Федеральное агентство связи
Уральский технический институт связи и информатики (филиал) ФГБОУ ВО "Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики" в г. Екатеринбурге (УрТИСИ СибГУТИ)

КАФЕДРА
Информационных систем и технологий
(ИСТ)
ЦК ИТиАСУ

ОТЧЕТ
По дисциплине «Численные методы»
Контрольная работа
«Многомерные методы оптимизации: методы покоординатного спуска, наискорейшего спуска»

Выполнил: студент(ка) гр.881
Ждановских Д.А.
Проверил: преподаватель ЦК ИТиАСУ
Тюпина О.М.

Екатеринбург, 2020

Ход работы:

Метод координатного спуска

Метод координатного спуска заключается в том, что в качестве направлений траектории спуска от предыдущей точки поиска $X(k-1)$ к последующей $X(k)$ принимаются поочередно направления координатных осей xi (i = 1, 2, . . ., n). После спуска на один шаг по координате x1 происходит переход к спуску на один шаг по координате x2, а затем движение вдоль координаты x3 и так далее, пока не будет найдена следующая точка поиска $X(k)$ с координатами x (k) 1, x (k) 2, . . ., x (k) n. Движение по траектории спуска от предыдущей точки $X(k-1)$ к последующей $X(k)$ продолжается до тех пор, пока не будут достигнуты окрестности точки минимума $X*$ целевой функции, определяемые точностью вычислений. Для поиска координат точки $X(k)$ на каждом шаге итерации можно использовать любой из методов одномерной минимизации: метод золотого сечения, метод деления отрезка пополам, метод интерполяции-экстраполяции.

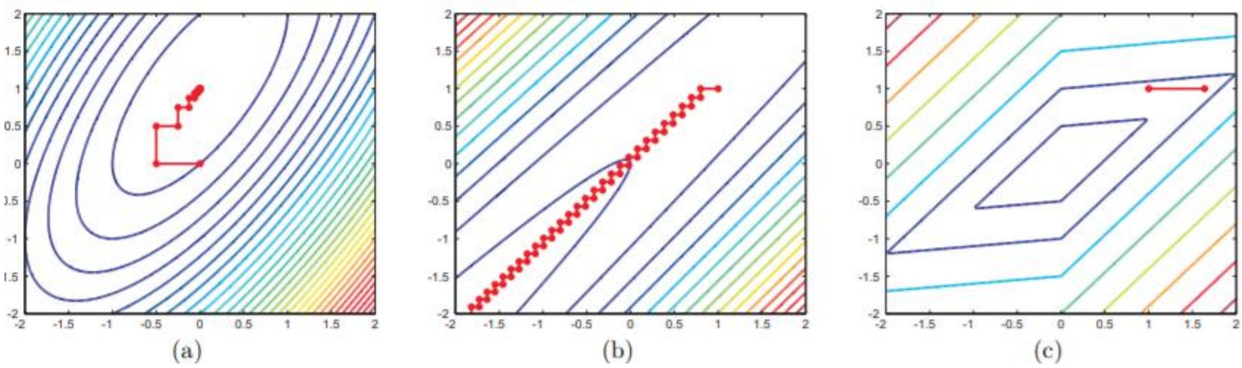

Рисунок 1 – Примеры работы метода покоординатного спуска

Случай (a): быстрая сходимость метода (всего 34 итерации для точности по аргументу $10-5$), случай (b): медленная сходимость метода (всего 1455 итераций для точности по аргументу $10-5$), случай (c): остановка метода в промежуточной точке.

