

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Notazione O-Ω-Θ (pag 4)

Per semplificare l'analisi asintotica degli algoritmi sono state introdotte le seguenti notazioni:

$$O(f) = \{g | \exists a > 0 : \exists b > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : g(N) \leq af(N) + b\}$$

$$\Omega(f) = \{g | \exists c > 0 : \exists \text{ infinite } n : g(n) \geq cf(n)\}$$

In entrambi i casi si tratta di classi di funzioni. Quando $f \in O(g)$ e $f \in \Omega(g)$ al contempo si dice che $f \in \Theta(g)$. Esistono ulteriori definizioni alternative, ad esempio quelle utilizzate nel Blatt 1. Il seguente teorema può essere utile (dimostrazione nel Blatt 1):

Theorem 1

Date due funzioni $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ converge ad una costante $C \geq 0$ allora $f \in O(g)$.



1.2 Algoritmo di Karatsuba (pag 12)

Un esempio di algoritmo più efficiente per moltiplicare due numeri è il seguente:

$$65 * 28 = (2 * 6) * 100 + (2 * 6) * 10 + (5 * 8) * 10 + 5 * 8 + (6 - 5) * (8 - 2) * 10 = 1820$$

oppure, scritto in un altro modo:

$$ac * bd = 100 * ac + 10 * ac + 10 * bd + bd + 10(a - b)(d - c)$$

In questo modo abbiamo solo 3 moltiplicazioni elementari anziché 4. L'algoritmo può essere generalizzato grazie a divide and conquer dividendo ogni numero in due ed applicando l'algoritmo di base. Analizzando il tempo in base al numero delle moltiplicazioni otteniamo che impiega circa $O(n^{1,58})$.

1.3 Maximum subarray (pag 20)

Dato un array di numeri il problema consiste nella ricerca del subarray con la somma degli elementi maggiore. Se essa è negativa il risultato è 0. Il metodo più efficiente per ricavare il risultato è il seguente:

```
//A=array da 1, ... n
max=0
scan=0
for (i=1; i<=n; i++){
    scan+=A[i]
    if scan < 0
        scan=0
    if scan > max
        max=scan
}
```

In questo modo il problema viene risolto in tempo lineare.

Capitolo 2

Sort

Per semplicità ammettiamo che si debba sempre ordinare un array (chiamato a) contenente n numeri (interi). In ogni caso con questi algoritmi è possibile ordinare qualsiasi oggetto appartenente ad un universo in cui vige un ordine totale.

2.1 Sortieren durch Auswahl (pag 82)

Selection sort consiste nel cercare ogni volta il minimo tra la posizione i e n . Una volta trovato esso viene scambiato con l' i -tesimo numero.

Esempio

	15	2	43	17	4
\Rightarrow	2	15	43	17	4
\Rightarrow	2	4	43	17	15
\Rightarrow	2	4	15	17	43

Implementazione

```
int i,j, min, temp
for i=1:n-1
    min=i
    for j=(i+1):n
        if a[j]<a[min]
            min=j
    temp=a[min]
    a[min]=a[i]
    a[i]=temp
```

Analisi

Dal doppio loop si vede semplicemente che l'algoritmo impiega $\Theta(n^2)$ comparazioni e nel peggior caso (i numeri sono ordinati dal più grande al più piccolo)

$O(n)$ scambi. Da notare che per trovare il minimo sono necessari almeno $n - 1$ confronti (Satz 2.1), quindi l'algoritmo non può andare più veloce di così.

2.2 Sortieren durch Einfügen (pag 85)

In inglese si chiama insertion sort. Per induzione i numeri fino a $i - 1$ sono già ordinati. Il principio consiste di piazzare l' i -tesimo elemento al giusto posto, se necessario scalando i restanti a destra di una posizione. Esempio:

```

      2  15  /  43  17  4
⇒  2  15  43  /  17  4
⇒  2  15  17  43  /  4
⇒  2  4  15  17  43  /

```

Implementazione

```

int i,j,t
for i=2:n
    j=i
    t=a[i]
    while a[j-1] > t
        //scala a destra di una posizione
        a[j]=a[j-1]
        j=j-1
    a[j]=t

```

Si nota subito che se implementato così l'algoritmo può non fermarsi se t è il più piccolo numero. Serve quindi un elemento di stop, ad esempio inserendo $a[0] = t$ prima del while loop.

Analisi

Nel peggior caso $\Theta(n^2)$ comparazioni ed altrettanti spostamenti. Nel miglior caso $O(n^2)$ comparazioni e spostamenti. Il caso medio rispecchia il peggiore.

2.3 Bubblesort (pag 89)

Il principio di questo algoritmo è semplicissimo: ad ogni iterazione viene scambiato l'elemento $a[i]$ con $a[i+1]$ (chiaramente solo se maggiore). In questo modo l'elemento più grande si sposta verso destra. Esempio:

```

      15  2  43  17  4
⇒  2  15  43  17  4
⇒  2  15  17  43  4
⇒  2  15  17  4  43
⇒  2  15  4  17  43
⇒  2  4  15  17  43

```

Implementazione

```

do
    flag=true
    for i=1:n-1
        if a[i] > a[i+1]
            swap(a[i],a[i+1])
            flag=false
    while (!flag)

```

Analisi

Nel miglior caso, se l'array è già ordinato, abbiamo $n - 1$ paragoni e nessuno scambio. Nel caso medio e peggiore l'algoritmo necessita di $\Theta(n^2)$ scambi e paragoni.

2.4 Quicksort (pag 92)

Il principio di quicksort è quello di scegliere un elemento come pivot (nel libro è sempre l'ultimo, ma ne basta uno casuale) e dividere l'array in due. A sinistra del pivot si trovano tutti gli elementi minori, mentre a destra quelli maggiori. Dopodiché viene richiamato l'algoritmo in modo ricorsivo sui due blocchi. L'algoritmo può essere eseguito "in situ", vale a dire che non serve spazio extra per salvare i dati (chiaramente un numero costante di variabili temporanee è permesso). Si usa quindi un solo array e si aggiungono due argomenti al metodo, ad esempio l ed r , ad indicare l'intervallo in cui eseguire quicksort. Per dividere i numeri rispettivamente a destra ed a sinistra del pivot si può semplicemente far scorrere verso il centro due puntatori (chiamati i e j) che partono rispettivamente alla posizione l e r . Quando $a[i] \geq pivot$ e $a[j] \leq pivot$, $a[i]$ ed $a[j]$ vengono scambiati. Alla fine, quando $i = j$, l'elemento $a[i]$ viene scambiato col pivot e viene richiamato l'algoritmo da l ad $i - 1$ e da $i + 1$ a r (il pivot si trova già alla posizione giusta). Di seguito un esempio:

Esempio

```

array: 5 7 3 1 6 4
quicksort(array, 1, 6)

5  7  3  1  6  (4)  ← pivot
↑           ↑
i           j
⇒ 1  7  3  5  6  (4)
    ↑  ↑
    i  j
⇒ 1  3  7  5  6  (4)
        ↑
        i,j
⇒ 1  3  (4)  5  6  7
quicksort(array, 1, 2), quicksort(array, 3, 6)

```

Implementazione

```
quicksort(int[ ] a, int l, int r)
    if r>l
        i=l-1
        j=r
        v=a[r] //pivot
        while (true)
            do
                i+=1
            until a[i]>=v
            do
                j-=1
            until a[j]<=v
            if i>=j
                break
            swap(i, j) //scambia a[i] con a[j]
        swap(i,r)
        quicksort(a, l, i-1)
        quicksort(a, i+1, r)
```

Analisi

Nel peggior caso, ad esempio se la sequenza è già ordinata o più in generale se il pivot è sempre l'elemento maggiore o minore, quicksort impiega $O(n^2)$ comparazioni, poiché ad ogni ricorsione c'è un solo elemento in meno. In questo caso avverrebbero $O(n)$ spostamenti. Nel miglior caso l'algoritmo impiega un tempo di $\Theta(n \log(n))$, poiché l'albero delle ricorsioni ha un'altezza logaritmica. Lo stesso ragionamento vale per il numero di spostamenti. A pagina 99 c'è una lunga dimostrazione per induzione che mostra che anche il caso medio ha lo stesso tempo del miglior caso. Nonostante l'algoritmo sia in situ, anche le ricorsioni occupano un determinato spazio nella memoria, vale a dire $\Omega(n)$ chiamate. Rendendo l'algoritmo semi-iterativo si possono ottenere solo $O(\log(n))$ chiamate. Si deve semplicemente richiamare in modo ricorsivo quicksort sul più piccolo sub-array, mentre si completa l'altra parte in modo iterativo (algoritmo illustrato a pagina 100). Alla pagina successiva è invece mostrato come fare a rendere quicksort totalmente iterativo (personalmente non ho capito molto).

Varianti di quicksort

Per evitare un tempo di $O(n^2)$ nel caso di un array già ordinato sono state pensate alcune varianti dell'algoritmo, le quali concernono solamente la scelta del pivot. La prima è la cosiddetta 3-Median-Strategie (median of three values strategy), che consiste semplicemente nel prendere tre elementi campione, rispettivamente a destra, sinistra e nel mezzo, e scegliere come pivot il valore medio tra questi. L'altra strategia si chiama Zufalls-Strategie (randomized quicksort) e consiste nel scegliere il pivot casualmente. Chiaramente può ancora avvenire un caso in cui necessita di un tempo quadratico, ma non esiste più una successione di numeri per cui questo accade. Una variante per rendere l'algoritmo glatt (smooth), cioè che impiega in media $O(n \log(n))$ comparazioni

e solo $O(n)$ quando l'input consiste in n elementi uguali, è la seguente. Praticamente gli elementi che sono uguali al pivot vengono spostati all'estrema destra o sinistra, dopodiché i due blocchi vengono riportati al centro e l'algoritmo prosegue come di consueto. L'implementazione ed una spiegazione più dettagliata possono essere trovate a pagina 104.

2.5 Heapsort (pag 106)

Heapsort si basa su insertion sort, ma invece di cercare il minimo/massimo ogni volta, che costa $O(n)$ paragoni, ci si affida ad un Heap (un tipo di albero binario). L'algoritmo è semplice ma efficace: finché l'albero non è vuoto si allontana la radice, nonché l'elemento massimo, e lo si scambia con l'ultimo elemento. Dopodiché tramite un indice si riduce l'albero di un elemento e si restaurano (tramite un metodo chiamato versickern) le sue proprietà (richiede un tempo di $O(\log(n))$). Rimane solo la parte iniziale, cioè la costruzione di un Heap a partire da un array qualsiasi. Un metodo efficiente consiste nel eseguire il metodo "versickern" sulla sequenza delle chiavi $k_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, k_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}, \dots, k_1$. Esempio:

```

      2  1  5  3  4  8  7  6
⇒ 2  1  5  6  4  8  7  3
⇒ 2  1  8  6  4  5  7  3
⇒ 2  6  8  3  4  5  7  1
⇒ 8  6  7  3  4  5  2  1

```

Implementazione

```

//costruiamo l'heap
for (i=n/2; i>=1; i--)
    versickere(a,i,n) //array a da i a N
//heapsort
for (i=n; i>=2; i--)
    swap(a[1],a[i])
    versickere(a,1,i-1)

```

Dove versickere è:

```

versickere(int[] a, int i, int m)
    int j
    while 2*i<=m //a[i] ha un figlio a sinistra
        j=2*i
        if j<m //a[i] ha anche un figlio a destra
            if a[j]<a[j+1]
                j=j+1
        //ora a[j] e' il figlio con un valore maggiore
        if a[i]<a[j]
            swap(a[i],a[j])
            i=j //va avanti a restaurare
        else
            i=m //fine

```

Analisi

La costruzione dell'heap avviene in tempo lineare. Il resto dell'algoritmo prevede n volte il metodo versickere, quindi in complesso l'algoritmo richiede $O(n \log(n))$ comparazioni e spostamenti nel peggior caso. Da notare che non occupa spazio extra, quindi è completamente "in situ". L'unico problema è che non è stabile, vale a dire che la posizione relativa di chiavi con lo stesso valore inizialmente adiacenti può cambiare.

2.6 Mergesort (pag 112)

Anche mergesort si basa su divide and conquer. Si basa sul fatto che due blocchi dell'array sono già ordinati, quindi possono semplicemente essere uniti in tempo lineare, lasciando scorrere due indici nelle rispettive parti e salvando i valori in ordine crescente in un array temporaneo.

Esempio

$A = \{2, 1, 3, 9, 5, 4\}$. Esso viene dunque diviso in due, vale a dire in $A_1 = \{2, 1, 3\}$ e $A_2 = \{9, 5, 4\}$. Per ricorsione essi vengono ordinati, quindi rimane da unire $A_1 = \{1, 2, 3\}$ e $A_2 = \{4, 5, 9\}$. Il passo merge prevede l'unione dei due insiemi, quindi si ottiene il risultato finale.

