Лабораторная работа №3.

Тема: Детерминированные задачи принятия решений

1. Учебные вопросы, подлежащие рассмотрению:

- Детерминированные задачи принятия решений.
- Понятие о задаче многокритериальной оптимизации.
- Решение задачи многокритериальной оптимизации на основании принципа Парето.
- Простейшие варианты принятия решений на основании принципа Парето.
- Многошаговые задачи принятия решений.

2. Методические рекомендации по подготовке к занятию.

Перед выполнением задания необходимо изучить теоретические вопросы принятия решений в детерминированных задачах, и задачах многокритериальной оптимизации, основанные на принципе Парето. Разобраться в содержании методов преодоления неопределённостей при выборе решений из Парето – оптимального множества решений.

3. Контрольные вопросы

1. Объясните понятие «детерминированные задачи». Приведите примеры.
2. В чём особенность принятия решения в детерминированных задачах.
3. Какие задачи называют задачами оптимизации?
4. Объясните, что такое «целевая функция» в детерминированных задачах принятия решений?
5. Изложите алгоритм решения детерминированной задачи принятия решений.
6. Объясните, в чём трудность решения детерминированных задач принятия решений?
7. Изложите смысл методов численной оптимизации.
8. Сформулируйте задачу принятия решения при многих критериях.
9. Сформулируйте принцип доминирования решения по Парето.
10. Дайте определение Парето оптимального множества решений. Приведите геометрическую интерпретацию.
11. Сформулируйте характеристическое свойство Парето – оптимального множества решений.
12. Сформулируйте основные варианты преодоления неопределённости выбора решений из Парето – оптимального множества.
13. Объясните смысл процедуры сужения Парето – оптимального множества, основанной на задании границ критериев выбора.
14. Объясните смысл процедуры субоптимизации для сужения Парето – оптимального множества.
15. Объясните смысл процедуры лексикографической оптимизации для сужения Парето – оптимального множества.
16. Сформулируйте основные правила построения обобщённого критерия при многокритериальной оптимизации.
17. Дайте определение обобщённого критерия оптимизации.
18. Сформулируйте задачу алгебраического определения обобщённого критерия по частным критериям. Приведите примеры.
19. Сформулируйте задачу эвристического определения обобщённого критерия по частным критериям. Приведите примеры.
20. Сформулируйте необходимое требование при построении обобщённого критерия.
21. Объясните смысл многошаговой задачи принятия решений.
22. Объясните, что такое математическое программирование?
23. Сформулируйте задачу линейного программирования. Приведите пример.
24. Сформулируйте задачу динамического программирования. Приведите пример.
25. Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.

1. Однокритериальные методы выбора в детерминированных задачах

Как известно, для принятия решений необходимо иметь множество альтернатив (вариантов решения), которое обозначим $\{X\}$, и знать состояния среды, от которых зависит выбор альтернативы. Обозначим множество состояний среды *{Y}*. Эти два множества определяют пространство последствий принимаемых решений, которое обозначим *U*. Пространство *U* – это отображение

$$F: X \times Y \to U \text{ или } U = F(x, y)$$

Например, пусть имеется четыре варианта аттестации успеваемости, т. е. множество *X* состоит из четырёх альтернатив: *x1* – написать и защитить реферат на заданную тему; *x2* – написать контрольную работу; *x3* – пройти тестирование; *x4* – пройти собеседование с преподавателем. Для прохождения аттестации назначено три даты: *d1, d2, d3.* Студенту Ивану Петровичу Сидорову необходимо выбрать дату и вариант прохождения аттестации. В этих условиях пространство *U* определяется таблицей (матрицей)

$$U = \begin{pmatrix} u11 & u12 & u13 \\ u21 & u22 & u23 \\ u31 & u32 & u33 \\ u41 & u42 & u43 \end{pmatrix}$$

Чтобы принять решение необходимо иметь возможность оценить его последствия и уметь сравнивать последствия принимаемых решений для выбора наиболее полезного для достижения цели. Это значит, что необходимо определить оценочную функцию

$$\varphi = \varphi(F(x, y))$$

и уметь находить тот вариант решения, который наилучшим образом обеспечивает достижение цели.

Все задачи принятия решений различаются между собой свойствами пространства состояний *U* и правилами нахождения решения, наиболее полезного для достижения цели.

В данной работе рассматриваются детерминированные задачи принятия решений. В таких задачах считается, что состояние среды точно известно, т. е. выбор альтернативы не зависит от состояния среды и, следовательно, пространство *U = F(x)*. Таким образом, для выбора наиболее полезного решения необходимо найти экстремум функции

$$\varphi = \varphi\big(F(x)\big) = \psi(x).$$

Когда каждая альтернатива $x \in X$ – есть функция одного переменного, на область определения которого не наложено никаких ограничений, то данная задача - это классическая задача нахождения экстремума функции одного переменного, решение которой хорошо известно. Достаточно просто решается эта задача для функции двух переменных, для функций трёх и более переменных решение этой задачи достаточно обременительно и её лучше решать численными методами.

В качестве примера рассмотрим следующую детерминированную задачу поиска оптимального решения.

Пусть на плоскости *OXY* задано облако из *N* точек. Координаты $(x_i\, y_i)$ этих точек соответствуют температуре и давлению в *N* точках области. По этим данным требуется установить линейную зависимость между температурой и давлением, т.е. найти уравнение прямой

$$y = kx + b,$$

которая наилучшим образом определяет такую зависимость. Выбор решения зависит от того, как будет определен смысл понятия «наилучшим образом». Например, можно потребовать, чтобы векторная сумма отклонений точек облака от искомой прямой была равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i - kx_i - b) = 0$$

В этом случае будем иметь множество решений, так как любая прямая, проходящая через среднюю точку облака будет удовлетворять этому требованию. Для обеспечения единственности решения потребуем, чтобы искомая прямая была такой, что сумма квадратов расстояний точек облака от неё минимальна. Очевидно, что для этого необходимо решить систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dk}(y_i - kx_i - b)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{db}(y_i - kx_i - b)^2 = 0$$

относительно неизвестных параметров *k* и *b* искомой прямой. Например, для облака из 10 точек имеем следующее решение этой системы

$$x^T = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad y^T = \begin{pmatrix} -4.5 & -4.2 & -2.5 & 0.2 & -0.1 & 1.9 & 2.9 & 2.5 & 2.6 & 3.9 \end{pmatrix}$$

$$k = 0.957 \quad b = 0.745 \quad \sum_{i=0}^{N-1}\left(y_i - k \cdot x_i - b\right)^2 = 7.654 \quad \sum_{i=0}^{N-1}\left(y_i - k \cdot x_i - b\right) = 3.42 \times 10^{-3}$$

На рис. 1 иллюстрируется исходная ситуация и решение когда облако состоит из 200 точек.