В методе покоординатного спуска в качестве очередного направления dk выбирается одна из координат dk = [0, . . ., 0, 1, 0, . . ., 0] T. При этом координаты перебираются последовательно либо в случайном порядке. На этапе одномерной оптимизации вдоль очередной координаты можно использовать как точные методы, так и методы неточной оптимизации (например, backtracking или метод Флетчера). Применение метода покоординатного спуска является особенно эффективным в ситуациях, когда задача одномерной оптимизации может быть решена аналитически. Пример работы метода для задачи минимизации квадратичной функции вида f(x1, x2) = 2x∗2∗1 − 2x1x2 + x 2 2 + 2x1 − 2x2 из начального приближения x0 = [0, 0]T показан на рисунке 1. В методе покоординатного спуска значение оптимизируемой функции f не увеличивается на каждой итерации. При дополнительном предположении об ограниченности f снизу на R N можно показать, что для непрерывно-дифференцируемых функций метод покоординатного спуска гарантированно сходится к локальному минимуму. Более того, для строго выпуклых функций f метод сходится с линейной скоростью. Достоинствами метода покоординатного спуска являются: Простота вычисления направлений dk. В результате метод может применяться, в том числе, в пространствах сверхбольшой размерности; 1 Отсутствие требований к вычислению любых производных функции f. В результате метод может применяться для случая оракула нулевого порядка. К недостаткам метода следует отнести: Возможность застревания в промежуточной точке для негладких функций f. Пример такой ситуации для функции f(x1, x2) = max(|x2 − 1.1x1|, |x2 − 0.1x1|) показан на рисунке 1,c; Возможность совершать большое количество очень маленьких шагов даже при оптимизации строго выпуклых функций. Пример подобной ситуации для функции f(x1, x2) = 5x 2 1 − 9x1x2 + 4.075x 2 2 + x1 показан на рисунке 1,b. Такая ситуация частично связана с неспособностью метода идти по диагонали.

Пример. На рисунке 1 представлена траектория поиска минимума функции Розенброка методом циклического покоординатного спуска, включающая лучшие точки итераций. Процесс минимизации занял 355 итераций и прекратился при уменьшении величины шага до 10–3. Было произведено 3164 вычисления функции.

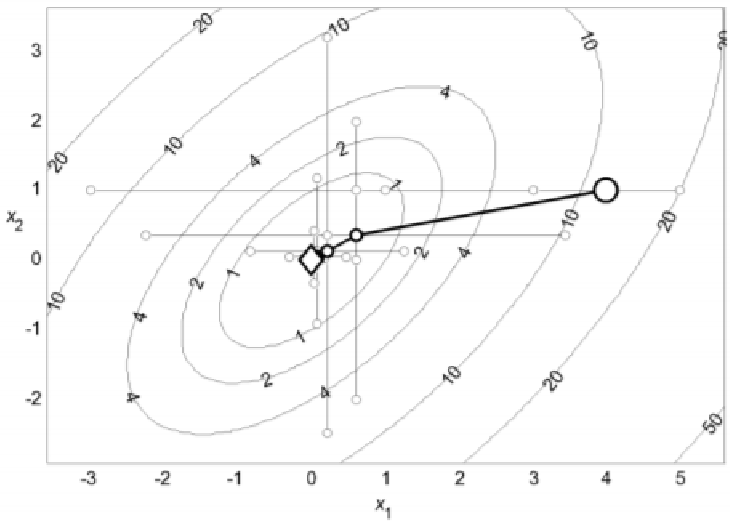

Рисунок 1 – Минимизация квадратичной функции методом циклического покоординатного спуска

Точка минимума, отмеченная звездочкой, не была найдена. Минимизация квадратичной функции методом циклического покоординатного спуска Рисунок 2. Минимизация функции Розенброка методом покоординатного спуска.

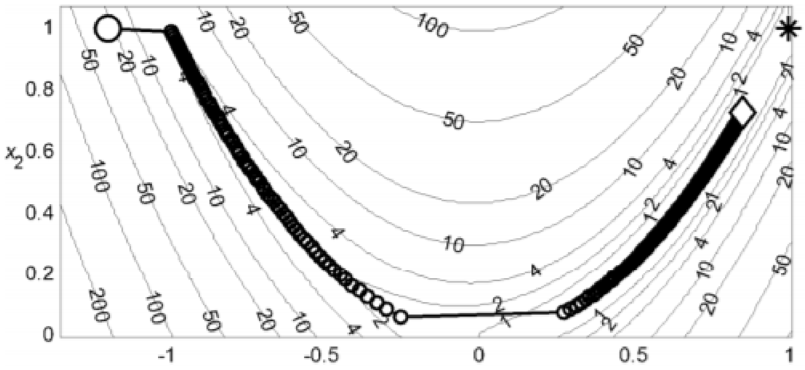

Рисунок 2 – Минимизация функции Розенброка методом покоординатного спуска

Достоинством метода циклического покоординатного спуска является его простота. Недостатком метода является его неэффективность при минимизации овражных функций. Однако это фундаментальный метод многомерной оптимизации, поскольку идея этого метода о последовательном применении одномерного поиска в n направлениях используется в других более эффективных методах оптимизации. Метод циклического покоординатного спуска и его модификации также называют методом циклического покоординатного поиска, циклическим координатным методом, методом Гаусса-Зейделя, методом локальных вариаций.

