнено следующее:

1. $\forall v \neq v_0 \in V : f_1(v) = f_2(v)$.
2. $v'_0 \notin f_2(v_0)$.
3. $\{v'_0\} \cup f_2(v_0) = f_1(v_0)$

Ясно, что по отображению f_1 легко построить отображение $Exclude(f_1, v_0, v'_0)$, просто исключая вершину v'_0 из множества $f_1(v_0)$.

Алгоритм исключения по локальным условиям

Для начала дадим несколько определений.

Определение 10. Пусть дан граф $G(V, E)$. Пусть $v \in V$. Тогда обозначим через $Adj(v)$ множество смежных с ней вершин: $Adj(v) = \{u \in V | \exists (v, u) \in E\}$. Если $\widetilde{V} \subset V$, то $Adj(\widetilde{V}) = \bigcup\limits_{\widetilde{v} \in \widetilde{V}} Adj(\widetilde{v})$. В частности, $Adj(\emptyset) = \emptyset$.

Определение 11. Пусть $G(V, E)$, $G'(V', E')$ – архивный и шаблонный графы соответственно. Пусть задано отображение $f : V \to T$, где множество T определено выше. Путь также $v \in V$. Назовём предикатом локальных условий следующий предикат:

$$LCC(f, v) = \forall u' \in Adj(f(v)) \exists u \in Adj(v) : u' \in f(u). \tag{2}$$

Ниже приведён алгоритм LCCE – исключения по локальным условиям.

Вход: графы $G(V, E)$, $G'(V', E')$, отображение $f : V \to T$, число итераций N

Выход: измененённое отображение f

начало LCCE
  для $i = 1, 2, .., N$ **:**
    для $v \in V$ **:**
      если $\neg LCC(f, v)$ **тогда**
        $f(v) := \emptyset$
  вернуть f

Список литературы