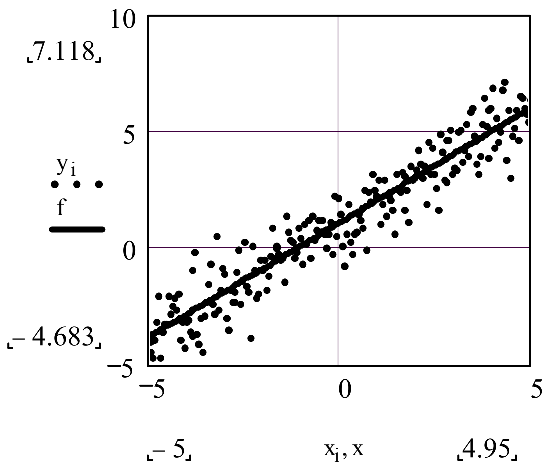


Рисунок 1.

Когда на область определения переменных, от которых зависит выбираемая альтернатива *x*, наложены какие либо ограничения, то задача выбора наиболее полезной альтернативы сводится к задаче поиска условного экстремума, одним из аналитических способов решения которой является метод неопределённых множителей Лагранжа, а для численного решения применяют различные методы численной оптимизации.

Пусть, например, необходимо определить размеры ёмкости заданной формы для хранения жидкости и такой, что при заданной площади поверхности *S* объём ёмкости был бы наибольшим. Пусть ёмкость имеет форму параллелепипеда с рёбрами *x*, *y*, *z*, а площадь её поверхности равна С. Целевая функция в этой задаче

$$V = xyz \rightarrow max$$

и переменные связаны условием

$$S = 2(xy+xz+yz)$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L = V + \lambda S = xyz + \lambda S.$$

Дифференцируя функцию Лагранжа по переменным *x, y, z, λ* и приравнивая производные нулю, получим систему уравнений

$$y\cdot z + \lambda\cdot(2\cdot y + 2\cdot z) = 0$$
$$x\cdot z + \lambda\cdot(2\cdot x + 2\cdot z) = 0$$
$$x\cdot y + \lambda\cdot(2\cdot x + 2\cdot y) = 0$$
$$2\cdot x\cdot y + 2\cdot x\cdot z + 2\cdot y\cdot z = C$$

из решения которой найдём размеры ёмкости, имеющей наибольший объём при заданной поверхности $S = C$. Например при С = 150 поручим $x = y = z = 5$.

2. Многокритериальные задачи выбора в детерминированных задачах

В большинстве практических задач оценивание альтернатив по одному критерию оказывается упрощенным и малопригодным. Поэтому возникает необходимость их оценивания не по одному, а по нескольким качественно различным критериям, например, техническим, экономическим, социальным, экологическим и другим. Гипотетически одна из альтернатив может оказаться лучшей по всем критериям. Очевидно, что она и будет наилучшей. Однако такие ситуации практически встречаются очень редко, и возникает вопрос, как же тогда принимать решение? Существуют различные методы решения многокритериальных детерминированных задач. Здесь ограничимся методом отбора недоминируемых альтернатив.

Критерий выбора альтернатив задаётся вектором оценки $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, где f_j – оценка возможного решения по критерию с номером *j*. В результате этого сравнение любых двух решений заменяется сравнением их векторных оценок. Сравнение векторных оценок осуществляется на основании принципа доминирования по Парето [1], [13].

Векторную оценку $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ называют доминирующей по Парето векторную оценку $\bar{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$, если для всех $j = 1, 2, \ldots, m$, выполняется неравенство $f_j \geq g_j$, причем, хотя бы для одного значения *j* последнее неравенство строгое. Например, сравним две векторные оценки

$$f := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f \geq g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значение последнего логического выражения показывает, что в оценке *f* доминирование оценки *g* осуществляется только по второму критерию и, следовательно, векторная оценка *f* не доминирует веаторную оценку *g*. Для двух других векторных оценок

$$f := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad g := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f \geq g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g \geq f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

векторная оценка f доминирует векторную оценку g, так как значение логического выражения $f \geq g$ принимает значение «истина» для всех компонент сравниваемых оценок. Очевидно так же, что, если значение логического выражения $g \geq f$ принимает значение «ложь», то это значит, что реализуется противоположное доминирование, т. е. векторная оценка f доминирует векторную оценку g.

В результате сравнения решений все доминируемые (худшие по всем критериям) альтернативы отбрасываются, а все прочие (недоминируемые) оставляются. Они образуют множество недоминируемых альтернатив или множество Парето оптимальных решений. Векторная оценка из этого множества называется Парето – оптимальной, если в нём не существует никакой другой векторной оценки, доминирующей по Парето данную оценку.

Парето – оптимальность оценки означает, что она не может быть улучшена ни по одному из критериев, составляющих векторную оценку, без ухудшения, по какому либо другому критерию, входящему в векторную оценку.

Рассмотрим пример. Пусть имеется $N = 5$ возможных вариантов автомобильной дороги между двумя населёнными пунктами и требуется выбрать наиболее полезный вариант. Полезность вариантов будем оценивать по $M = 4$ критериям:

– *K1* – длина трассы;
– *K2* – потенциальная экономическая эффективность эксплуатации;
– *K3* – стоимость технического обслуживания;
– *K4* – продолжительность строительства.

В реальных условиях оценки каждого варианта трассы по каждому критерию осуществляются по результатам технико-экономического анализа. Мы примем гипотетические оценки в условных единицах, и результаты представим в таблице (матрице)

$$G1 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 8 & 7 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

В каждом столбце в этой матрицы приведены оценки варианта трассы по заданным критериям. Предположим, что ищется вариант, у которого оценки по всем критериям максимальны. Сравнивая варианты по принципу доминирования по Парето, убеждаемся, что имеется единственный вариант (второй), который доминирует (превосходит) все остальные по каждому из критериев. Это значит, что Парето оптимальное множество состоит из одного элемента, который и является оптимальным. Это второй вариант трассы.

Но такая ситуация на практике встречается редко и поэтому рассмотрим другой более типичный вариант, представленный матрицей

$$G := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

На основании принципа доминирования по Парето найдем множество Парето оптимальных решений. Номера сравниваемых альтернатив будем записывать как верхний индекс.

