

# Aprendizaje Automático – Guía de Ejercicios<sup>\*</sup>

Departamento de Computación – FCEyN  
Universidad de Buenos Aires

Segundo cuatrimestre 2018  
Versión: 4 de octubre de 2018

## 1. Herramientas

**Ejercicio 1.1.** Revisar y completar el notebook `notebook_1_herramientas.ipynb` disponible en la sección de Descargas.

## 2. Introducción

**Ejercicio 2.1.** ¿Cuál es la diferencia entre el aprendizaje supervisado, el aprendizaje no supervisado y el aprendizaje por refuerzos?

**Ejercicio 2.2.** ¿Cuál es la diferencia entre un problema de clasificación y uno de regresión?. Determinar para los siguientes problemas de aprendizaje supervisado si se trata de problemas de clasificación o de regresión.

- (a) Dado un tweet, determinar si habla en contra o a favor de un candidato presidencial.
- (b) Predecir cuánto gastará una empresa en luz el próximo semestre.
- (c) Predecir la nota que tendrá un alumno en un examen cuya nota puede ser  $0, 1, 2, \dots, 10$
- (d) Predecir la nota que tendrá un alumno en un examen cuya nota puede ser “A”, “R” o “T”.
- (e) Predecir donde vive una persona.
- (f) Predecir donde vivirá una persona dentro de 5 años.
- (g) Predecir si se gastará más o menos que \$50.000 por mes de luz el próximo semestre.
- (h) Predecir la probabilidad de que una persona haya comprado un bote el último año.

**Tip:** Pensar con qué etiquetas se entrena al modelo.

¿Qué diferencia hay entre los items (e) y (f)? ¿Qué relación hay entre el momento de toma de los atributos y la etiqueta?

**Ejercicio 2.3.** Describir la tarea, medida de performance y experiencia para (a) filtro de spam; (b) dictado de textos; (c) autenticación biométrica (ej: huellas dactilares); (d) detección de fraude en tarjetas de crédito.

**Ejercicio 2.4.** Sea un problema de clasificación en el cual cada instancia tiene 2 atributos numéricos (coordenadas  $x$  e  $y$ ) y pertenece a una de dos clases posibles (blanco o negro). Para cada uno de los tipos de hipótesis ilustrados en la Figura 1 se pide:

- identificar los parámetros de la hipótesis y describir el espacio de hipótesis  $H$ ;
- pensar un algoritmo para encontrar una hipótesis y describir su sesgo inductivo.

**Ejercicio 2.5.** Completar el notebook `notebook_2_titanic.ipynb` disponible en la sección de Descargas. En este ejercicio, deberán descargar y explorar el contenido del archivo `titanic-train.csv` que contiene datos de pasajeros del naufragio del transatlántico Titanic en 1912, incluyendo edad, sexo, clase del pasaje y supervivencia a la tragedia, entre otros. Para una descripción completa, ver <https://www.kaggle.com/c/titanic/data>. Completar el notebook de manera de clasificar a los pasajeros en supervivientes y no supervivientes tan bien como sea posible. No está permitido usar ninguna técnica de Aprendizaje Automático, por ahora. El objetivo es conseguir un buen porcentaje de aciertos sobre estos datos (ver final del notebook).

---

<sup>\*</sup> Algunos ejercicios fueron adaptados de los libros “Machine Learning”, de Tom Mitchell (McGraw-Hill, 1997); “Pattern Recognition and Machine Learning”, de Christopher Bishop (Springer, 2006); y “An Introduction to Statistical Learning”, de James, Witten, Hastie & Tibshirani (Springer, 2015).

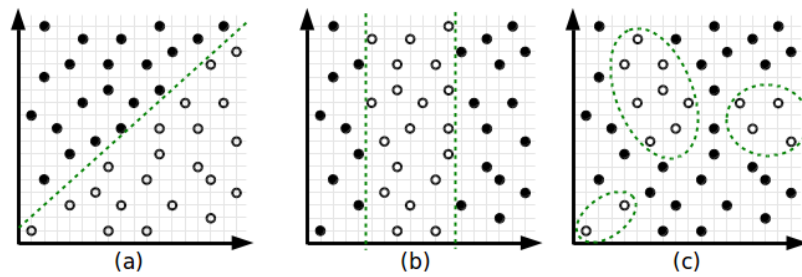


Figura 1: Tipos de Hipótesis

### 3. Repaso de probabilidades

Recomendamos revisar los apuntes de la materia Probabilidad y Estadística para resolver los siguientes ejercicios: [http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/verano2018/probabilidades\\_y\\_estadistica\\_C/apunte-probaC-2017-2C.pdf](http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/verano2018/probabilidades_y_estadistica_C/apunte-probaC-2017-2C.pdf)

