МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южный федеральный университет»

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича
Кафедра алгебры и дискретной математики

Мурадьян Илья Валерьевич

БЕСКОНТУРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ГРАФЫ С НЕСТАНДАРТНОЙ ДОСТИЖИМОСТЬЮ

КУРСОВАЯ РАБОТА
по направлению 01.03.02— Прикладная математика и информатика

Научный руководитель –
доц., к.ф.-м.н. Скороходов Владимир Александрович

отлично (90)

Ростов-на-Дону – 2017

Отзыв научного руководителя на курсовую работу «Бесконтурные случайные графы с нестандартной достижимостью» студента группы 3.1 Мурадьяна Ильи

В работе исследован особый вид динамической достижимости на графе, когда условия на достижимость меняются в соответствии с заданным распределением вероятностей. Описана постановка задачи нахождения оптимальной стратегии движения на таком графе, а также приведено решение этой задачи для графа без контуров.

Ильёй Мурадьяном были решены практически все поставленные задачи. К недочётам работы можно отнести недостаточную строгость и ясность некоторых формулировок и доказательств. С учётом указанных недостатков за работу выставлена оценка 90 баллов («отлично»).

Научный руководитель
доцент кафедры АиДМ, Скороходов В.А.
к. ф.-м. н.

Содержание

Введение

Данная работа посвящена решению одной интересной задачи, возникающей на стыке двух разделов теории графов: нестандартной достижимости и теории случайных графов. Коротко раскроем предмет исследования каждого из разделов, познакомим читателя с основными имеющимися результатами, а затем перейдём к описанию исследуемой задачи.

Задачи на графах с нестандартной достижимостью появляются там, где на прохождение по дугам графа накладываются некоторые ограничения. Пусть, например, стоит задача найти оптимальный по времени путь из Ростова в Москву на автомобиле. Для её решения обычно строят граф дорожной сети, в котором вершинами являются населённые пункты, а рёбрами – соединяющие их дороги, каждому ребру присваивается вес – длина дороги, после чего задача решается одним из известных алгоритмов поиска кратчайшего пути. Однако такое решение рассчитано лишь на случай, когда автомобиль может двигаться по каждой из дорог со своей максимальной скоростью. Возникающие на дорогах пробки могут нарушить это условие, увеличивая вес рёбер, на которых они возникают, в определённые временные интервалы. Задачи подобного рода называются задачами на временную достижимость. Эту же задачу можно сформулировать, например, для гипотетического автомобиля на солнечных батареях, который может беспрепятственно двигаться лишь днём и под открытым небом, а в туннелях и ночью – непродолжительное время. Если сформулировать эту задачу более строго, получим другой тип достижимости, для которого будет применяться подход, отличный от подхода для временной достижимости. Несмотря на это, почти ко всем задачам на нестандартную достижимость уместно применять следующий общий подход (как это делается в, например, в [1]): строится новый граф с большим количеством вершин (как правило, каждой вершине исходного графа в соответствие ставятся n вершин нового графа), затем определённым образом каждому ребру исходного графа в соответствие ставится несколько рёбер нового графа (это соответствие сильно зависит от типа достижимости), а затем доказывается теорема о том, что кратчайший путь в обычном смысле на построенном графе определённым образом соотносится с кратчайшем путём в нестандартном смысле на исходном графе. В отдельных случаях, однако, перестроить граф оказывается либо невозможным, либо такое перестроение сильно (нелинейно) увеличивает исходный граф, что приводит к увеличению асимптотической сложности используемых алгоритмов. В таком случае иногда оказывается удачной идея модифицировать сам алгоритм поиска кратчайших путей.

Эта идея является ключевым моментом данной работы.

Любая задача на нестандартную достижимость имеет дело с весьма определённым графом, для которого всегда существует определённый кратчайший путь (или достоверно известно, что такого пути нет). Теория случайных графов же рассматривает некоторые вполне естественные распределения графов и выясняет свойства "среднего"графа такого распределения. Пожалуй, самой простой и распространённой здесь является модель Эрдеша–Реньи [2]. В обобщённом варианте модели построение случайного графа происходит следующим образом. Задаётся множество $V_n = \{1, ..., n\}$, называемое множеством вершин, а неориентированное ребро, соединяющее вершины $i, j \in V_n, i < j$, появляется независимо от других рёбер с вероятностью $p_{i,j}$. Для удобства обозначим $\overline{p} = \{p_{i,j}\}_{1 \le i < j \le n}$. Все образованные таким образом неориентированные графы образуют вероятностное пространство

$$G(n, \overline{p}) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n,\overline{p}}),$$