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G^{\langle 1\rangle} \ge G^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G^{\langle 1\rangle} \ge G^{\langle 3\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad G^{\langle 1\rangle} \ge G^{\langle 4\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad G^{\langle 1\rangle} \ge G^{\langle 5\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G^{\langle 2\rangle} \ge G^{\langle 3\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad G^{\langle 2\rangle} \ge G^{\langle 4\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad G^{\langle 2\rangle} \ge G^{\langle 5\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G^{\langle 3\rangle} \ge G^{\langle 4\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad G^{\langle 3\rangle} \ge G^{\langle 5\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad G^{\langle 4\rangle} \ge G^{\langle 5\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

На основании сравнения видим, что альтернатива $G^{\langle 3\rangle}$ доминирует альтернативу $G^{\langle 4\rangle}$, альтернатива $G^{\langle 5\rangle}$ доминирует альтернативы $G^{\langle 2\rangle}$ и $G^{\langle 4\rangle}$. Это означает, что альтернативы $G^{\langle 2\rangle}$ и $G^{\langle 4\rangle}$ должны быть исключены из дальнейшего рассмотрения, так как они не могут входить в множество Парето оптимальных решений. Матрица *PG* Парето оптимальных решений имеет вид

$$PG = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

В неё включены только первая, третья и пятая альтернативы исходной матрицы *G*.

Таким образом, Парето-оптимальных оценок, как правило, получается множество, и выделить среди них единственную оптимальную оценку без дополнительной информации не представляется возможным, так как любые два Парето-оптимальных решения не сравнимы относительно доминирования по Парето. Это значит, что для любых двух Парето-оптимальных оценок всегда найдутся такие два критерия, по одному из которых предпочтительнее первый исход, а по другому – второй. В такой ситуации для принятия решения применяют два варианта.

В первом варианте выбор оптимального решения из множества Парето-оптимальных осуществляет ЛПР и, следовательно, решение имеет субъективный характер.

Во втором варианте на основе дополнительной информации выполняется сужение множества Парето-оптимальных решений с помощью некоторых формальных и эвристических процедур. Рассмотрим простейшие из этих процедур.

1. Указание допустимых границ критериев.

Дополнительная информация о некоторых оптимальных решениях задаётся неравенствами $f_j(a) \geq q_j,\ j = \overline{1,k}$, или $f_j(a) \leq q_j,\ j = \overline{k+1,m}$ где q_j –допустимые границы критерия с номером *j*. При задании границ критериев оптимальным считается только такое Парето-оптимальное решение, у которого по каждому из критериев с заданными границами оценки не выходят из допустимых границ. В результате Парето-оптимальное множество сужается, однако, окончательный выбор из суженного множества производит лицо, принимающее решение, т.е. решение остаётся субъективным. Например, пусть для матрицы PG выдвигается требование, чтобы значение критерия номер два не превосходило 5. Этому требованию удовлетворяют альтернативы первая и вторая. Следовательно, третья альтернатива исключается из рассмотрения, и дальнейший выбор будет производиться только между первой и второй альтернативами. Если потребовать, чтобы значение третьего критерия было больше трёх, то этому требованию удовлетворяет только вторая альтернатива (напомним, что третья альтернатива уже исключена). В результате приходим к единственному Парето оптимальному решению – это вторая альтернатива.

2. Субоптимизация.

В этом случае из множества критериев выбирается один, наиболее важный, а по остальным назначаются нижние границы. В качестве оптимального принимается решение, оптимальное по выбранному критерию при условии выполнения всех неравенств, определяющих нижние границы остальных критериев. В результате применения этой процедуры задача многокритериальной оптимизации сводится к задаче однокритериальной оптимизации на суженном допустимом множестве. Выбор наиболее значимого критерия и назначение границ остальных критериев носит субъективный характер. Пусть, например, в рассматриваемом примере важнейшим является критерий *k1* и его необходимо минимизировать. Это требование сужает множество Парето оптимальных решений до двух альтернатив: первой и второй. На остальные критери наложим требование $k2 \in [2, 5]$, $3 \leq k3 < 5$, $k4 \rightarrow max$. Этим дополнительным требованиям удовлетворяет только первая альтернатива, она и принимается в качестве лучшего решения.

3. Лексикографическая оптимизация.

Все критерии ранжируются и упорядочиваются по их относительной важности. Затем отбираются все решения, которые имеют оптимальную оценку по важнейшему критерию. Если такое решение одно, то его и считают оптимальным. Если таких решений несколько, то среди них выбирают те, которые имеют оптимальную оценку по второму важнейшему критерию и т.д., пока не останется единственное решение. Ранжирование критериев в этой процедуре играет важнейшую роль, так как первый, принятый за важнейший, критерий в значительной мере определяет выбор оптимального решения, а само ранжирование критериев зачастую имеет эвристический характер. Пусть в рассматриваемом примере важнейшим является первый критерий и его необходимо минимизировать. Это требование позволяет сузить Парето оптимальное множество до двух альтернатив: первой и вторй. Пусть вторым по важности критерием будет критерий номер 3 и его надо максимизировать. Это требование сужает Парето оптимальное множество альтернатив до оной – первой альтернативы.

3. Многошаговые процедуры принятия решений

В различных областях теории и практики решение целесообразно искать не сразу, а последовательно, шаг за шагом. В этом случае поиск решения рассматривается как процесс, состоящий из нескольких этапов. Если на каждом шаге процедуры принятия решения результат полностью определён, то её называют детерминированной, а, если не определён, но может быть предсказан с помощью некоторого распределения вероятностей - стохастической. Многошаговые процедуры принятия решений относятся к задачам математического программирования. Целью математического программирования служит создание, если это возможно, аналитических методов решения экстремальных задач или разработка эффективных численных методов нахождения приближённого их решения, т.е. выбор программы действий. С этим обстоятельством связано и название «математическое программирование». Ограничимся рассмотрением задач линейного и динамического программирования.

3.1 Задача динамического программирования

Содержание задачи динамического программирования состоит в последовательности выборов. Эту последовательность выборов называют ***стратегией***. Стратегии наиболее желательные с точки зрения какого-либо заранее заданного критерия называют ***оптимальными стратегиями***. Оптимальная стратегия обладает свойством: каково бы ни было начальное состояние и начальный выбор, остальные выборы должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, возникшего в результате первого выбора. Это свойство выражает ***принцип оптимальности*** динамического программирования.