**Ejercicio 3.1.** Explique por qué los siguientes eventos son independientes de a pares pero no independientes entre todos. Dadas 2 monedas,

- (a) la primera moneda es cara;
- (b) la segunda moneda cara;
- (c) las dos monedas son iguales.

**Ejercicio 3.2.** Demostrar el teorema de Bayes: dados dos eventos  $A$  y  $B$ ,

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

**Ejercicio 3.3.** Demostrar el teorema de Probabilidad Total: dados una partición  $A_i$  del espacio muestral tal que  $P(A_i) > 0$  para todo  $i$ , y un evento  $B$ :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)$$

**Ejercicio 3.4.** Supongamos que la probabilidad de que un paciente tenga una forma determinada del virus de herpes es  $P(\text{herpes}) = 0,008$ . Se tiene un test con una sensibilidad de 0,98 (es decir,  $P(\oplus | \text{herpes}) = 0,98$ ) y una especificidad de 0,97 (es decir,  $P(\ominus | \neg \text{herpes}) = 0,97$ ), donde  $\oplus$  y  $\ominus$  representan los resultados positivo y negativo del test, respectivamente. Si un paciente se realiza el test y le da resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tenga ese virus de herpes? Es decir, se pide calcular  $P(\text{herpes} | \oplus)$ .

**Ejercicio 3.5.**

- (a) Escribir en Python una función  $f(n, a, b)$  con  $n, a, b$  naturales tal que imprima en pantalla  $n$  números reales aleatorios en el intervalo  $[a, b]$ ;
- (b) Escribir en Python una función  $g(n, m, v)$  imprima en pantalla  $n$  números reales aleatorios muestreando una distribución normal con media  $m$  y varianza  $v$ .

Plotear luego histogramas para  $f(1000, 10, 20)$  y  $g(1000, 3, 9)$ .

## 4. Árboles de decisión

Cielo	Temperatura	Humedad	Viento	¿Salgo? (clase a predecir)
Sol	Calor	Alta	Débil	No
Sol	Calor	Alta	Fuerte	No
Nublado	Calor	Alta	Débil	Sí
Lluvia	Templado	Alta	Débil	Sí
Lluvia	Frío	Normal	Débil	Sí
Lluvia	Frío	Normal	Fuerte	No
Nublado	Frío	Normal	Fuerte	Sí
Sol	Templado	Alta	Débil	No
Sol	Frío	Normal	Débil	Sí
Lluvia	Templado	Normal	Débil	Sí
Sol	Templado	Normal	Fuerte	Sí
Nublado	Templado	Alta	Fuerte	Sí
Nublado	Calor	Normal	Débil	Sí
Lluvia	Templado	Alta	Fuerte	No

Tabla 1: Salgo a caminar

**Ejercicio 4.1.** Hacer en papel y lápiz un árbol de decisión correspondiente a entrenar con los datos de la Tabla *Salgo a caminar*. Utilizar el criterio “Gini Gain” para calcular el feature que mejor separa cada decisión. Armar luego tres ejemplos posibles de instancias nuevas (no existentes en la tabla) y usar el árbol para predecir la clase de salida. Calcular además la importancia de cada atributo (decrecimiento promedio en la impureza Gini).

**Ejercicio 4.2.** ¿Cómo cambiaría el árbol si restringiéramos su altura a 2 niveles?

- ¿Cuál sería el resultado de las predicciones del ejercicio anterior?
- ¿Algunas de las instancias existentes en la tabla, serían clasificadas incorrectamente?

**Ejercicio 4.3.** En la Figura *Cortes en el espacio de atributos* puede verse diversas regiones en el espacio de atributos.