Implementazione

```
mergesort (int[] a, int l, int r)
    if l<r //altrimenti caso base: array rimane invariato
        m=(l+r)/2 //posizione media
        mergesort (a, l, m)
        mergesort (a, m+1, r)
        merge (a, l, m, r)

merge (int[] a, int l,m,r)
    i=l
    j=m+1
    k=l
    while (i<=m && j<=r)
        if a[i]<a[j]
            b[k]=a[i]
            i++
        else
            b[k]=a[j]
            j++
        k++
    if i>m //prima successione esaurita
        for h=j:r
            b[k+h-j]=a[h]
    else
        for h=i:m
            b[k+h-i]=a[h]
    for h=l:r
```

```
a[h]=b[h] //salva nuovamente nell'array originale
```

Analisi

Merge impiega sempre $O(n)$ spostamenti e comparazioni. Dato che l'array viene sempre diviso in due, il metodo merge viene chiamato $\log(n)$ volte. In totale l'algoritmo impiega sempre $\Theta(n \log(n))$. L'unico problema è che serve sempre $O(n)$ spazio extra per salvare l'array di supporto.

Mergesort iterativo

L'algoritmo può anche essere reso totalmente iterativo. Esso si chiama "reines 2-Wege-Mergesort" (straight 2-way merge sort). L'idea è quella di unire tramite il metodo merge intervalli sempre più grandi (esattamente il doppio) fino ad avere l'intero array completamente ordinato. Esempio:

```

      2  1  3  9  6  5
⇒  1  2| 3  9| 5  6|
⇒  1  2  3  9| 5  6
⇒  1  2  3  5  6  9|

```

```

straightmergesort(int[] a, int l,r)
    int size, ll, mm, rr
    size=1
    while size<r-l+1
        rr=l-1 //gli elementi fino ad a[rr] incluso sono a posto
        while rr+size<r //fino che tutti non sono elaborati
            ll=rr+1 //bordo sinistro successione 1
            mm=ll+size-1 //bordo destro successione 1
            if mm+size<=r
                rr=mm+size
            else
                rr=r
            merge (a, ll, mm, rr)
        size=2*size

```

Le performance sono identiche a prima, ma il metodo è completamente iterativo.

Mergesort naturale

L'unica differenza da straight 2-way merge sort è che al posto di unire successioni di lunghezza arbitraria sfruttiamo successioni già ordinate alla partenza. Ad esempio:

```

      2  1  3  6  9  5
⇒  2| 1  3  6  9| 5
⇒  1  2  3  6  9| 6|
⇒  1  2  3  5  6  9|

```

A livello di implementazione dobbiamo soltanto aggiungere la ricerca delle successioni già ordinate.

```

straightmergesort(int[] a, int l,r)
    int ll, mm, rr
    do
        rr=l-1
        while rr<r
            ll=rr+1
            mm=ll
            while (mm<r && a[mm+1]>=a[mm])
                mm++
            if mm<r
                while (rr<r && a[rr+1]>=a[rr])
                    rr++
                merge (a, ll, mm, rr)
            else
                rr=mm
    until ll=l

```

In questo modo cambiano anche le performance dell'algoritmo. Compare difatti un best case, ad esempio quando l'input è già ordinato. In questo caso avremmo $\Theta(n)$ comparazioni e 0 spostamenti. Il caso medio ed il peggior caso rispecchiano invece straight merge sort, nonché le tempistiche della prima analisi.

2.7 Radixsort (pag 121)

Radixsort si basa sulla comparazione delle cifre dei rispettivi numeri. Noi tratteremo solo la forma duale, ma il tutto funziona con qualsiasi forma, compresa quella decimale. Ammettiamo sempre che esista una funzione $z(i, k)$ che ritorna l' i -tesima cifra a partire dalla meno significativa del numero k . Ad esempio $z(0, 517) = 7$ e $z(2, 517) = 5$.

2.7.1 Radix-exchange sort

L'algoritmo segue un principio abbastanza simile a quicksort: tutti gli elementi il cui i -tesimo bit è 0 vanno a sinistra, mentre se è uno vanno a destra. Il modo più semplice è quello, come in quicksort, di far scorrere due puntatori verso il centro e scambiare i numeri che si trovano al posto sbagliato. Dopodiché si richiama l'algoritmo sull' $(i - 1)$ -tesimo bit e sulle due parti dell'array.

Esempio

	1011	0010	1101	0011	3
⇒	0011	0010;	1101	1011;	2
⇒	0011	0010;	1011;	1101;	1
⇒	0011	0010;	1011;	1101;	0
⇒	0010	0011	1011	1101	

Implementazione

```

radixexchangesort(int[] a, int l,r,b)
    int i,j

```

```

if r>l
    i=l-1
    j=r+1
    while (true)
        do
            i++
        until
            z(b, a[i])=1 || i>=j
        do
            j--
        until
            z(b, a[j])=0 || i>=j
        if i>=j
            break
        swap (a[i], a[j])
if b>0
    radixexchangesort(a, l, i-1, b-1)
    radixexchangesort(a, i, r, b-1)

```

Analisi

L'algoritmo viene richiamato al massimo b volte ed ogni volta impiega $O(n)$ paragoni e movimenti. In totale impiega dunque $O(bn)$ (tempo pseudo polinomiale). Se $b > \log(n)$ radixsort non è l'algoritmo adeguato al problema.

2.7.2 Fachverteilung

Questo algoritmo viene spesso anche chiamato bucket sort, poiché vengono utilizzati dei bucket per ordinare i numeri. L'idea di base è semplice: per ordinare una serie di numeri con m cifre si inizia ad ordinarli dividendoli in bucket rappresentanti la cifra, sempre da destra a sinistra, dal basso all'alto. Dopo uno step bisogna "raccolgere" nuovamente la sequenza dai bucket e rieseguire il procedimento con la cifra successiva. Dopo m step la sequenza è ordinata. L'algoritmo può praticamente essere diviso in due parti, dividere e raccogliere.

Esempio

Sequenza originale: 40, 13, 22, 54, 15, 28. Primo step:

40		22	13	54	15			28	
F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9

La sequenza provvisoria diventa 40, 22, 13, 54, 15, 28. Secondo step:

		15	28						
		13	22		40	54			
F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9

Il risultato finale, letto da sinistra a destra e dal basso all'alto è quindi: 13, 15, 22, 28, 40, 54.