Рассмотрим управляемую систему, которая под влиянием управления переходит из начального состояния S_0 в конечное состояние S_n. Разобьём процесс управления системой на n шагов и пусть $S_1, S_2,...,S_n$ – состояния системы после первого, второго,..., n – го шага. Состояние системы после шага с номером k характеризуется параметрами $p_{i,k}$ ($i = 1,2,...,q$), которые называют ***фазовыми координатами***. Состояние S_k изображается точкой q – мерного пространства, называемого ***фазовым пространством***. Преобразования системы на шаге с номером k осуществляются в результате некоторых мероприятий u_k, переводящих систему из состояния S_{k-1} в состояние S_k. В задачах динамического программирования считается, что состояние системы после шага с номером k зависит только от предшествующего состояния системы S_{k-1} и управления u_k на данном шаге. Это свойство называют ***отсутствием последействия***. Представим эту зависимость в виде уравнения

$$S_k = F_k(S_{k-1}, u_k).$$

Эти уравнения называют ***уравнениями состояния***. Функции $F_k(S_{k-1}, u_k)$ считаются известными.

Каждому варианту управления $U = (u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_n)$, переводящему систему из состояния S_0 в состояние S_n, соответствует некоторая оценка эффективности

$$W = W(S_0, U).$$

Эффективность шага с номером k обозначим $w_k(S_{k-1}, u_k)$. В задаче динамического программирования функция эффективности W должна быть аддитивной, т.е.

$$W = \sum_{k=1}^{n} w_k\left(S_{k-1}, u_k\right).$$

На каждом шаге управление может ограничиваться некоторыми условиями. Управления, удовлетворяющие этим ограничениям, называются допустимыми. Управление, при котором достигается экстремум значения W, называют оптимальным управлением.

Дадим геометрическую интерпретацию этой задачи (рис 2).

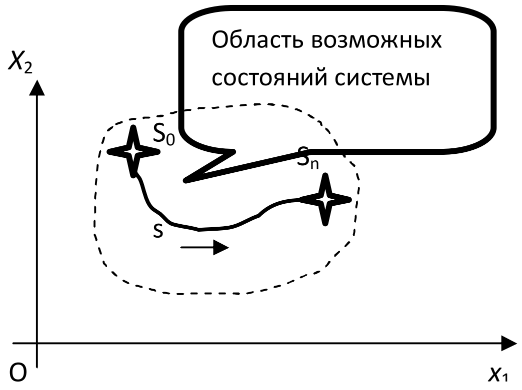


Рис. 2. Геометрическая интерпретация задачи динамического программирования

Для простоты будем считать, что состояние системы S зависит от двух параметров. Тогда фазовое пространство будет двумерным, а процесс будет изображаться перемещением точки S из $S_0 \in \widetilde{S}_0$ в $S_\omega \in \widetilde{S}_\omega$ по определённой траектории на фазовой плоскости. Эта траектория и будет изображать управление системой. Характерным для динамического программирования является определённый методический приём. Процесс перемещения точки S из $\widetilde{S}_0$ в $\widetilde{S}_\omega$ разделяется на несколько шагов и затем осуществляется пошаговая оптимизация.

Модель динамического программирования называется дискретной или непрерывной в зависимости от характера изменения управления u_k. В зависимости от числа параметров состояния $p_{i,k}$ ($i = 1,2,...,q$) и числа управляющих переменных на каждом шаге различают одномерные и многомерные модели динамического программирования. Число шагов в задаче может быть конечным или бесконечным.

В качестве примера определим максимальный путь на графе, изображённом на рис. 3, из вершины номер 1 в вершину номер 7. Значения функции на дугах указаны в кружках.

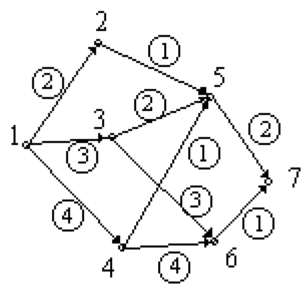


Рис. 3 Определение максимального пути на графе

Для вершины 1 принимаем $q_S^{max}(1) = 0$. Для вершин 1, 2, 3

$$q_S^{max}(1,2) = 2; \quad q_S^{max}(1,3) = 3; \quad q_S^{max}(1,4) = 4.$$

Для вершины 5 : $q_S^{max}(1,5) = max(2+1, 3+2, 4+1) = 5$.

Для вершины $6: q_S^{max}(1{,}6) = max(3+3{,}4+4) = 8$.

Для вершины $7: q_S^{max}(1{,}7) = max(5+2{,}8+1) = 9$.

Значение функции на максимальном пути $1-4-6-7$ равно девяти.

Пример выполнения задания.

1. Задать графически граф без контуров и петель.
2. Дать имена вершинам.
3. Задать целочисленную функцию на дугах.

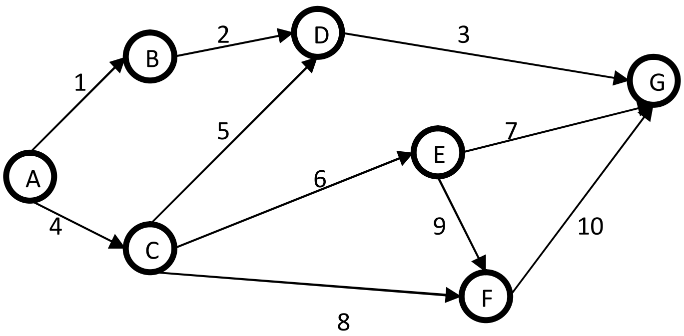


Рис 4. Ориентированный граф

4. Задать граф матрицей смежности.
   В матрице смежности имена вносим в порядке «от конца к началу».
5. На матрице смежности отобразить заданную на дугах целочисленную функцию.

В каждый столбец записываем длину пути от смежной вершины. Если путь не существует, то не пишем ничего.

	G	F	E	D	C	B	A	
G								
F	10							10
E	7	9						19
D	3							3
C		8	6	5				25
B				2				5
A					4	1		29

6. Найти максимальный и минимальный пути из начальной вершины графа в конечную вершину.

Поиск оптимального пути состоит из двух частей.

1. Поиск пути выполняем последовательно по строкам.

В каждой строке определяем оптимальный элемент.
При этом может представиться два случая.

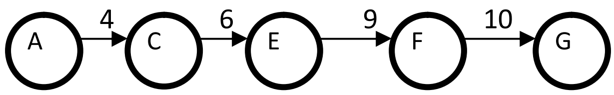
Случай “a”. Если в строке единственный элемент, то его и принимаем за оптимальный и записываем его значение в соответствующий элемент дополнительного столбца. Например, в строке “F” один элемент, имеющий значение 10. Этот элемент связывает вершины “F” и “G”. Его принимаем в качестве оптимального и записываем в дополнительный столбец матрицы смежности и в таблице выделяем его каким либо цветом.