- Determinar cuáles de ellas pueden haber sido generadas por árboles de decisión.
- Para las que lo sean, mostrar un árbol que hubiese generado estas regiones (suponer ejes  $x_1$  y  $x_2$ )

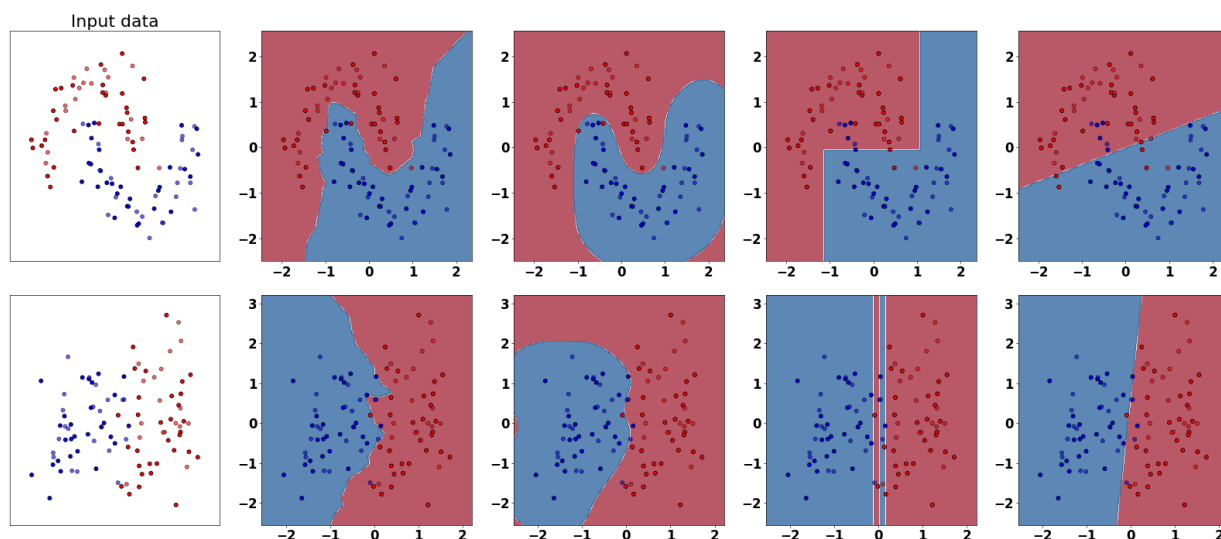


Figura 2: Cortes en el espacio de atributos

**Ejercicio 4.4.** Determinar cuáles de las siguientes son afirmaciones verdaderas:

- El objetivo de construir un árbol de decisión es crear el árbol de menor tamaño posible en el cual las hojas contengan valores de una sola clase.

- (b) Los algoritmos de construcción vistos (CART, ID3, etc) exploran todos los posibles árboles y se quedan con el que mejor separa a las instancias.
- (c) La pureza describe qué tan cerca está un nodo de contener instancias de una sola clase.
- (d) Un atributo puede aparecer sólo una vez en cada rama del árbol (llamamos rama a un camino directo desde una hoja hasta la raíz).
- (e) Un par (atributo, corte) puede aparecer sólo una vez en cada rama del árbol (llamamos rama a un camino directo desde una hoja hasta la raíz).
- (f) Para cada nueva instancia, un árbol permite predecir la clase a la que pertenece. Por otra parte, para predecir **la probabilidad** de pertenecer a una clase u otra, es necesario modificar el algoritmo de creación de árboles.

**Ejercicio 4.5.** Revisar y completar el notebook `notebook_3_arboles_de_decision_sklearn.ipynb`.

**Ejercicio 4.6.** Preguntas conceptuales para discutir:

- (a) ¿Cuál el sesgo inductivo del algoritmo que construye el árbol de decisión?
- (b) ¿Qué sucede cuando dos atributos empatan en ganancia de información? ¿Esta decisión es parte del sesgo inductivo?
- (c) ¿Cómo se comporta la ganancia de información en comparación a impureza Gini cuando se comparan atributos con gran cantidad de valores distintos? Por ejemplo, si el atributo  $x_1$  tiene dos valores posibles (true y false) y el atributo  $x_2$  tiene 40 valores distintos, ¿es justo usar ganancia de información para elegir entre ellos? ¿Qué desventajas tiene? ¿Cómo se podría mitigar?

**Ejercicio 4.7.** Completar el notebook `notebook_4_implementacion_arbol.ipynb`. Este notebook contiene una implementación parcial de un algoritmo de creación de árboles de decisión.