Метод наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска для обоснования одного из простейших методов спуска представим дифференцируемую целевую функцию f (x) , где n $x \in R$, рядом Тейлора, ограничиваясь слагаемым первого порядка малости, f $(x + \Delta x) = f(x) + \nabla f(x)\, \Delta x + o(\Delta x)$ T . Пусть x – фиксированная начальная точка поиска, Δx – приращение аргумента, которое обеспечивает убывание функции, причем длина этого приращения Δx постоянна. При достаточно малых значениях Δx , пренебрегая в слагаемыми высшего порядка малости, имеем изменение функции $\Delta = x + \Delta x - x = \nabla\ x\ \Delta x$ T f f ( ) f ( ) f ( ) . В первом приближении изменение функции равно скалярному произведению векторов $\nabla f(x)$ и Δx . Пусть θ – угол между этими векторами. Тогда $\Delta f = \nabla f(x) \cdot \Delta x \cdot \cos\theta$. При постоянной длине векторов $\nabla f(x)$ и Δx убывание функции будет наибольшим, если $\cos\theta = -1$ и $\theta = \pi$. Это означает, что векторы $\nabla f(x)$ и Δx противоположно направлены и $\Delta x = -\lambda \nabla f(x)$, где $\lambda > 0$. Таким образом, направление наиболее быстрого убывания функции f (x) в точке x совпадает с антиградиентом $-\nabla f(x)$. Направление антиградиента $-\nabla f(x)$ наиболее быстрого убывания функции f (x) в точке x называется направлением наискорейшего спуска. Градиент же функции $\nabla f(x)$ определяет направление наиболее быстрого возрастания функции f (x) в точке x . Пусть Δx – такой малый шаг вдоль линии уровня f (x) =C , что $f(x + \Delta x) = C$. Тогда $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$, и по формуле с точностью до бесконечно малых первого порядка $\nabla (x)\, \Delta x = 0$ T f . То есть в любой точке x направление градиента ∇f

(x) перпендикулярно линии уровня, проходящей через эту точку, поскольку вдоль этой линии функция постоянна. Это замечание касается и антиградиента $-\nabla f(x)$. Метод минимизации целевой функции $f(x)$, в котором направление поиска определяется антиградиентом $-\nabla f(x)$, называется методом наискорейшего спуска. Это означает, что если на некотором шаге процесса оптимизации получена точка k x , то поиск минимума функции осуществляется вдоль направления ( ) k k d = −∇f x . В данном методе итерации выполняются по формуле ( ) k 1 k k k x + = x −λ ∇f x , где λk – значение переменной λ , которое доставляет минимум функции ( ) (( )) k k φ λ = f x −λ∇f x . Обозначая ( ) k k g = −∇f x и учитывая , запишем формулы итерации метода наискорейшего спуска: xk+1 = xk −λkgk , arg min ( ) k k k λ = f x −λg λ .

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие − > ε xk+1 xk , где ε – допустимая погрешность, ε > 0 . По формулам составим алгоритм метода наискорейшего спуска. Алгоритм метода наискорейшего спуска. Входные параметры: x – начальная точка поиска, f (x) – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность. Выходной параметр x – конечная точка поиска.

1. Вычислить g = ∇f (x) . 2. Вычислить = arg min (x − λ·g) λ r f , s = −r·g . 3. Положить x = x +s. 4. Если s > ε , то перейти к шагу. Остановиться. В этом алгоритме на шаге 2 выполняется одномерный поиск минимума из текущей точки поиска в направлении антиградиента −g. Для повышения эффективности численной процедуры одномерного поиска производят масштабирование направления поиска и используют вектор направления d = −g g 0 единичной длины. Шаг перехода в следующую точку поиска обозначен через s. Итерации продолжаются, пока длина s больше заданной допустимой погрешности.

Пример. На рисунке 3 представлена траектория минимизации квадратичной функции методом наискорейшего спуска, состоящая из лучших точек итераций. Градиент вычислялся по формулам конечных разностей. В соответствии с замечаниями примера. О проведении одномерного поиска начальное значение шага одномерного поиска на каждой итерации вычисляется на основании двух выполненных предыдущих итераций, а вектор направления поиска масштабирован по формуле d = −g g 0 . Для нахождения точки минимума с погрешностью 10–3 затрачено 13 итераций и 80 вычислений функции.