где

$$\Omega_n = \{G(V_n, E)\},$$
$$\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n},$$
$$P_{n,\overline{p}}(G) = \prod_{(i,j) \in E} p_{i,j} \cdot \prod_{(i,j) \notin E} (1 - p_{i,j}).$$

Для того, чтобы выяснить, какова вероятность выполнения того или иного утверждения для случайного графа, берут подмножество $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_n$ множества всех случайных графов и вычисляют для него вероятность

$$P(\mathcal{A}) = \sum_{G \in \mathcal{A}} P_{n,\overline{p}}(G).$$

В данной работе решается задача о поиске пути на графе, достижимость на котором определяется случайно, но зависит не только от наперёд заданного закона распределения, но и от предыдущих переходов по дугам графа.

Основные сведения

Дадим основные определения, которые будут использоваться в этой работе.

Определение 1. Ориентированным графом (в дальнейшем – просто **графом**) будем называть тройку $G(X, U, f)$, где:

- ▷ $X, |X| > 0$ - множество вершин графа;
- ▷ U - множество дуг графа;
- ▷ $f : U \to X \times X$ - отображение, сопоставляющее каждой дуге её начало и конец;

Определение 2. Граф $G(X, U, f)$ будем называть **конечным**, если множества X и U конечны.

Определение 3. Четвёрку $G(X, U, f, \omega)$ будем называть **взвешенным графом**, если $G'(X, U, f)$ – граф, а $\omega : U \to \mathbb{Z}$ – весовая функция.

Определение 4. Будем говорить, что дуга u **исходит** из вершины x и **заходит** в вершину y, если $f(u) = (x, y)$. Обозначим $f_+(u) = x$, $f_-(u) = y$.

Определение 5. Будем говорить, что вершина y **смежна** с вершиной x, если $\exists u : f(u) = (x, y)$. Обозначим множество вершин, смежных с x, через $Adj(x)$. Множество $Inc(x) = \{u \in U | f_+(u) = x\}$ назовём множеством **инцидентных** с x дуг.

Определение 6. Путём называется последовательность дуг $\widehat{u} = (u_i)_{i=1}^m$ такая, что $\forall i \in [1; m-1]_\mathbb{N} \quad f_-(u_i) = f_+(u_{i+1})$. Число m назовём **длиной пути** и обозначим через $|\widehat{u}|$. Будем говорить, что $\widehat{u}.s = f_+(u_1)$ – это **начало** пути $\widehat{u}$, а $\widehat{u}.t = f_-(u_m)$ – это **конец** пути $\widehat{u}$. Для удобства будем считать, что на графе G существует $|X|$ путей нулевой длины, каждый из которых представляет собой пустую последовательность дуг, а его начало и одновременно конец суть некоторая вершина графа G. Путь ненулевой длины $\widehat{u}$ называется **контуром**, если его начало совпадает с концом. Если граф не содержит циклов, он называется **бесконтурным**.

Определение 7. Весом пути взвешенного графа назовём сумму весов его рёбер:

$$\omega(\widehat{u}) = \sum_{k=1}^{|\widehat{u}|} \omega(u_k).$$

Определение 8. Тройку $G(G'(X, U, f[, \omega]), C, \{U_c\}_{c \in C})$ будем называть **цветным графом**, если G' – конечный граф, C – конечное непустое множество, $\{U_c\}_{c \in C}$ – семейство множеств таких, что $U_c \subset U$ и $U = \bigcup\limits_{c \in C} U_c$. Заметим, что это семейство не обязательно является разбиением множества U. Множество C будем называть множеством цветов, а каждое из множеств U_c - множеством дуг, допускающих цвет c. Обозначим через $Inc_c(x)$ множество дуг, допускающих цвет c и инцидентных вершине x.

Заметим, что исходя из определения каждая дуга допускает по крайней мере один цвет.

Задача о графе с вероятностной достижимостью

Постановка задачи

Пусть $G(X, U, f, C, \{U_c\}_{c \in C})$ - цветной граф.

Поскольку множество цветов конечно и непусто, можно считать, что $C = \{1, 2, ..., M\}$.