Implementazione

Un approccio naïv sarebbe quello di creare m bucket di dimensione n , in modo che nel peggior caso tutti i valori starebbero in un solo bucket. Questo però comporterebbe a $O(mn)$ spazio extra, quando realmente ne serve solo $\Theta(n)$ (ci sono sempre esattamente n elementi). Ci sono due possibili soluzioni al problema. La prima è di usare liste lineari dalla dimensione non fissa, la seconda è quella di sondare quanti elementi andranno in ciascun bucket e dividere un array di dimensione fissa in m scompartimenti tramite degli indici di divisione (Verteilungszahlen). Analizziamo dapprima la prima possibilità:

```
radixsort_list(int[] a)
    List<Integer>[] l=new List<Integer>[m]
    int i,j,t
    for j=0:m-1
        l[j]=new List<Integer>() //inizializza la lista
    for t=1:l-1
        //fase di divisione
        for i=1:n
            j=z(t,a[i])
            l[j].pushtail(a[i]) //aggiunge all'ultima posizione
        //fase di raccolta
        i=0
        for j=0:m-1
            while (!l[j].isEmpty())
                a[i]=l[j].pophead()
                i++
```

Adesso la possibilità utilizzando un sondaggio prima della fase di divisione:

```
radixsort_sond(int[] a)
    int[] b //array di dimensione n, numerato da 1 a n
    int[] c //array di dimensione m, Verteilungszahlen, da 0 a m-1
    int i,j,t
    for t=0:l-1
        //sondaggio
        for i=0:m-1
            c[i]=0 //inizializzazione
        for i=1:n
            j=z(t,a[i])
            c[j]++
        //futuri indici dell'array b
        c[m-1]=n+1-c[m-1]
        for i=2:m
            c[m-i]=c[m-i+1]-c[m-i]
        //fase di divisione
        for i=1:n
            j=z(t,a[i])
            b[c[j]]=a[i]
            c[j]++
        //fase di raccolta
        for i=1:n
            a[i]=b[i]
```

Analisi

Entrambe le implementazioni richiedono $O(l(m+n))$ passaggi e memoria di $O(n+m)$.

2.8 Untere Schranke (pag 153)

Per ora tutti gli algoritmi che usano comparazioni (praticamente tutti tranne radix sort) impiegano almeno $\Omega(n \log(n))$.

Theorem 2.4

Ogni algoritmo di ordinamento impiega nel caso medio e nel caso peggiore almeno $\Omega(n \log(n))$ paragoni per ordinare n chiavi.

Dimostrazione Per dimostrare questo teorema valutiamo tutte le possibili $n!$ permutazioni di n chiavi e le inseriamo in un albero binario. Inizialmente l'algoritmo generico non conosce nulla sulla permutazione corrente, ma man mano che compara le chiavi si sposta tra i rami fino a raggiungere la foglia contenente la giusta permutazione. Praticamente un nodo $i : j$ rappresenta una comparazione. Esso ha due figli: a sinistra se $a[i] < a[j]$ e a destra se $a[i] \geq a[j]$. Dato che ci sono $n!$ permutazioni possibili devono per forza esserci $n!$ foglie. Ora non ci rimane che dimostrare che l'altezza massima e media di un albero binario con k foglie sia di almeno $\log_2(k)$. In questo caso avremmo:

$$\log(k!) \geq \log\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2} \log\left(\frac{n}{2}\right) \in \Omega(n \log(n))$$

■

Theorem 2.4.1

L'altezza massima e media di un albero binario con k chiavi è di almeno $\log_2(k)$.

Dimostrazione La prima parte è triviale, in quanto un albero di altezza t può avere al massimo 2^t foglie. La seconda parte viene dimostrata per assurdo. Sia T il più piccolo albero per cui l'ipotesi non regge. T ha k foglie, dunque $k \geq 2$ e T deve avere un Teilbaum T_1 con k_1 foglie a sinistra e T_2 con k_2 foglie a destra. Chiaramente $k_1 + k_2 = k$. Dato che sia T_1 sia T_2 sono più piccoli di T , allora le loro altezze medie devono essere maggiori di $\log_2(k_1)$ e rispettivamente $\log_2(k_2)$. Ovviamente l'altezza media di T deve essere maggiore di uno rispetto ai due Teilbäume. Quindi:

$$\begin{aligned} \text{altezzamedia}(T) &= \frac{k_1}{k} (\text{altezza media}(T_1) + 1) + \frac{k_2}{k} (\text{altezzamedia}(T_2) + 1) \\ &\geq \frac{k_1}{k} (\log_2(k_1) + 1) + \frac{k_2}{k} (\log_2(k_2) + 1) \\ &= \frac{1}{k} (\log_2(2k_1) + \log_2(2k_2)) = f(k_1, k_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Secondo la condizione che $k_1 + k_2 = k$, f assume valore minimo quando $k_1 = k_2 = \frac{k}{2}$ quindi:

$$\text{altezza media}(T) \geq \frac{1}{k} \left(\frac{k}{2} \log_2(k) + \frac{k}{2} \log_2(k) \right) = \log_2(k)$$

Si incappa dunque in una contraddizione.

■

Capitolo 3

Search

3.1 Auswahlproblem (pag 168)

Il primo approccio nel cercare di trovare l' i -tesimo elemento più piccolo è quello di ordinare dapprima la sequenza per poi eliminare i primi $i - 1$ elementi. In questo caso si ottiene un tempo di $O(n \log(n))$. Seguendo lo stesso principio di quicksort è però possibile arrivare alla soluzione in tempo lineare. Per l'implementazione faremo uso del metodo, simile a quello usato in quicksort:

```
int dividi(int l,r, pivot)
    /* divide a[l], ... , a[r] in due gruppi
       a[l], ..., a[m-1] sono < pivot
       a[m], ..., a[r] sono >= pivot
       restituisce il valore di m */
```

Una volta trovato m abbiamo tre possibilità: la chiave si trova nel primo gruppo o nel secondo o l'abbiamo trovata.

```
trova (int l,r,i)
    int m,v
    if r>l
        scegliere pivot v
        m=teile(l,r,v)
        if i<=m-1
            trova (l, m-1, i)
        else
            trova (m,r,i-m+1)
    else
        //r=l, quindi i=1
        //l'elemento si trova nella posizione a[l]
```

Se scegliamo male il pivot l'algoritmo impiega $\Omega(n^2)$ passi. Se invece il pivot divide l'array in qn e $(1 - q)n$ elementi, con $0.5 < q < 1$ impiega:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(qn) + cn \\ &\leq cn \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = cn \frac{1}{1-q} \in O(n) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Per scegliere il pivot adeguato si può usare l'algoritmo proposto da Blum, chiamato "median of median strategy".