## 5. Evaluación de modelos

### Validación cruzada

**Ejercicio 5.1.** Verdadero o Falso. Justificar

- (a) Un árbol de decisión puede conseguir 100 % de aciertos en los datos de entrenamiento.
- (b) Un árbol de decisión consigue 100 % de aciertos en los datos de entrenamiento siempre y cuando no haya contradicciones entre las etiquetas de instancias muy similares.
- (c) Hacer validación cruzada evita el overfitting de los modelos sobre los datos.
- (d) Hacer validación cruzada ayuda a obtener estimaciones más realistas de la performance de un modelo sobre nuevos datos.
- (e) En K-fold cross validation, conviene que K se acerque a N. De esta manera el resultado será lo más realista posible.
- (f) Evaluar un modelo sobre el held-out set resultará en un valor siempre peor al conseguido en desarrollo.

**Ejercicio 5.2.** Explicar las posibles causas por las cuales un modelo entrenado y evaluado de la siguientes maneras puede funcionar peor que lo esperado al ser llevado a producción.

- (a) Entrenado y evaluado sobre datos de entrenamiento.
- (b) Seleccionado entre muchas posibilidades sobre datos de desarrollo (utilizando grid o random search junto a cross-validation).
- (c) Seleccionado entre muchas posibilidades sobre datos de desarrollo (utilizando grid o random search junto a cross-validation) y evaluado en datos held-out.

**Ejercicio 5.3.** Preguntas

- (a) En la clase teórica vimos que al hacer cross validation los datos no siempre deben separarse al azar, ¿por qué?. Pensar ejemplos de al menos dos situaciones en las cuales no sea conveniente.
- (b) ¿Por qué se deberían usar una sola vez los datos held-out?

## Métricas

### Ejercicio 5.4. Matriz de Confusión

- (a) En un problema de clasificación binaria, ¿a qué se denomina clase positiva y a qué clase negativa? Si nuestro problema consiste en clasificar spam vs. no-spam, ¿cuál es la clase positiva? Si nuestro problema es clasificar imágenes de perros vs. gatos, ¿cuál es la clase positiva?
- (b) Explicar con tus palabras la definición de *verdadero positivo*, *verdadero negativo*, *falso positivo* y *falso negativo*.
- (c) Completar la Primera Parte del notebook `notebook_5_metricas.ipynb`. El Test 1 debería pasar.
- (d) ¿Por qué podría un falso positivo ser considerado más (o menos) importante que un falso negativo? Dar un ejemplo en donde es más grave tener falsos negativos que falsos positivos.

### Ejercicio 5.5. Métricas

- (a) Explicar con tus palabras la definición de *accuracy*, *precision* y *recall*.
- (b) Completar la Segunda Parte del notebook `notebook_5_metricas.ipynb`. El Test 2 debería pasar.
- (c) ¿Por qué es un problema medir *accuracy* de un clasificador para compararlo con otro? (Pensar en desbalance de clases.) Dar un ejemplo en donde sería engañoso utilizar esta comparación.

**Ejercicio 5.6.** Considerar la Figura *Umbral de clasificación*. En esta figura se ven instancias ordenadas según la probabilidad detectada por un clasificador (entre 0 y 1). Además, se encuentran marcados cuatro umbrales de decisión.

- (a) Calcular las tablas de confusión resultantes para cada uno de los cuatro umbrales de decisión. Recordar que si la probabilidad está por debajo del umbral, la instancia será clasificada como perteneciente a la clase negativa; si está por encima, como clase positiva.
- (b) ¿Cuál es el mejor umbral?
- (c) Calcular la curva ROC para dicha clasificación.