Случай “b”. Если в строке элементов больше одного, то это значит, что необходимо учесть оптимальный путь от смежного элемента и после этого определить оптимальный путь до данного элемента. Например, в строке “E” два элемента имеют значения. Первый из них имеет значение «7» и равен длине пути из вершины “E” в вершину “G”. Второй элемент имеет значение «9» и равен длине пути от вершины “E” до вершины “F”. Длина пути из вершины “E” в вершину “G” через вершину “F” равна сумме путей GF и FE, т.е. 10 +

9 = 19. Таким образом, имеется два пути из вершины “E” в вершину “G”. Их значения равны 7 и 19. Именно из них необходимо выбрать оптимальный путь и записать его значение в соответствующий элемент дополнительного столбца. Элемент, который выбирается, метим красным цветом. Для определённости примем в качестве оптимального максимальный путь. Он равен 19. Его и вписываем в дополнительный столбец матрицы смежности. Если ищется минимальный путь, то в качестве оптимальных выбираются минимальные элементы.

Эта операция продолжается, пока не будут рассмотрены все строки и не будет заполнен дополнительный столбец матрицы смежности, как в нашем примере. Последний элемент дополнительного столбца матрицы смежности имеет значение равное длине оптимального (в нашем примере максимального) пути из вершины “A” в вершину “G”. В нашем примере он равен 29.

2. Ищем оптимальный путь. Для поиска оптимального пути в последней строке матрицы смежности отыскиваем элемент, который включён в оптимальный путь (он выделен цветом) Это элемент, стоящий в столбце с именем “C”. Это значит, что следующей после вершины “A” вершиной оптимального пути является вершина “C”. Следующий элемент на оптимальром пути ищем в строке с именем C. это элемент, стоящий в столбце с именем E и выделенный красным цветом.



Эту процедуру продолжаем, пока не попадём в вершину “G”.
В результате получаем оптимальный путь, показанный на рисунке, где стрелками обозначена последовательность вершин графа, составляющих оптимальный путь, а цифрами указаны длины путей между смежными вершинами, суммируя которые находим длину оптимального пути равную 29.

В качестве упражнения предлагается на этом же графе найти минимальный путь из вершины “A” в вершину “G”. Приведём ответ для этого упражнения: оптимальный (минимальный) путь проходит через вершины 1 -2 – 4 – 7 и его длина равна 6.

3.2 Задача линейного программирования

В задачах линейного программирования (ЛП) требуется найти экстремум линейной функции (целевой функции) при линейных ограничениях в виде равенств или неравенств. Общая постановка задачи и один из подходов к её решению впервые были приведены в 1939 году Л.В. Канторовичем. В виде задачи линейного программирования формулируются многочисленные задачи планирования в экономике, управления производственными и технологическими процессами, организации эффективной работы технических систем и другие.

Наиболее распространённым примером задачи линейного программирования является задача планирования работы предприятия, выпускающего однородный продукт. Эта задача формулируется следующим образом: имеется *n* различных технологий и *m* видов ресурсов (сырьё, оборудование, рабочая сила и т.д.) производства. Известны:

– $\overline{C}^T = (c_1, c_2, ..., c_n)$ - вектор удельной производительности, где c_j - количество единиц продукта, которое можно получить в единицу времени при использовании технологии с номером *j*;

– $A = \begin{Bmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \end{Bmatrix}$ - матрица удельного расхода ресурсов, где $a_{i,j}$ расход ресурса с номером i при использовании технологии с номером j;

– $\overline{B}^T = (b_1, b_2, \ldots b_m,)$ - вектор запаса ресурсов, где b_i запас ресурса с номером i;

– $\overline{X}^T = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ - вектор, где x_j - время, в течение которого производство осуществляется по технологии с номером j.

Требуется найти такой план работы, при котором из имеющихся запасов было бы выпущено максимальное количество продукта.

Целевая функция сформулированной задачи имеет вид

$$F = C^T \cdot X \to \max$$

при ограничениях

$$A \cdot X \le B,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, m}$$

Основная задача линейного программирования

В основной задаче линейного программирования ограничения неравенства заменяются ограничениями равенствами. Эта задача формулируется следующим образом.

Имеется ряд переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Требуется найти такие неотрицательные значения этих переменных, которые удовлетворяют системе линейных уравнений

$$A \cdot X = B$$

и, кроме того, обращают в максимум (минимум) линейную функцию

$$F = C^T \cdot X \to \max(\min) \; .$$

В этой задаче практически всегда число независимых уравнений m меньше числа неизвестных n. Тогда, если система совместна, у неё существует бесчисленное множество решений. При этом n - m переменным мы можем придавать произвольные значения, а остальные m переменных выразятся через них (эти m переменных называют базисными). Если среди этих решений нет ни одного, для которого все $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неотрицательны, то это значит, что задача линейного программирования не имеет допустимого решения. Если же такие решения существуют, то каждое из них допустимо. Как среди них найти такое, для которого линейная функция

$$F = C^T \cdot X \to \max(\min)$$

обращается в максимум (минимум)?

Для численного решения задачи ЛП разработаны методы, основным среди которых является симплекс – метод.

Рассмотрим случай, когда $n - m = 2$ [8]. Тогда две переменные можно выбрать в качестве свободных, а остальные m сделать базисными и выразить их через свободные переменные. Пусть, например, решается задача линейного программирования с семью переменными x_i, $i = \overline{1, n}$ и $m = 5$ уравнениями – ограничениями:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & 2\cdot x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ & x_1 + x_2 - x_5 = -4 \\ & x_2 + x_6 = 5 \\ & 2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - x_6 + 2\cdot x_7 = 7 \end{aligned}\right\}.$$

Требуется найти такое решение, которое минимизирует целевую функцию

$$F(x_1, x_2, ..., x_7) = x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 - x_4 - 3\cdot x_5 + x_6 - 2\cdot x_7.$$

Рассмотрим решение этой задачи с геометрической интерпретацией. Выберем в качестве свободных переменных, например, x_1, x_2 и выразим через них базисные переменные x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

В результате получим

$$\left.\begin{aligned} & x_3 = -x_1 + x_2 + 4 \\ & x_4 = 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 1 \\ & x_5 = x_1 + x_2 + 4 \\ & x_6 = -x_2 + 5 \\ & x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}\cdot x_2 + 6 \end{aligned}\right\}.$$

По определению все $x_i > 0$. Следовательно, на плоскости Ox_1x_2 необходимо найти область, где это требование выполняется. Каждая линия $x_i = 0$ делит эту плоскость на две полуплоскости, в одной из которых $x_i > 0$, а в другой $x_i < 0$. Часть плоскости Ox_1x_2, где одновременно все $x_i > 0$, образует область допустимых решений. Доказано, что область допустимых решений всегда представляет собой выпуклый многоугольник. Область допустимых решений для рассматриваемой задачи показана на рис. 5.