1. (caso base) se $n < \text{costante}$ calcola l' i -tesimo più piccolo elemento direttamente.
2. dividi gli n elementi in $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ gruppi di cinque elementi e un gruppo con i restanti.
3. ordina questi gruppi (in tempo costante) e per ogni gruppo trova la mediana. Se il gruppo ha un numero pari di elementi scegli il più grosso degli elementi medi.
4. applica l'algoritmo ricorsivamente alle $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ mediane per trovare la mediana delle mediane.
5. utilizza quest'elemento come pivot e procedi normalmente.

Questa strategia assicura che ci sono almeno

$$3(\lceil \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2) \geq \frac{3n}{10} - 6$$

elementi più piccoli di v . Segue quindi che l'algoritmo deve essere richiamato al massimo $\lceil \frac{7n}{10} + 6 \rceil$ volte ricorsivamente. Il tempo impiegato è dunque:

$$T(n) \leq T\lceil \frac{n}{5} \rceil + T\lceil \frac{7n}{10} + 6 \rceil + an \leq \dots \leq cn \in O(n)$$

3.2 Sequenzielle Suche (pag 173)

Ammettiamo che le n chiavi siano salvate in un array o in una lista. Il modo più semplice per sondare la sequenza è quello di controllare le n chiavi fino ad a trovare l'elemento desiderato. Per fare in modo che l'algoritmo si fermi iniziamo dal fondo e mettiamo uno stopper alla posizione 0.

```

sequentialsearch (int k)
    int i
    a[0]=k //stopper
    i=n+1
    do
        i--
    while a[i] != k
    if i != 0
        //a[i] elemento ricercato
    else
        //non esiste nessun elemento k

```

Chiaramente l'algoritmo impiega 0 passaggi nel miglior caso e n nel peggiore. Nel caso medio:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2} \in O(n)$$

3.3 Binäre Suche (pag 174)

La ricerca binaria si basa su divide and conquer. Ammettendo di avere un array ordinato si può descrivere l'algoritmo come segue:

1. se la sequenza è vuota la ricerca finisce senza successo, altrimenti guarda l'elemento $a[m]$ (posizione media).
2. se $k < a[m]$ applica sulla sequenza $a[1], \dots, a[m-1]$ lo stesso procedimento.
3. se $k \geq a[m]$ applica sulla sequenza $a[m], \dots, a[n]$ lo stesso procedimento.
4. se $k = a[m]$ l'elemento è stato trovato.

```

binsearch(int l,r,k)
    int m=(l+r)/2
    if l > r
        //ricerca conclusa senza successo
    else
        if k < a[m]
            binsearch(l, m-1, k)
        else if k > a[m]
            binsearch(m+1, r, k)
        else
            //a[m]=k, elemento trovato

```

Un'altra variante iterativa è la seguente:

```

binsearch(k)
    int m,l,r
    l=1
    r=n
    do
        m=(l+r)/2
        if k < a[m]
            r=m-1
        else
            l=m+1
    until
        k=a[m] || l>r
    if k=a[m]
        binsearch=m
    else
        binsearch=0

```

In questo modo una ricerca non impiega più che $\lceil \log_2(n+1) \rceil \in O(n)$ passaggi.

3.4 Interpolationsuche (pag 179)

Nella ricerca binaria scegliamo ogni volta l'elemento a metà dell'array come pivot. Non sempre si tratta di una buona idea. Ad esempio se cerchiamo

nell'elenco telefonico "Bernasconi" non lo apriamo al centro. L'unica differenza dalla ricerca binaria è dunque la scelta della m :

$$m = \lceil l + \frac{k - a[l]}{a[r] - a[l]}(r - l) \rceil$$

Nel miglior caso impieghiamo un numero di paragoni costante, ma nel caso medio $O(\log_2(\log_2(n)))$ comparazioni. Perdiamo però a causa della maggiore complessità delle operazioni aritmetiche e nel caso sfortunato, in cui impiega $O(n)$ paragoni.

3.5 Selbstanordnende lineare Liste (pag 180)

Ammettiamo di avere una lista contenente n chiavi. Per cercare e dunque accedere all' i -tesimo elemento impieghiamo i paragoni. Avrebbe senso spostare gli elementi più ricercati all'inizio della lista. Consideriamo pertanto alcune strategie:

- Move to front: l'elemento ricercato viene spostato all'inizio della lista
- Transpose: l'elemento ricercato viene spostato una posizione all'indietro (scambiato con il vicino a sinistra)
- Frequency count: ad ogni elemento viene abbinato un contatore. Inizialmente esso è 0 ma ad ogni accesso aumenta di un'unità. La lista viene sempre ordinata in modo che ogni i contatori di frequenza (Häufigkeitszähler) siano ordinati in ordine decrescente.

Qual'è la migliore strategia? Si può notare che la transpose strategy presenta alcuni problemi se si accede ogni volta ad elementi adiacenti in modo alternato, ad esempio $n, n-1, n, \dots$. In generale move to front è la tecnica migliore, anche perché non necessita di spazio extra (per salvare gli indici).

Theorem 3.2

Per qualsiasi algoritmo A di auto ordinamento di liste e per qualsiasi successione s di m operazioni d'accesso vale:

$$C_{MF}(s) \leq 2C_A(s) + X_A(s) - F_A(s) - m$$

Dove C indica i costi delle operazioni, F il numero delle operazioni gratuite e X il numero delle operazioni a pagamento. In altre parole move to front non può essere più di due volte peggio di qualsiasi altro algoritmo. La dimostrazione per analisi ammortizzata si trova da pagina 183 a 186.