Пусть $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{M}$ – стохастическая матрица [3].

Рассмотрим последовательность $\{c_i \in C\}_{i=0}^{\infty}$ такую, что c_0 произвольно, а вероятность того, что c_{i+1} появляется в последовательности сразу после c_i, равна $p_{c_i, c_{i+1}}$. Другими словами, $\mathbb{P}(c_{i+1}|c_i) = p_{c_i, c_{i+1}}, i = 0, 1, ...$

Будем считать, что по графу из вершины $s \in X$ в вершину $t \in X$ движется путешественник. Если, пройдя путь длины i, он оказался в вершине x_i, будем говорить, что он находится в вершине x_i **в цвете** c_i. Таким образом, в вершине s путешественник всегда находится в цвете c_0, который мы назовём **начальным цветом**.

Теперь укажем условие на достижимость. Находясь в вершине x в цвете c, путешественник может пройти только по исходящим из x дугам, допускающим цвет c, то есть по дугам множества $Inc_c(x)$.

Наша задача состоит в нахождении оптимальной стратегии движения путешественника по такому графу, если его цель – максимизировать вероятность достижения вершины t, а также в нахождении самой этой вероятности. При этом предполагается, что путешественнику известны лишь матрица P и цвет, в котором он находится в текущий момент времени.

Решение задачи для бесконтурного случая

Мы ограничимся решением задачи в случае, когда цветной граф G не содержит контуров. Введём на множестве X вершин этого графа отношение $\preceq$: $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда существует путь из вершины x в вершину y, либо $x = y$. Известно, что введённое отношение на множестве вершин бесконтурного графа является отношением частичного порядка. Какое-либо упорядочение вершин $(x_1, x_2, ..., x_{|X|})$, для которого $\forall i, j \quad i < j \Rightarrow \neg(x_j \preceq x_i)$, назовём **топологической сортировкой** графа G. Известно, что для бесконтурного графа существует по крайней мере одна топологическая сортировка его вершин. Далее будем предполагать, что $(x_1, x_2, ..., x_{|X|})$ – некоторая топологическая сортировка вершин графа G.

Напомним, что t и s – начальная и конечная вершины рассматриваемого нами пути. Найдём $a, b \in \{1, 2, ..., |X|\}$ такие, что $x_a = s, x_b = t$. Если $a > b$, задача не имеет решения, поскольку не существует пути из x_a в x_b даже в обычном смысле. Далее будем считать, что $a \leq b$.

Введём в рассмотрение для каждой вершины $x_n, a \leq n \leq b$ матрицу вероятностей $P^{(n)} \in \mathbb{M}_{M\times M}$ такую, что $P^{(n)}_{i,j}$ - это вероятность оказаться в вершине t в цвете j, начав движение из вершины x_n в цвете i, и выбрав оптимальную стратегию движения. Непосредственно из определения следует, что $P^{(n)} = E$, где E - единичная матрица.

Для нахождения остальных матриц $P^{(n)}$ мы будем использовать метод полной индукции, переходя от $(n + 1), (n + 2), ..., b$ к n. Пусть путешественник находится в вершине x_n в цвете i. Тогда он может перейти по любой из дуг, допускающих этот цвет, то есть по любой из дуг множества $Inc_i(x_n)$. Пусть $\hat{X}_i(x_n)$ – множество концов этих дуг. Путешественник не должен рассматривать в качестве кандидатов на переход те вершины $x_k \in \hat{X}_i(x_n)$, для которых $k > b$, поскольку после такого перехода вероятность оказаться в вершине $t = x_b$ окажется равной нулю. Заметим, что обязательно $k > n$, поскольку вершины графа топологически упорядочены. Поэтому множество вершин-кандидатов можно описать следующим образом: $X_i(x_n) = \{x_k \in \hat{X}_i(x_n) | n < k \leq b\}$. Если это множество пусто, то вероятность попасть в вершину t, находясь в цвете i, равна нулю, т.е. $\forall j \; P^{(n)}_{i,j} = 0$. Далее будем считать, что $X_i(x_n) \neq \emptyset$.

Пусть путешественник выбрал для перехода вершину $x_k \in X_i(x_n)$. Тогда матрица вероятностей для вершины x_n при условии перехода в вершину x_k будет равна $P^{(x_n,x_k)} = P \cdot P^{(k)}$. Это следует непосредственно из формулы полной вероятности.