После нахождения ОДР переходим к поиску оптимального решения. Для этого выразим целевую функцию через свободные переменные и запишем

$$F(x_1, x_2) = -5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - 12 = G(x_1, x_2) - 12.$$

Очевидно, что целевая функция достигает минимума при тех же значениях x_1 и x_2, что и функция

$$G(x_1, x_2) = -5\cdot x_1 - 2\cdot x_2.$$

Минимумы функций отличаются между собой на величину свободного члена равного –12.

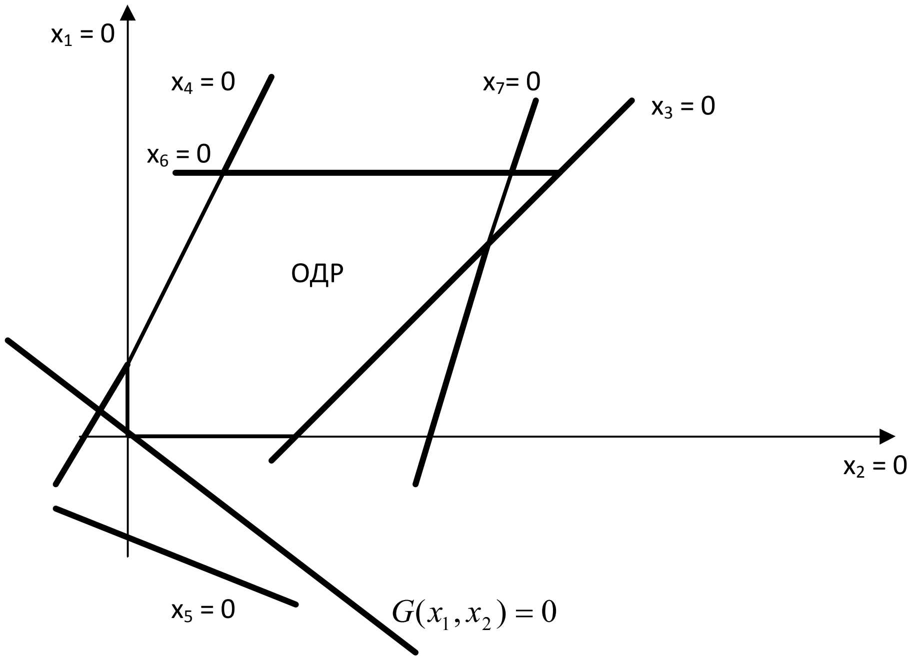


Рис.5. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.

Рассмотрим уравнение линии

$$G(x_1,x_2) = C = const.$$

Это уравнение прямой, отсекающей на координатных осях Ox_1 и Ox_2 отрезки $-C/5$ и $-C/2$, соответственно. Построим прямую линию $G(x_1,x_2)$, проходящую через начало координат системы Ox_1x_2, т.е. прямую $G(x_1,x_2) = 0$. При перемещении этой прямой параллельно самой себе значение $G(x_1,x_2)$ изменяется: в одном направлении увеличивается, а в противоположном уменьшается. Так как мы ищем минимум функции $G(x_1,x_2)$, то необходимо выбрать то из этих двух направлений, которое обеспечивают уменьшение её значений. В рассматриваемом примере это направление совпадает с положительными направлениями осей Ox_1 и Ox_2, так как коэффициенты при переменных x_1 и x_2 в $G(x_1,x_2)$ отрицательны. Очевидно, что наименьшего значения $G(x_1,x_2)$ достигает, когда прямая будет проходить через точку ОДР, наиболее удалённую от начала координат в направлении убывания $G(x_1,x_2)$. В рассматриваемом примере это точка пересечения прямых $x_7 = 0$ и $x_6 = 0$. Координаты этой точки $x_1 = 8{,}5$ и $x_2 = 5$.

После подстановки этих значений в выражения для базисных переменных найдём оптимальные значения

$$x_3 = 0{,}5,\ x_4 = 16{,}5,\ x_5 = 17{,}5$$

Оптимальные значения x_6, x_7 равны нулю, так как минимум $F1$ достигается в точке пересечения линий $x_6 = 0$ и $x_7 = 0$. Подставляя значения x_1 и x_2 в целевую функцию F, получим её оптимальное значение $min\ F = -64.5$

Из рассмотренного примера вытекают следующие общие свойства решения ОЗЛП [8].

1. Решение ОЗЛП, если оно существует, может находиться только на границе ОДР.
2. ОЗЛП будет иметь не единственное решение, а бесконечное множество решений, если одна из граней ОДР параллельна линии $G(x_1,x_2) = 0$.
3. ОЗЛП не имеет решения, если ОДР не ограничена в направлении убывания целевой функции.

4. Оптимальное решение ОЗЛП всегда достигается в одной из вершин ОДР. Решение, соответствующее одной из вершин ОДР называют *опорным решением*, а сама вершина – опорной точкой.

5. Для того чтобы найти оптимальное решение, в принципе достаточно перебрать все вершины ОДР и выбрать ту, в которой целевая функция достигает минимума.

6. Если решение ОЗЛП существует и число свободных переменных равно $n-m$, то оно всегда достигается в точке, где эти свободные переменные обращаются в нуль.