■

Capitolo 4

Hashing

Al posto di salvare gli elementi in una lista e cercarli tramite comparazioni si può salvare ogni elemento ad un determinato indice e calcolare dove si trova in modo matematico. Questo è il principio di una hash table. La funzione che collega le chiavi all'indirizzo di allocamento (m posizioni possibili) è detta Hashfunktion (hash function):

$$h : K \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$$

Questa funzione non deve essere forzosamente iniettiva, difatti due chiavi con $h(k) = h(k')$ sono dette sinonimi. Quando questo accade succede però anche una collisione, che vedremo come trattare. Per una tabella di grandezza m contenente n chiavi definiamo $\alpha = \frac{n}{m}$ come il fattore di utilizzazione (Belegungsfaktor, utilization factor). Una buona hash function deve essere facile da computare ed evitare il maggior numero possibile di collisioni. Nel nostro caso utilizziamo il cosiddetto Division-Rest-Methode, ma esistono anche altri metodi, quale la moltiplicazione della chiave con un numero irrazionale. Comunque

$$h(k) = k \bmod m$$

Una buona scelta per m è che sia un numero primo.

4.1 Hashing perfetto ed universale

Se il numero di chiavi possibili è minore alla grandezza della tabella e già conosciuto in partenza possiamo costruire una funzione di hashing iniettiva che evita qualsiasi collisione. In questo caso si parla di hashing perfetto (perfektes Hashing). Nella maggior parte dei casi non sappiamo però se è possibile evitare collisioni. Sia H una collezione finita di hash functions. H si chiama universale se per ogni diversa coppia di chiavi x e y vale:

$$\frac{|\{h \in H : h(x) = h(y)\}|}{|H|} \leq \frac{1}{m}$$

In altre parole H è universale se per ogni coppia di chiavi differenti al massimo la m -esima parte delle funzioni porta ad una collisione. La probabilità che

due chiavi collidano con una funzione di H è dunque al massimo $\frac{1}{m}$. Per una funzione h e due chiavi x e y definiamo:

$$\delta(x, y, h) = \begin{cases} 1 & \text{se } h(x)=h(y) \text{ e } x \neq y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per un insieme di chiavi Y , rispettivamente di funzioni H :

$$\delta(x, Y, h) = \sum_{y \in Y} \delta(x, y, h)$$

$$\delta(x, y, H) = \sum_{h \in H} \delta(x, y, h)$$

H è universale quando per due differenti chiavi x e y : $\delta(x, y, H) \leq \frac{|H|}{m}$. Ammettiamo che vogliamo aggiungere la chiave x ad un'hash table universale in cui è già stata salvata una successione S di elementi. Calcoliamo quindi l'Erwartungswert (penso sia il numero di elementi che andrà a collidere con x , pf

Verificare!

verificare):

$$\begin{aligned} E[\delta(x, S, h)] &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \delta(x, S, h) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in S} \delta(x, y, H) \\ &\leq \frac{1}{|H|} \sum_{y \in S} \frac{|H|}{m} \\ &= \frac{|S|}{m} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Adesso dimostriamo che esiste una classe di funzioni hashing universali (tramite esempio).

Theorem 4.2

Sia $|K| = p$ un numero primo e $a \in \{1, \dots, p-1\}, b \in \{0, \dots, p-1\}$. La funzione $h_{a,b} : K \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$ viene definita nel modo seguente:

$$h_{a,b}(x) = ((ax + b) \bmod p) \bmod m$$

La classe di funzioni $H = \{h_{a,b} : 1 \leq a < p \text{ e } 0 \leq b < p\}$ è una classe universale di hash functions. Dimostrazione a pagina 197. ■

4.2 Hashverfahren mit Verkettung der Überläufer (pag 198)

Penso sia anche chiamato separate chaining. In ogni caso si tratta di un metodo per gestire le collisioni. Quando due chiavi collidono esse vengono semplicemente salvate in una lista. Questo metodo può essere implementato in due modi

differenti, rispettivamente separate Verkettung der Überläufer e direkte Verkettung der Überläufer. Nel primo caso gli elementi della Hashtabelle hanno due campi, uno per il valore e l'altro per il puntatore, mentre nel secondo caso c'è solo un puntatore e tutti gli elementi vengono salvati in una lista esterna. In questo caso la tabella presenta dimensioni più piccole, poiché in ogni voce è salvato solo un puntatore.

Analisi

Poniamo che un indirizzo j abbia la stessa probabilità di essere scelto indipendentemente dagli altri, quindi $p(j) = \frac{1}{m}$, $\forall j$. Con C_n verrà indicato il tempo (in numero di elementi valutati) di una ricerca infruttuosa, mentre C_n indica una ricerca in cui viene trovato un risultato. Nel caso della direkte Verkettung abbiamo:

$$C'_n = \frac{n}{m} = \alpha$$

$$C_n = 1 + \frac{\alpha}{2}$$

Nell'altro caso cambia solo il tempo della ricerca infruttuosa:

$$C'_n = \alpha + e^{-\alpha}$$

I principali vantaggi di "appendere" una lista alle voci dell'hash table sono quelli della facilità di eliminare una voce e che in questo modo è possibile avere un Belegungsfaktor maggiore delle dimensioni della tabella. Il più grande svantaggio è invece rappresentato dal fatto che serve spazio extra oltre alla tabella stessa.

4.3 Offene Hashverfahren

Attenzione: da non confondere con open hashing (in inglese si dice open addressing). Questo metodo consiste nel salvare le chiavi in voci libere presenti nella tabella. Si introduce pertanto una nuova funzione s in modo da creare una Sondierungsfolge per la ricerca di altri spazi liberi. Definiamo quindi una funzione $s(j, k)$ in funzione del numero di collisioni e della chiave. k verrà dunque salvato alla posizione:

$$(h(k) - s(j, k)) \bmod m$$

Già a partire da questa definizione si può notare che l'allontanamento di una chiave è problematica. Ad esempio se k' collide con k esso verrà salvato in una voce differente. Eliminando k risulta dunque impossibile ritrovare k' . La soluzione a questo problema è quella di indicare k come eliminato senza però cancellarlo definitivamente finché non viene inserita una nuova chiave al suo posto.

Vocabolario

- Search(k): inizia dall'indirizzo $i = h(k)$. Finché $t[i]$ non è libero o l'elemento non è stato trovato vai avanti ed aumenta j . Se si giunge in una casella libera la ricerca è infruttuosa.