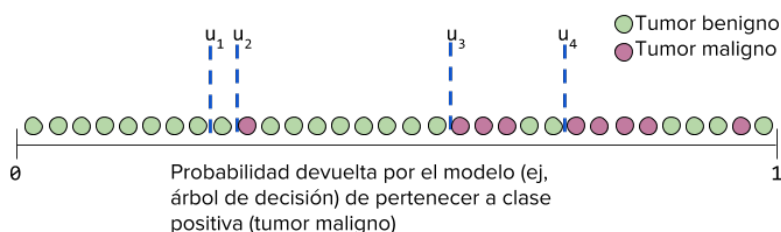


Figura 3: Umbral de clasificación

### Ejercicio 5.7. Verdadero o Falso (justificar)

- (a) Tanto *recall* como *precision* no toman en cuenta qué tan bien el modelo maneja los casos negativos.
- (b) Un modelo que no produce falsos positivos tiene *precision* = 1.0.
- (c) Un modelo que no produce falsos negativos tiene *recall* = 1.0.
- (d) Si un clasificador devuelve probabilidades, la matriz de confusión se construye de manera ponderada según la probabilidad de cada clase.
- (e) Si un clasificador devuelve probabilidades, hay muchas matrices de confusión asociadas dependiendo del umbral de clasificación.
- (f) Si un clasificador devuelve probabilidades, hay infinitas matrices de confusión asociadas dependiendo del umbral de clasificación.
- (g) Aumentar el umbral de clasificación produce que la *precision* siempre suba.
- (h) Aumentar el umbral de clasificación produce que el *recall* baje o se mantenga igual.

- (i) La métrica *precision* es parte fundamental del cálculo de la *curva ROC*.

### Ejercicio 5.8. ¿Binaria o 2 clases?

Sean A y B clasificadores que distinguen entre imágenes de perros e imágenes de gatos. Al medir la performance del clasificador (utilizando  $F_1$  para evitar los problemas de utilizar *accuracy*) y “gato” como clase positiva, obtenemos  $F_1(A) = 0,9$ ,  $F_1(B) = 0,8$ . ¿Podemos concluir que el clasificador A es mejor que el clasificador B para este problema?

Resolver los siguientes ítems para poder responder a la pregunta:

- (a) Al calcular  $F_1$  utilizando “gato” como clase positiva, ¿importa qué ocurre con los perros que fueron clasificados correctamente? Revisar la Tercera Parte del notebook `notebook_5_metricas.ipynb` y decidir cuál clasificador funciona mejor, basándose en las métricas obtenidas. Observar el cambio que ocurre al intercambiar cuál es la clase positiva.
- (b) ¿Para qué sirve el parámetro `average` en la función `f1_score` de la librería `sklearn`?
- (c) ¿Qué sucede si la cantidad de instancias sobre las que fueron testeados es distinta? ¿Cómo se ve afectada la métrica  $F_1$  al cambiar los True Negatives? Correr la Cuarta Parte del notebook `notebook_5_metricas.ipynb`. El gráfico muestra cómo varía la métrica  $F_1$  al aumentar la cantidad de True Negatives (observar que estamos cambiando la cantidad de instancias sobre las que testeamos). ¿Qué se puede concluir de este experimento?

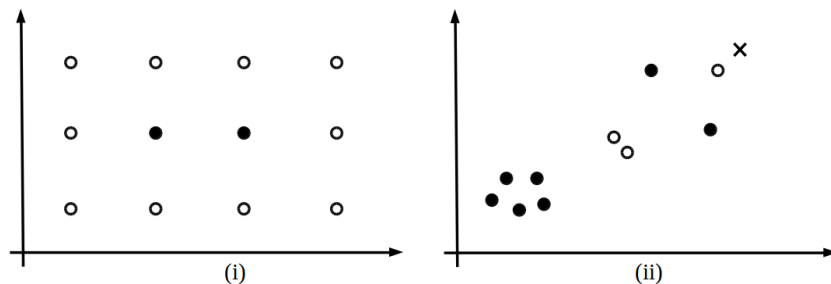
## 6. Clasificadores

**Ejercicio 6.1.** Imaginen que se tienen instancias con sólo dos atributos: altura de una persona (medido en metros) y edad de la persona (medida en años). Se quiere saber si la persona se convertirá o no es basquetbolista profesional tomando en cuenta la experiencia de muchas personas.

- (a) ¿Es buena idea utilizar el algoritmo de K-vecinos más cercanos con estos datos?
- (b) ¿Suponiendo que se utiliza dicho modelo, será útil realizar alguna transformación a los datos previo a ejecutar el algoritmo? ¿Cuál?

**Ejercicio 6.2.** Considerar el algoritmo de  $k$  vecinos más cercanos ( $k$ NN) para un conjunto de puntos bidimensionales, con dos clases posibles:  $\circ$  y  $\bullet$ . Tener en cuenta la distancia euclídeana.

- (a) En la figura (i), dibujar el Diagrama de Voronoi correspondiente a  $k = 1$ .
- (b) Teniendo en cuenta los datos de la figura (ii), estimar la probabilidad de pertenencia a la clase  $\circ$  de la nueva instancia  $\times$ , cuando  $k = 1$ ,  $k = 3$ ,  $k = 5$  y  $k = 10$ .