Варианты задач линейного программирования (Плис и Сливина)

Номер варианта	Целевая функция	Ограничения				
1	3x + 2y	x +y ≤ 4	x +2y ≥ 5	2x +y ≥ 6	x ≥ 0	y ≥ 0
2	3x + 2y	x +y ≤ 6	x +2y ≥ 7	2x +y ≥ 8	x ≥ 0	y ≥ 0
3	3x + 2y	x +y ≤ 8	x +2y ≥ 8	2x +y ≥ 8	x ≥ 0	y ≥ 0
4	3x + 2y	x +y ≤ 9	x +2y ≥ 7	2x +y ≥ 6	x ≥ 0	y ≥ 0
5	3x + 2y	x +y ≤ 6	x +2y ≥ 5	2x +y ≥ 3	x ≥ 0	y ≥ 0
6	3x + 2y	x +y ≤ 8	x +2y ≥ 9	2x +y ≥ 7	x ≥ 0	y ≥ 0
7	3x + 2y	x +y ≤ 7	x +2y ≥ 7	2x +y ≥ 7	x ≥ 0	y ≥ 0
8	3x + 2y	x +y ≤ 11	x +2y ≥ 11	2x +y ≥ 11	x ≥ 0	y ≥ 0
9	3x + 2y	x +y ≤ 9	x +2y ≥ 9	2x +y ≥ 9	x ≥ 0	y ≥ 0
10	3x + 2y	x +y ≤ 10	x +2y ≤ 10	2x +y ≤ 10	x ≥ 0	y ≥ 0
11	2x +5y	x + y ≥ 1	x +2y ≤ 10	2x +y ≤ 10	x ≥ 0	y ≥ 0
12	2x +5y	x + y ≥ 4	x +2y ≤ 12	2x +y ≤ 12	x ≥ 0	y ≥ 0
13	2x +5y	x + y ≥ 4	x +2y ≤ 13	2x +y ≤ 13	x ≥ 0	y ≥ 0
14	2x +5y	x + y ≥ 5	x +2y ≤ 14	2x +y ≤ 14	x ≥ 0	y ≥ 0
15	2x +5y	x + y ≥ 5	x +2y ≤ 15	2x +y ≤ 15	x ≥ 0	y ≥ 0
16	2x +5y	x + y ≥ 6	x +2y ≤ 11	2x +y ≤ 8	x ≥ 0	y ≥ 0
17	2x +5y	x + y ≥ 7	x +2y ≤ 13	2x +y ≤ 9	x ≥ 0	y ≥ 0
18	2x +5y	x + y ≥ 8	x +2y ≤ 15	2x +y ≤ 10	x ≥ 0	y ≥ 0
19	2x +5y	x + y ≥ 9	x +2y ≤ 17	2x +y ≤ 11	x ≥ 0	y ≥ 0
20	2x +5y	x + y ≥ 3	x +2y ≤ 3	2x +y ≤ 4	x ≥ 0	y ≥ 0

Варианты задания Парето оптимизации

Номер варианта	Задание	Примечание
1	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 4.501 \\ 0.304 & 0.553 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	
2	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 6.256 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 5.501 \\ 0.304 & 2.623 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 2.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	
3	$W = \begin{pmatrix} 6.243 & 4.166 & 5.656 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 4.501 \\ 2.278 & 0.553 & 3.213 & 1.423 & 3.946 & 2.439 & 2.838 \\ 2.985 & 2.936 & 2.971 & 2.7 & 2.977 & 3.013 & 3.205 \\ 3.421 & 0.699 & 3.542 & 2.459 & 3.642 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	
4	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.656 & 6.119 & 6.774 & 5.114 & 4.501 \\ 0.304 & 0.553 & 3.213 & 1.423 & 3.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.971 & 2.7 & 3.977 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 3.542 & 2.459 & 3.642 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	
5	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 2.235 \\ 0.304 & 0.553 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 0.176 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 0 \end{pmatrix}.$	
6	$W = \begin{pmatrix} 6.274 & 4.166 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 4.501 \\ 1.437 & 0.553 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4.123 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 2.786 & 0.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	
7	$W = \begin{pmatrix} 4.274 & 4.166 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 5.501 \\ 1.437 & 0.553 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4.123 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 2.786 & 0.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	
8	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 4.274 & 4.501 \\ 0.304 & 0.553 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 1.437 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 4.123 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 2.786 & 4.151 \end{pmatrix}.$	
9	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 1.234 & 5.774 & 5.114 & 4.501 \\ 0.304 & 0.553 & 0.938 & 4.243 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.789 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 1.556 & 3.567 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	
10	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 1.234 & 5.774 & 5.114 & 4.501 \\ 0.597 & 0.553 & 0.938 & 4.243 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 3.286 & 2.936 & 2.671 & 2.789 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 1.56 & 0.699 & 1.556 & 3.567 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	

11	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 1.234 & 4.023 & 5.114 & 4.501 \\ 0.597 & 0.553 & 0.938 & 4.243 & 0.324 & 2.439 & 2.838 \\ 3.286 & 2.936 & 2.671 & 2.789 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 1.56 & 0.699 & 1.556 & 3.567 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	
12	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 1.234 & 4.023 & 3.43 & 4.501 \\ 0.304 & 0.553 & 0.938 & 4.243 & 0.324 & 0.597 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.789 & 2.837 & 3.286 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 1.556 & 3.567 & 3.269 & 1.56 & 4.151 \end{pmatrix}$	
13	$W = \begin{pmatrix} 1.234 & 4.166 & 3.43 & 6.119 & 4.023 & 5.114 & 4.501 \\ 4.243 & 0.553 & 0.597 & 1.423 & 0.324 & 2.439 & 2.838 \\ 2.789 & 2.936 & 3.286 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 3.567 & 0.699 & 1.56 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	
14	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 1.234 & 5.595 & 3.43 & 5.774 & 5.114 & 4.023 \\ 0.304 & 4.243 & 0.938 & 0.597 & 1.946 & 2.439 & 0.324 \\ 4 & 2.789 & 2.671 & 3.286 & 2.837 & 3.013 & 2.837 \\ 0 & 3.567 & 1.556 & 1.56 & 3.269 & 3.865 & 3.269 \end{pmatrix}$	
15	$W = \begin{pmatrix} 4.023 & 4.166 & 1.234 & 6.119 & 3.43 & 5.114 & 4.501 \\ 0.324 & 0.553 & 4.243 & 1.423 & 0.597 & 2.439 & 2.838 \\ 2.837 & 2.936 & 2.789 & 2.7 & 3.286 & 3.013 & 3.205 \\ 3.269 & 0.699 & 3.567 & 2.459 & 1.56 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	
16	$W = \begin{pmatrix} 4.023 & 1.234 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 3.43 & 4.501 \\ 0.324 & 4.243 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 0.597 & 2.838 \\ 2.837 & 2.789 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.286 & 3.205 \\ 3.269 & 3.567 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 1.56 & 4.151 \end{pmatrix}$	
17	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 3.43 & 5.595 & 4.023 & 1.234 & 5.114 & 4.501 \\ 0.304 & 0.597 & 0.938 & 0.324 & 4.243 & 2.439 & 2.838 \\ 4 & 3.286 & 2.671 & 2.837 & 2.789 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 1.56 & 1.556 & 3.269 & 3.567 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	
18	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 3.43 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 4.023 & 1.234 \\ 0.304 & 0.597 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 0.324 & 4.243 \\ 4 & 3.286 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 2.837 & 2.789 \\ 0 & 1.56 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.269 & 3.567 \end{pmatrix}$	
19	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 4.023 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 1.234 \\ 0.597 & 0.553 & 0.324 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 4.243 \\ 3.286 & 2.936 & 2.837 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 2.789 \\ 1.56 & 0.699 & 3.269 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 3.567 \end{pmatrix}$	
20	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 4.023 & 1.234 & 5.114 & 4.501 \\ 0.597 & 0.553 & 0.938 & 0.324 & 4.243 & 2.439 & 2.838 \\ 3.286 & 2.936 & 2.671 & 2.837 & 2.789 & 3.013 & 3.205 \\ 1.56 & 0.699 & 1.556 & 3.269 & 3.567 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	