- Add(k): prima cerca k . Se è già stata inserita non fare nulla, altrimenti inseriscila nella prima posizione libera.
- Delete(k): cerca k e marca l'indirizzo i come eliminato.

```

//Array t
//Array mark

search(Dato ds)
    int i,j
    j=0 //collisioni
    do
        i=(h(ds.key)-s(j,ds.key)) mod m
        j++
    until
        t[i].key==ds.key || mark[i]==free
    if mark[i]==occupied
        ds.item=t[i].item
    else
        print ("Ricerca infruttuosa")

add (Dato ds)
    int i,j
    j=0 //collisioni
    do
        i=(h(ds.key)-s(j,ds.key)) mod m
        j++
    until
        mark[i] != occupied
        //ammettiamo che la chiave non sia stata inserita in
        //precedenza
    t[i]=ds
    mark[i]=occupied

delete (int k)
    int i,j
    j=0 //collisioni
    do
        i=(h(ds.key)-s(j,ds.key)) mod m
        j++
    until
        t[i].key==k || mark[i]==free
    if mark[i]==occupied
        mark[i]=deleted
    else
        print ("Chiave non presente")

```

4.3.1 Lineares Sondieren

$$s(j, k) = j$$

Abbastanza inefficiente, poiché grossi pezzi occupati tendono a crescere ancora di più, aumentando così il numero di collisioni.

$$C'_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right)$$

$$C_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)} \right)$$

4.3.2 Quadratisches Sondieren

$$s(j, k) = \lceil \frac{j}{2} \rceil^2 (-1)^j$$

In questo modo si riesce a sondare molto più velocemente, ma il fenomeno del sekundäre Häufung (secondary clustering) influenza l'efficienza. Due sinonimi hanno difatti la stessa sequenza durante la ricerca proprio come nel lineares Sondieren.

$$C_n = 1 + \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) - \frac{\alpha}{2}$$

$$C'_n = \frac{1}{1-\alpha} - \alpha + \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

4.3.3 Double hashing

$$s(j, k) = jh'(k)$$

In cui h' è una seconda hash function. Per scegliere una buona funzione h' bisogna essere sicuri che il risultato non sia influenzato dal risultato della prima, quindi che abbiano probabilità disgiunte. Da ricordarsi che $h'(k) \neq 0$ e che non sia divisore di m . Normalmente i tempi sono i seguenti:

$$C'_n = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$C_n = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

Grazie all'algoritmo di Brent è però possibile migliorare il tempo della ricerca con successo:

```
//hh = la seconda hash function
```

```
BrentEinfuegen (Datensatz ds)
  int i, b, bb
  i=h(ds.key)
  while mark[i]=occupied
    b=(i-hh(ds.key)) mod m
    bb=(i-hh(t[i].key)) mod m
    if mark[b]==free || mark[bb]=occupied
      i=b
    else
      swap (da, t[i])
      i=bb
  t[i]=ds
  mark[i]=occupied
```

Grazie a questo algoritmo il tempo diventa il seguente:

$$C_n = 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{4} + \dots < 2,5$$

4.4 Dynamische Hashverfahren

voi sapete cosa hanno fatto, perché mi sembra impossibile che in mezza mattina abbiano coperto l'intero capitolo!?

Capitolo 5

Bäume

A volte può essere molto utile simulare le seguenti strutture dati. Questo può essere fatto semplicemente visitando il sito: <http://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Algorithms.html>.

5.1 AVL-Tree (pag. 284)

Abbiamo visto che un albero binario naturale può degradare ad una lista. In tal caso la ricerca di un elemento richiede un tempo pari a $\Theta(n)$, poiché l'altezza dell'albero diventa n e non più $\log(n)$. Gli alberi AVL mantengono invece questa proprietà: essi sono difatti nominati bilancierte Binärbäume (self-balancing binary trees). La condizione di base è difatti che per ogni nodo dell'albero l'altezza del figlio sinistro differisce da quello destro di al massimo 1. Può essere dimostrato che un albero AVL di altezza h contiene al minimo n elementi, dove:

$$n \geq F_{h+2} = 1,7171 * 1,618^h$$

Quindi risolvendo secondo l'altezza:

$$h \leq 1,44 \log_2(n) + 1 \in O(\log(n))$$

Suchen

È dunque chiaro che applicando la ricerca come in normali alberi binari ordinati si impiega sempre $O(\log(n))$.

Einfügen

Non è sempre detto che aggiungendo un elemento all'albero esso mantenga le sue proprietà AVL. Definiamo dunque:

$$bal(p) = \text{Altezza del sottoalbero di destra} - \text{altezza sottoalbero di sinistra}$$

Chiaramente $bal(p) \in \{-1, 0, 1\}$. Per inserire una nuova chiave facciamo innanzitutto una ricerca per quel valore. Se la chiave viene trovata non dobbiamo far nulla poiché è già presente nell'albero, altrimenti la ricerca finisce in una foglia vuota, rappresentante l'ipotetica posizione della chiave. Noi inseriamo la nuova

chiave in quella posizione, dopodiché aggiustiamo le condizioni AVL chiamando la procedura $\text{upin}(p)$, dove p è il padre della nuova chiave. La condizione di uscita dal metodo upin è che $\text{bal}(p)$ diventi 0. In tutti gli altri casi il metodo viene applicato ricorsivamente fino alla radice, quindi non più di $O(\log(n))$ volte. Definiamo con pp il padre della chiave p . Ci sono due casi: p è il figlio sinistro di pp o il destro. Entrambi i casi sono analoghi, analizzeremo però il primo caso. Se le condizioni AVL continuano ad essere mantenute durante gli "aggiornamenti" della variabile bal , il tutto prosegue normalmente. Può però accadere che $|\text{bal}(pp)| > 1$, quindi bisogna intervenire con una rotazione o una doppia rotazione:



Entfernen

1. Se la chiave che si vuole allontanare non ha figli la si elimina direttamente e si chiama il metodo $\text{upout}(p)$ al padre (analogo a upin)
2. Se la chiave p ha un solo figlio q per forza q non può avere figli. q prende quindi la posizione di p , dopodiché viene chiamato $\text{upout}(pp)$.
3. Se p ha invece due figli si inverte la posizione di p con il suo successore/predecessore simmetrico finché la situazione non si riduce ad una precedente. Anche in questo caso viene chiamato upout .

Il metodo upout è analogo ad upin , cambia soltanto l'invariante (condizione d'uscita quando $\text{bal}(p)=1$) e l'ordine delle rotazioni:

non ho capito bene, Fall 3 pag 293

5.2 Balancierte Binärbäume

295

Fall 1.3.1 [$\text{bal}(q) = 0$]



Fall 1.3.2 [$\text{bal}(q) = +1$]



Man beachte, dass vor dem rekursiven Aufruf von upout die Invariante für r gilt!