На рисунке 3. Минимизация квадратичной функции методом наискорейшего спуска

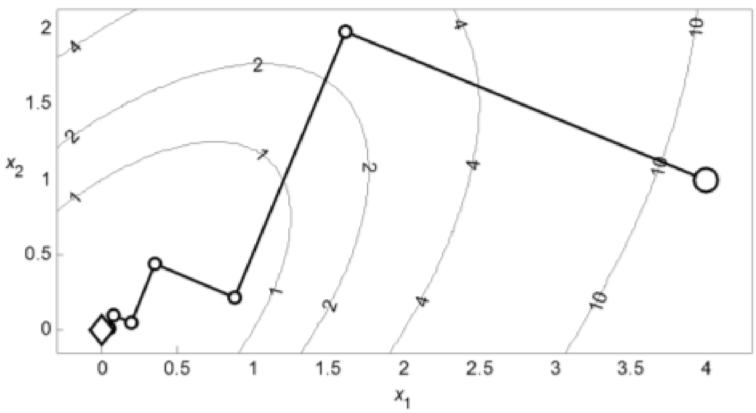

Рисунок 3 – Минимизация квадратичной функции методом наискорейшего спуска

При выполнении точного одномерного поиска из точки k x в направлении вектора dk по получим k+1 = 0 T dk g , то есть вектор направления ортогонален градиенту функции в точке минимума этой функции в данном направлении. Для метода наискорейшего спуска это означает, что k+1 = 0 T gk g , то есть градиенты в последовательных точках поиска ортогональны. Следовательно, траектория метода состоит из последовательности ортогональных отрезков 0 s , 1 s , 2 s , …, где k xk xk s = +1 – шаг перехода из точки k x в точку xk+1 (рисунок 4).

На рисунке 3 представлена траектория поиска минимума функции Розенброка методом наискорейшего спуска.

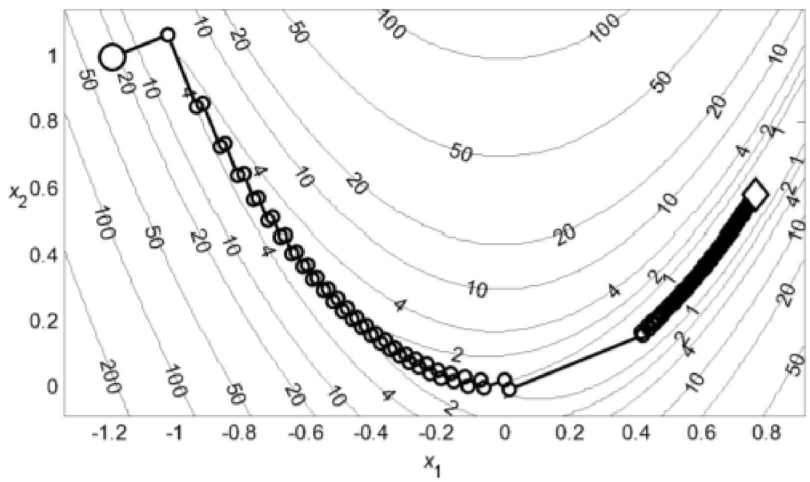

Рисунок 4 – Траектория поиска минимума функции Розенброка методом наискорейшего спуска

Процесс минимизации занял 306 итераций при 2060 вычислениях функции и прекратился при уменьшении величины шага многомерного поиска ниже значения 10-3. Точка минимума не была найдена (Рисунок 4). Минимизация функции Розенброка методом наискорейшего спуска Метод наискорейшего спуска называется также методом Коши, поскольку известный французский математик Огюстен Луи Коши первым в 1847 году представил этот метод для решения систем линейных уравнений. Метод наискорейшего спуска является простейшим, наиболее известным и самым фундаментальным методом безусловной минимизации дифференцируемых функций нескольких переменных. Поскольку в нем используется отрицательный градиент как направление спуска, он также называется градиентным методом. Этот метод основан на первых производных целевой функции, поэтому он является методом первого порядка. Достоинством метода является его простота, но он обладает тем же основным недостатком, что и метод циклического покоординатного спуска, – низкой эффективностью при минимизации овражных функций (рисунок 4). Метод Коши, как правило, позволяет существенно уменьшить значение целевой функции при движении из начальных точек, расположенных на значительных расстояниях от точки минимума, и поэтому часто используется как начальная процедура в других методах минимизации. Разработаны различные модификации метода Коши. Однако существуют методы минимизации, которые основаны на других принципах и существенно превосходят метод Коши в эффективности.