### Ejercicio 6.3. The Prosecutor's Fallacy.

Imaginen que se encuentran en un juicio en donde se debe determinar si una persona (Mónica Gaztambide) se encontraba o no conversando con un atracador en la escena de un crimen. Para ello se cotejan grabaciones de Mónica con grabaciones de la persona que se encuentra conversando con el atracador en el momento del robo. Un modelo entrenado para reconocer voces de personas sobre una gran cantidad de datos (es decir, un clasificador que predice nombres de personas) devuelve el siguiente resultado:  $P(X = voz_{sospechosa} | y = monica) = 0,99$ . ¿Dirían en base a este resultado que Mónica es culpable?

**Ejercicio 6.4.** Determinar cuales de las siguientes distribuciones alcanzan por sí solas para decidir la clase de una instancia  $x^{(t)}$  (suponer clasificación binaria con clases “0” y “1”).

- (a)  $P(y = 1 | X = x^{(t)})$
- (b)  $P(X = x^{(t)})$

- (c)  $P(X = x^{(t)}|y = 1)$
- (d)  $P(X = x^{(t)}|y = 1)$  y  $P(X = x^{(t)}|y = 0)$
- (e)  $P(y = 1)$

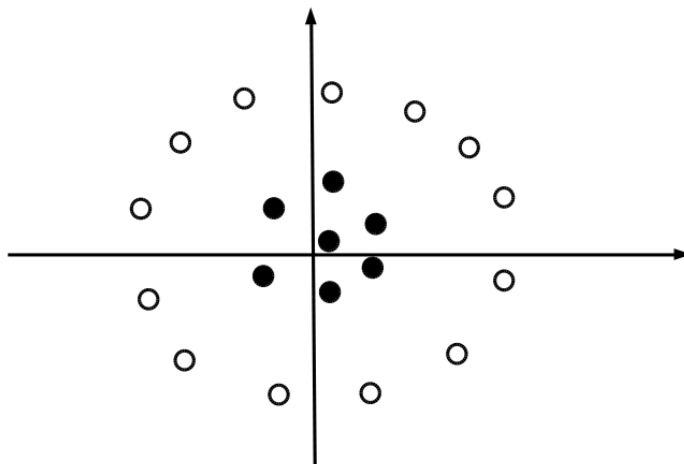
**Ejercicio 6.5.** Linear discriminant analysis.

- (a) Derivar la fórmula de las funciones discriminantes, a partir de la probabilidad a posteriori  $P(Y = k|X = x)$  como vimos en clase:

$$\delta_k(x) = x \cdot \frac{\mu_k}{\sigma^2} - \frac{\mu_k^2}{2\sigma^2} + \log \pi_k$$

- (b) Demostrar que la frontera de decisión para el caso  $p = 1$ ,  $k = 2$ ,  $\pi_1 = \pi_2$  es  $x = (\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)/2$ .
- (c) La palabra *linear* en LDA se debe a que  $\delta_k(x)$  es una función lineal en  $x$ . Mostrar que si se elimina la suposición de que todas las clases tienen la misma varianza, entonces la función discriminante pasa a ser cuadrática en  $x$ . (A esa técnica se la conoce como *quadratic discriminant analysis*, o QDA).

**Ejercicio 6.6.** En el siguiente diagrama se muestran 20 puntos bidimensionales. Explicar qué puede hacer SVM con algún kernel para discriminarlos correctamente, y por qué SVM con un kernel lineal fallaría inexorablemente.



**Ejercicio 6.7.** Hasta ahora vimos 3 tipos de modelos de clasificación:

- (I) Algoritmos que minimizan una función de costo asociado al error cometido al clasificar.
- (II) Algoritmos basados en el clasificador de Bayes en donde se aproximan las distribuciones de la fórmula bajo ciertas suposiciones.
- (III) Algoritmos que no construyen un modelo sino que se trata de heurísticas aplicadas para consultar los datos de entrenamiento al momento de clasificar.

Determinar en qué categoría se encuentran los siguientes algoritmos:

- (a) Naive Bayes
- (b) Linear discriminant analysis
- (c) Árboles de decisión
- (d) Support Vector Machines
- (e) K-vecinos más cercanos