Варианты парето оптимизации с ответами

Варианты задания 4

Номер варианта	Задание	Ответ
1	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 4.501 \\ 0.304 & 0.553 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
2	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 6.256 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 5.501 \\ 0.304 & 2.623 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 2.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$
3	$W = \begin{pmatrix} 6.243 & 4.166 & 5.656 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 4.501 \\ 2.278 & 0.553 & 3.213 & 1.423 & 3.946 & 2.439 & 2.838 \\ 2.985 & 2.936 & 2.971 & 2.7 & 2.977 & 3.013 & 3.205 \\ 3.421 & 0.699 & 3.542 & 2.459 & 3.642 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
4	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.656 & 6.119 & 6.774 & 5.114 & 4.501 \\ 0.304 & 0.553 & 3.213 & 1.423 & 3.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.971 & 2.7 & 3.977 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 3.542 & 2.459 & 3.642 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
5	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 2.235 \\ 0.304 & 0.553 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 0.176 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
6	$W = \begin{pmatrix} 6.274 & 4.166 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 4.501 \\ 1.437 & 0.553 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4.123 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 2.786 & 0.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
7	$W = \begin{pmatrix} 4.274 & 4.166 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 5.501 \\ 1.437 & 0.553 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4.123 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 2.786 & 0.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

8	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 4.274 & 4.501 \\ 0.304 & 0.553 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 1.437 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 4.123 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 2.786 & 4.151 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
9	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 1.234 & 5.774 & 5.114 & 4.501 \\ 0.304 & 0.553 & 0.938 & 4.243 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.789 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 1.556 & 3.567 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
10	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 1.234 & 5.774 & 5.114 & 4.501 \\ 0.597 & 0.553 & 0.938 & 4.243 & 1.946 & 2.439 & 2.838 \\ 3.286 & 2.936 & 2.671 & 2.789 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 1.56 & 0.699 & 1.556 & 3.567 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
11	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 1.234 & 4.023 & 5.114 & 4.501 \\ 0.597 & 0.553 & 0.938 & 4.243 & 0.324 & 2.439 & 2.838 \\ 3.286 & 2.936 & 2.671 & 2.789 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 1.56 & 0.699 & 1.556 & 3.567 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
12	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 1.234 & 4.023 & 3.43 & 4.501 \\ 0.304 & 0.553 & 0.938 & 4.243 & 0.324 & 0.597 & 2.838 \\ 4 & 2.936 & 2.671 & 2.789 & 2.837 & 3.286 & 3.205 \\ 0 & 0.699 & 1.556 & 3.567 & 3.269 & 1.56 & 4.151 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
13	$W = \begin{pmatrix} 1.234 & 4.166 & 3.43 & 6.119 & 4.023 & 5.114 & 4.501 \\ 4.243 & 0.553 & 0.597 & 1.423 & 0.324 & 2.439 & 2.838 \\ 2.789 & 2.936 & 3.286 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 3.205 \\ 3.567 & 0.699 & 1.56 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
14	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 1.234 & 5.595 & 3.43 & 5.774 & 5.114 & 4.023 \\ 0.304 & 4.243 & 0.938 & 0.597 & 1.946 & 2.439 & 0.324 \\ 4 & 2.789 & 2.671 & 3.286 & 2.837 & 3.013 & 2.837 \\ 0 & 3.567 & 1.556 & 1.56 & 3.269 & 3.865 & 3.269 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
15	$W = \begin{pmatrix} 4.023 & 4.166 & 1.234 & 6.119 & 3.43 & 5.114 & 4.501 \\ 0.324 & 0.553 & 4.243 & 1.423 & 0.597 & 2.439 & 2.838 \\ 2.837 & 2.936 & 2.789 & 2.7 & 3.286 & 3.013 & 3.205 \\ 3.269 & 0.699 & 3.567 & 2.459 & 1.56 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 0 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
16	$W = \begin{pmatrix} 4.023 & 1.234 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 3.43 & 4.501 \\ 0.324 & 4.243 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 0.597 & 2.838 \\ 2.837 & 2.789 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 3.286 & 3.205 \\ 3.269 & 3.567 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 1.56 & 4.151 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
17	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 3.43 & 5.595 & 4.023 & 1.234 & 5.114 & 4.501 \\ 0.304 & 0.597 & 0.938 & 0.324 & 4.243 & 2.439 & 2.838 \\ 4 & 3.286 & 2.671 & 2.837 & 2.789 & 3.013 & 3.205 \\ 0 & 1.56 & 1.556 & 3.269 & 3.567 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$
18	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 3.43 & 5.595 & 6.119 & 5.774 & 4.023 & 1.234 \\ 0.304 & 0.597 & 0.938 & 1.423 & 1.946 & 0.324 & 4.243 \\ 4 & 3.286 & 2.671 & 2.7 & 2.837 & 2.837 & 2.789 \\ 0 & 1.56 & 1.556 & 2.459 & 3.269 & 3.269 & 3.567 \end{pmatrix}.$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

19	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 4.023 & 6.119 & 5.774 & 5.114 & 1.234 \\ 0.597 & 0.553 & 0.324 & 1.423 & 1.946 & 2.439 & 4.243 \\ 3.286 & 2.936 & 2.837 & 2.7 & 2.837 & 3.013 & 2.789 \\ 1.56 & 0.699 & 3.269 & 2.459 & 3.269 & 3.865 & 3.567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
20	$W = \begin{pmatrix} 3.43 & 4.166 & 5.595 & 4.023 & 1.234 & 5.114 & 4.501 \\ 0.597 & 0.553 & 0.938 & 0.324 & 4.243 & 2.439 & 2.838 \\ 3.286 & 2.936 & 2.671 & 2.837 & 2.789 & 3.013 & 3.205 \\ 1.56 & 0.699 & 1.556 & 3.269 & 3.567 & 3.865 & 4.151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$