Exercice

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E_1) : $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E_1) admet dans l'intervalle]0,1[une solution réelle unique qu'on notera α.
2. L'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $x = g(x)$, où $g(x) = x^3 + 2x - 1$ ou $g(x) = 1 - x^3$ ou $g(x) = (1 - x)^{\frac{1}{3}}$. Etudier dans chacun de ces trois cas la convergence de la méthode du point fixe pour la recherche de α. Dans le cas où il y a convergence, donner un intervalle I tel que pour tout choix de x_0 dans I, la méthode converge.

Corrigé

$f(x) = 0$ avec $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. f est continue sur $[0, 1]$, $f(0)f(1) = (-1) \times 1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ f est strictement croissante sur $]0, 1[$ et par suite α est unique.
2. $(E_1) \Leftrightarrow (E_2)$: $g(x) = x$ avec $g(x) = x^3 + 2x - 1$, $g(x) = 1 - x^3$ ou $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$.

   (a) Premier Cas : $g(x) = x^3 + 2x - 1$.
   g est deux fois dérivable sur $]0, 1[$ et $g'(x) = 3x^2 + 2$ et $g''(x) = 6x > 0$ sur $]0, 1[$ et par conséquent $g'(x) \in]g'(0), g'(1)[=]2, 5[$, $\forall x \in]0, 1[$. Par conséquent, $|g'(\alpha)| > 1$. Ainsi la méthode du point fixe (des approximations successives) est divergente dans ce cas.

   (b) Deuxième Cas : $g(x) = 1 - x^3$, $g'(x) = -3x^2$, $g''(x) = -6x < 0$ sur $]0, 1[$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$g''(x)$		$-$	
$g'(x)$	0 $\searrow$	-1 $\searrow$	-3

$g'(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour voir si $|g'(\alpha)| < 1$ ou $|g'(\alpha)| > 1$. Il faut voir si $\alpha \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ ou , $]\frac{1}{\sqrt{3}}, 1[$.

On a

$$g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \neq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$f(0)f(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0 \Rightarrow \alpha \notin]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$$

Par conséquent, $g'(\alpha) < -1 \Rightarrow |g'(\alpha)| > 1$. Par suite, la méthode du point fixe est divergente dans ce cas aussi.

(c) Troisième cas : $g(x) = \sqrt[3]{1-x}$. $g'(x) = \dfrac{-1}{3(1-x)^{\frac{2}{3}}}$ et $g''(x) = \dfrac{-2}{9(1-x)^{\frac{5}{3}}} < 0$, $\forall x \in]0,1[$.

x	0	$\beta = 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$	1
$g''(x)$		$-$	
$g'(x)$	$\frac{-1}{3}$ $\searrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$

$$\begin{aligned} g'(x) = -1 &\Leftrightarrow 3(1-x)^{\frac{2}{3}} = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - x = (\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \simeq 0.8075 \end{aligned}$$

Il faut voir si $\alpha \in]0,\beta[$ ou bien $\alpha \in]\beta, 1[$. Pour cela, on calcule $f(\beta)$. On trouve alors que $f(0)f(\beta) < 0 \Rightarrow \alpha \in]0,\beta[$ et par conséquent $|g'(\alpha)| < 1$.
Dans ce cas, la proposition 2 du chapitre I, permet de dire qu'il existe un intervalle $[a,b]$ tel que $\alpha \in [a,b]$, $g([a,b]) \subset [a,b]$ avec $[a,b] \subset]0,\beta[$ et $\max\limits_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$. Pour tout choix de x_0 dans $[a,b]$, la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = \sqrt[3]{1-x_n} \end{cases}$$

converge vers α.
Cherchons $[a,b]$. Pour le trouver, il n'y a pas de méthode particulière. C'est la difficulté de la méthode du point fixe. On prend $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $b = \beta$. Comme g est décroissante, on a

$$g(]\frac{1}{\sqrt{3}}, \beta[) =]g(\beta), g(\frac{1}{\sqrt{3}})[$$

.

$$g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \simeq 0.7504, \quad g(\beta) \simeq 0.577$$

On voit que $g(]\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \beta[) =]0.577, 0.7504[\subset]\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \beta[\subset]0,\beta[\Rightarrow \max\limits_{]\frac{1}{\sqrt{3}},\beta[} |g'(x)| < 1$ Par suite, $\forall x_0 \in]\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \beta[$, la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{1-x_n} \end{cases}$$

converge vers α.