Fall 1.3.3 [$\text{bal}(q) = -1$]



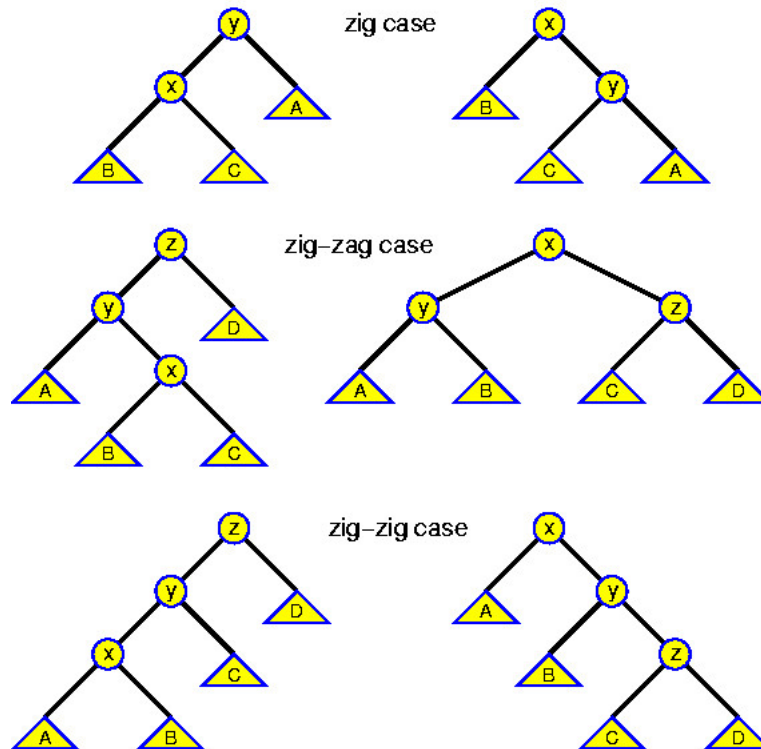
5.2 Splay tree (pag. 328)

Uno splay tree è un albero binario che può essere visto come una variante di move to front, poiché l'ultima chiave inserita, cercata o eliminata (se non c'è nell'albero viene sostituita dal padre) viene sempre resa radice (move to root strategy) grazie all'operazione splay(x). Quest'ultima è definita nella seguente maniera:

1. Cerca x nell'albero. Sia p il nodo in cui finisce la ricerca, altrimenti il padre della foglia nel caso di una ricerca infruttuosa.
2. Ripeti le seguenti operazioni di ordinamento (zig, zig-zig, zig-zag) finché p non diventa la radice.

Non ci resta che elencare le operazioni:

SPLAY OPERATIONS for NODE X



Vocabolario

- **Inserisci(x):** eseguire innanzitutto splay(x). Se la radice è x non fare niente, poiché la chiave è già presente nell'albero. Altrimenti nella radice si trova una chiave y che è il precedente/successivo simmetrico di x. Piazza dunque x come radice ed y come figlio sinistro rispettivamente destro.
- **Allontana(x):** splay(x). Se la radice non è uguale ad x l'elemento non appartiene all'albero, altrimenti x si trova alla radice. Elimina dunque x

e cerca la chiave più grande nel sottoalbero di sinistra (può essere fatto con $\text{splay}(\infty)$).

- Cerca(x): $\text{splay}(x)$. Se la radice è x l'elemento è stato trovato, altrimenti no.

Un'analisi ammortizzata, descritta completamente nel capitolo 5.4.2, porta al seguente teorema.

Theorem 5.1

L'esecuzione di qualsiasi sequenza di m operazioni, in cui compare al massimo n volte inserisci, su uno splay tree inizialmente vuoto costa $O(m \log(n))$.

■

5.3 Optimal binary search tree (pag. 377)

In questo caso abbiamo i seguenti valori (che non cambiano nel tempo) e vogliamo costruire un albero di ricerca ottimale:

- $S = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ insieme di n chiavi, dove $k_1 < k_2 < \dots < k_n$.
- a_i la probabilità assoluta che venga cercato k_i .
- $I = (k_0, k_{n+1})$ intervallo in cui appartengono le chiavi.
- b_j probabilità assoluta che venga cercato un $x \in (k_j, k_{j+1})$, quindi che non venga trovato.

Definiamo dunque il peso dell'albero come:

$$W = \sum_i a_i + \sum_j b_j$$

La gewichtete Pfadlänge è invece:

$$P = \sum_{i=1}^n (\text{altezza}(k_i) + 1) a_i + \sum_{j=0}^n (\text{altezza}(\text{foglia}(k_i, k_{i+1}))) b_j$$

trovare traduzione
decente

Un albero di ricerca ottimale T è formato da sottoalberi anch'essi ottimali:

$$P(T) = P(T_l) + \text{peso della radice} + P(T_r) + W(T_l) + W(T_r) = P(T_l) + P(T_r) + W(T)$$

Se T è una foglia $P(T)=0$. Dividiamo dunque I in sempre più grossi intervalli fino ad ottenere l'albero ottimale secondo i principi della programmazione dinamica. Siano:

- $T(i,j)$ l'albero ottimale per l'intervallo (k_i, k_{j+1}) .
- $W(i,j)$ il peso di $T(i,j)$, dunque $W(i,j) = b_i + a_{i+1} + \dots + a_j + b_j$.
- $P(i,j)$ la gewichtete Pfadlänge di $T(i,j)$.

Grazie alla formula precedente si può calcolare $P(i, j)$ utilizzando l'indice l della radice di $T(i, j)$ e i due sottoalberi $T(i, l-1)$ e $T(l, j)$. Definendo:

$$W(i, i) = b_j$$

$$W(i, j) = W(i, j-1) + a_j + b_j$$

$$P(i, i) = 0$$

$$P(i, j) = W(i, j) + \min_{i < l \leq j} \{P(i, l-1) + P(l, j)\}$$

e $r(i, j)$ come gli indici delle radici di $T(i, j)$ possiamo calcolare induttivamente su $h=j-i$ (larghezza dell'albero) l'albero ottimale:

- $h=j-i=0$: $T(i, i)=\text{foglia } (k_i, k_{i+1})$. Poniamo $W(i, i)=b_i$, $P(i, i)=0$ e $r(i, i)$ indefinito
- $h=j-i=1 \rightarrow j=i+1$. Dunque $T(i, i+1)$ ha k_{i+1} come radice.
 $W(i, i+1)=W(i, i)+a_{i+1}+W(i+1, i+1)$, $P(i, i+1)=W(i, i+1)$, $r(i, i+1)=i+1$
- $h \geq 2$: