Calcul Approché des Racines d'une Equation

Faten KHAYAT

INSAT

15.2.2021

Introduction

Objectif: Résolution de l'équation $f(x) = 0$

- f fonction réelle continue sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.
- ℓ solution de $f(x) = 0$ dans I.
- On suppose qu'on a determiné $[a, b]$ dans lequel l'équation admet une et une seule racine.

- Méthode: Construction d'une suite qui converge vers ℓ.
- Pourquoi: Une suite qui converge vers ℓ permet d'approcher ℓ avec la précision voulue.

Exemple $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ converge vers 1.

- $u_{10} = 1.1 \Longrightarrow \ell \simeq u_{10}$ avec $\varepsilon = 10^{-1}$
- $u_{100} = 1.01 \Longrightarrow \ell \simeq u_{100}$ avec $\varepsilon = 10^{-2}$
- $u_{10000} = 1.0001 \Longrightarrow \ell \simeq u_{10000}$ avec $\varepsilon = 10^{-4}$

- Comment: Chaque méthode va différer par :
  - Comment est définie la suite
  - Convergence (Suite ne converge pas ou sa limite est $\neq \ell \Longrightarrow$ à rejeter)
  - Rapidité de convergence.

Méthode des dichotomies

Elle est basée sur le théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $\ell \in]a, b[$ tel que $f(\ell) = 0$.

Hypothèses:

- a et b deux réels tel que $f(a)f(b) < 0$
- On suppose que ℓ est unique dans $[a, b]$.

$$[a_0, b_0] = [a, b] \text{ et } x_0 = \frac{(a_0 + b_0)}{2}.$$

On a nécéssairement l'un des trois cas suivants:

- $f(x_0) = 0 \Longrightarrow \ell = x_0$
- $f(a_0)f(x_0) < 0 \Longrightarrow$ On pose $[a_1, b_1] = [a_0, x_0]$
- $f(b_0)f(x_0) < 0 \Longrightarrow$ On pose $[a_1, b_1] = [x_0, b_0]$

En répétant le même raisonnement, on aboutit à l'une des deux situations suivantes:

- $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_n) = 0$ avec $x_n = \frac{(a_n+b_n)}{2} \Longrightarrow \ell = x_n$

- On construit une suite de segments emboités $[a_n, b_n]$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q.:

$$\begin{cases} [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], \\ x_n = \frac{(a_n+b_n)}{2},\ b_n - a_n = \frac{(b_0-a_0)}{2^n}, \\ f(a_n)\, f(b_n) < 0 \end{cases}$$

$$\{\ell\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset [a, b].$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \ell$$

$+$ f continue $\Longrightarrow$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (f(a_n)f(b_n)) = \left[\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(a_n)\right] \left[\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(b_n)\right] = f^2(\ell) \leq 0$$

Conclusion: $f(\ell) = 0$.

Méthode des approximations successives ou du point fixe

Principe: On remplace l'équation $f(x) = 0$ par une équation équivalente dans l'intervale $\mathbb{I}$

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x)$$

Exemples

- $$g(x) = x \pm f(x)$$

- $$g(x) = x - \frac{f(x)}{c}, \; c \in \mathbb{R}^{\star}$$

- $+$ beaucoup d'autres.

Pourquoi: Théorème du point fixe

Théorème

Si dans un intervalle $[a, b]$*,* g *vérifie les conditions suivantes:*

$(i)\, x \in [a, b] \Longrightarrow g(x) \in [a, b]$
$(ii)\, g$ *est une application strictement contractante* i.e.: $\exists L \in \mathbb{R},\, 0 \leq L < 1$ *tel que:*
$$|g(x) - g(y)| \leq L\,|x - y|\,,\ \forall\, x, y \in [a, b]$$

alors, pour tout $x_0 \in [a, b]$*, la suite recurrente définie par* $x_{n+1} = g(x_n)$ *converge vers l'unique solution* ℓ *de l'équation* $x = g(x)$ *avec* $\ell \in [a, b]$.

Remarques

- *g strictement contractante $\Longrightarrow g$ continue.*
- *La preuve du théorème permet de montrer que :*

$$|e_n| = |\ell - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L}\,|x_1 - x_0|\,.$$

- *Pour n fixé, l'erreur est d'autant plus petite que L est proche de 0.*

Proposition

Soit g une application dérivable sur $[a,b]$. Si g' vérifie:

$$\max_{x\in[a,b]} \left|g'(x)\right| = L < 1$$

alors g est une application strictement contractante sur $[a,b]$.

Proposition

Soit ℓ une solution de l'équation $\ell = g(\ell)$ avec g' continue.
Si $|g'(\ell)| < 1$ alors il existe un voisinage $\mathbb{I}$ de ℓ tel que la suite définie par:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{I} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

converge vers ℓ.
On dit dans ce cas, que la méthode est localement convergente.

Proposition

Soit ℓ une solution de l'équation $\ell = g(\ell)$. Si g' est continue au voisinage de ℓ et si $|g'(\ell)| > 1$ alors pour tout $x_0 \neq \ell$, la suite définie par:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{I} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

ne coverge pas vers ℓ.

Méthode de Newton

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que :

- x_0 bien choisi (voir Théorème)

- $x_{n+1} =$ intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_n, f(x_n)) \Longrightarrow$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Remarque

Si $f'(x_n) = 0$ on ne peut pas définir x_{n+1} et dans ce cas la méthode est non convergente.

Remarque

La méthode de Newton peut être considérée comme une méthode d'approximations successives, où la fonction g est définie par:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{f'^2(x)}$$

$$\Downarrow$$

Si $f'(\ell) \neq 0$ alors $g'(\ell) = 0$.
Proposition 2 $\Longrightarrow \exists\, U \subset V$ voisinage de ℓ t. q. :
$\forall\, x_0 \in U$, la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers ℓ.

Théorème

Soit f une fonction de classe C^2 dans un voisinage V d'une racine simple ℓ de l'équation $f(x) = 0$. Alors la méthode de Newton est localement convergente.

L'intervalle de la convergence locale de la méthode de Newton est souvent compliqué à déterminer $\Longrightarrow$ Condition suffisante de convergence

Théorème : Convergence globale de la méthode de Newton

Théorème

Soit $f \in C^2([a,b])$ *vérifiant:*

$$\begin{array}{ll} (i) f(a) f(b) < 0 & \\ (ii) \forall x \in [a,b], \; f'(x) \neq 0 & (\textit{stricte monotonie}) \\ (iii) \forall x \in [a,b], \; f''(x) \neq 0 & (\textit{concavité dans le même sens}), \end{array}$$

alors en choisissant $x_0 \in [a,b]$ *tel que* $f(x_0) f''(x_0) > 0$, *la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \\ \\ x_{n+1} = g(x_n) \qquad \text{où } g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right.$$

converge vers l'unique solution ℓ *de l'équation* $f(x) = 0$ *dans* $[a,b]$.