Теперь необходимо выяснить, какую именно из вершин множества $X_i(x_n)$

должен выбрать путешественник. Мы договорились, что нашей целью является максимизация вероятности достигнуть конечной вершины t, при этом не имеет значения цвет, в котором эта вершина будет достигнута. Поэтому вершину для перехода необходимо выбирать так:

$$v_i = \operatorname*{argmax}_{x_k \in X_i(x_n)} \sum_{l=1}^{M} P_{il}^{(x_n,x_k)}.$$

Таким образом, стратегия при нахождении в i-м цвете в вершине x_n будет заключаться в выборе для перехода вершины v_i, а i-я строка искомой матрицы $P^{(n)}$ будет равна i-й строке матрицы $P^{(x_n,v_i)}$. Более формально,

$$\forall j \; P_{i,j}^{(n)} = P_{i,j}^{(x_n,v_i)}, v_i = \operatorname*{argmax}_{x_k \in X_i(x_n)} \sum_{l=1}^{M} P_{il}^{(x_n,x_k)}.$$

Для решения задачи предлагается использовать следующий алгоритм:

1. $\forall n > b : P^{(n)} := 0$.
2. $P^{(b)} := E$.
3. Для $n = b-1, b-2, ..., a$:
   (a) Инициализируем $P^{(n)} := 0$.
   (b) Для всех $i = 1..M$:
      i. Определим множество концов дуг, допускающих цвет i – $X_i(x_n)$.
      ii. Если $X_i(x_n) \neq \emptyset$:
         A. Для каждой вершины множества $x_k \in X_i(x_n)$ вычислим i-ю строку матрицы $P^{(x_n,x_k)}$ как указано выше, а также вероятность достижимости как сумму элементов этой строки:

$$p^{(x_n,x_k,i)} = \sum_{l=1}^{M} P_{il}^{(x_n,x_k)}.$$

         B. Найдём вершину $v_{i,n} = \operatorname{argmax}_{x_k \in X_i(x_n)} p^{(x_n,x_k,i)}$.
         C. Присвоим: $\forall j = 1..M$: $P_{i,j}^{(n)} = P_{i,j}^{(x_n,v_{i,n})}$
      iii. Если $X_i(x_n) = \emptyset$, установим $v_{i,n} = \bigotimes$. Это будет означать, что находясь в цвете i, из вершины x_n добраться до конечной вершины невозможно.
4. Возвращаем $P^{(a)}$ как искомую матрицу вероятностей для вершины s, а также набор вершин $(v_{i,n})_{a \leq n < b, i \in C}$ как искомую стратегию.

Очевидно, что алгоритм всегда заканчивается. Корректность алгоритма вытекает из описания, приведённого выше.

Определим теперь временную сложность алгоритма.

Первый и второй шаги алгоритма отрабатывают за время $O(M^2)$. На третьем шаге наиболее трудным является вычисление строк матрицы вероятностей. Вычисление одной такой строки занимает время $O(M^2)$. Количество таких вычислений:

$$S = \sum_{n=a}^{b} \sum_{i=1}^{M} |X_i(x_n)| \leq (b - a + 1) \cdot M \cdot \max_{n,i} |X_i(x_n)|$$

.

Поскольку $(b-a+1) \leq |X|$, $\max_{n,i} |X_i(x_n)| \leq |X|$, то $S \leq M|X|^2$. Поэтому общая сложность алгоритма составит $O(M^3|X|^2)$.

Пример работы алгоритма

Для примера рассмотрим следующий граф G (рис. 1).

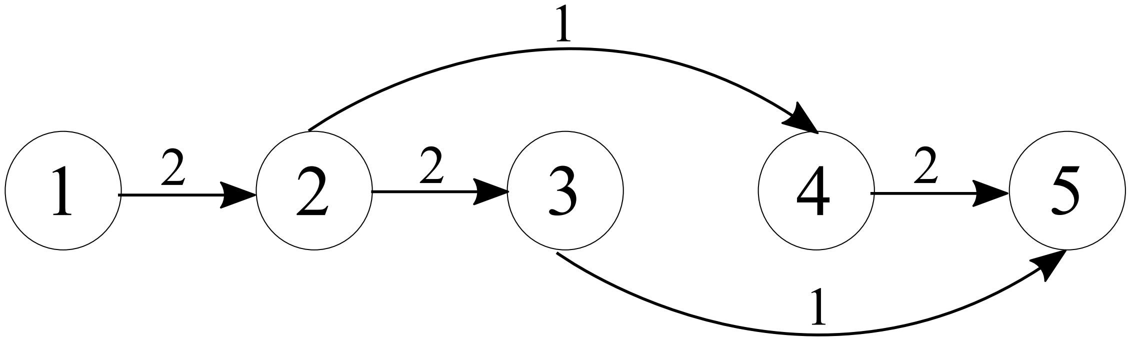

Рис. 1: Граф G.

Для этого графа $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2\}$. Этот граф не имеет кратных дуг, поэтому их можно представлять как пары (x, y) вершин графа, где x – начало дуги, y – её конец. Каждая дуга допускает ровно один цвет, надписанный над ней. Таким образом, $U = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5)\}$, $U_1 = \{(2, 4), (3, 5)\}$, $U_2 = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$. Непосредственно можно убедиться, что граф G не содержит контуров, а его вершины топологически упорядочены.

Пусть $s = 1$, $t = 5$, а стохастическая матрица P имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Применяя вышеизложенный алгоритм, найдём матрицу вероятностей $P^{(1)}$ для вершины $s = 1$, а также стратегию $(v_{i,n})_{1 \leq n < 5, i=1,2}$.

Для вершины 5 имеем:

$$P^{(5)} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для дальнейшего нам понадобится одно обозначение.

Будем обозначать $L_k(A)$ взятие k-й строки матрицы A, т.е.

$$L_k((a_{i,j})_{i,j=1}^{M}) = (a_{k,1}, a_{k,2}, ..., a_{k,M}).$$

Из определения умножения матриц следует, что:

$$L_k(A \cdot B) = L_k(A) \cdot B.$$

Для вершины 4 имеем $X_1(4) = \emptyset$, поэтому $v_{1,4} = \bigotimes$.

$X_2(4) = \{5\}$, поэтому:

$$L_2(P^{(4,5)}) = L_2(P) \cdot P^{(5)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Здесь $v_{2,4} = 5$ как единственная вершина множества $X_2(4)$.
Таким образом,

$$P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Для вершины 3 имеем $X_1(3) = \{5\}$, поэтому:

$$L_1(P^{(3,5)}) = L_1(P) \cdot P^{(5)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Здесь $v_{1,3} = 5$ как единственная вершина множества $X_1(3)$.
$X_2(3) = \emptyset$, поэтому $v_{2,3} = \bigotimes$.
Таким образом,

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вершины 2 имеем $X_1(2) = \{4\}$, поэтому:

$$L_1(P^{(2,4)}) = L_1(P) \cdot P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,21 \end{pmatrix}$$

Здесь $v_{1,2} = 4$ как единственная вершина множества $X_1(2)$.
$X_2(2) = \{3\}$, поэтому:

$$L_2(P^{(2,3)}) = L_2(P) \cdot P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,09 \end{pmatrix}$$

Здесь $v_{2,2} = 3$ как единственная вершина множества $X_2(2)$.
Таким образом,

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,21 \\ 0,21 & 0,09 \end{pmatrix}.$$

Для вершины 1 имеем $X_1(1) = \emptyset$, поэтому $v_{1,1} = \bigotimes$.
$X_2(1) = \{2\}$, поэтому:

$$L_2(P^{(1,2)}) = L_2(P) \cdot P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,09 & 0,21 \\ 0,21 & 0,09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,174 & 0,126 \end{pmatrix}$$

Здесь $v_{2,1} = 2$ как единственная вершина множества $X_2(1)$.
Таким образом,

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,174 & 0,126 \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, в случае, если путешественник находится в стартовой вершине в цвете 1, он не сможет достичь вершины 5 ни при каком условии: $p_1 = 0$. Если же он изначально находится в цвете 2, он может достичь вершины 5 с вероятностью $p_2 = 0,174 + 0,126 = 0,3$. Найденные вершины стратегии укажут путешественнику наиболее оптимальный маршрут.

Список литературы

[1] Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения: моногр. / Я.М. Ерусалимский, В.А. Скороходов, М.В. Кузьминова [и др.]. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. 195 с.

[2] Райгородский А.М. Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2017. 144 с.

[3] Stochastic matrix. https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_matrix. Просмотрено: 3 мая 2017г.