



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**INSTANTON: PENDEKATAN SEMIKLASIKAL FENOMENA  
*TUNNELING* ANTARRUANG VAKUM**

**SKRIPSI**

**ILHAM PRASETYO  
1006681413**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI S1 FISIKA REGULER  
PEMINATAN FISIKA NUKLIR DAN PARTIKEL  
DEPOK  
JANUARI 2015**



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**INSTANTON: PENDEKATAN SEMIKLASIKAL FENOMENA  
*TUNNELING* ANTARRUANG VAKUM**

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains**

**ILHAM PRASETYO**

**1006681413**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**PROGRAM STUDI S1 FISIKA REGULER**

**PEMINATAN FISIKA NUKLIR DAN PARTIKEL**

**DEPOK**

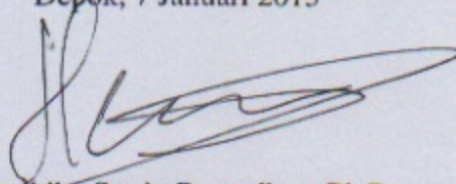
**JANUARI 2015**

## HALAMAN PERSETUJUAN

**Judul** : Instanton: Pendekatan Semiklasikal Fenomena *Tunneling* Antar-  
ruang Vakum  
**Nama** : Ilham Prasetyo  
**NPM** : 1006681413

Laporan Skripsi ini telah diperiksa dan disetujui.

Depok, 7 Januari 2015



Handhika Satrio Ramadhan, Ph.D

Pembimbing Skripsi

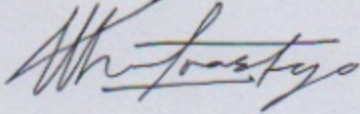


## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Ilham Prasetyo

NPM : 1006681413

Tanda Tangan : 

Tanggal : 7 Januari 2015



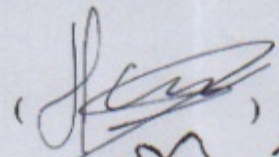
## HALAMAN PENGESAHAN

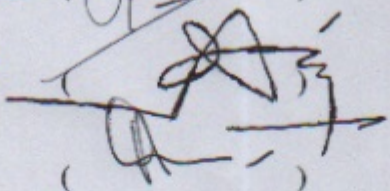
Skripsi ini diajukan oleh


Nama : Ilham Prasetyo  
NPM : 1006681413  
Program Studi : S1 Fisika Reguler  
Judul Skripsi : Instanton: Pendekatan Semiklasikal Fenomena *Tunneling* Antarruang Vakum

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Fisika Reguler, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

## DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Handhika Satrio Ramadhan, Ph.D (  )

Penguji : Muhammad Aziz Majidi, Ph.D (  )

Penguji : Dr. Anto Sulaksono (  )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 7 Januari 2015



## HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ilham Prasetyo  
NPM : 1006681413  
Program Studi : S1 Fisika Reguler  
Peminatan : Fisika Nuklir dan Partikel  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan  
Alam  
Jenis Karya : Skripsi

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

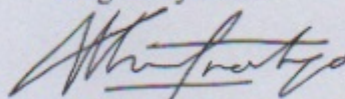
**Instanton: Pendekatan Semiklasikal Fenomena *Tunneling* Antarruang  
Vakum**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok  
Pada tanggal : 7 Januari 2015

Yang menyatakan

  
Ilham Prasetyo

## ABSTRAK

Nama : Ilham Prasetyo  
Program Studi : S1 Fisika Reguler  
Judul : Instanton: Pendekatan Semiklasikal Fenomena *Tunneling*  
Antarruang Vakum

Pendekatan semi-klasikal dapat digunakan untuk menjelaskan fenomena kuantum yang tidak mampu dijelaskan oleh teknik perturbasi. Menggunakan ruang Euklidean, efek *tunneling* antar vakum pada suatu potensial dapat dipelajari. Solusi ini biasa disebut dengan instanton, dengan probabilitas yang sebanding dengan  $\exp(-S_E/\hbar)$  dengan  $S_E$  adalah aksi pada ruang Euklidean. Menggunakan aproksimasi *thin-wall*, solusi dan aksi instanton dapat dicari secara analitik. Pada penelitian ini kami menghitung solusi instanton dan aksinya tanpa pendekatan *thin-wall* secara perhitungan numerik menggunakan *shooting method*.

Kata Kunci: *pendekatan semiklasik, aproksimasi thin-wall, solusi numerik, shooting method*

## ABSTRACT

Name : Ilham Prasetyo  
Program : Undergraduate Physics (Regular Program)  
Title : Instanton: Semiclassical Approach of Tunneling between Vacuum Spaces Phenomenon

Semiclassical approach could be used to explain quantum phenomena which can not be explained using perturbation technique. Using Euclidean space, tunneling effect between vacuums of a potential can be investigated. The solution is called instanton, whose probability is proportional to  $\exp(-S_E/\hbar)$  with  $S_E$  an action in Euclidean space. Using thin-wall approximation, the solution and its action can be derived analytically. In this research, we calculate instanton solution and its action without thin-wall approximation with numerical computation using shooting method.

Keywords: *semiclassical approach, thin-wall approximation, numerical solution, shooting method*



## KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan ke hadirat Allah SWT. karena atas berkat rahmat, ridho dan hidayah-Nya, saya dapat menyelesaikan skripsi ini tepat waktu. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Rosulullah Muhammad SAW. beserta seluruh keluarga, sahabat, dan pengikutnya yang selalu setia mengamalkan ajaran Islam hingga akhir zaman.

Skripsi ini ditulis dalam rangka memenuhi persyaratan untuk mendapatkan gelar sarjana sains jurusan fisika di Fakultas MIPA Universitas Indonesia. Saya menyadari dalam pembuatan skripsi ini saya mendapatkan bantuan dari banyak pihak. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada

1. Handhika Satrio Ramadhan, Ph.D selaku dosen pembimbing yang telah menyediakan waktu dan tenaga dalam mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini,
2. Muhammad Aziz Majidi, Ph.D selaku penguji I dan Dr. Anto Sulaksono selaku penguji II atas diskusi dalam penyelesaian tugas akhir ini,
3. Prof. Dr. Terry Mart, selaku ketua peminatan fisika nuklir dan partikel dan pembimbing akademis yang telah memberikan banyak motivasi menarik,
4. ayah dan bunda yang telah mengajarkan saya bagaimana menghadapi kehidupan dan kesabaran mereka membimbing saya di masa-masa krisis,
5. rekan-rekan dan senior-senior mahasiswa fisika, khususnya teman-teman satu peminatan Nuklir dan Partikel: Muhammad Iqbal, Brian Agung, Achmad Prayogi, Ali Ihsanul Qauli, Khairi Trisnayadi, L'dy Moscow Abdullah, Putu Adi Kusuma Yudha, Fera Gustina, Miranda, Wowo, Haryanto, bang Yasir Mukhtar, kak Khalid, kak Jay, kak Ika, bang Zaky, kak Ihda, Adit, Samson, Jafar, Eko, Fitri, dan masih banyak lagi yang tidak dapat disebutkan semuanya, atas saran-saran dan diskusi selama masa perkuliahan serta suasana yang menyenangkan saat diskusi di lab kita bersama, lab teori dan lab fislan,
6. guru-guru fisika SMP, SMA, dan, terutama, guru fisika bimbingan belajar saya yang telah memperkenalkan fisika sebagai ilmu yang menarik dan sesuai dengan kemampuan saya dan memotivasi saya untuk mempelajarinya,

7. serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan di sini atas dukungan dan doa kepada penulis selama penyelesaian tugas akhir ini.

Akhir kata saya berdoa kepada Allah SWT. agar diperkenankan untuk membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu dalam pengerjaan skripsi ini dengan mengamalkan apapun yang saya pelajari semasa perkuliahan, minimal dalam bentuk skripsi ini. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan instanton menjadi topik penelitian yang menarik untuk dipelajari lebih banyak orang.

Topik dalam skripsi ini sangat menarik untuk dipelajari walaupun sejauh yang saya ketahui saya adalah salah satu dari sedikit yang mempelajari instanton di bawah bimbingan pak Handhika di fisika UI, sementara akhir-akhir ini topik ini sedang cukup terkenal di kalangan fisikawan, dilihat dari semakin banyak kutipan paper-paper yang menjadi landasan skripsi ini saat penulisan skripsi ini berlangsung. Semoga skripsi ini bisa dijadikan acuan untuk penelitian lanjutan topik instanton ini atau yang berhubungan dengannya bagi mahasiswa-mahasiswa selanjutnya.

Depok, 7 Januari 2015

Ilham Prasetyo

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	<b>i</b>
<b>LEMBAR PERSETUJUAN</b>	<b>ii</b>
<b>LEMBAR PERNYATAAN ORISINALITAS</b>	<b>iii</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b>	<b>iv</b>
<b>LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRAK</b>	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>vii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>viii</b>
<b>Daftar Isi</b>	<b>x</b>
<b>Daftar Gambar</b>	<b>xii</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Perumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan Penelitian . . . . .	2
1.4 Metode Penelitian . . . . .	2
1.5 Sistematika Penulisan . . . . .	2
<b>2 TEORI DASAR</b>	<b>4</b>
2.1 <i>Tunneling</i> antar Vakum pada Banyak Dimensi . . . . .	4
2.2 <i>Tunneling</i> antar Vakum pada Teori Medan . . . . .	9
2.3 Aproksimasi <i>Thin Wall</i> . . . . .	13
2.4 Keadaan <i>False Vacuum</i> setelah <i>Bubble</i> Berisikan <i>True Vacuum</i> ter-materialisasi . . . . .	16
2.5 Instanton pada Wilayah yang Berhubungan dengan Ranah Eksperimental . . . . .	18
2.5.1 Analogi dengan Efek Josephson 'Kosmik' . . . . .	18



2.5.2	Konversi Bintang Neutron menjadi <i>Strange Stars</i> . . . . .	19
2.5.3	Simulasi Instanton pada Model Eksperimental <i>Ultra-cold Spinor Bose Gas</i> . . . . .	19
2.5.4	Sistem dengan Boson dan Fermion yang Berinteraksi . . . . .	19
2.5.5	<i>Macroscopic Quantum Tunneling in long Josephson Junctions</i> . . . . .	19
<b>3</b>	<b>METODE PERHITUNGAN</b>	<b>20</b>
3.1	Efek Keempat Parameter terhadap bentuk Potensial Tiga Sumur . . . . .	20
3.2	Tiga Bentuk Potensial Utama yang Akan Kita Gunakan . . . . .	25
3.3	Perhitungan Numerik untuk Mengitung Solusi dan Aksi di Luar Pendekatan <i>Thin-Wall Limit</i> . . . . .	26
3.3.1	<i>Shooting Method</i> dengan metode Runge-Kutta . . . . .	27
3.3.2	<i>Code FORTRAN</i> serta Penggunaannya . . . . .	28
<b>4</b>	<b>HASIL PERHITUNGAN DAN ANALISIS</b>	<b>29</b>
4.1	Potensial dengan $V_A < V_C < V_B$ . . . . .	29
4.2	Potensial dengan $V_A < V_B < V_C$ . . . . .	31
4.3	Potensial dengan $V_B < V_A < V_C$ . . . . .	34
4.4	Jika Potensial Dicerminkan . . . . .	36
4.5	Khusus untuk Potensial dengan $V_A > V_B > V_C$ atau $V_C < V_B < V_A$ . . . . .	41
4.6	Khusus untuk Potensial dengan $V_A > V_C > V_B$ atau $V_B < V_C < V_A$ . . . . .	43
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>45</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	45
5.2	Saran . . . . .	45
	<b>Daftar Acuan</b>	<b>46</b>
	<b>LAMPIRAN</b>	<b>1</b>
<b>A</b>	<b><i>Code FORTRAN 90</i> untuk Komputasi menggunakan Metode Tembak dengan Runge-Kutta Orde-4</b>	<b>2</b>
<b>B</b>	<b>Koreksi Kuantum untuk Koefisien Amplitudo Probabilitas</b>	<b>7</b>
<b>C</b>	<b>Efek Gravitasi pada <i>Bubble</i></b>	<b>14</b>

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Potensial dua sumur ( $\epsilon > 0$ ) untuk kasus mekanika kuantum . . . . .	6
2.2	Potensial dua sumur ( $\epsilon > 0$ ) untuk kasus teori medan . . . . .	9
2.3	Solusi <i>undershoot</i> (hijau), solusi <i>overshoot</i> (merah), dan solusi yang tepat (biru) . . . . .	11
3.1	Potensial yang divariasikan $a$ dengan $b = 1$ , $c = 0.25$ , $d = 1$ . . . . .	22
3.2	Potensial yang divariasikan $b$ dengan $a = 4$ , $c = 0.25$ , $d = 1$ . . . . .	22
3.3	Potensial yang divariasikan $c$ dengan $a = 4$ , $b = 1$ , $d = 1$ . . . . .	23
3.4	Potensial yang divariasikan $d$ dengan $a = 4$ , $b = -1$ , $c = 0.25$ . . . . .	23
3.5	Potensial yang divariasikan $d$ dengan $a = 4$ , $b = 0$ , $c = 0.25$ . . . . .	24
3.6	Potensial yang divariasikan $d$ dengan $a = 4$ , $b = 1$ , $c = 0.25$ . . . . .	24
3.7	3 bentuk potensial yang digunakan: $V_B < V_A < V_C$ (atas), $V_A < V_B < V_C$ (tengah), $V_A < V_C < V_B$ (bawah) . . . . .	25
3.8	<i>Shooting Method</i> untuk mencari gradien . . . . .	26
4.1	Bentuk potensial untuk $V_A < V_C < V_B$ . . . . .	29
4.2	Solusi <i>tunneling</i> dari $V_B$ ke $V_A$ potensial $V_A < V_C < V_B$ . . . . .	30
4.3	Solusi <i>tunneling</i> dari $V_B$ ke $V_C$ potensial $V_A < V_C < V_B$ . . . . .	30
4.4	Bentuk potensial untuk $V_A < V_B < V_C$ . . . . .	31
4.5	Solusi <i>tunneling</i> dari $V_B$ ke $V_A$ potensial $V_A < V_B < V_C$ . . . . .	32
4.6	Solusi <i>tunneling</i> dari $V_C$ ke $V_B$ potensial $V_A < V_B < V_C$ . . . . .	32
4.7	Solusi <i>tunneling</i> dari $V_C$ ke $V_A$ potensial $V_A < V_B < V_C$ hanya secara tidak langsung . . . . .	33
4.8	Bentuk potensial untuk $V_B < V_A < V_C$ . . . . .	34
4.9	Solusi <i>tunneling</i> dari $V_A$ ke $V_B$ potensial $V_B < V_A < V_C$ . . . . .	35
4.10	Solusi <i>tunneling</i> dari $V_C$ ke $V_B$ potensial $V_B < V_A < V_C$ . . . . .	35
4.11	Bentuk potensial untuk $V_C < V_A < V_B$ . . . . .	36
4.12	Solusi instanton potensial untuk $V_C < V_A < V_B$ . . . . .	37
4.13	Solusi instanton potensial untuk $V_C < V_A < V_B$ . . . . .	37
4.14	Bentuk potensial untuk $V_C < V_B < V_A$ . . . . .	38
4.15	Solusi-solusi instanton untuk $V_C < V_B < V_A$ . . . . .	38
4.16	Solusi-solusi instanton untuk $V_C < V_B < V_A$ . . . . .	39
4.17	Bentuk potensial untuk $V_B < V_C < V_A$ . . . . .	39

4.18	Solusi instanton untuk $V_B < V_C < V_A$ . . . . .	40
4.19	Solusi instanton untuk $V_B < V_C < V_A$ . . . . .	40
4.20	Potensial dengan $V_A < V_B < V_C$ . . . . .	41
4.21	Solusi instanton B ke A untuk $V_A < V_B < V_C$ . . . . .	42
4.22	Solusi instanton C ke B untuk $V_A < V_B < V_C$ . . . . .	42
4.23	Solusi instanton loncatan tak langsung untuk $V_A < V_B < V_C$ . . . .	43
B.1	Grafik potensial, solusi, aksi Euklidean dan solusi dalam ruang kompleks yang dibahas pada alinea tentang mode negatif . . . . .	11



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Mekanika kuantum merupakan cabang fisika yang menjelaskan perilaku dalam ukuran relatif kecil dibandingkan dengan ukuran benda-benda yang mengikuti hukum fisika klasik. Fisika kuantum secara historis salah satunya berawal dari usaha menjelaskan fenomena *blackbody radiation*. Dalam kuliah mekanika kuantum nonrelativistik, seseorang diajarkan mengenai persamaan Schrödinger yang dengan sukses menjelaskan fenomena *tunneling* yang terjadi pada fenomena peluruhan sinar alfa.

Teori medan merupakan teori yang dapat diperlakukan secara umum mekanika klasik dan kuantum. Kita bisa menggunakan teori medan untuk memenuhi keadaan fisis yang ditinjau. Jika kita mau menggunakan mekanika klasik nonrelativistik, maka teori medan tersebut dimodifikasi dengan operasi aljabar tertentu agar menghasilkan persamaan gerak yang sesuai mekanika klasik nonrelativistik. Hal yang sama juga bisa digunakan untuk mekanika klasik relativistik, mekanika kuantum nonrelativistik, dan mekanika kuantum relativistik.

Teori medan pada penelitian ini menggunakan teori medan kuantum relativistik. Sama halnya seperti mekanika kuantum nonrelativistik, teori medan ini dapat menjelaskan fenomena *scattering* energi tinggi menggunakan perturbasi. Teknik ini dapat menjelaskan banyak interaksi partikel-partikel berukuran kecil saat bertumbukan baik pada energi tinggi maupun energi rendah. Pada energi rendah, teori medan kuantum relativistik akan memberikan hasil yang sama dengan hasil dari mekanika kuantum nonrelativistik.

Ada juga teori semiklasik yang merupakan metode klasikal yang bisa menjelaskan fenomena kuantum yang tidak bisa dijelaskan menggunakan metode perturbasi. Metode ini salah satunya adalah aproksimasi WKB yang menjelaskan *tunneling*, aspek kuantum yang tidak bisa dicari penjelasannya dengan metode perturbasi. Metode ini akan memberikan probabilitas yang bergantung pada aksi pada ruang Euklidean, yang solusinya biasa disebut sebagai solusi instanton. Pada skripsi ini kami akan membahas mengenai instanton pada bagian klasiknya saja.

## 1.2 Perumusan Masalah

Penelitian ini merujuk pada [1] dan [2] yang telah memberikan perhitungan analitik kemudian kami mencari tahu bagaimana fenomena yang terjadi saat menghitung tanpa menggunakan aproksimasi *thin wall* yang hanya bisa dilakukan dengan numerik. Kami membatasi perhitungan numerik hanya dalam menentukan aksi Euclidean pada referensi [1] tidak sampai pada koreksi kuantum pada referensi [3] dan tidak menghitung solusi yang melibatkan gravitasi [4]; keduanya kami tuliskan secara singkat pada lampiran untuk pembaca yang ingin mendalami lebih jauh. Dari perhitungan, kami akan mendapatkan hasil aksi berdasarkan potensial yang diberikan.

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah melihat pengaruh bentuk potensial dengan bentuk umum potensial transisi fase pada aksi Euclidean yang akan mempengaruhi probabilitas tunneling dari sebuah *false vacuum* ke *true vacuum*. Penelitian ini melihat bagaimana solusi sebenarnya dari perhitungan numerik tanpa menggunakan aproksimasi *thin wall* [1] dan terbatas pada teori semiklasikal. Hasil aksi ini akan menentukan probabilitas terjadinya *tunneling*.

## 1.4 Metode Penelitian

Penelitian kami menggunakan metode *shooting* dengan Runge-Kutta orde empat untuk menghasilkan solusi. Dari solusi kemudian dihitung aksinya yang akan berbanding terbalik terhadap probabilitas *tunneling*. Di sini kami menggunakan potensial tiga sumur, yang memiliki solusi yang tidak dimiliki oleh potensial dua sumur. Paper acuan kami [1] menggunakan potensial dua sumur.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan laporan adalah sebagai berikut:

- Bab 1 PENDAHULUAN  
Bab ini kami isi dengan deskripsi singkat latar belakang, merumusan masalah, tujuan penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- Bab 2 TEORI DASAR  
Bab ini kami isi dengan deskripsi lebih detil mengenai instanton merujuk

pada literatur [1, 3].

- Bab 3 METODE PERHITUNGAN

Bab ini kami isi dengan mendeskripsikan *script* FORTRAN yang kami gunakan untuk perhitungan dan kami jelaskan juga penggunaannya untuk membuat grafik menggunakan *software* gnuplot.

- Bab 4 HASIL PERHITUNGAN DAN ANALISIS

Bab ini kami isi dengan hasil perhitungan berupa grafik dan sebagainya dan menganalisisnya.

- Bab 5 KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini kami isi dengan kesimpulan dari analisis kami.



## BAB 2

### TEORI DASAR

Bagian ini kami kutip dari [1] dan [2]. Bab ini kami bagi menjadi empat bagian. Bagian pertama kami konsentrasikan pada pemahaman konversi dari ruang-waktu Minkowskian ke ruang Euklidean pada satu dimensi ruang dan satu dimensi waktu kemudian dilanjutkan pada banyak dimensi. Bagian kedua kami diskusikan aksi Minkowskian dan aksi Euklidean dalam bentuk teori medan. Pada dua bagian pertama akan dibahas secara berdampingan dengan syarat batas yang akan dibutuhkan untuk *tunneling* vakum. Bagian ketiga akan kami bahas pendekatan *thin-wall* untuk memudahkan mencari solusi analitik persamaan gerak. Bagian keempat kami membahas bagaimana keadaan yang terjadi saat *tunneling* telah terjadi. Pada bagian-bagian selanjutnya, kami diskusikan perihal lain yang berhubungan dengan instanton.

#### 2.1 *Tunneling* antar Vakum pada Banyak Dimensi

Fenomena *tunneling* merupakan fenomena kuantum yang dapat dijelaskan melalui aproksimasi WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin). Kami mendeskripsikan ini berpegang pada referensi [5]. Bentuk akhir berupa probabilitas per satuan volume

$$\frac{\Gamma}{\mathcal{V}} = \mathcal{A}e^{-B/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (2.1)$$

Bentuk ini berasal dari persamaan Schrödinger independen waktu dengan satu dimensi ruang

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x),$$

atau

$$-\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(x) = \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}, \quad (2.2)$$

kita masukkan solusi asumsi

$$\psi(x) = A(x)e^{iB(x)/\hbar}, \quad (2.3)$$

turunan pertama terhadap  $x$

$$\frac{d\psi}{dx} = e^{iB/\hbar} \left[ \frac{dA}{dx} + \frac{i}{\hbar} A \frac{dB}{dx} \right],$$

turunan kedua terhadap  $x$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = e^{iB/\hbar} \left[ \frac{d^2A}{dx^2} + \frac{2i}{\hbar} \frac{dA}{dx} \frac{dB}{dx} + \frac{i}{\hbar} A \frac{d^2B}{dx^2} - \frac{1}{\hbar^2} A \left( \frac{dB}{dx} \right)^2 \right], \quad (2.4)$$

sehingga

$$-\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] A = \frac{d^2A}{dx^2} - \frac{1}{\hbar^2} A \left( \frac{dB}{dx} \right)^2 + \frac{i}{\hbar} \left( 2 \frac{dA}{dx} \frac{dB}{dx} + A \frac{d^2B}{dx^2} \right). \quad (2.5)$$

Karena selisih energi bernilai riil, komponen imajiner sama dengan nol

$$2 \frac{dA}{dx} \frac{dB}{dx} + A \frac{d^2B}{dx^2} = 0,$$

dikalikan dengan  $(1/A)(dx/dB)$

$$\frac{d(dB/dx)}{dx} \frac{1}{dB/dx} + \frac{2}{A} \frac{dA}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(dB/dx)}{dx} \frac{d}{d(dB/dx)} \left( \ln \frac{dB}{dx} \right) + 2 \frac{dA}{dx} \frac{d}{dA} (\ln A) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \ln \frac{dB}{dx} + 2 \ln A \right] = 0,$$

$$\ln \frac{dB}{dx} + 2 \ln A = \ln C,$$

dengan  $C > 0$ , sehingga

$$A^2 \frac{dB}{dx} = C. \quad (2.6)$$

Kemudian, bagian riilnya

$$\frac{1}{A} \frac{d^2A}{dx^2} + \frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{dB}{dx} \right)^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)].$$

Dari sini kita aproksimasikan

$$\frac{1}{A} \frac{d^2A}{dx^2} \ll \frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{dB}{dx} \right)^2 = \frac{1}{\hbar^2} \frac{C^2}{A^4}, \quad (2.7)$$

yang akan membuat  $A(x)$  singular di *turning points* saat  $E - V(x) = 0$ . Hal ini membuat aproksimasi 2.7 hanya berlaku pada posisi selain *turning points*, inilah batasan pendekatan WKB. Dari 2.7, kita bisa dapatkan

$$B(x) = \int dx \sqrt{2m[E - V(x)]},$$

dengan demikian solusi WKB menjadi

$$\psi(x) = A(x)e^{i \int dx \sqrt{2m[E - V(x)]}/\hbar}.$$

$B$  riil saat  $E > V(x)$  dan  $B$  imajiner saat  $E < V(x)$ . Probabilitas sebuah gelombang jika  $E < V(x)$  terjadi adalah

$$|\psi(x)|^2 = |A(x)|^2 e^{-2 \int dx \sqrt{2m[V(x) - E]}/\hbar}.$$

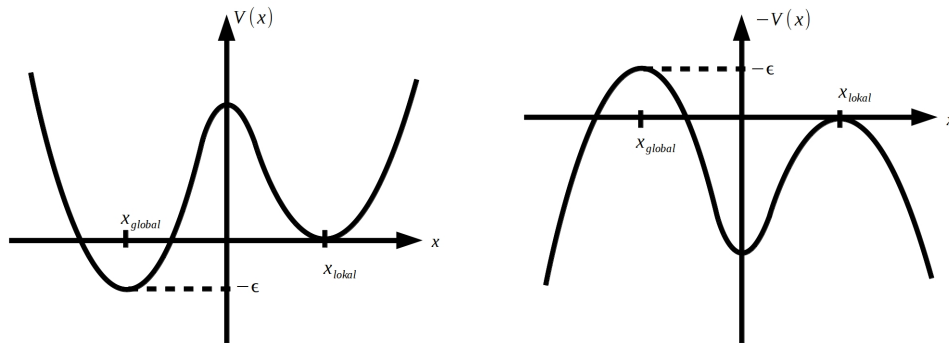
Ini jika kita kembalikan pada persamaan 2.1 menjadikan

$$\mathcal{A} = |A(x)|^2, \quad (2.8)$$

dan

$$\mathcal{B} = 2 \int dx \sqrt{2m[V(x) - E]}. \quad (2.9)$$

Koefisien  $\mathcal{B}$  adalah yang akan kami tinjau secara mendalam pada skripsi ini. Koefisien  $\mathcal{A}$  tidak kami bahas di sini dan pembaca dapat melihat pembahasannya pada referensi [3]. Koefisien  $\mathcal{A}$  hanya kami bahas secara singkat pada bagian lampiran B.



**Gambar 2.1:** Potensial dua sumur ( $\epsilon > 0$ ) untuk kasus mekanika kuantum

Sekarang kita bahas mengenai *tunneling* antar sumur potensial. Jika kita memiliki sebuah potensial yang memiliki dua sumur, seperti potensial Higgs, dan salah

satu sumur lebih rendah daripada yang lain, maka secara kuantum akan terjadi *tunneling* dari sumur yang lebih dangkal  $V(x_{\text{lokal}})$  ke sumur yang lebih dalam  $V(x_{\text{global}})$ . Fenomena *tunneling* ini dapat dijelaskan melalui metode semiklasik WKB. Objek yang mengalami *tunneling* ini adalah partikel yang diam.

Kita ketahui energi sebuah bermassa  $m = 1$  dalam ruang satu dimensi  $x$  adalah

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x). \quad (2.10)$$

kemudian kita turunkan terhadap  $t$

$$0 = \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dt}$$

dan kedua sisi dikalikan  $dt/dx$  menjadi

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx}.$$

Ini merupakan persamaan gerak yang serupa dengan hasil variasi aksi sebelumnya. Dari persamaan 2.10 kita dapatkan

$$\int dx = \int dt \sqrt{2[E - V(x)]}. \quad (2.11)$$

Persamaan ini adalah solusi  $x$  yang kita cari sebagai lintasan terpendek. Kita ketahui sifat dari alam adalah selalu mencari aksi terkecil. Lintasan terpendek ini harus memenuhi simpangan  $x$  harus nol  $\delta x = 0$ . Kita perhatikan di sini secara seksama bahwa *tunneling* untuk sebuah benda bermassa  $m = 1$  dalam satu dimensi ruang memiliki probabilitas persatuan volume

$$\frac{\Gamma}{\mathcal{V}} = \mathcal{A}(x) e^{-\mathcal{B}/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \text{ dengan } \mathcal{B} = 2 \int dx \sqrt{2[V(x) - E]}$$

Kita gunakan definisi waktu Euklidean  $\tau = it$  dan kita gunakan *time translation invariance* menjadikan

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= 2 \int_{x_{\text{global}}}^{x_{\text{lokal}}} dx \sqrt{2[V(x) - E]} = 2 \int_{x_{\text{global}}}^{x_{\text{lokal}}} dx \sqrt{\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2} = 2 \int_{-\infty}^0 d\tau \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) - E \right], \end{aligned}$$



dengan  $V - E = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2$ . Energi partikel sebelum mengalami *tunneling* adalah sama dengan titik terendah sumur potensial lokal yang membuat energi potensial dan energi kinetik terhadap titik sumur potensial lokal tersebut nol. Aksi Euklidean didefinisikan sebagai

$$S_E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right]. \quad (2.12)$$

Saat sebelum dan sesudah *tunneling*, partikel tidak memiliki energi kinetik. Saat sebelum *tunneling*, partikel tidak memiliki energi potensial terhadap titik terendah sumur lokal, tetapi partikel kemudian memiliki energi potensial karena posisinya setelah *tunneling* berada lebih tinggi daripada titik terendah sumur potensial global. Hal ini membuat aksi Euklidean pada titik terendah sumur lokal menjadi

$$S_E(x_{\text{lokal}}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [V(x_{\text{lokal}})],$$

yang belum tentu bernilai nol. Pada kasus tanpa melibatkan gravitasi, kita bisa menaikturunkan potensial agar aksi Euklidean pada titik terendah lokal ini nol. Pada kasus yang melibatkan gravitasi, kita tidak bisa menaikturunkan potensial karena ini akan memberikan kontribusi berupa konstanta kosmologi. Sehingga, kita harus mendefinisikan

$$\mathcal{B} = S_E(x) - S_E(x_{\text{lokal}}), \quad (2.13)$$

sebagai definisi umum di mana jika partikel tidak mengalami *tunneling* maka  $\mathcal{B} = 0$ . Definisi ini berguna untuk mempelajari instanton yang melibatkan gravitasi yang saya paparkan pada lampiran C. Karena  $E = V(x_{\text{lokal}})$  sehingga kita dapatkan

$$\mathcal{B} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) - V(x_{\text{lokal}}) \right] = S_E(x) - S_E(x_{\text{lokal}}). \quad (2.14)$$

Jika divariasikan terhadap  $\delta x$  kita dapatkan persamaan gerak

$$-\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dV}{dx} = 0. \quad (2.15)$$

Persamaan gerak Euklidean ini seperti persamaan gerak Newtonian dengan potensial  $-V(x)$ . Persamaan-persamaan ini memiliki syarat batas yang bisa dilihat dari gambar 2.1. Pada gambar pertama kita dapat melihat bahwa vakum mengalami *tunneling* dari sumur potensial kanan ke sumur potensial kiri. Pada gambar

kedua kita bisa melihat bahwa *tunneling* seperti bergulirnya sebuah bola dari kiri ke kanan. Dalam bentuk lebih mendetail dikarenakan persamaan geraknya menyerupai persamaan gerak Newtonian dengan potensial  $-V$ ,

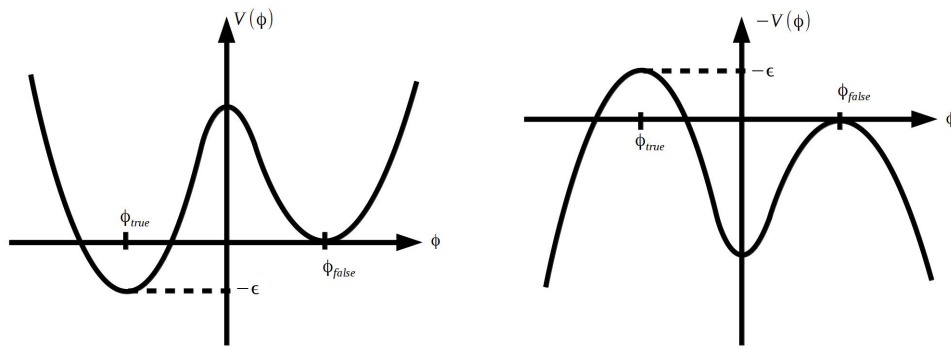
1. bola bergulir dari puncak minimum lokal pada  $\tau \rightarrow -\infty$ ,
2. kemudian berhenti pada dekat puncak minimum global pada  $\tau = 0$ ,
3. kemudian bergulir menuju dan berhenti pada puncak minimum lokal pada  $\tau \rightarrow +\infty$ .

Kita bisa melihat bahwa fenomena *tunneling* ini terjadi dari waktu  $-\infty < \tau \leq 0$ . Pada saat waktu  $0 \leq \tau < \infty$ , kita bisa melihatnya sebagai fenomena yang waktunya berjalan mundur. Fenomena waktu berjalan mundur ini yang kita jadikan sebagai objek perhitungan utama. Sehingga, fenomena *tunneling* ini tidak bergantung panah waktu. Dengan deskripsi di atas, kita dapatkan syarat batas

$$\left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} x = x_{\text{lokal}}. \quad (2.16)$$

Deskripsi di atas seperti deskripsi pantulan sehingga biasa disebut sebagai *bounce*.

## 2.2 Tunneling antar Vakum pada Teori Medan



**Gambar 2.2:** Potensial dua sumur ( $\epsilon > 0$ ) untuk kasus teori medan

Pada teori medan kuantum relativistik, kita gunakan istilah lain pada kedua minimum yang kita namakan untuk medan pada minimum lokal sebagai *false vacuum* dan medan pada minimum global sebagai *true vacuum*. Kenapa dinamakan *false vacuum* ialah karena pada minimum lokal, medan memiliki energi kinetik nol dan energi potensial yang nol terhadap minimum lokal. Karena energi kinetik dan energi

potensial yang nol pada sumur lokal, walaupun energi potensialnya tidak nol terhadap minimum global, maka bisa dilihat bahwa medan tersebut sebagai medan untuk sistem vakum yang sementara, atau *false vacuum*, dikarenakan adanya kemungkinan *tunneling* ke vakum pada minimum global. Hal yang mirip juga terjadi pada minimum global yang kemudian dinamakan *true vacuum* karena vakum ini adalah vakum yang paling rendah sehingga tidak terjadi *tunneling* lagi.

Persamaan gerak dan aksi Euklidean pada teori medan yang ditranslasikan dari mekanika kuantum pada subbab sebelumnya adalah

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.17)$$

dan aksi Euklideannya

$$S_E = \int d\tau \, d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.18)$$

dan syarat batasnya menjadi

$$\left. \frac{d\phi}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (2.19)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi = \phi_{\text{false}}, \quad (2.20)$$

akan tetapi syarat harus ditambahkan karena agar  $\mathcal{B}$  berhingga dengan

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi = \phi_{\text{false}}. \quad (2.21)$$

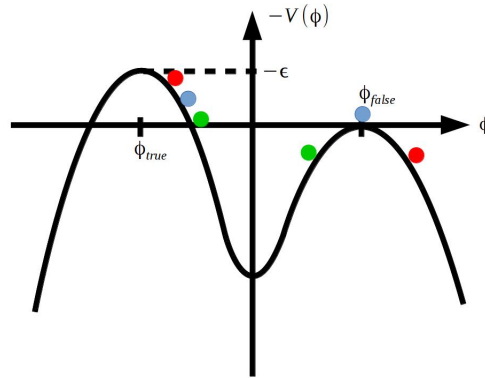
Metrik Minkowski kita ubah menjadi Euklidean

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

dikarenakan  $t = i\tau$ . Hal ini dapat memberikan kita jari-jari bola empat dimensi dari ruang Euklidean

$$\rho^2 = \tau^2 + x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.22)$$

Kita desain bahwa solusi  $\phi$  hanya bergantung  $\rho$  dan independen sudut-sudutnya (dalam hal ini ada tiga sudut:  $\alpha$ ,  $\theta$ , dan  $\varphi$ ) sehingga solusi ini invarian terhadap



**Gambar 2.3:** Solusi *undershoot* (hijau), solusi *overshoot* (merah), dan solusi yang tepat (biru)

O(4). Dengan ini, syarat batas menjadi

$$\left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad (2.23)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi = \phi_{\text{false}} \quad (2.24)$$

dan dengan aksi pada koordinat bola empat dimensi di mana *bounce* berbentuk bola menghasilkan

$$\mathcal{B} = \int_0^\infty d\rho \, 2\pi^2 \rho^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 + V(\phi) - V(\phi_{\text{false}}) \right]. \quad (2.25)$$

Kemudian, kita variasikan terhadap  $\delta\phi$  sehingga didapatkan persamaan gerak

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = -\frac{3}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (2.26)$$

Persamaan ini memiliki sifat unik di mana ada suku seperti hambatan  $(3/\rho)(d\phi/d\rho)$  yang koefisiennya, yaitu  $(3/\rho)$ , berkurang saat  $\rho \rightarrow \infty$  dan tak hingga saat  $\rho = 0$ . Hal inilah yang membuat syarat batas 2.23 menjadikan suku hambatan bernilai berhingga. Persamaan ini juga membuat sulit untuk memperkirakan dimana lokasi awal yang tepat agar memenuhi syarat batas 2.24. Jika suku ini tidak ada, maka kita dapat dengan mudah menentukan posisi  $\phi(\rho = 0)$  agar  $V[\phi(\rho = 0)] = V(\phi_{\text{false}})$ . Hal ini juga yang menjadi landasan bagi kami untuk melakukan perhitungan secara numerik, dikarenakan aproksimasi *thin-wall* pada bagian berikutnya yang berlandaskan pada anggapan perbedaan energi vakum  $\epsilon = V(\phi_{\text{false}}) - V(\phi_{\text{true}})$  yang kecil. Untuk  $\epsilon$  bernilai besar, kita membutuhkan perhitungan numerik.

Sebelum ke subbab berikutnya, mari kita bahas terlebih dahulu argumen *undershoot* dan *overshoot*. Motivasi dari kedua argumen ini adalah untuk mencari  $\phi(\rho = 0)$ . *Undershoot* akan memberikan  $\phi(\rho \rightarrow \infty) \ll \phi_{\text{false}}$  dan *overshoot* akan memberikan  $\phi(\rho \rightarrow \infty) \gg \phi_{\text{false}}$ . Solusi yang kita cari memiliki  $\phi(\rho = 0)$  yang akan memberikan hasil  $\phi(\rho \rightarrow \infty) = \phi_{\text{false}}$  yang berada di antara batasan solusi yang *undershoot* dan batasan solusi yang *overshoot*.

*Undershoot* adalah keadaan dimana  $\phi(\rho = 0)$  terlalu jauh dari  $\phi_{\text{true}}$  dan energi kinetiknya habis terlebih dahulu oleh hambatan. Untuk mendemonstrasikan ini, selisih energi kinetik dikurangi energi potensial akan terus berkurang. Secara eksplisit, kita akan dapatkan

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 - V \right] = -\frac{3}{\rho} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 \leq 0, \quad (2.27)$$

dengan mengalikan persamaan gerak 2.26 dengan  $d\phi/d\rho$ .

*Overshoot* adalah keadaan dimana  $\phi(\rho = 0)$  terlalu dekat dengan  $\phi_{\text{true}}$  sehingga saat mencapai  $\phi_{\text{false}}$  energi kinetik tidak cukup kecil sehingga tetap bergerak melewati  $\phi_{\text{false}}$  menuju tak hingga. Untuk mendemonstrasikan ini, kita butuh titik  $\phi$  yang dekat dengan  $\phi_{\text{true}}$  sehingga kita dapat melinearisasikan persamaan gerak menjadi

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} - \mu^2 \right) (\phi - \phi_{\text{true}}) = 0, \quad (2.28)$$

dengan  $\mu^2 = \left. \frac{d^2 U}{d\phi^2} \right|_{\phi_{\text{true}}}$ . Persamaan ini akan menghasilkan solusi

$$\phi(\rho) - \phi_{\text{true}} = 2[\phi(0) - \phi_{\text{true}}] \frac{I_1(\mu\rho)}{\mu\rho}, \quad (2.29)$$

dengan  $I_1$  adalah persamaan Bessel jenis pertama. Persamaan Bessel jenis pertama ini membesar semakin cepat seiring membesarnya  $\rho$ . Dikarenakan solusi ini sebanding dengan  $I_1(\mu\rho)/\mu\rho$ , maka semakin besar  $\rho$  semakin kecil kontribusi  $1/\mu\rho$  dan semakin besar pula  $\phi(\rho) - \phi_{\text{true}}$ . Hal ini sesuai dengan fisis sebuah bola yang menuruni bukit di mana posisinya setiap jangka waktu tertentu semakin besar dikarenakan kecepatannya bertambah. Dengan argumen kontinuitas, solusi dengan posisi awal  $\phi(0)$  yang tepat untuk berada di antara batas *overshoot* dan batas *undershoot* seharusnya eksis, walaupun *range*-nya bisa sangat sempit.

Sebelum masuk pada subbab selanjutnya, kita perlu mendefinisikan terlebih dahulu maksud *thin-wall* ini. Apa yang dimaksud sebagai dinding ini bukan dinding *potential barrier*. Solusi instanton ini invarian terhadap rotasi 4 dimensi atau

invarian terhadap  $O(4)$ . Karenanya, maka solusi tersebut dalam teori medan bisa dilihat sebagai bola 4 dimensi di ruang Euklidean. Bola ini memiliki isi *true vacuum* dan berdinding dengan ketebalan  $\delta$  untuk menahan tekanan dari luar yang berisikan *false vacuum*. Sehingga, pendekatan *thin-wall* ini bisa dilihat sebagai pendekatan dengan menganggap  $\delta$  kecil.

### 2.3 Aproksimasi *Thin Wall*

Kita akan terlebih dahulu membahas solusi analitik melalui aproksimasi *thin-wall* dikarenakan solusi ini menjadi landasan yang baik untuk menentukan apakah numerik yang telah dilakukan menghasilkan hal yang konsisten dengan solusi analitik ini. Selain itu pada subbab selanjutnya, kita akan membutuhkan aproksimasi ini untuk menggambarkan keadaan yang akan terjadi setelah terjadi *tunneling*.

Anggap sebuah potensial yang simetri

$$V_+(\phi) = V_+(-\phi),$$

dengan minimum pada titik  $\phi = \pm a$ ,

$$V'_+(\pm a) = 0,$$

dengan aksien sebagai turunan terhadap  $\phi$ . Kemudian kita rusak simetri potensialnya dengan

$$V = V_+ + \frac{\epsilon}{2a}(\phi - a), \quad (2.30)$$

dengan  $\epsilon \geq 0$ . Suku tambahan ini akan menurunkan suku sebelah kiri sebesar  $\epsilon$

$$V(a) = 0, \quad V(-a) = -\epsilon,$$

sehingga kita punya titik *false vacuum*  $\phi_+ = +a$  dan titik *true vacuum*  $\phi_- = -a$ .

Kita akan menggunakan pendekatan  $\epsilon$  kecil. Untuk tidak kehilangan banyak energi, atau *undershoot*, kita usahakan  $\phi(\rho = 0) \rightarrow \phi_-$ . Kemudian setelah selang waktu yang besar,  $\rho = \bar{\rho}$ , sesaat setelah ini mulai bergulir seakan tidak ada unsur hambatan

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - \frac{\partial V}{\partial \phi} \gg \frac{3}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho}, \quad (2.31)$$

kemudian bergerak melambat hingga berhenti pada  $\phi_+$  pada  $\rho \rightarrow \infty$ . Dengan limit  $\epsilon$  kecil maka

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = \frac{\partial V_+}{\partial \phi}. \quad (2.32)$$



Dari sini kita kalikan kedua sisi dengan  $\partial\phi/\partial\rho$  menjadikan

$$\frac{\partial}{\partial\rho} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \right)^2 - V_+ \right] = 0,$$

dan karena  $E = 0$  maka nilai dalam kurung kotak adalah nol sehingga

$$\int_0^{\bar{\rho}} d\rho = \int_0^{\bar{\phi}} \frac{d\phi}{\sqrt{2V_+}}. \quad (2.33)$$

Dari sini kita bisa dapatkan solusi pada dinding *bubble*  $\bar{\phi}(\bar{\rho})$ .

Kemudian, kita cari aksi per satuan luas dinding *bubble* pada kasus  $\epsilon$  kecil yaitu

$$\sigma = \int d\rho \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{\phi}}{d\rho} \right)^2 + V_+ \right] = \int_a^{-a} d\phi \sqrt{2V_+}. \quad (2.34)$$

Aksi tidak boleh bernilai minus agar probabilitas konvergen. Kita bisa melihat integrasi ini sebagai aksi per satuan luas dinding *bubble* untuk yang bergerak dari  $a$  menuju  $-a$ , dari *true vacuum* menuju *false vacuum*.

Menggunakan solusi  $\bar{\phi}$  dan aksinya  $\sigma$  yang didefinisikan secara urut oleh persamaan 2.33 dan 2.34, kita dapat membuat ekspresi bentuk analitik dari deskripsi *bounce* berupa

$$\phi = \begin{cases} -a, & \rho \ll \bar{\rho}, \\ \bar{\phi}(\rho - \bar{\rho}), & \rho \approx \bar{\rho}, \\ a, & \rho \gg \bar{\rho}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Kita belum tahu secara eksplisit apa itu  $\bar{\phi}$ . Kita bisa dapatkan melalui aksi yang dibagi tiga *region*, aksi pertama di *true vacuum*, aksi kedua di dinding pembatas energi antara *true vacuum* dan *false vacuum*, dan aksi ketiga di *false vacuum*

$$S_E(\phi) = S_E(-a) + S_E[\bar{\phi}(\rho - \bar{\rho})] + S_E(+a). \quad (2.36)$$

Mari kita mengkonversi dari sudut pandang  $\phi$  menjadi sudut pandang  $\rho$ . Pada aksi di *true vacuum*,  $\rho$  bergerak dari 0 menuju  $\bar{\rho}$ ; pada aksi di dinding pembatas energi yang memiliki tebal  $\delta$ ,  $\rho$  bergerak dari  $\bar{\rho}$  menuju  $\bar{\rho} + \delta$ ; pada aksi di *false vacuum*,  $\rho$  bergerak dari  $\bar{\rho} + \delta$  menuju  $\rho \rightarrow \infty$ . Dengannya aksi yang kita cari adalah

$$\mathcal{B} = S_E(-a) + S_E[\bar{\phi}(\rho - \bar{\rho})]. \quad (2.37)$$

Aksi pada *true vacuum* adalah

$$\begin{aligned}
 S_E(-a) &= \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \, 2\pi^2 \rho^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_-}{d\rho} \right)^2 + V(\phi_-) - V(a) \right] \\
 &= \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \, 2\pi^2 \rho^3 [-\epsilon] = -\frac{1}{2} \pi^2 \bar{\rho}^4 \epsilon,
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Aksi pada dinding pemisah energi kedua vakum, dikarenakan  $\epsilon$  dan  $\delta$  kecil, maka dengan menggunakan definisi  $\sigma$  dari persamaan 2.34 dengan luas bola dimensi empat sebelumnya kita dapatkan

$$\begin{aligned}
 S_E[\bar{\phi}(\rho - \bar{\rho})] &= \int_{\bar{\rho}-\delta}^{\bar{\rho}} d\rho \, 2\pi^2 \rho^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V(\phi) - V(a) \right] \\
 &= 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \int_{\bar{\rho}-\delta}^{\bar{\rho}} d\rho \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V_+(\phi) \right] \\
 &= 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \int_a^{-a} d\phi \, \sqrt{2V_+(\phi)} = 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \sigma,
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

dan untuk aksi pada *false vacuum* adalah nol. Kita dapatkan aksi keseluruhannya adalah

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{2} \pi^2 \bar{\rho}^4 \epsilon + 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \sigma. \tag{2.40}$$

Dari sini kita variasikan  $\mathcal{B}$  terhadap  $\bar{\rho}$  untuk mendapatkan  $\bar{\rho}$  saat aksi minimum atau maksimum

$$0 = \frac{d\mathcal{B}}{d\bar{\rho}} = 2\pi^3 \bar{\rho}^2 (-\bar{\rho}\epsilon + 3\sigma), \tag{2.41}$$

sehingga

$$\bar{\rho} = \frac{3\sigma}{\epsilon}. \tag{2.42}$$

Kemudian kita bisa dapatkan aksi

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{2} \pi^2 \left( \frac{3\sigma}{\epsilon} \right)^4 \epsilon + 2\pi^2 \left( \frac{3\sigma}{\epsilon} \right)^3 \sigma = \left( -\frac{3}{2} + 2 \right) 3^3 \pi^2 \frac{\sigma^4}{\epsilon^3} = \frac{27\pi^2 \sigma^4}{2\epsilon^3}. \tag{2.43}$$

Persamaan ini akan menjadi penting untuk verifikasi kebenaran perhitungan numerik. Koefisien  $\sigma$  dan  $\epsilon$  menjadi variabel yang mempengaruhi probabilitas,

$$\frac{\Gamma}{\mathcal{V}} \propto \exp \left( -\frac{\sigma^4}{\epsilon^3} \right). \tag{2.44}$$

Kita definisikan sebuah contoh potensial

$$V_+ = \frac{\lambda}{8} \left( \phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right), \quad (2.45)$$

dengan  $a^2 = \mu^2/\lambda$ , kita akan dapatkan

$$V'_+(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right) 2\phi, \quad \text{dan} \quad V''_+(\phi) = \frac{\lambda}{2} \left( 3\phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right),$$

sehingga  $V_+(\pm a) = V'_+(\pm a) = 0$ , dan  $V''_+(\pm a) = \mu^2$ . Kita dapatkan aksi pada dinding *bubble*

$$\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \int_a^{-a} d\phi (\phi^2 - a^2) = \frac{2a^3\sqrt{\lambda}}{3}. \quad (2.46)$$

dan solusi pada *potential barrier* adalah

$$\int_0^{\bar{\rho}} d\rho = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\bar{\phi}} \frac{d\phi}{\phi^2 - a^2}, = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{a} \operatorname{arctanh} \frac{\bar{\phi}}{a},$$

$$\bar{\phi}(\bar{\rho}) = a \tanh \frac{a\sqrt{\lambda}}{2} \bar{\rho} = a \tanh \frac{a\sqrt{\lambda}}{2} \frac{3}{\epsilon} \sigma = a \tanh \frac{a^4\lambda}{\epsilon}, \quad (2.47)$$

untuk itu agar  $\bar{\phi}(\bar{\rho}) \rightarrow a$  dikarenakan  $V(\phi_+ = +a) = 0$  maka haruslah  $a^4\lambda/\epsilon \rightarrow \infty$  sehingga  $\epsilon \rightarrow 0$ , sesuai dengan syarat awal *thin-wall limit*. Dan aksi keseluruhannya

$$\mathcal{B} = \frac{27\pi^2\sigma^4}{2\epsilon^3} = \frac{27\pi^2}{2\epsilon^3} \left( \frac{2a^3\sqrt{\lambda}}{3} \right)^4 = \frac{8\pi^2 a^{12} \lambda^2}{3\epsilon^3}. \quad (2.48)$$

## 2.4 Keadaan *False Vacuum* setelah *Bubble* Berisikan *True Vacuum* termaterialisasi

Kita mengetahui dari subbab sebelumnya bahwa saat *tunneling* telah selesai terjadi,  $d\mathbf{x}/d\tau = 0$ . Tetapi, partikel telah berada pada sumur *true vacuum* dan energinya yang lebih tinggi daripada energi di *true vacuum*. Maka dari itu, partikel akan bergulir secara klasik. Deskripsi ini juga berlaku pada teori medan. Medan klasik ini mengalami *tunneling* secara kuantum, misalnya pada  $t = 0$ , menuju keadaan

$$\phi(t = 0, \mathbf{x}) = \phi(\tau = 0, \mathbf{x}), \quad (2.49)$$

dikarenakan  $t = i\tau$ , dengan kecepatannya

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0, \mathbf{x}} = i \left. \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right|_{\tau=0, \mathbf{x}} = 0, \quad (2.50)$$

setelah itu bergulir secara klasik oleh

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.51)$$

Persamaan 2.49 menjelaskan bahwa fungsi  $\phi(\rho)$  yang memberikan bentuk *bounce* pada ruang Euklidean memberikan bentuk *bubble* pada ruang Minkowskian setelah *tunneling* selesai terjadi. Kemudian dikarenakan persamaan 2.51, solusi

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi(\rho), \quad (2.52)$$

merupakan kelanjutan analitik sederhana dari proses kuantum (*tunneling*) dilanjutkan dengan proses klasik (bergulir).

Konsekuensi ini ada beberapa. Pertama, *bounce* invariant terhadap transformasi  $O(4)$  menjadi invariant terhadap transformasi  $O(3, 1)$  dalam persamaan medan klasik. Dengan kata lain, *bubble* terlihat sama bagi pengamat yang bergerak dengan kecepatan tetap karena transformasi Lorentz membutuhkan kecepatan tetap. Siapapun, walaupun memiliki kecepatan yang saling berbeda, asalkan memiliki kecepatan yang tetap, akan melihat bentuk *bubble* yang sama jika dibandingkan dengan pengamat lain. *Bubble* akan terlihat sama dimanapun terjadinya *bounce*.

Kedua, akan ada dinding tipis berada pada jarak  $\bar{\rho}$  dari titik pusat *bubble* pada kasus  $\epsilon$  kecil yang memisahkan *false vacuum* dari *true vacuum*. Saat *bubble* mengembang, dikarenakan *tunneling* telah selesai terjadi, dinding ini mengembang sesuai dengan hiperboloid

$$\bar{\rho}^2 = -t^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}. \quad (2.53)$$

Setelah *bubble* termaterialisasi, *bubble* langsung mengembang hampir dengan kecepatan cahaya dalam ruang hampa.

Ketiga, ekspansi yang mengikuti kurva hiperboloid yang saat  $t \rightarrow \infty$  akan membuat *bubble* mengembang mendekati kecepatan cahaya di ruang hampa, memberikan konsekuensi pengamat yang diam akan terlambat menyadari keberadaan *bubble*. Saat pengamat mendapatkan sinyal keberadaan *bubble* yang datang dengan kecepatan cahaya sekalipun, dalam waktu yang singkat pengamat sudah berada di dalam *bubble*.

Keempat, jelaslah berkembangnya *bubble* membutuhkan energi. Energi ini be-

rasal dari energi pada dinding *bubble*. Energi dari dinding tipis ini luas dari *bubble* dikalikan energi  $\sigma$  per satuan luas. Karena bagian manapun dari dinding pada waktu berapapun yang bergerak dengan kecepatan  $v$  mengikuti transformasi Lorentz sehingga tiap satuan luas dinding yang berupa bola memiliki energi  $\sigma/\sqrt{1-v^2}$ . Jika bola tersebut memiliki besar jari-jari  $|\mathbf{x}|$ , maka seluruh energinya

$$E_{\text{dinding}} = 4\pi|\mathbf{x}|^2\sigma/\sqrt{1-v^2}, \quad (2.54)$$

dengan asumsi  $c \equiv 1$ . Dengan definisi  $v = d|\mathbf{x}|/dt$  maka

$$v = \frac{d\sqrt{\bar{\rho}^2 + t^2}}{dt} = \frac{t}{\sqrt{\bar{\rho}^2 + t^2}} = \frac{\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \bar{\rho}^2}}{|\mathbf{x}|}, \quad (2.55)$$

sehingga

$$E_{\text{dinding}} = \frac{4\pi|\mathbf{x}|^3\epsilon}{3}. \quad (2.56)$$

Hasil ini memberikan jawaban bahwa seluruh energi dinding berasal dari konversi energi *false vacuum* menjadi *true vacuum*. Energi ini kemudian memberikan percepatan berkembangnya dinding *bubble* dan membuat lebih banyak konversi energi serta memberikan percepatan lebih besar lagi. Kecepatan berkembangnya dinding ini akan terus bertambah.

Pembahasan ini akan menjadi lebih menarik jika kita coba melibatkan gravitasi pada perhitungan. Akan tetapi, kami hanya dapat menuliskannya pada bagian lampiran C dikarenakan topik ini jauh di atas jangkauan skripsi ini untuk diperhitungkan secara numerik.

## 2.5 Instanton pada Wilayah yang Berhubungan dengan Ranah Eksperimental

Instanton merupakan teknik yang cukup terbuka untuk banyak jenis potensial. Hal ini membuatnya menjadi salah satu cabang studi yang digunakan pada berbagai bidang. Di sini penulis menuliskan sedikit aspek-aspek lain dari instanton yang bisa pembaca lihat.

### 2.5.1 Analogi dengan Efek Josephson 'Kosmik'

Referensi [8] memberikan analogi bahwa medan magnetik memberikan pengaruh pada solusi instanton. Pada kasus perbedaan energi vakum *false* dan *true* yang lebih dominan daripada kontribusi medan magnet, maka medan magnet bisa memperbe-

sar probabilitas tunneling. Efek ini memberikan peran yang mirip dengan kasus *microscopic Josephson junction*.

### 2.5.2 Konversi Bintang Neutron menjadi *Strange Stars*

Referensi [9] menyatakan bahwa ada kemungkinan sebuah transisi materi nuklir menjadi materi *strange* saat ada gelombang detonasi merambat secara radial di dalam materi nuklir berbentuk bola. Paper tersebut menggunakan metode instanton.

### 2.5.3 Simulasi Instanton pada Model Eksperimental *Ultra-cold Spinor Bose Gas*

Penulis di dalam skripsi mengetahui bahwa apa yang akan penulis teliti ini tidak memberikan simulasi yang cukup nyata. Akan tetapi, pembaca dapat mengacu pada [6] yang membahas mengenai simulasi instanton yang diajukan untuk eksperimennya menggunakan model eksperimental gas Bose yang terdiri atas atom-atom *ultra-cold spinor* (*experimental model of an ultra-cold spinor Bose gas*). Pada referensi tersebut dijelaskan persamaan gerak dalam bentuk yang lebih realistis yaitu dengan melibatkan koordinat Minkowski dan persamaan differensialnya merupakan persamaan differensial parsial. Persamaan ini yang kemudian disimulasikan.

### 2.5.4 Sistem dengan Boson dan Fermion yang Berinteraksi

Paper Coleman diakhiri dengan mempertanyakan bagaimana solusi instanton pada sistem yang melibatkan partikel. Hal ini telah dijawab oleh banyak orang, dan salah satunya dapat pembaca lihat dalam acuan [7]. Literatur ini meninjau bagaimana suatu sistem fermion dan boson yang saling berinteraksi akan berperilaku menggunakan teknik instanton.

### 2.5.5 *Macroscopic Quantum Tunneling in long Josephson Junctions*

Paper [10] membahas *macroscopic quantum tunneling* pada *long-overlap Josephson junction*. Ekspresi laju *nucleation* dari fase pada *tunneling and thermal-activation regime* dibahas keduanya. Paper ini secara simbol matematik terlihat sangat berpegang pada paper [3]. Sehingga, paper ini sangat membantu untuk memahami secara aplikatif apa yang tidak tertulis pada lampiran B.



## BAB 3

### METODE PERHITUNGAN

Pada bab ini, kami akan menjelaskan mekanisme penelitian. Pertama, kami meninjau suatu *toy model* dengan potensial yang mengandung beberapa parameter. Di sini kami akan membahas efek empat parameter yang ada pada potensial yang berpengaruh pada bentuk potensial dan perbedaan energi antar ketiga vakum. Kedua, kami akan membahas tiga bentuk potensial yang dijadikan acuan. Ketiga bentuk ini akan kemudian kami cari solusi  $\phi$  dan aksi  $\mathcal{B}$ . Karena ada tiga buah sumur, maka ada lebih dari satu buah solusi *tunneling*, ini yang akan kita bahas terlebih dahulu dalam bentuk perkiraan sebelum menggunakan numerik. Ketiga, kami akan mendiskusikan persamaan gerak dan perhitungan numerik yang digunakan untuk mendapatkan solusi  $\phi$  dan aksi  $\mathcal{B}$ . Perhitungan ini adalah perhitungan yang mencoba mencari solusi dan aksi tanpa pendekatan dinding tipis yang telah kami diskusikan pada bab sebelumnya. Hasil dari perhitungan numerik ini bisa menjelaskan sejauh mana pendekatan dinding tipis masih sesuai dengan perhitungan numerik. Jika kita lihat di sini, pendekatan numerik jelas memberikan hasil yang lebih mendekati kenyataan daripada pendekatan dinding tipis.

#### 3.1 Efek Keempat Parameter terhadap bentuk Potensial Tiga Sumur

Ada alasan mengapa kami memilih menggunakan potensial tiga sumur daripada potensial dua sumur. Orang telah meneliti dengan dua sumur dan kita hanya menghitung bagaimana pengaruh dinding tebal atau perbedaan energi vakum yang besar terhadap solusi dan aksi. Pengaruh dinding tebal ini dilakukan untuk mengetahui solusi yang tidak bisa dijelaskan oleh pendekatan dinding tipis, tentu saja. Akan tetapi, untuk lebih jauh lagi, kami mencoba dengan tiga sumur agar kita bisa mengetahui tidak hanya *tunneling* dari suatu vakum ke vakum tetangga, kita juga bisa mencari tahu apakah bisa terjadi *tunneling* yang meloncati vakum, dari suatu vakum *tunnel* langsung ke vakum tetangga dari tetangga tanpa singgah terlebih dahulu. Kemungkinan ini secara intuisi seharusnya ada dan inilah alasan utama kami.

Bentuk eksplisit potensial yang kita gunakan adalah

$$V(\phi) = a\phi^2(\phi^2 - d^2)^2 + b\phi^2 + c\phi, \quad (3.1)$$

sehingga persamaan geraknya adalah

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = 2a\phi(\phi^2 - d^2)^2 + 4a\phi^3(\phi^2 - d^2) + 2b\phi + c. \quad (3.2)$$

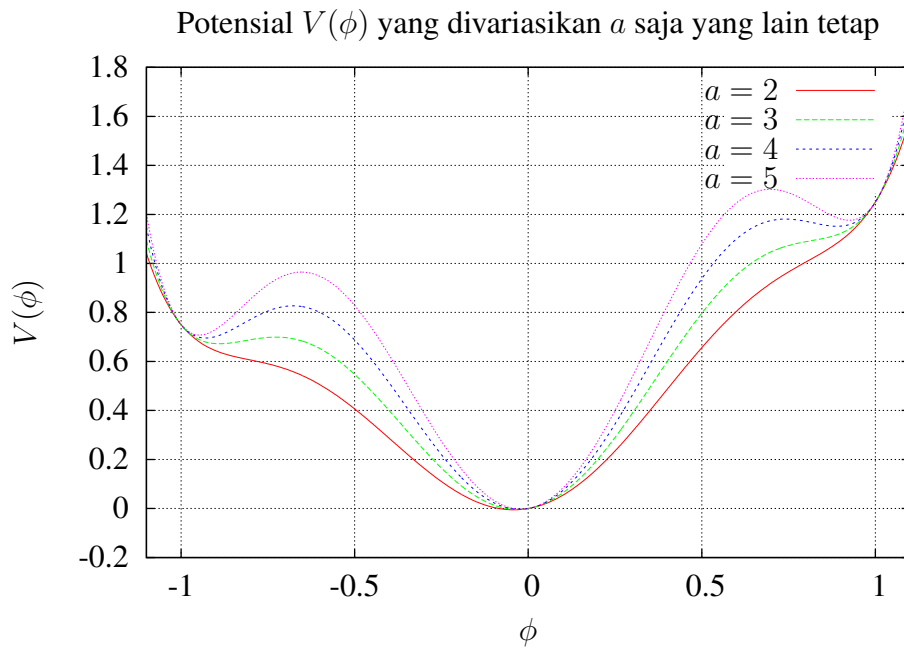
Sebenarnya kita bisa menggunakan fungsi potensial lain dan itu dapat diterima. Di sini kita mencoba potensial bentuk ini. Pada penelitian lain bisa digunakan potensial bentuk lain. Di sinilah kekuatan teori instanton dari Coleman, kita tidak dibatasi bentuk potensialnya harus seperti apa, asalkan memiliki minimal dua buah sumur yang memiliki kedalaman yang berbeda maka potensial itu sudah dapat digunakan.

Dari potensial kita memiliki empat parameter. Keempat parameter ini secara eksplisit mempengaruhi bentuk potensial, sehingga kita bisa memberikan empat kategori:

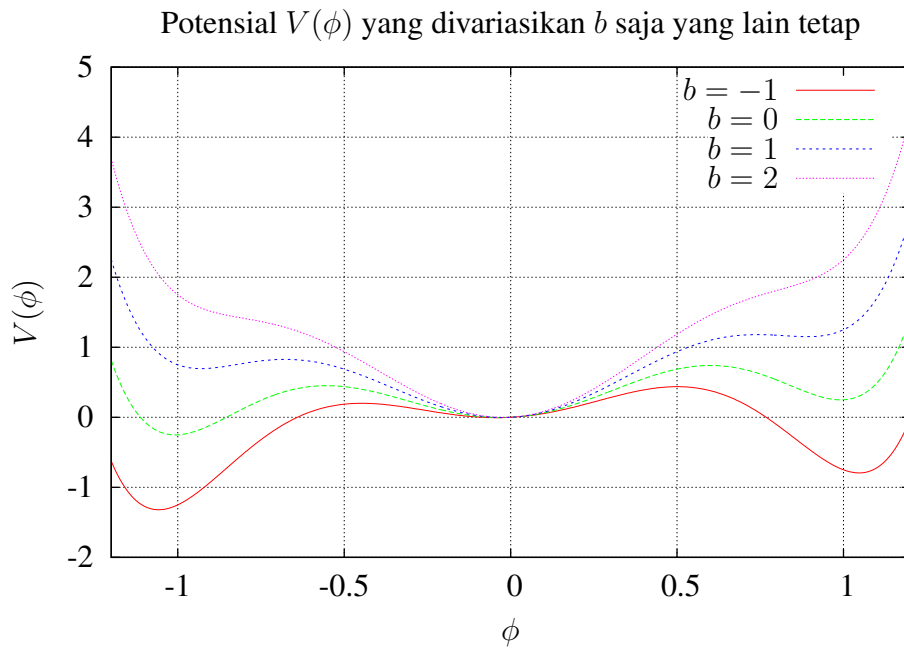
1. mengubah  $a$  dan mempertahankan  $b$ ,  $c$ , dan  $d$ ,
2. mengubah  $b$  dan mempertahankan  $a$ ,  $c$ , dan  $d$ ,
3. mengubah  $c$  dan mempertahankan  $a$ ,  $b$ , dan  $d$ , dan
4. mengubah  $d$  dan mempertahankan  $a$ ,  $b$ , dan  $c$ ,

Dari sini kami menggunakan program GNUplot untuk memberikan grafik potensial. Pertama, jika kita variasikan  $a$  kita dapatkan bahwa semakin besar  $a$  maka semakin tajam berbeloknya kurva. Kedua, jika kita variasikan  $b$  kita dapatkan bahwa menaikkan  $b$  akan menaikkan kedua sumur di kanan dan kiri tetapi sumur di tengah akan tetap kedalamannya. Ketiga, jika kita variasikan  $c$  kita bisa melihat semakin besar  $c$  semakin tinggi sumur kanan dan semakin rendah sumur kiri. Keempat, jika kita variasikan  $d$  semakin besar  $d$  semakin lebar jarak antar sumur potensial. Tetapi ini tidak cukup, karena saat  $b$  bernilai positif selain nol maka semakin besar  $d$  semakin tinggi kedua sumur potensial kanan dan kiri dan karena saat  $b$  bernilai negatif selain nol maka semakin besar  $d$  semakin tinggi kedua sumur potensial kanan dan kiri. Hanya pada  $b = 0$  maka sumur akan melebar jarak diantara mereka saja tanpa menaikkan ketiga potensial. Selain itu, semakin kecil  $d$  semakin kecil belokan kurva sehingga bisa jadi salah satu sumur potensial berubah menjadi bukan sumur lagi. Terlebih lagi, semakin besar  $d$  maka perbedaan kedalaman sumur

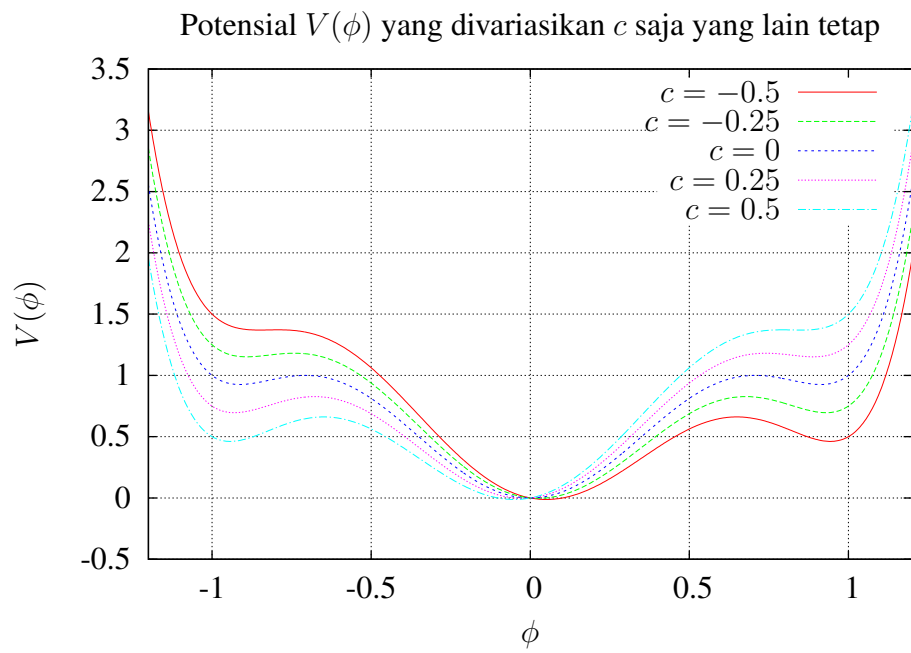
kanan dan kiri seakan semakin kecil, hal ini jika kita melihatnya dengan membandingkan terhadap lebar kurva juga. Kita dapat melihat lebih jelas pada grafik di halaman-halaman berikutnya.



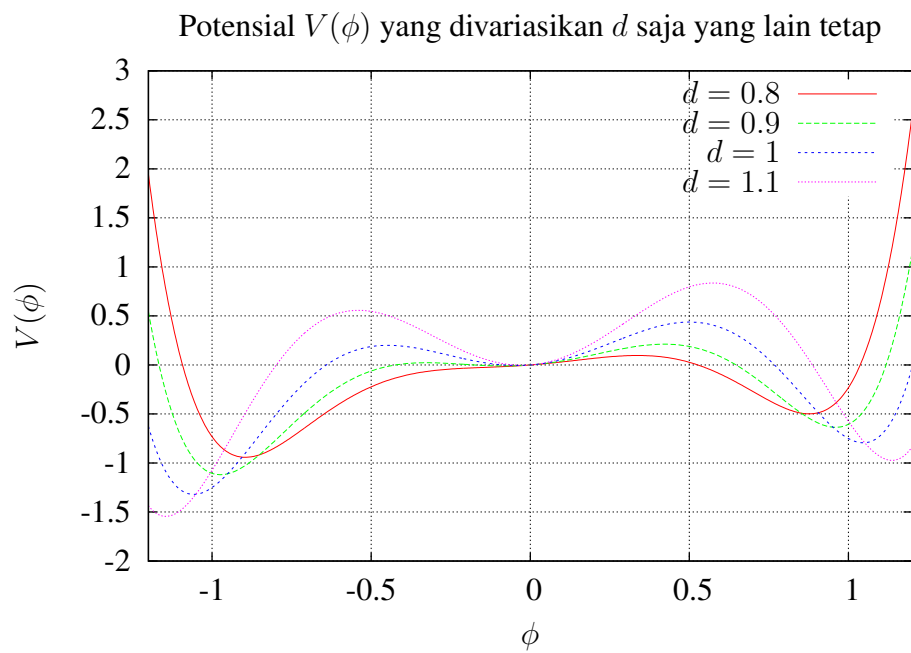
**Gambar 3.1:** Potensial yang divariasikan  $a$  dengan  $b = 1$ ,  $c = 0.25$ ,  $d = 1$



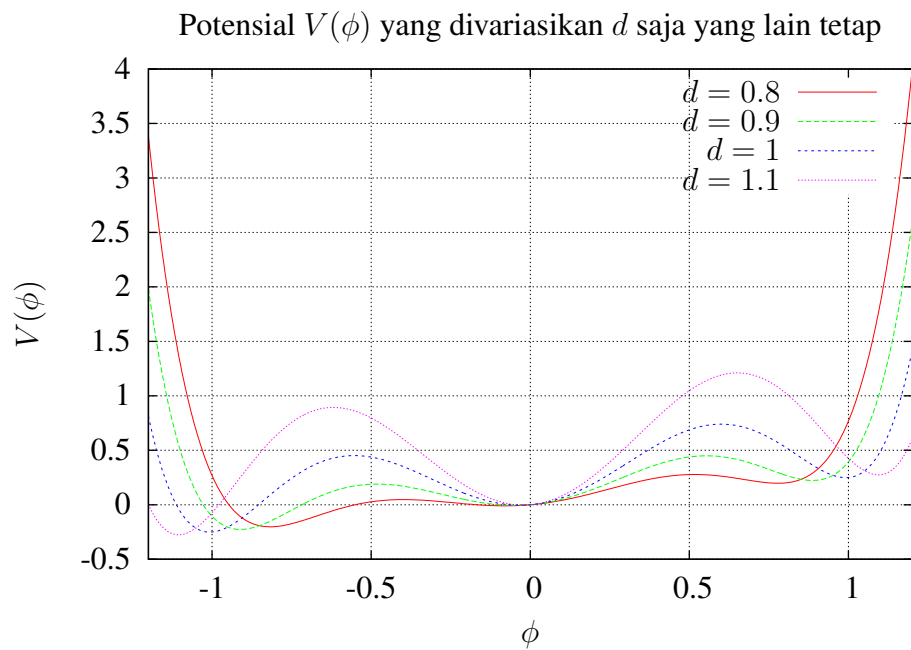
**Gambar 3.2:** Potensial yang divariasikan  $b$  dengan  $a = 4$ ,  $c = 0.25$ ,  $d = 1$



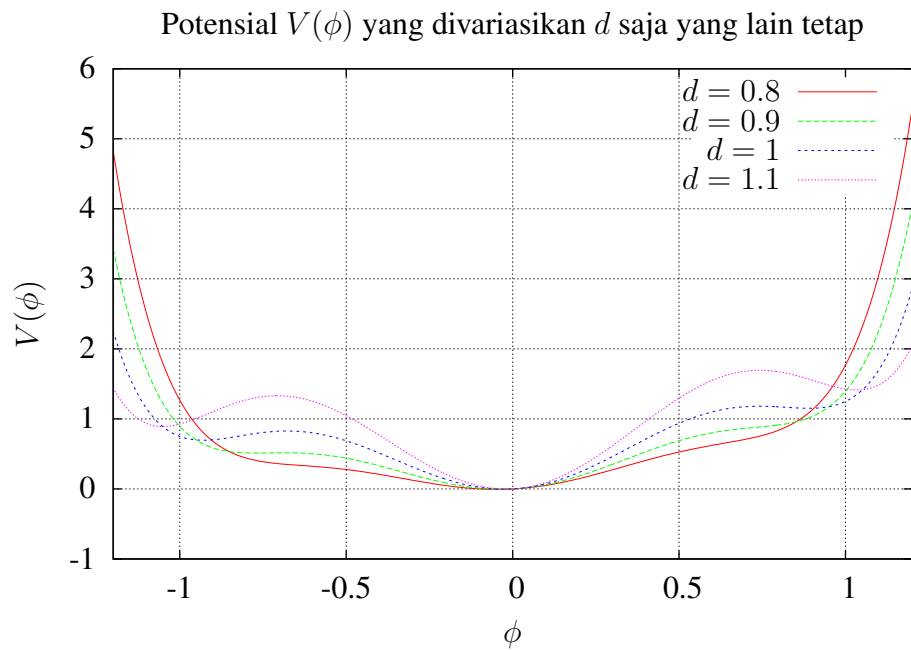
**Gambar 3.3:** Potensial yang divariasikan  $c$  dengan  $a = 4$ ,  $b = 1$ ,  $d = 1$



**Gambar 3.4:** Potensial yang divariasikan  $d$  dengan  $a = 4$ ,  $b = -1$ ,  $c = 0.25$



**Gambar 3.5:** Potensial yang divariasikan  $d$  dengan  $a = 4$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0.25$

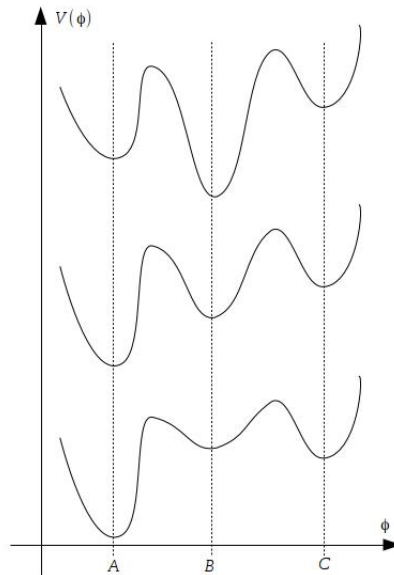


**Gambar 3.6:** Potensial yang divariasikan  $d$  dengan  $a = 4$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.25$

Kita bisa lihat di sini bahwa keempat parameter potensial dapat membuat bentuk potensial yang memiliki kurva tidak hanya tiga sumur, tetapi juga dapat membentuk dua sumur bahkan satu sumur hanya dengan mengubah satu parameter. Banyaknya ragam potensial ini akan kami ambil hanya tiga buah bentuk yang diteliti. Hal ini selain untuk mengurangi waktu yang terbuang karena bentuk potensial yang begitu

beragam, kami memiliki tujuan untuk meneliti hanya potensial dengan tiga sumur. Pada subbab selanjutnya, hal ini akan dibahas.

### 3.2 Tiga Bentuk Potensial Utama yang Akan Kita Gunakan



**Gambar 3.7:** 3 bentuk potensial yang digunakan:  $V_B < V_A < V_C$  (atas),  $V_A < V_B < V_C$  (tengah),  $V_A < V_C < V_B$  (bawah)

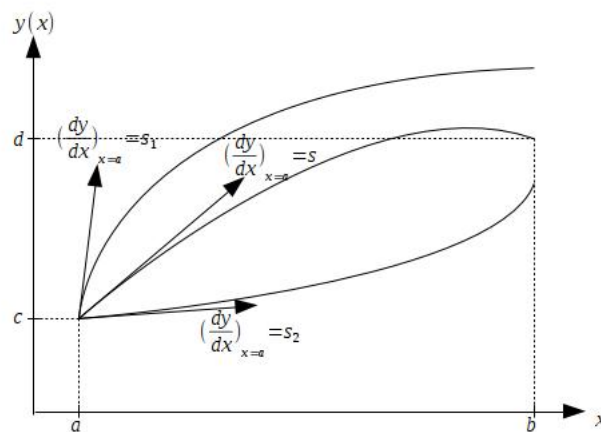
Misalkan kita namakan ketiga sumur potensial dengan huruf kapital. Sumur potensial paling kiri kita namakan  $V_A$ , sumur potensial di tengah kita namakan  $V_B$ , dan sumur potensial di kanan kita namakan  $V_C$ . Kita di sini akan menggunakan hanya tiga bentuk potensial dengan spesifikasi:

1.  $V_A < V_C < V_B$  yang menghasilkan sumur tengah di atas kedua sumur lain, potensial ini dapat digunakan untuk mencari mana yang lebih besar probabilitas *tunneling* dari  $V_C$  ke  $V_B$  atau dari  $V_A$  ke  $V_B$ , juga untuk melihat adakah *tunneling* dari  $V_C$  ke  $V_A$  yang melompati  $V_B$ ;
2.  $V_A < V_B < V_C$  yang menghasilkan ketiga sumur yang seperti tangga, potensial ini dapat digunakan untuk mencari mana yang lebih besar probabilitas *tunneling* dari  $V_C$  ke  $V_B$  kemudian dari  $V_B$  ke  $V_C$  (*tunneling* dari  $V_C$  ke  $V_A$  secara tidak langsung) atau *tunneling* dari  $V_C$  ke  $V_A$  secara langsung;
3.  $V_A < V_C < V_B$  yang menghasilkan sumur tengah di bawah kedua sumur lain, potensial ini dapat digunakan untuk mencari mana yang lebih besar probabilitas *tunneling* dari  $V_B$  ke  $V_A$  atau dari  $V_B$  ke  $V_C$ .



### 3.3 Perhitungan Numerik untuk Mengitung Solusi dan Aksi di Luar Pendekatan *Thin-Wall Limit*

*Shooting method* merupakan perhitungan numerik yang bertujuan untuk mencari solusi dari persamaan differensial yang tidak bisa diselesaikan melalui perhitungan analitik. *Shooting method* menggunakan cara mengubah problem syarat batas menjadi problem batas awal. Metode ini dapat secara singkat kita ilustrasikan dalam gambar 3.8. Kita misalkan memiliki persamaan differensial orde dua berupa



**Gambar 3.8:** *Shooting Method* untuk mencari gradien

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f \left[ x, y, \frac{dy}{dx} \right],$$

yang harus memenuhi syarat-syarat batas yaitu

$$y(a) = c, y(b) = d.$$

Anggap persamaan differensial ini tidak bisa diselesaikan secara analitik. Untuk menghitung secara numerik, jelas  $f$  harus memiliki nilai  $x$ ,  $y(x)$ , dan  $dy/dx$ . Oleh karenanya, kita harus secara spesifik menyatakan ketiga nilai tersebut. Kita jelas tidak mengetahui berapa nilai gradien  $dy/dx$  yang memenuhi persamaan differensial tersebut. Oleh karena itu, seperti membidik meriam, kita membutuhkan gradien pada  $x = a$  tertentu yang akan tepat mencapai  $y = d$  saat  $x = b$ . Tentu hal ini merupakan upaya *trial and error*.

Misalkan kita masukkan gradiennya adalah  $s_1$  kemudian kita dapatkan  $y(b) > d$ . Kemudian kita ulangi lagi pada gradien  $s_2$  yang kemudian didapatkan  $y(b) < d$ .

Dari kedua hasil tersebut jelaslah bahwa nilai gradien yang kita cari yaitu  $s$  berada diantara  $s_1$  dan  $s_2$ . Kita kurangi nilai  $s_1$  dan kita tambahkan nilai  $s_2$  terus hingga kita bisa dapatkan selisih  $s_1$  dan  $s_2$  cukup kecil sehingga kita bisa dapatkan bahwa  $(s_1 + s_2)/2 \approx s$ .

Hal yang sama juga bisa digunakan untuk mencari  $y(a)$  jika yang diketahui hanya gradien pada  $x = a$ . Pada penelitian ini, kami memiliki syarat batas yaitu

$$\left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \text{ dan } \lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi(\rho) = \phi_{\text{false}}.$$

Dari sini kita bisa membuat syarat batas tersebut menjadi

$$\phi(\rho = 0) = s, \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad (3.4)$$

dengan  $s$  adalah sedemikian dekat dengan  $\phi_{\text{true}}$  agar kita mendapatkan hasil pada  $\rho \rightarrow \infty$  yaitu

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi = \phi_{\text{false}}.$$

Penelitian ini bertujuan untuk mencari  $s$  dan dari sana kita bisa melihat bentuk solusinya, yang kemudian kita bisa hitung berapa aksi  $\mathcal{B}$ .

### 3.3.1 Shooting Method dengan metode Runge-Kutta

Untuk mencari solusi persamaan differensial nonlinear ini, kita gunakan metode komputasi Runge-Kutta dengan *step size*  $h$  kita iterasikan dengan indeks  $j$  dan kita gunakan aksien sebagai turunan terhadap  $\rho$

$$\rho_{j+1} = \rho_j + h, \quad (3.5)$$

$$\phi_{j+1} = \phi_j + h \phi'_j, \quad (3.6)$$

$$(k1) = h \phi'' [\rho_j, \phi_j, \phi'_j], \quad (3.7)$$

$$(k2) = h \phi'' \left[ \rho_j + \frac{h}{2}, \phi_j + \frac{\phi'_j}{2}, \phi_j + \frac{(k1)}{2} \right], \quad (3.8)$$

$$(k3) = h \phi'' \left[ \rho_j + \frac{h}{2}, \phi_j + \frac{\phi'_j}{2}, \phi_j + \frac{(k2)}{2} \right], \quad (3.9)$$

$$(k4) = h \phi'' [\rho_j + h, \phi_j + \phi'_j, \phi'_j + (k3)], \quad (3.10)$$

$$\phi'_{j+1} = \phi'_j + \frac{(k1) + 2(k2) + 2(k3) + (k4)}{6} \quad (3.11)$$

dengan

$$\phi''(\rho_j, \phi_j, \phi'_j) = -\frac{3\phi'_j}{\rho_j} + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi_j}. \quad (3.12)$$

Kami di sini menggunakan potensial *triple well* dalam bentuk

$$V(\phi) = a\phi^2(\phi^2 - d^2)^2 + b\phi^2 + c\phi, \quad (3.13)$$

sehingga

$$\frac{dV}{d\phi} = 2a\phi(\phi^2 - d^2)(3\phi^2 - d^2) + (2b\phi + c). \quad (3.14)$$

Koefisien  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , dan  $d$  ini menjadi parameter variasi untuk melihat ada tidaknya solusi dan berapa aksinya. Aksi kami cari dengan

$$\mathcal{B} = \int 2\pi d\rho \rho^3 \left[ \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V(\phi) - V(\phi_{\text{false}}) \right]. \quad (3.15)$$

di mana  $V(\phi_{\text{false vacuum}})$  dicari sedemikian rupa agar aksi saat  $\phi = \phi_{\text{false}}$  menjadi nol. Dikarenakan keterbatasan, maka integral ini kami ganti menjadi sumasi dengan merubah  $d\rho$  menjadi  $h$  sehingga

$$\mathcal{B} = \sum_j 2\pi h \rho_j^3 \left[ \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)_j^2 + V(\phi_j) - V(\phi_{\text{false}}) \right]. \quad (3.16)$$

$V(\phi_{\text{false}})$  dapat kami cari dengan melihat grafik dan memperkirakan berapa nilainya.  $V(\phi_{\text{false}})$  diperlukan agar aksi tidak bernilai negatif.

### 3.3.2 Code FORTRAN serta Penggunaannya

Kami menggunakan *code* FORTRAN 90 pada lampiran A. Program ini akan menampilkan data dalam terminal. Data masukan *shooting* pada *x1init* dan data parameter potensial  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , dan  $d$  serta potensial saat *false vacuum* pada *potf*. Data keluaran terdiri dari tiga kolom: kolom pertama adalah data  $\rho$ , kolom kedua adalah data  $\phi$ , dan kolom ketiga adalah sumasi pada *action*. Kami men-*copy-paste*-kan hasil ini, yang ditampilkan pada terminal, dalam sebuah *text file* kemudian diplotkan dalam program GNUplot. Hasil aksi akan dihasilkan dari data saat solusi telah mencapai posisi pada *false vacuum*. Hal ini tentu hanyalah sebuah perkiraan, tetapi karena kita di sini membandingkan minimal dua buah aksi dalam satu grafik potensial, maka hasil yang didapatkan adalah perbandingan perkiraan aksi antara dua fenomena *tunneling*.

## BAB 4

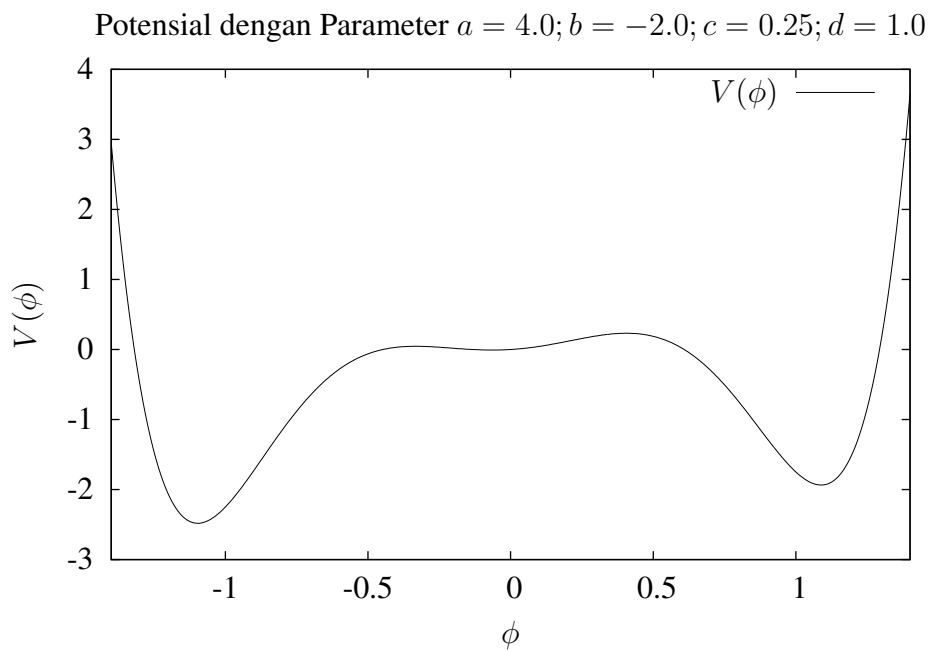
### HASIL PERHITUNGAN DAN ANALISIS

Pada bab ini, kami membahas bentuk potensial, solusi yang kami dapat secara numerik, dan seberapa besar probabilitasnya menggunakan hubungan

$$\Gamma \propto e^{-B}.$$

#### 4.1 Potensial dengan $V_A < V_C < V_B$

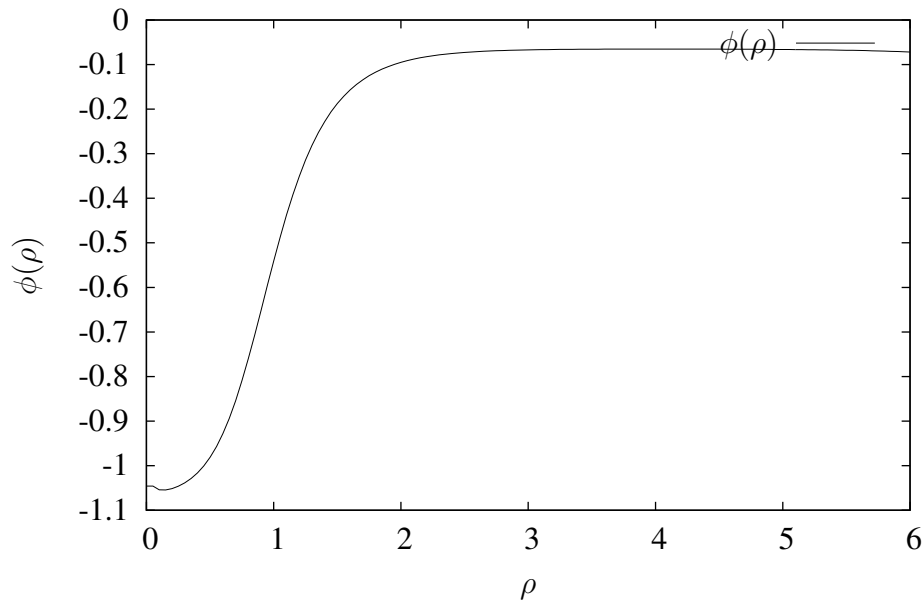
Grafik-grafik berikut adalah hasil yang kami dapatkan untuk kasus potensial dengan  $V_A < V_C < V_B$ .



**Gambar 4.1:** Bentuk potensial untuk  $V_A < V_C < V_B$

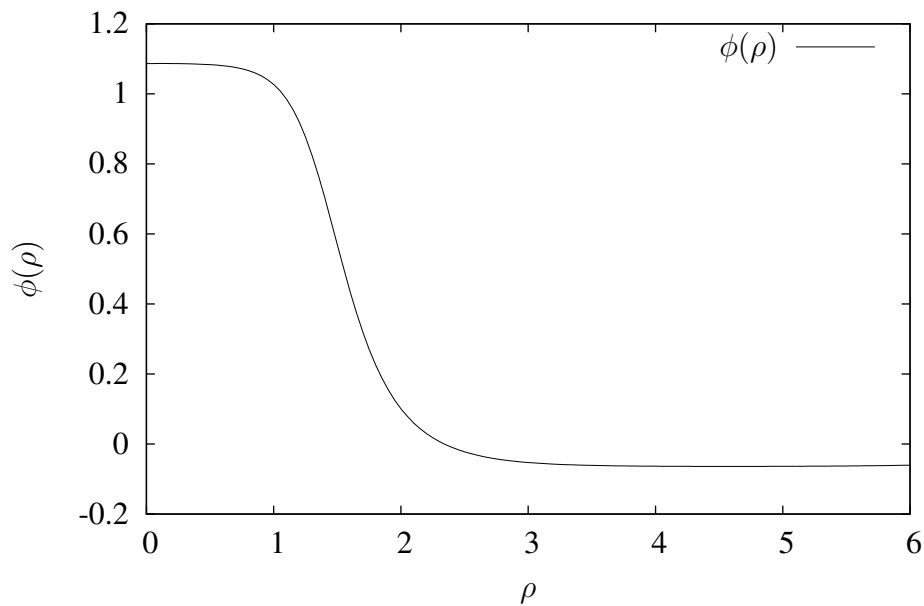
Kita bisa lihat di sini bahwa perbedaan energi vakum A dan B lebih besar daripada perbedaan energi vakum B dan C. Solusi *tunneling* yang ada hanya ada untuk dari A ke B dan C ke B, solusi *tunneling* dari C ke A tidak ada. Berikut adalah solusi yang kami dapatkan.

Solusi *Tunneling* B ke A dengan Hasil  $\phi(0) = -1.0456987024$  dan  $\mathcal{B} = 17.3663540$



**Gambar 4.2:** Solusi *tunneling* dari  $V_B$  ke  $V_A$  potensial  $V_A < V_C < V_B$

Solusi *Tunneling* B ke C dengan Hasil  $\phi(0) = 1.086364806$  dan  $\mathcal{B} = 33.9715500$



**Gambar 4.3:** Solusi *tunneling* dari  $V_B$  ke  $V_C$  potensial  $V_A < V_C < V_B$

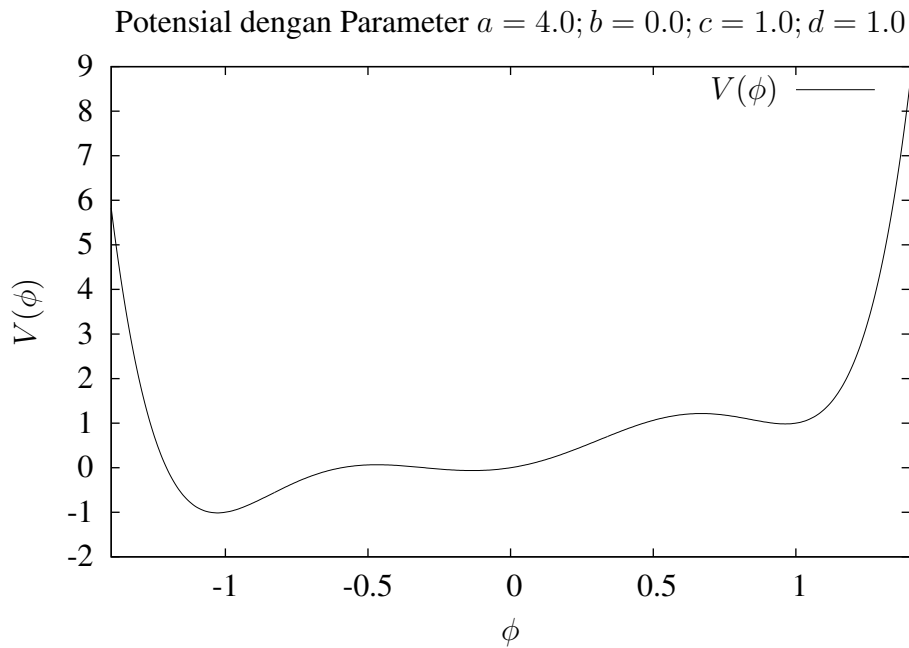
Dari sini kita melihat bahwa probabilitas *tunneling* dari A ke B lebih besar daripada probabilitas *tunneling* dari C ke B. Kita juga bisa melihat, dari perbedaan energi vakum  $\epsilon$ , bahwa semakin kecil  $\epsilon$  semakin kecil probabilitas *tunneling*  $\Gamma$ . Hal ini sesuai dengan hasil dari pendekatan *thin wall* yaitu semakin besar  $\epsilon$  semakin ke-

cil  $\mathcal{B}$  sehingga semakin kecil  $\Gamma$ , begitu juga sebaliknya. Maka, perhitungan analitik dengan pendekatan *thin wall* ini berlaku untuk potensial bentuk ini.

Di sini kami tidak menemukan solusi untuk *tunneling* dari C langsung ke A. Hal ini dimungkinkan karena keberadaan sumur B mengurangi energi kinetik Euclidean. Sumur B membuat lintasan bola imajiner yang mengalami *bounce* harus melewati tiga buah belokan yang setiap belokan mengambil energi kinetik. Akibatnya, energi kinetik menjadi kurang untuk mencapai puncak *false vacuum*. Solusi mungkin eksis jika perbedaan energi vakum A dan C cukup besar.

## 4.2 Potensial dengan $V_A < V_B < V_C$

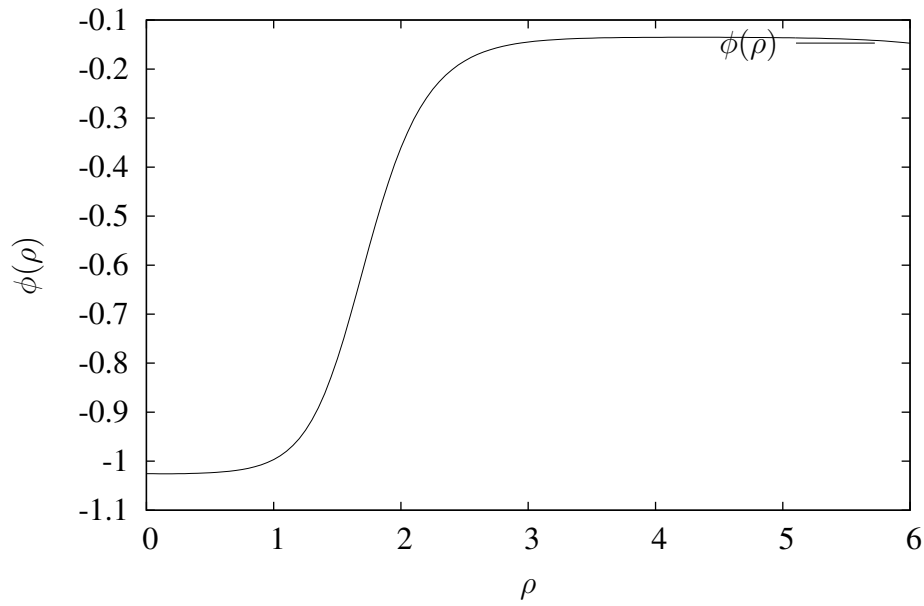
Grafik-grafik berikut adalah hasil yang kami dapatkan untuk kasus potensial dengan  $V_A < V_B < V_C$ .



**Gambar 4.4:** Bentuk potensial untuk  $V_A < V_B < V_C$

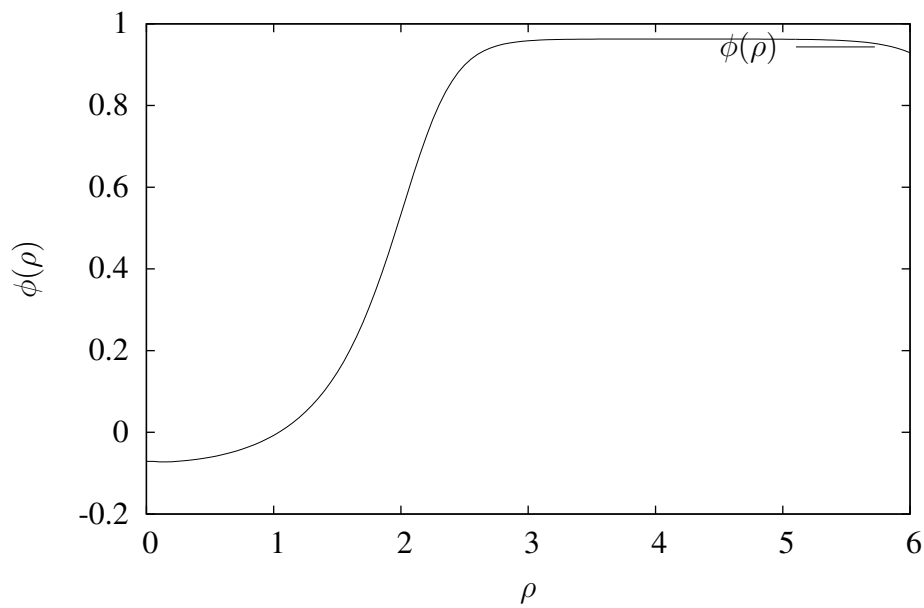
Potensial ini memiliki solusi-solusi *tunneling* berikut. Di sini ada kemungkinan *tunneling* dari C ke B, dari B ke A, dan dari C ke A. Akan tetapi, solusi terakhir tidak bisa langsung dari C ke A meloncati B, hal yang akan kami perlihatkan. Kita juga perlu tekankan bahwa perbedaan energi vakum AB lebih kecil daripada perbedaan energi vakum BC,  $\epsilon_{AB} < \epsilon_{BC}$ .

Solusi *Tunneling* B ke A dengan Hasil  $\phi(0) = -1.0255567432$  dan  $\mathcal{B} = 246.262680$



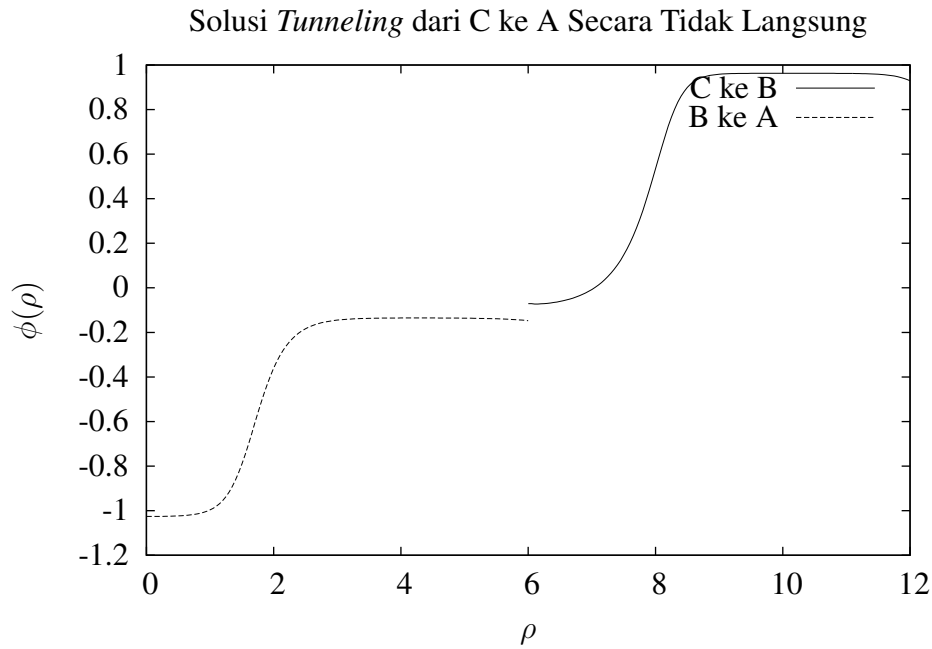
**Gambar 4.5:** Solusi *tunneling* dari  $V_B$  ke  $V_A$  potensial  $V_A < V_B < V_C$

Solusi *Tunneling* C ke B dengan Hasil  $\phi(0) = -0.071029247$  dan  $\mathcal{B} = 254.584702$



**Gambar 4.6:** Solusi *tunneling* dari  $V_C$  ke  $V_B$  potensial  $V_A < V_B < V_C$





**Gambar 4.7:** Solusi *tunneling* dari  $V_C$  ke  $V_A$  potensial  $V_A < V_B < V_C$  hanya secara tidak langsung

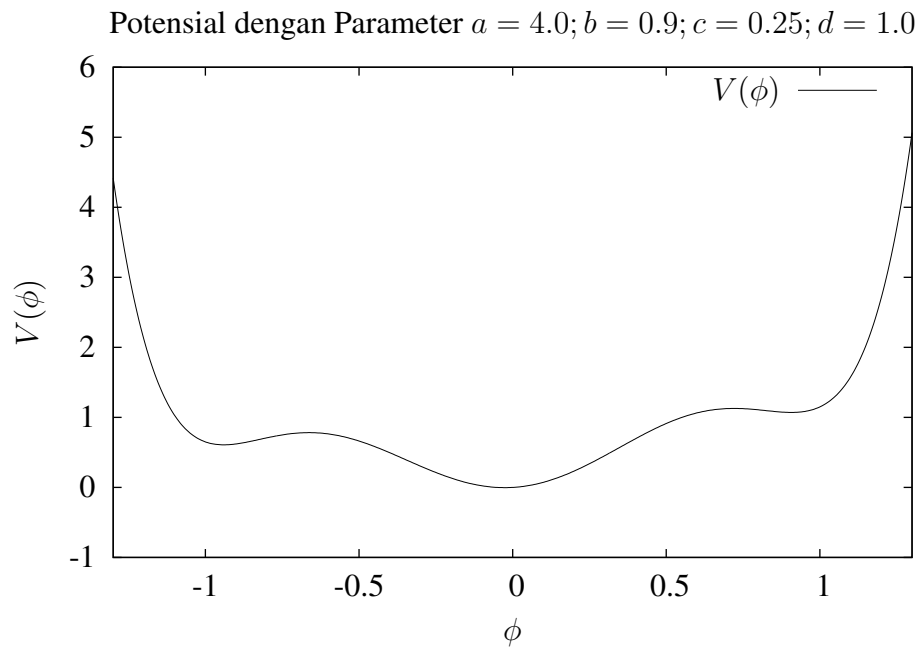
Dari sini kita dapat melihat bahwa *tunneling* dari  $V_C$  ke  $V_A$  hanya dapat terjadi melalui *tunneling* dari  $V_C$  ke  $V_B$  kemudian terjadi proses termal agar energi kinetiknya berkurang menjadi nol dan mencapai titik terendah sumur B, baru kemudian *tunneling* kembali dari  $V_C$  ke  $V_B$ . Hal ini dilihat pada kedua solusi pada gambar 4.7. yang tidak saling beririsan ataupun bersinggungan. Ini juga mengindikasikan bahwa tidak terjadi tunneling secara tidak langsung, yang membuat solusi tunneling dari C ke A secara langsung pun tidak ada.

Pada literatur [11], dijelaskan melalui argumen *undershoot* dan *overshoot* bahwa jika ada solusi tunneling secara langsung maka solusi yang tidak langsung dijamin ada, dan berlaku juga untuk kebalikannya. Potensial dengan parameter ini tidak memungkinkan adanya solusi tidak langsung, sehingga solusi langsung pun tidak ada.

Dengan mendesain parameter potensial yang ada, ada kemungkinan untuk mendapatkan potensial yang memiliki solusi *tunneling* dari C ke A secara tidak langsung. Caranya seperti di atas, yaitu mencari solusi *tunneling* dari C ke B, dan solusi *tunneling* dari B ke A, kemudian kita gabungkan kedua solusi dalam satu plot untuk melihat apakah kedua ujung solusi saling berhimpit, jika berhimpit maka kemungkinan besar ada solusi *tunneling* dari C ke A. Untuk itu, kami masih mencoba mencari parameter yang tepat untuk memberikan visualnya.

### 4.3 Potensial dengan $V_B < V_A < V_C$

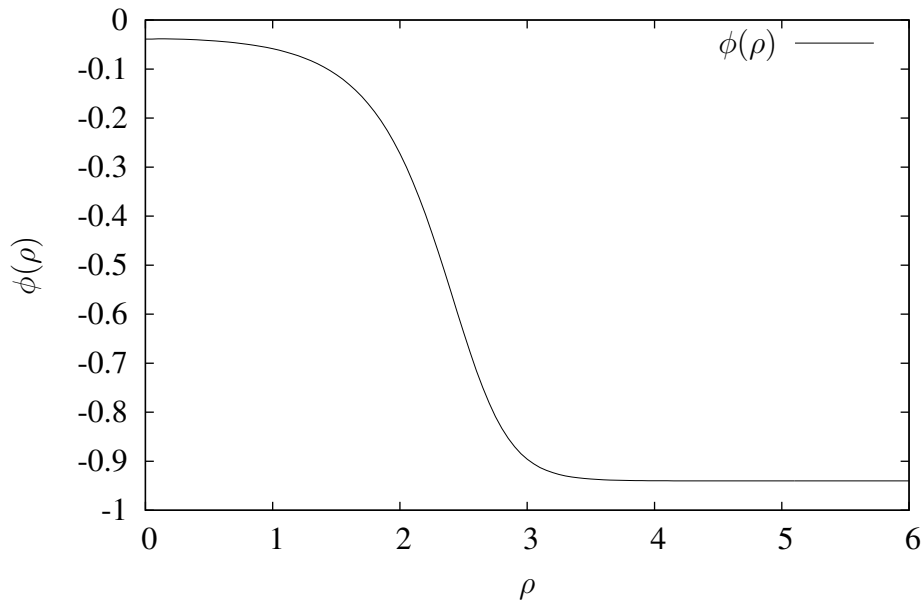
Grafik-grafik berikut adalah hasil yang kami dapatkan untuk kasus potensial dengan  $V_B < V_A < V_C$ .



**Gambar 4.8:** Bentuk potensial untuk  $V_B < V_A < V_C$

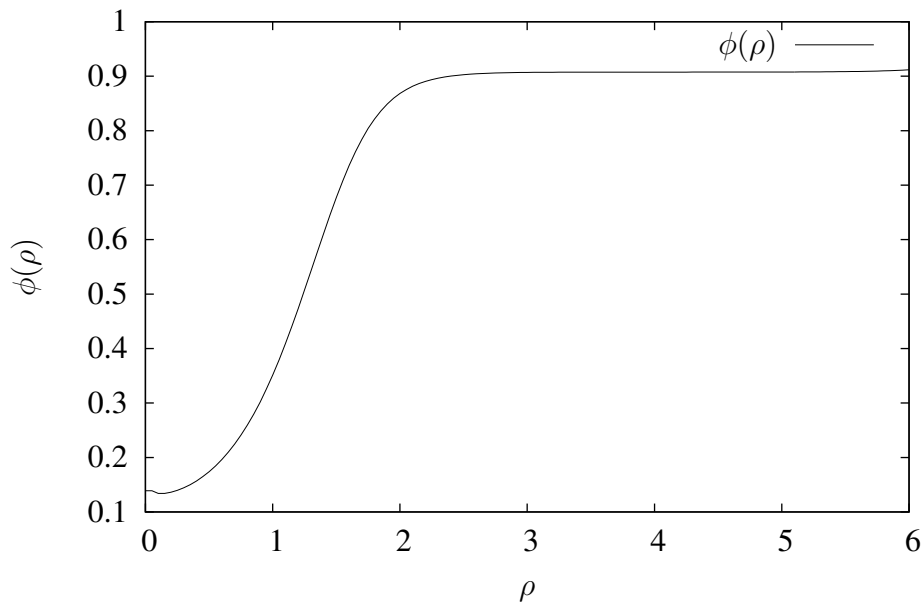
Kita bisa lihat di sini bahwa perbedaan energi vakum A dan B lebih kecil daripada perbedaan energi vakum B dan C. Berikut adalah solusi yang kami dapatkan. Solusi *tunneling* yang ada hanya ada untuk dari A ke B dan C ke B, solusi *tunneling* dari C ke A tidak mungkin ada.

Solusi *Tunneling* A ke B dengan Hasil  $\phi(0) = -0.0388628$  dan  $\mathcal{B} = 2364.26099$



**Gambar 4.9:** Solusi *tunneling* dari  $V_A$  ke  $V_B$  potensial  $V_B < V_A < V_C$

Solusi *Tunneling* A ke B dengan Hasil  $\phi(0) = 0.13906$  dan  $\mathcal{B} = 138.717194$



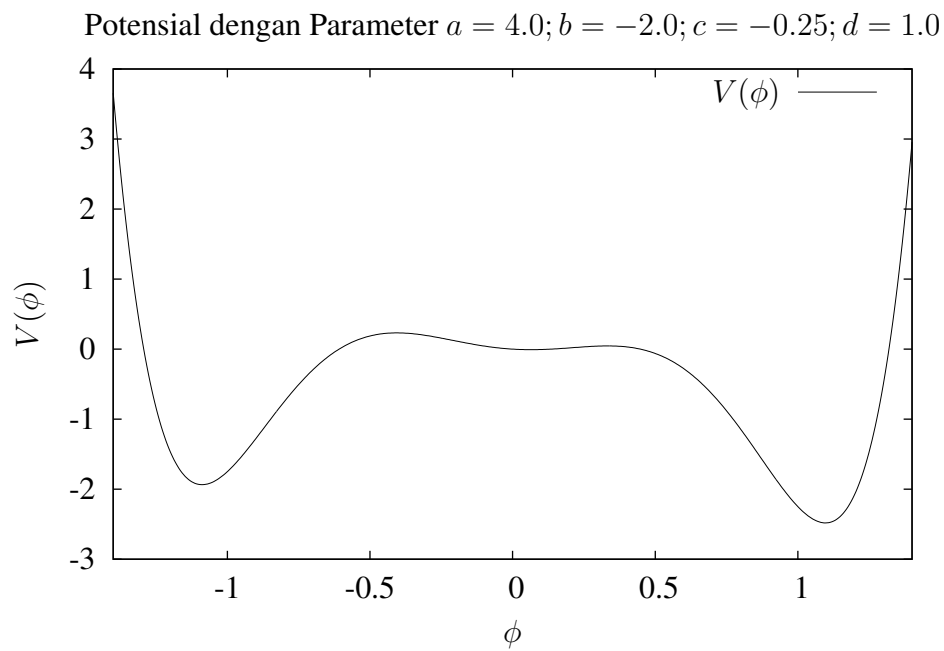
**Gambar 4.10:** Solusi *tunneling* dari  $V_C$  ke  $V_B$  potensial  $V_B < V_A < V_C$

Dari sini kita melihat bahwa probabilitas *tunneling* dari C ke B lebih besar daripada probabilitas *tunneling* dari A ke B. Kita juga bisa melihat, dari perbedaan energi vakum, bahwa semakin kecil perbedaan energi vakum  $\epsilon$  semakin kecil probabilitas *tunneling*. Hal ini sejalan dengan hasil dari pendekatan *thin wall*.

=====

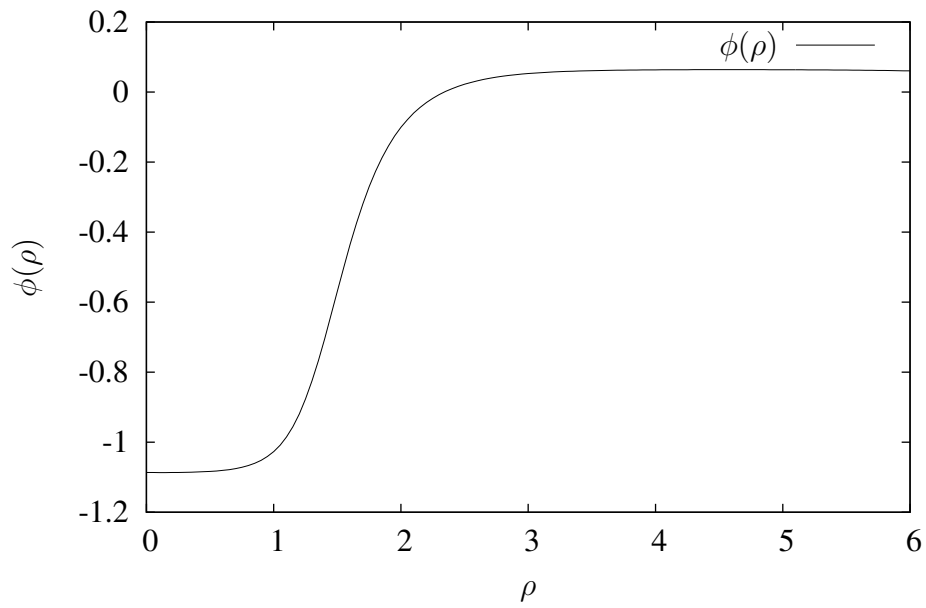
#### 4.4 Jika Potensial Dicerminkan

Selama ini kita hanya menggunakan potensial yang menggunakan parameter  $c < 0$ . Kita bisa mencerminkan ketiga potensial sebelumnya dengan mengubah parameter  $c$  menjadi  $-c$ . Berikut adalah hasil yang didapat jika kita mencerminkan potensialnya.



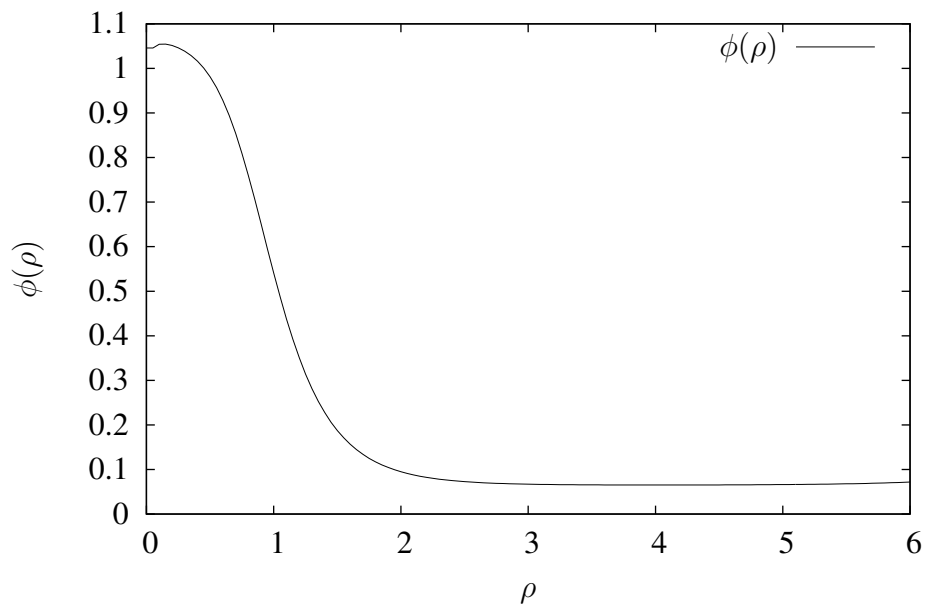
**Gambar 4.11:** Bentuk potensial untuk  $V_C < V_A < V_B$

Solusi *Tunneling* B ke A dengan Hasil  $\phi(0) = -1.086364806$  dan  $\mathcal{B} = 33.97155$

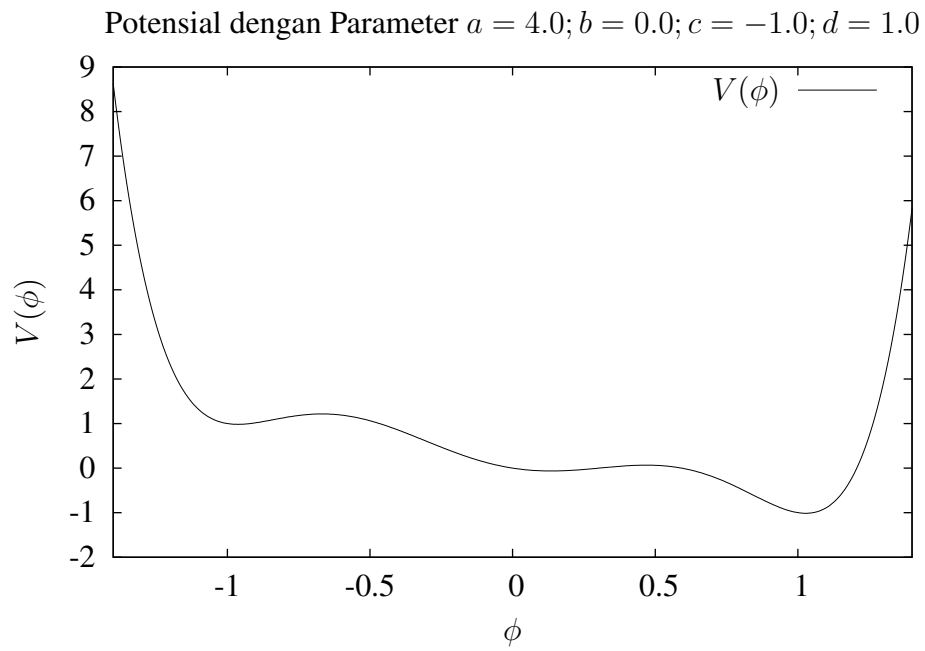


**Gambar 4.12:** Solusi instanton potensial untuk  $V_C < V_A < V_B$

Solusi *Tunneling* B ke C dengan Hasil  $\phi(0) = 1.0456987024$  dan  $\mathcal{B} = 17.366354$

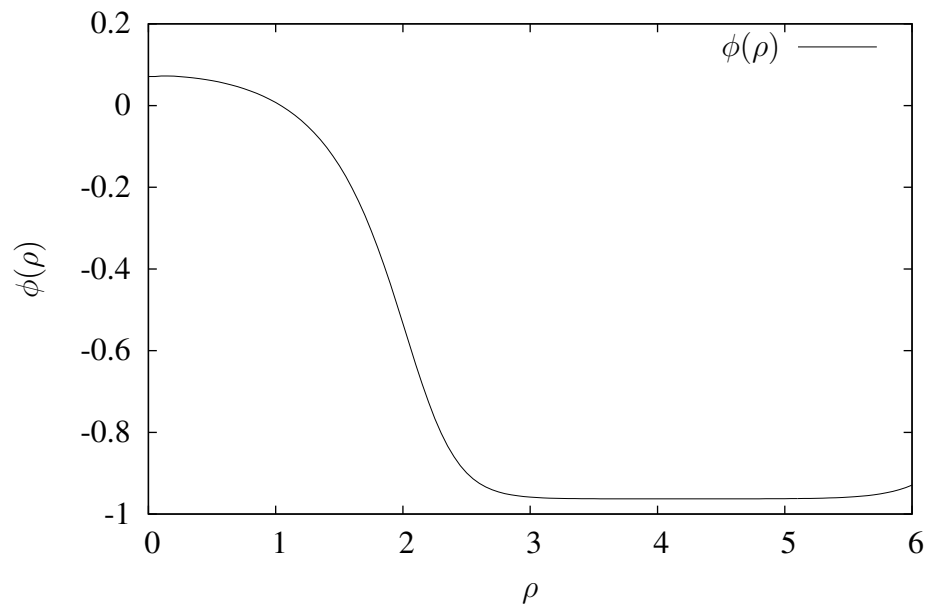


**Gambar 4.13:** Solusi instanton potensial untuk  $V_C < V_A < V_B$



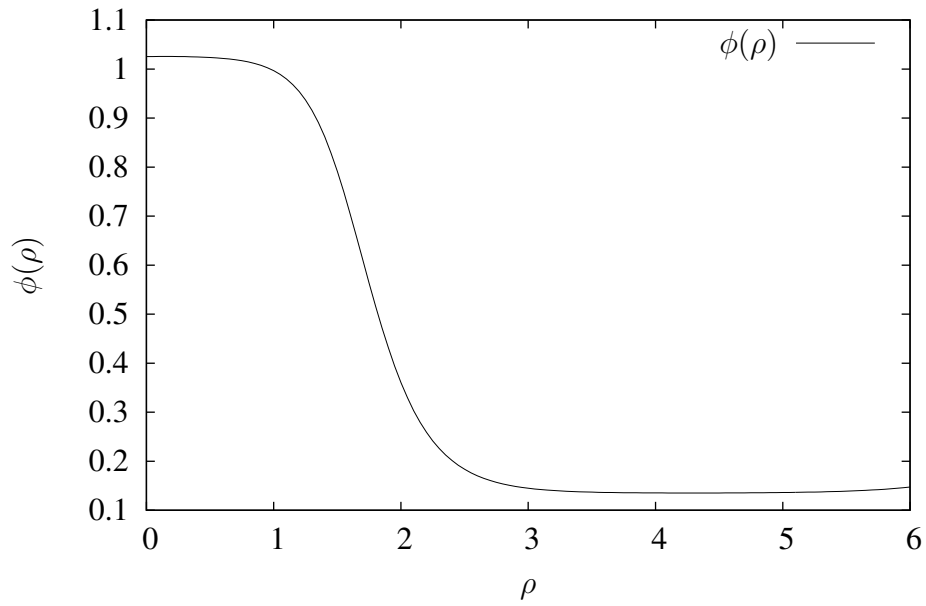
**Gambar 4.14:** Bentuk potensial untuk  $V_C < V_B < V_A$

Solusi *Tunneling* A ke B dengan Hasil  $\phi(0) = 0.071029247$  dan  $\mathcal{B} = 254.584702$



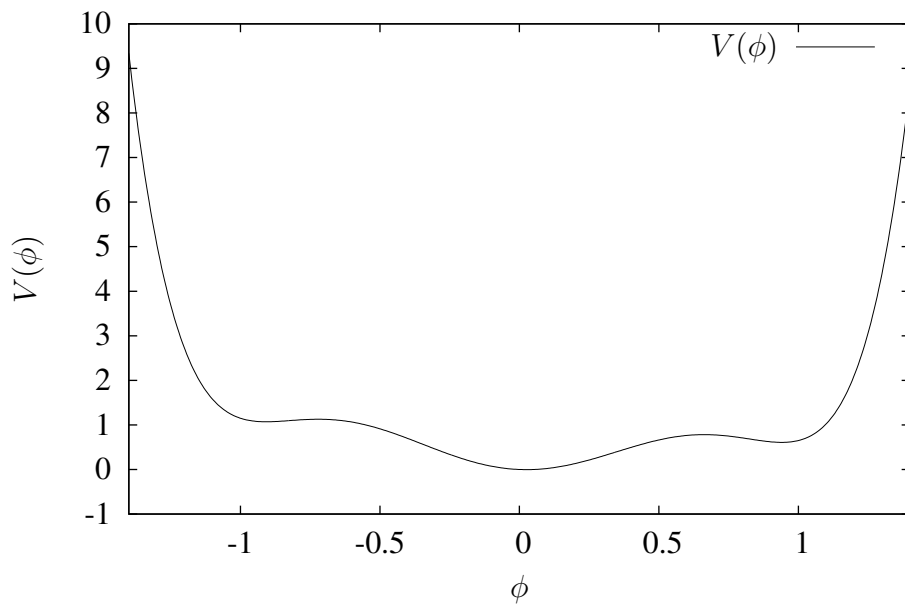
**Gambar 4.15:** Solusi-solusi instanton untuk  $V_C < V_B < V_A$

Solusi *Tunneling* B ke C dengan Hasil  $\phi(0) = 1.0255567432$  dan  $\mathcal{B} = 246.26268$



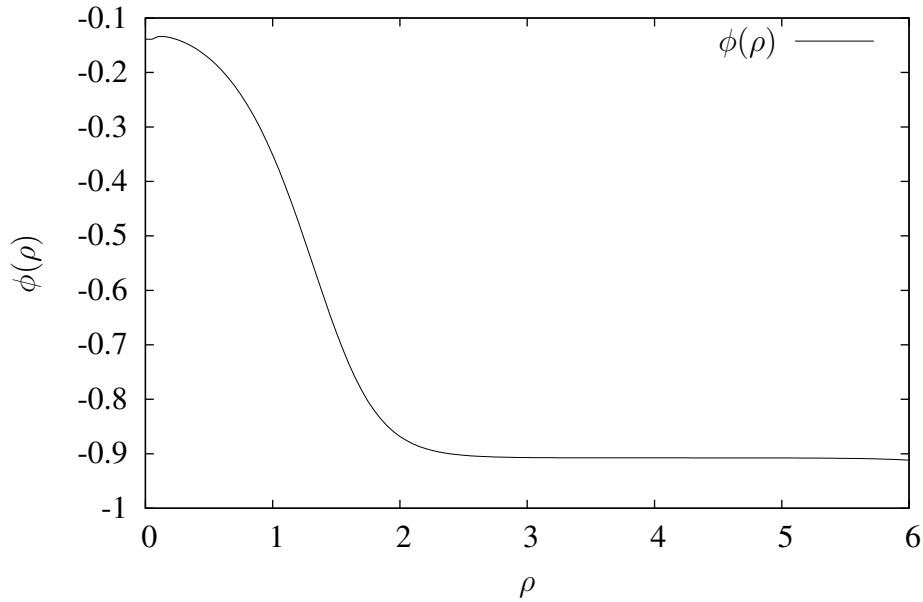
**Gambar 4.16:** Solusi-solusi instanton untuk  $V_C < V_B < V_A$

Potensial dengan Parameter  $a = 4.0$ ;  $b = 0.9$ ;  $c = -0.25$ ;  $d = 1.0$



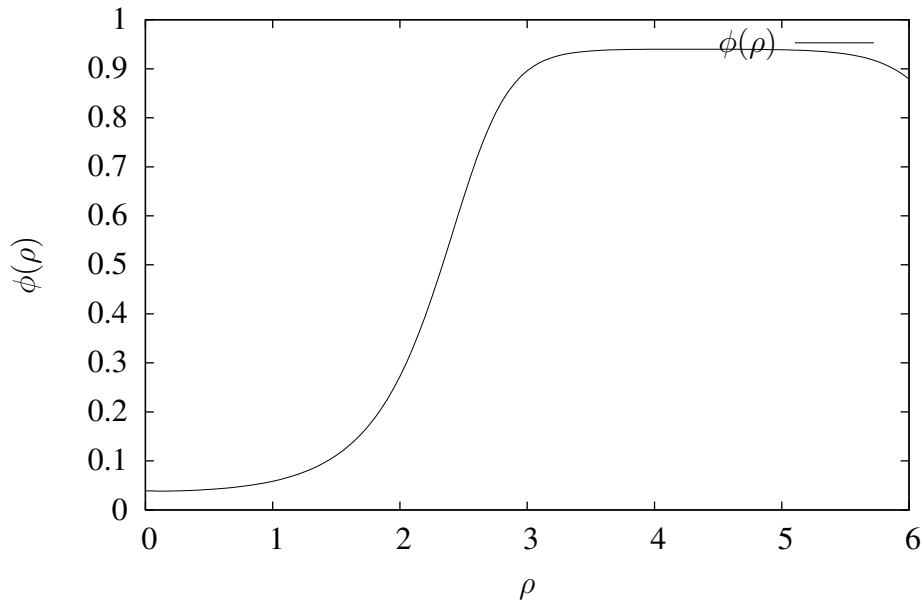
**Gambar 4.17:** Bentuk potensial untuk  $V_B < V_C < V_A$

Solusi *Tunneling* A ke B dengan Hasil  $\phi(0) = -0.13906$  dan  $\mathcal{B} = 138.717194$



**Gambar 4.18:** Solusi instanton untuk  $V_B < V_C < V_A$

Solusi *Tunneling* C ke B dengan Hasil  $\phi(0) = 0.0388632398099$  dan  $\mathcal{B} = 2402.48364$



**Gambar 4.19:** Solusi instanton untuk  $V_B < V_C < V_A$

Kita dapatkan bahwa pencerminan potensial ini tidak mengubah nilai aksi dari masing-masing solusi walaupun plot masing-masing solusi berubah. Hasil ini trivial karena jelas secara analitik pendekatan *thin-wall* menyatakan bahwa aksi potensial tidak dipengaruhi oleh arah *tunneling*, asalkan *tunneling* itu berasal dari suatu sumur potensial menuju suatu sumur lain yang lebih rendah. Maka dari itu,

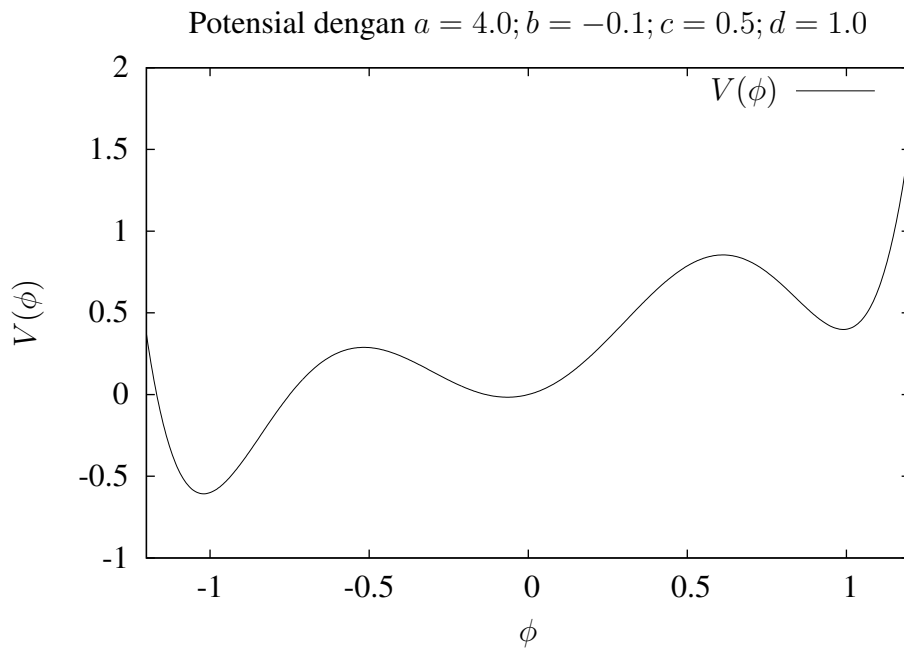


kesimpulan-kesimpulan dari masing-masing potensial tidak berbeda dengan yang kami paparkan pada subbab 4.1, 4.2, dan 4.3.

#### 4.5 Khusus untuk Potensial dengan $V_A > V_B > V_C$ atau $V_C < V_B < V_A$

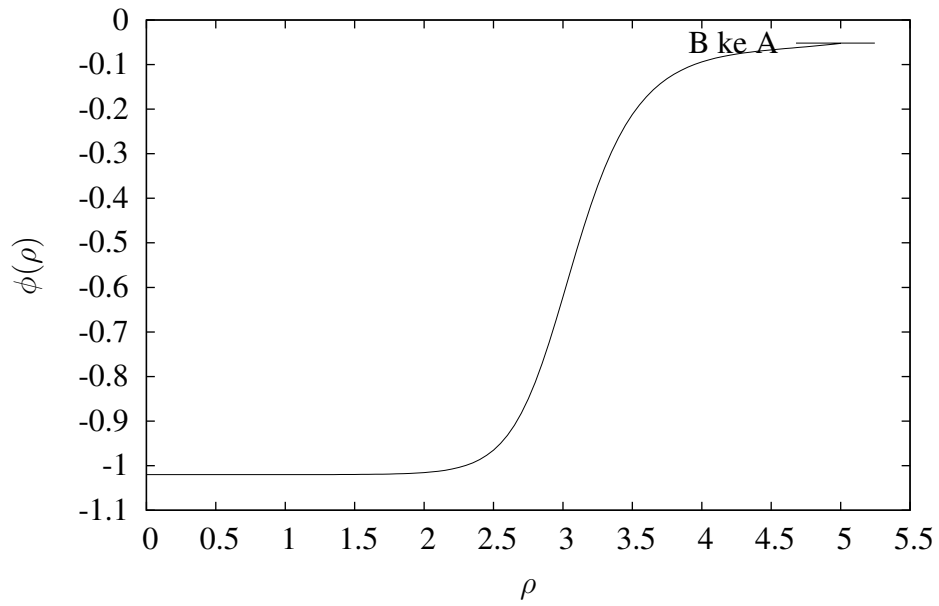
Bagian ini menjadi bagian yang paling sulit untuk dicari. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan apakah pendekatan *thin-wall limit* masih sesuai dengan hasil numerik dan apakah ada lompatan *tunneling*. Pada tujuan pertama kami telah mendapatkannya pada subbab 4.1 dan 4.3, sedangkan tujuan kedua kami temukan dalam syarat-syarat tertentu.

Kedalaman untuk potensial dengan  $V_A < V_B < V_C$  agar bisa memberikan solusi lompatan dari C ke A secara tidak langsung maka haruslah kedalaman  $V_B$  lebih mendekati kedalaman  $V_C$  dan cukup jauh dari kedalaman  $V_A$ . Kenapa demikian ialah karena setelah *tunneling* dari C agar bisa langsung *tunneling* ke A tanpa melalui proses termal, ujung solusi C ke B harus berada sangat dekat dengan titik terdalam sumur B. Jika ada proses termal, maka *tunneling* hanya akan berhenti di B. Hal ini memberikan syarat bahwa perbedaan energi vakum AB haruslah lebih besar atau sama dengan perbedaan energi vakum BC,  $\epsilon_{AB} \geq \epsilon_{BC}$ . Kita lihat hasil perhitungan yang telah diperlihatkan di bawah. Kurva potensialnya memiliki keadaan  $\epsilon_{AB} > \epsilon_{BC}$ .



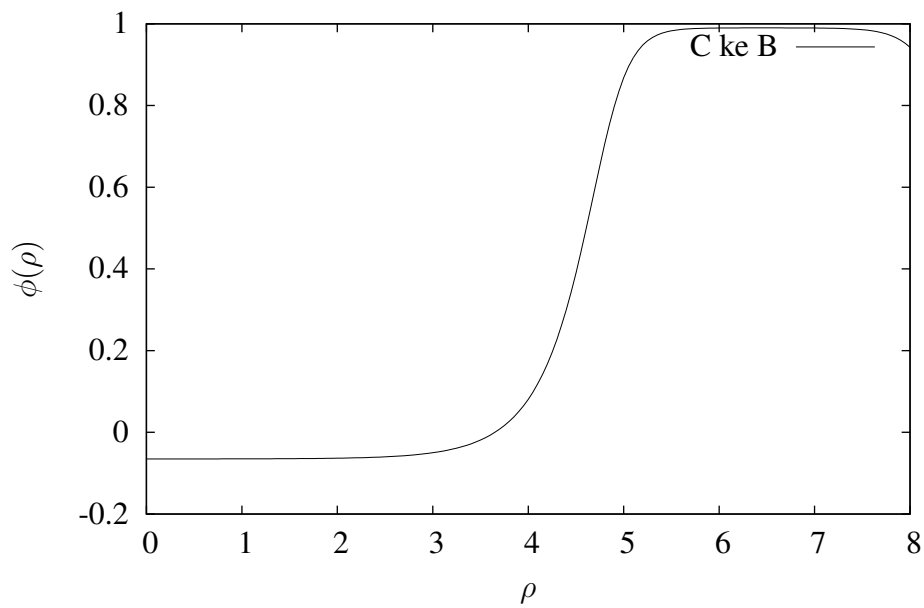
**Gambar 4.20:** Potensial dengan  $V_A < V_B < V_C$

Solusi B ke A dengan  $\phi(0) = -1.020121754$  dan  $\mathcal{B} = 120.377228$

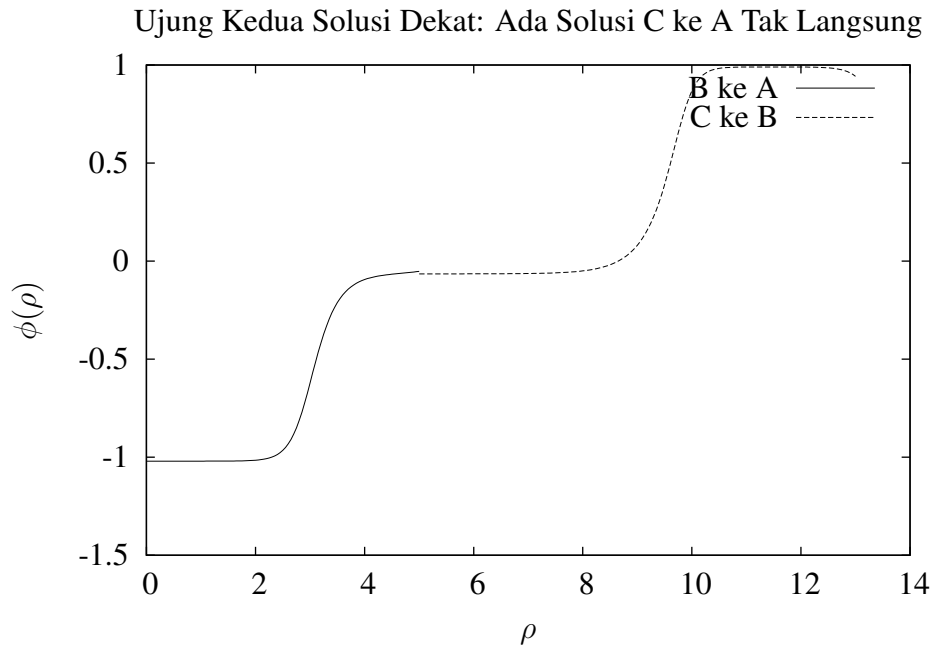


**Gambar 4.21:** Solusi instanton B ke A untuk  $V_A < V_B < V_C$

Solusi C ke B dengan  $\phi(0) = -0.065069023$  dan  $\mathcal{B} = 597.737610$



**Gambar 4.22:** Solusi instanton C ke B untuk  $V_A < V_B < V_C$



**Gambar 4.23:** Solusi instanton loncatan tak langsung untuk  $V_A < V_B < V_C$

Kedua solusi memiliki ujung yang sangat mendekati satu sama lain. Karena cukup dekat, maka proses termal, jikalau ada, akan cepat berakhir dan *tunneling* dapat terjadi lagi. Hal ini berbeda dengan solusi yang kami perlihatkan pada subbab 4.2 yang jelas mengalami proses termal yang lebih lama dari solusi ini. Hasil ini selaras dengan apa yang ada pada referensi [11] di mana jika titik terdalam sumur B lebih mendekati titik terdalam sumur A daripada titik terdalam sumur C maka *bounce* dari A ke B tidak ada *undershoot*, hanya *overshoot*, membuat solusinya tidak ada.

#### 4.6 Khusus untuk Potensial dengan $V_A > V_C > V_B$ atau $V_B < V_C < V_A$

Lain hal dengan potensial yang  $V_A > V_C > V_B$  atau  $V_B < V_C < V_A$ , kita tidak akan memiliki solusi loncatan *tunneling* tak langsung, hanya ada solusi langsung. Tetapi hal ini ternyata tidak terjadi dikarenakan adanya sumur B membuat energi kinetik selalu kurang sehingga selalu *undershoot* sebelum mencapai sumur A. Saat kami merendahkan sumur B mendekati sumur A tetapi masih  $V_A < V_B$ , solusi tetap tidak kami temukan, hal ini sesuai dengan referensi [11].

Saat sumur B kami dangkalkan hingga cekungan sumur hampir datar, solusi juga tidak kami dapatkan. Hal ini bukan berarti solusi pasti tidak ada, melainkan sumur C kurang dalam. Saat sumur C dibuat lebih rendah, seharusnya energi kinetik

cukup untuk mencapai sumur A. Walaupun demikian, kami kesulitan menemukannya karena pada saat nilai koefisien  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , dan  $d$  yang terlalu besar, kami tidak pasti berapa besarnya, maka program akan menghasilkan solusi yang tidak logis dikarenakan pada iterasi kesekian tiba-tiba solusi menyimpang terlalu jauh dan menjadi tak hingga. Jadi, pada potensial jenis ini kami tidak menemukan parameter potensial yang sesuai agar ada solusi *tunneling* dari sumur A ke sumur C secara langsung.

Hal ini juga dimungkinkan karena bentuk eksplisit potensial tersebut. Jika bentuknya berbeda dengan yang kami tinjau di sini, maka solusi yang kami cari mungkin bisa ditemukan.

## BAB 5

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1 Kesimpulan

Penelitian menggunakan perhitungan numerik ini menunjukkan bahwa semakin besar perbedaan energi antar vakum yang berbeda nilai energi vakumnya semakin besar probabilitas *tunneling*, yang menjadikan hasil analitik pendekatan *thin-wall* sesuai dengan perhitungan numerik. Kemudian, kita mendapatkan bahwa lompatan *tunneling* langsung antar dua vakum yang dipisahkan oleh sebuah vakum cenderung sulit untuk didapatkan, walaupun bisa saja ada, bergantung pada parameter potensial; lompatan tidak langsung cenderung lebih mudah ditemukan daripada lompatan langsung. Solusi *tunneling* satu sumur ini jika sumur potensial tengah lebih rendah daripada sumur potensial kanan dan kirinya, maka solusi ini tidak ada. Jika kedalaman sumur potensial tengah ini di antara kedua sumur kanan dan kirinya, maka solusi lompatan ada dengan syarat-syarat tertentu. Jika kedalaman potensial tengah berada di atas sumur potensial kanan dan kirinya, maka solusi lompatan seharusnya ada, walaupun kami tidak menemukannya. Hal ini dikarenakan saat sumur yang paling dalam sudah cukup dalam, perhitungan numerik memberikan solusi yang dengan cepat menjadi singular bahkan pada solusi yang seharusnya tidak akan singular karena *undershoot*.

#### 5.2 Saran

Literatur-literatur yang kami kutip pembahasannya pada bab teori dasar skripsi ini sampai saat ini telah dikutip tidak hanya oleh fisikawan teori, tetapi telah dibahas juga oleh fisikawan eksperimentalis dari berbagai bidang. Teori instanton ini secara matematik bisa digunakan pada berbagai teori dikarenakan potensial pada Lagrangian tidak dimasukkan secara eksplisit harus bagaimana, asalkan memiliki lebih dari dua minimum agar terjadi *tunneling* maka potensial itu sudah bisa digunakan. Sehingga hal ini tidak menutup kemungkinan bidang fisika selain teoritis untuk menggunakannya.

## DAFTAR ACUAN

- [1] S. R. Coleman, “The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory,” *Phys. Rev. D* **15**, 2929 (1977) [Erratum-ibid. *D* **16**, 1248 (1977)].
- [2] E. J. Weinberg, “Classical solutions in quantum field theory : Solitons and Instantons in High Energy Physics,” (New York: Cambridge University Press, 2012)
- [3] C. G. Callan, Jr. and S. R. Coleman, “The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections,” *Phys. Rev. D* **16**, 1762 (1977).
- [4] S. R. Coleman and F. De Luccia, “Gravitational Effects on and of Vacuum Decay,” *Phys. Rev. D* **21**, 3305 (1980).
- [5] S. Gasiorowicz, “Quantum Physics, 2nd ed,” (New York: John Wiley and Sons, 1995)
- [6] O. Fialko, B. Opanchuk, A. I. Sidorov, P. D. Drummond and J. Brand, “Fate of the false vacuum: towards realization with ultra-cold atoms,” arXiv:1408.1163 [cond-mat.quant-gas].
- [7] E. S. Fraga and C. A. A. de Carvalho, “Thermal decays in a hot Fermi gas,” *Phys. Rev. B* **52**, 7448 (1995) [hep-th/9412068].
- [8] A. Barone, M. Gasperini and G. Rotoli, “Macroscopic Quantum Tunneling and ‘cosmic’ Josephson effect,” *Phys. Rev. D* **82**, 087301 (2010) [arXiv:1006.2417 [gr-qc]].
- [9] V. T. Gurovich and L. G. Fel, “Converting Neutron Stars into Strange Stars: Instanton Model,” arXiv:1404.6685 [astro-ph.HE].
- [10] H. Simanjuntak and L. Gunther, “Macroscopic quantum tunneling in long Josephson junctions,” *Phys. Rev. B* **42**, 930 (1990)
- [11] A. R. Brown and A. Dahlen, “The Case of the Disappearing Instanton,” *Phys. Rev. D* **84**, 105004 (2011) [arXiv:1106.0527 [hep-th]].

# LAMPIRAN

# LAMPIRAN A

## *CODE* FORTRAN 90 UNTUK KOMPUTASI

### MENGUNAKAN METODE TEMBAK DENGAN

### RUNGE-KUTTA ORDE-4

```

=====
! Program Solusi dan Aksi Instanton

! menggunakan metode tembak (shooting method)
! untuk mencari inisial solusi \phi
! dan aksi yang diberikan

! masukan =
! t          : \rho
! x0         : \phi
! x1         : \phi'
! x2         : \phi''
! a, b, c, d : parameter potensial
! potf       : nilai perkiraan potensial saat false vacuum
! x0init     : \phi(\rho=0) ; yang dicari
! x1init     : \phi'(\rho=0) ; sudah ditentukan
! action     : aksi yang di cari \mathcal{B}
!            : jika bernilai negatif maka potf harus dirubah

! keluaran berupa tiga kolom data
! kolom pertama adalah \rho
! kolom kedua adalah \phi
! kolom ketiga adalah sumasi aksi dari awal perhitungan
! kolom pertama dan kedua digunakan untuk melihat plot di gnuplot
! ketiga kolom diakhiri dengan menampilkan parameter potensial dan potf

program shootinstanton
implicit none

integer :: j
integer,parameter :: n = 80
integer,parameter :: jmin=1, jmax=n
real,parameter :: tmin=0.001, tmax=n/20
real,parameter :: h=(tmax-tmin)/n
! ditetapkan setiap satu detik 20 iterasi sehingga harus kelipatan 20
! agar solusi konsisten

```



```

real :: k1,k2,k3,k4,x2,action,pot,lagr
real,dimension(jmin-1:jmax) :: t,x0,x1
real,parameter :: x1init= 0.0

!=====Bagian program yang sering diubah=====

!!$! untuk potensial dengan V_A<V_C<V_B
real,parameter :: a=4.0 , b=-2.0 , c=0.25 , d=1.0 , potf=-0.01
real,parameter :: x0init= 1.086364806
!!$! hasil nilai shoot B ke A aksi = 33.97155

!=====

!=====Hasil penelitian diambil dari parameter berikut=====

!!$! untuk potensial dengan V_A<V_C<V_B
! real,parameter :: a=4.0 , b=-2.0 , c=0.25 , d=1.0 , potf=-0.01
! real,parameter :: x0init= 1.086364806
!!$! hasil nilai shoot B ke A aksi = 33.97155
!!$
!!$! untuk potensial dengan V_A<V_C<V_B
!!$real,parameter :: a=4.0 , b=-2.0 , c=0.25 , d=1.0 , potf=-0.01
!!$real,parameter :: x0init= -1.0456987024
!!$! hasil nilai shoot B ke C aksi = 17.366354
!!$
!!$! untuk potensial dengan V_A<V_B<V_C
!!$!real,parameter :: a=4.0 , b=0.0 , c=1.0 , d=1.0 , potf=0.95
!!$!real,parameter :: x0init= -0.071029247
!!$! hasil nilai shoot C ke B aksi = 254.584702
!!$
!!$! untuk potensial dengan V_A<V_B<V_C
!!$real,parameter :: a=4.0 , b=0.0 , c=1.0 , d=1.0 , potf=-0.1
!!$real,parameter :: x0init= -1.0255567432
!!$! hasil nilai shoot B ke A aksi = 246.26268
!!$
!!$! untuk potensial dengan V_B<V_A<V_C
!!$real,parameter :: a=4.0 , b=0.9 , c=0.25 , d=1.0 , potf=1.05
!!$real,parameter :: x0init= 0.13906
!!$! hasil nilai shoot C ke B aksi = 138.717194
!!$
!!$! untuk potensial dengan V_B<V_A<V_C
!!$real,parameter :: a=4.0 , b=0.9 , c=0.25 , d=1.0 , potf=0.25
!!$real,parameter :: x0init= -0.0388632398099
!!$! hasil nilai shoot A ke B aksi = 2402.48364

```

! potensial yang dicerminkan

```

!!$! untuk potensial dengan  $V_C < V_A < V_B$ 
!!$real,parameter :: a=4.0 , b=-2.0 , c=-0.25 , d=1.0 , potf=-0.01
!!$real,parameter :: x0init= -1.086364806
!!$! hasil nilai shoot B ke A aksi = 33.97155
!!$
!!$! untuk potensial dengan  $V_C < V_A < V_B$ 
!!$real,parameter :: a=4.0 , b=-2.0 , c=-0.25 , d=1.0 , potf=-0.01
!!$real,parameter :: x0init= 1.0456987024
!!$! hasil nilai shoot B ke C aksi = 17.366354
!!$
!!$! untuk potensial dengan  $V_C < V_B < V_A$ 
!!$real,parameter :: a=4.0 , b=0.0 , c=-1.0 , d=1.0 , potf=0.95
!!$real,parameter :: x0init= 0.071029247
!!$! hasil nilai shoot A ke B aksi = 254.584702
!!$
!!$! untuk potensial dengan  $V_C < V_B < V_A$ 
!!$real,parameter :: a=4.0 , b=0.0 , c=-1.0 , d=1.0 , potf=-0.1
!!$real,parameter :: x0init= 1.0255567432
!!$! hasil nilai shoot B ke C aksi = 246.26268
!!$
!!$! untuk potensial dengan  $V_B < V_C < V_A$ 
!!$real,parameter :: a=4.0 , b=0.9 , c=-0.25 , d=1.0 , potf=1.05
!!$real,parameter :: x0init= -0.13906
!!$! hasil nilai shoot A ke B aksi = 138.717194
!!$
!!$! untuk potensial dengan  $V_B < V_C < V_A$ 
!!$real,parameter :: a=4.0 , b=0.9 , c=-0.25 , d=1.0 , potf=0.25
!!$real,parameter :: x0init= 0.0388632398099
!!$! hasil nilai shoot C ke B aksi = 2402.48364

```

! solusi lompatan

```

!!$! untuk potensial dengan  $V_A < V_B < V_C$ 
!   real,parameter :: a=4.0 , b=-0.1 , c=0.5 , d=1.0
! tunneling C ke B           x0=-0.06524 =-0.06506905
!   real,parameter :: x0init=-0.065069023 , potf= 0.39854
!!$! hasil aksi = 597.737610
! tunneling B ke A           x0=-1.02012
!   real,parameter :: x0init=-1.020121754 , potf= -0.0161652128
!!$! hasil aksi = 120.377228
! dapat tunnel scr tak langsung dari A ke C

```

!=====

```

! menghitung dengan metode runge-kutta orde 4
call rungekutta4(t,x0,x1,a,b,c,d,h,jmin,jmax,tmin,x0init,x1init)

! menampilkan parameter-parameter
print *, '# a=',a,'b=',b
print *, '# c=',c,'d=',d
print *, '# potf=',potf,'x0init=',x0init

! menghitung sumasi dalam action
action=0
do j=0,jmax
    lagr=2.*3.14**2*t(j)**3*((0.5)*x1(j)**2+pot(x0(j),a,b,c,d)-potf)
    action=action+h*lagr
    print *, t(j),x0(j),action
end do

end program shootinstanton

!=====
! Fungsi untuk memasukkan persamaan eksplisit phi''
function x2(t,x0,x1,a,b,c,d)
implicit none
real :: t,x0,x1,x2,a,d,b,c

x2=-(3/t)*x1 + (2*a*x0*(x0**2-d**2)*(3*x0**2-d**2)+(2*b*x0+c))
end function x2
!=====

!=====
! Fungsi untuk memasukkan persamaan eksplisit potensial
function pot(x0,a,b,c,d)
implicit none
real :: pot,a,b,c,d,x0

pot=a*x0**2*(x0**2-d**2)**2+b*x0**2+c*x0
end function pot
!=====

!=====
! Subroutine untuk shooting method menggunakan runge kutta orde 4
subroutine rungekutta4(t,x0,x1,a,b,c,d,h,jmin,jmax,tmin,x0init,x1init)
real :: a,b,c,d,h,k1,k2,k3,k4
integer :: jmin,jmax,j
real,dimension(jmin-1:jmax) :: t,x0,x1

```

```

! membersihkan array t,x0,x1
do j=jmin-1,jmax
  t(j)=0
  x0(j)=0
  x1(j)=0
end do

! memberikan nilai batasan awal
t(0) = tmin
x0(0) = x0init
x1(0) = x1init

! memulai iterasi Runge-Kutta
do j=jmin-1,jmax-1
  t(j+1)=t(j)+h
  x0(j+1)=x0(j)+h*x1(j)
  k1=h*x2(t(j),x0(j),x1(j),a,b,c,d)
  k2=h*x2(t(j)+h/2,x0(j)+h*x1(j)/2,x1(j)+k1/2,a,b,c,d)
  k3=h*x2(t(j)+h/2,x0(j)+h*x1(j)/2,x1(j)+k2/2,a,b,c,d)
  k4=h*x2(t(j)+h,x0(j)+h*x1(j),x1(j)+k3,a,b,c,d)
  x1(j+1)=x1(j)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
end do
end subroutine
!=====

```

## LAMPIRAN B

### KOREKSI KUANTUM UNTUK KOEFISIEN AMPLITUDO PROBABILITAS

Lampiran ini merujuk pada referensi [3] dan [2]. Perhitungan ini berada pada teori mekanika kuantum dalam satu dimensi waktu dan satu dimensi ruang. Perhitungan ini dimulai dari versi Euklidean dari *Feynman's sum over histories* untuk mencari koefisien  $\mathcal{A}$

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = N \int [dx] e^{-S_E(x)/\hbar}. \quad (\text{B.1})$$

Kita bahas ruas kiri terlebih dahulu. Kita definisikan fungsi eigen  $|n\rangle$  dengan nilai eigen energi  $E_n$ ,  $H |n\rangle = E_n |n\rangle$ , maka dengan relasi kelengkapan  $1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$  didapatkan

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle. \quad (\text{B.2})$$

$T$  adalah waktu yang bernilai besar,  $H$  adalah Hamiltonian,  $|x_i\rangle$  adalah keadaan eigen awal, dan  $|x_f\rangle$  adalah keadaan eigen akhir. Untuk saat ini, kita gunakan potensial yang simetri. Jika keadaan awal adalah  $x = -a$  dan keadaan akhir adalah  $x = -a$  (berlaku juga untuk keadaan awal adalah  $x = a$  dan keadaan akhir adalah  $x = a$ ) maka terjadi *bounce* sebanyak 2 kali, atau 4 kali, atau 6 kali dan seterusnya atau bisa disebut sebagai *bouncing  $n$  times* dengan  $n$  bilangan genap. Jika keadaan awal adalah  $x = -a$  dan keadaan akhir adalah  $x = a$  dan kebalikannya (keadaan awal  $x = a$  dan keadaan akhir  $x = -a$ ) maka terjadi *bouncing  $n$  times* dengan  $n$  bilangan ganjil.

Kemudian kita bahas ruas kiri.  $N$  adalah konstanta normalisasi,  $S_E$  adalah aksi Euklidean

$$S_E(x) = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \right], \quad (\text{B.3})$$

$[ds]$  adalah integrasi seluruh fungsi  $x(t)$  yang melibatkan syarat batas  $x(-T/2) = x_i$ ,  $x(T/2) = x_f$  serta  $T \rightarrow \infty$ . Jika  $\bar{x}$  adalah solusi yang memenuhi syarat-syarat batas tersebut maka sebuah fungsi umum yang memenuhi syarat-syarat batas tersebut adalah

$$x(t) = \bar{x}(t) + \sum_n c_n y_n(t). \quad (\text{B.4})$$

dimana  $y_n$  kumpulan lengkap fungsi yang saling ortonormal. Syarat batas bahwa

$y_n$  saling habis pada  $t = \pm T/2$ , serta definisi integrasi seluruh ruang-waktu adalah

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt y_n(t)y_m(t) = \delta_{nm}, \quad y_n(\pm T/2) = 0, \quad \text{dan } [dx] = \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (\text{B.5})$$

Aksi dapat dideskripsikan menggunakan deret Taylor

$$S_E(x) = S_E(\bar{x}) + \left. \frac{dS_E}{dx} \right|_{\bar{x}} \left( \sum_n c_n y_n(t) \right) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 S_E}{dx^2} \right|_{\bar{x}} \left( \sum_n c_n y_n(t) \right)^2 + \dots$$

Sementara itu dengan variasi aksi didapatkan turunan pertama menghasilkan persamaan gerak

$$S'_E(\bar{x}) = \left. \frac{dS_E}{dx} \right|_{\bar{x}} = -\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{\bar{x}} = 0, \quad (\text{B.6})$$

dan turunan kedua menghasilkan operator yang menghasilkan nilai eigen  $\lambda_n$  dari fungsi eigen  $y_n$ ,

$$S''_E(\bar{x})y_n = \left. \frac{d^2 S_E}{dx^2} \right|_{\bar{x}} y_n = -\frac{d^2}{dt^2} + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{\bar{x}} y_n = \lambda_n y_n, \quad (\text{B.7})$$

sehingga dengan persamaan B.5

$$S_E(x) = S_E(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2 + \dots,$$

dan dengan integral Gaussian didapatkan

$$I = N \int \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-(S_E(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k c_k^2 + \dots)/\hbar} = N e^{-S_E(\bar{x})/\hbar} \prod_n \lambda_n^{-1/2} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (\text{B.8})$$

Persamaan ini hanya untuk satu buah titik stasioner, bentuk umumnya harus disumasikan seluruh titik stasioner tersebut.

Jika terdapat  $n$  buah *bounce*, maka harus dikalikan dengan  $K^n$  dan diintegrasikan terhadap waktu sebanyak  $n$  kali pada lokasi-lokasi pusat *bubble*. Untuk waktu yang besar,  $T \rightarrow \infty$ , integrasi terhadap waktu menghasilkan koefisien berikut

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{t_1} dt_2 \int_{-T/2}^{t_2} dt_3 \dots \int_{-T/2}^{t_{n-1}} dt_n = \frac{T^n}{n!}. \quad (\text{B.9})$$

$K$  didefinisikan agar ekspresi ini memberikan jawaban yang benar untuk satu kali *bounce*. Kita ambil potensial yang sudah dirusak simetrinya seperti pada bab

teori dasar. Persamaan gerak dikalikan kedua sisi dengan  $dx/dt$  menjadikan

$$E = -\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V,$$

kemudian karena ini membahas vakum, maka energi yang ada harus nol. Hal ini menjadikan

$$\mathcal{B} = \int dx \sqrt{2V} = \int dx \left( \frac{dx}{dt} \right) = \int dt \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Kita ambil sebuah solusi  $x_{\text{lokal}}$  yang memiliki solusi trivial berupa konstanta ( $x_{\text{lokal}} = a$  untuk  $\langle a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle$ ). Kontribusi solusi trivial pada *path integral* adalah

$$I_0 = N [\det S''_E(x_{\text{lokal}})]^{-1/2} [1 + \mathcal{O}(\hbar)].$$

Kemudian untuk  $\bar{x}$  adalah solusi *bounce* dari  $\langle -a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle$  sehingga awalnya  $\bar{x}(\tau = -T/2) = -a$  menuju  $\bar{x}(\tau = T/2) = a$  akan memberikan kontribusi *path integral*

$$N [\det S''_E(\bar{x})]^{-1/2} e^{-S_E(\bar{x})/\hbar}.$$

Tetapi,  $S''_E$  memiliki *zero mode*. Misalkan fungsi  $y_0$  yang memiliki nilai eigen nol dinormalisasikan dengan relasi kelengkapan  $1 = \int dt |y_0|^2$  kemudian dikalikan  $\mathcal{B}$  dari kiri menjadikan

$$y_0 = \frac{1}{\mathcal{B}} \frac{dx}{dt}.$$

Karena *zero mode* yang diakibatkan oleh nilai eigen nol,  $\det S''_E$  nol dan  $\bar{I}$  menjadi divergen. Kita harus mengintegrasikannya terhadap koefisien ekspansi  $c_0$  tetapi ini bisa digantikan dengan persamaan B.9 untuk menghindari tak hingga karena determinan yang nol. Dari faktor integrasi yang baru

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = y_0 dc_0,$$

menjadikan

$$\sqrt{\frac{\mathcal{B}}{2\pi\hbar}} dt = \frac{dc_0}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (\text{B.10})$$

Dalam mengevaluasi determinan, kita tidak mengikutsertakan nilai eigen nol tetapi digantikan dengan faktor  $\sqrt{\mathcal{B}/2\pi\hbar}$  pada  $K$ . Untuk itu, dengan  $\det'$  adalah determi-

nan yang tidak mengikutsertakan nilai eigen nol, kita dapatkan

$$I_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{2\pi\hbar}} T N [\det' S_E''(\bar{x})]^{-1/2} e^{-S_E(\bar{x})/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)].$$

Akhirnya, kita bisa definisikan (walaupun masih belum benar)

$$K = \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{2\pi\hbar}} \left[ \frac{\det' S_E''(\bar{x})}{\det S_E''(x_{\text{lokal}})} \right]^{-1/2},$$

sehingga

$$I_1 = K T N [\det S_E''(x_{\text{lokal}})]^{-1/2} e^{-S_E(\bar{x})/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (\text{B.11})$$

Ini hanya untuk kasus saat terjadi satu instanton. Kasus  $n$  buah instanton dan anti-instanton yang dipisahkan oleh sumur potensial akan memberikan

$$I_n = K^n \frac{T^n}{n!} N [\det S_E''(x_{\text{lokal}})]^{-1/2} e^{-n S_E(\bar{x})/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (\text{B.12})$$

Akibatnya, kontribusi dari kesemua yang mungkin dijumlahkan akan menjadi

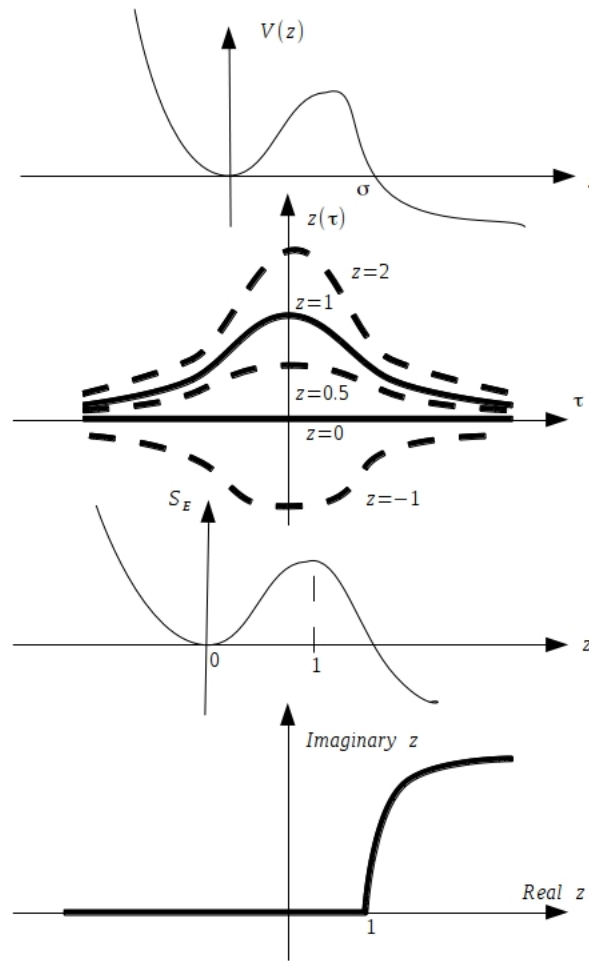
$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \langle a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle + \langle -a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle = \sum_{n \text{ genap}} I_n + \sum_{n \text{ ganjil}} I_n \quad (\text{B.13})$$

$$= N [\det S_E''(x_{\text{lokal}})]^{-1/2} \exp(K T e^{-S_E(\bar{x})/\hbar}) [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (\text{B.14})$$

Energi dasarnya yang didapat adalah

$$E_0 = - \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\hbar}{T} \ln (N [\det S_E''(x_{\text{lokal}})]^{-1/2}) \right\} + \hbar K e^{-S_E(\bar{x})/\hbar} \right] [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (\text{B.15})$$





**Gambar B.1:** Grafik potensial, solusi, aksi Euklidean dan solusi dalam ruang kompleks yang dibahas pada alinea tentang mode negatif

Definisi konstanta  $K$  sebelumnya belum benar karena belum mempertimbangkan nilai eigen negatif dan mode negatif. Divergensi pada  $E_0$  terjadi jika nilai eigen  $S''_E(\bar{x})$  negatif sehingga  $N[\det S''_E(\bar{x})]^{-1/2}$  pada  $K$  menjadi imajiner, menjadikan  $E_0$  imajiner. Hal ini memberikan faktor  $i$  pada  $K$ .

Untuk mode negatif, kita dapatkan mode negatif karena nilai dari aksi Euklidean negatif. (Untuk visualisasi, pembaca bisa melihat gambar B.1.) Misalkan kita memiliki aksi Euklidean yang merupakan integrasi terhadap variabel  $z$ . Aksi ini  $S_E = S_E(z)$  memiliki solusi trivial di  $z = 0$  dan solusi *bounce* di  $z = 1$ . Dari  $z = 0$  hingga  $z \rightarrow -\infty$ , aksi bertambah terus saat  $z$  semakin negatif. Hal ini dikarenakan potensial naik terus di sepanjang *range* tersebut. Dari  $z = 0$  hingga  $z = 1$ , aksi bertambah hingga berhenti pada  $z = 1$  dan aksi pada  $z = 1$  merupakan maksimum lokal. Hal ini dikarenakan potensial naik kemudian berhenti dan turun

terus menuju negatif tak hingga sepanjang *range* tersebut. Ada satu solusi *bounce* yaitu pada  $z = 1$  yang memiliki jalur yang menuju permukaan *potential barrier* pada sumur minimum global yang kita namakan  $\sigma$ . Kasus  $0 < z < 1$ , ujung jalur tidak sampai  $\sigma$  dan kasus  $z > 1$ , ujung jalur berada lewat dari  $\sigma$ . Mode negatif ini berkorespondensi pada jalur *bounce* yang mungkin untuk  $S_E$  tetapi tidak mungkin untuk  $\mathcal{B}$  karena  $\mathcal{B}$  harus positif atau nol. Pada  $-\infty < z < 1$ ,  $S_E'' > 0$ .  $z = 1$  adalah titik belok kurva  $S_E$ . Mulai dari  $1 \leq z < \infty$ ,  $S_E''(z) < 0$ . Pada range ini, kontribusi riil solusi berhenti dan kontribusi imajiner solusi mulai bertambah. Andaikan pertambahan kontribusi ini menuju tak hingga pada sumbu imajiner. Kontribusi *path integral*-nya adalah

$$J = \int dz \frac{e^{-S_E(z)/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}.$$

Karena kontribusinya hanya berada pada sumbu positif imajiner, maka dengan deret MacLaurin hingga orde kedua kita dapatkan

$$\text{Im}J = \text{Im} \int_{1+i0}^{1+i\infty} dz \frac{e^{-S(1)/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2 S(1)}{dz^2} \frac{(z-1)^2}{\hbar}\right),$$

Integral ini adalah integral Gaussian yang berjalan dari 0 menuju  $+\infty$ , sehingga setelah diintegrasi kita dapatkan

$$\text{Im}J = \frac{1}{2} \frac{e^{-S(1)/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{[d^2 S(1)/dz^2]}} = \frac{1}{2} e^{-S(1)/\hbar} \left[ \frac{d^2 S(1)}{dz^2} \right]^{-1/2},$$

sehingga kita harus tambahkan  $1/2$  pada koefisien  $K$ . (Jika kontribusi imajiner berada pada sepanjang sumbu negatif imajiner, batas integrasi adalah dari 0 menuju  $-\infty$  yang akan memberikan hasil yang sama dengan yang telah kita hitung.)

Dengan deskripsi di atas, kita mendapatkan definisi akhir  $K$  sebagai

$$K = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{2\pi\hbar}} \left[ \frac{\det' S_E''(\bar{x})}{\det S_E''(x_{\text{lokal}})} \right]^{-1/2}. \quad (\text{B.16})$$

Kita dapat memasukkan ini pada sebuah *bounce*

$$N \int [dx] e^{-S_E(x)/\hbar} = N [\det S_E''(x_{\text{lokal}})]^{-1/2} K T e^{-\mathcal{B}/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)], \quad (\text{B.17})$$

dengan  $\mathcal{B} = S_E(\bar{x}) - S_E(x_{\text{lokal}})$  di mana pada kasus umum di mana  $S_E(x_{\text{lokal}})$  tidak nol. (Hal ini penting untuk instanton yang melibatkan gravitasi di mana jika nilai ini tidak nol maka akan berkontribusi pada konstanta kosmologi.) Kita dapatkan

probabilitas *bounce* dalam satu dimensi yaitu

$$\Gamma = -2\text{Im}E_0/\hbar = 2\text{Im}K e^{-\mathcal{B}/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (\text{B.18})$$

$$= \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{2\pi\hbar}} \left[ \frac{\det' S''_E(\bar{x})}{\det S''_E(x_{\text{lokal}})} \right]^{-1/2} e^{-\mathcal{B}/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (\text{B.19})$$

Persamaan ini kita normalisasikan. Anggap aksi Euklidean  $S_E^{(0)}$  memenuhi syarat-syarat batas dan  $S_E^{(n)}$  tidak memenuhi syarat-syarat batas, di mana  $(n)$  adalah koreksi orde ke- $n$ ,  $S_E = S_E^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n S_E^{(n)} = S_E^{(0)} + S_E^{\text{koreksi}}$  sehingga  $\mathcal{B} = S_E^{(0)}(\bar{x}) - S_E^{(0)}(x_{\text{lokal}})$ . Hal ini membuat

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{2\pi\hbar}} \left[ \frac{\det' S''_E(\bar{x})}{\det S''_E(x_{\text{lokal}})} \right]^{-1/2} e^{-(S_E^{\text{koreksi}}(\bar{x}) - S_E^{\text{koreksi}}(x_{\text{lokal}}))/\hbar} e^{-\mathcal{B}/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (\text{B.20})$$

Kita masuk pada ranah teori medan pada tiga dimensi ruang dan satu dimensi waktu. Potensial simetrik yang telah dirusak kita gunakan. Persamaan B.20 sudah dimasukkan aspek normalisasi. Medan didefinisikan sebagai  $\phi = \bar{\phi} + \sum_n c_n \phi_n$  dengan  $\bar{\phi}$  adalah solusi *bounce*. Probabilitasnya secara umum didefinisikan sebagai

$$\Gamma = \mathcal{V} \left[ \sum_{m=1}^4 \left( \frac{\mathcal{N}_m}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \right] \left[ \frac{\det' S''_E(\bar{\phi})}{\det S''_E(\phi_{\text{false}})} \right]^{-1/2} e^{-(\mathcal{B} + S_E^{\text{koreksi}}(\bar{\phi}) - S_E^{\text{koreksi}}(\phi_{\text{false}}))/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)], \quad (\text{B.21})$$

dengan  $\mathcal{N}_m$  adalah faktor normalisasi untuk *zero mode* yang berkorespondensi pada translasi searah sumbu  $x_m$  ( $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  dan  $\tau = x_4$ ). Solusi instanton invarian terhadap rotasi O(4) sehingga membuat  $\mathcal{N}_m = \int d^4x (\partial_m \phi)^2 = \mathcal{B}$  [2] menjadikan probabilitasnya

$$\frac{\Gamma}{\mathcal{V}} = \left( \frac{\mathcal{B}}{2\pi\hbar} \right)^2 \left[ \frac{\det' S''_E(\bar{\phi})}{\det S''_E(\phi_{\text{false}})} \right]^{-1/2} e^{-\mathcal{B}/\hbar} e^{-(S_E^{\text{koreksi}}(\bar{\phi}) - S_E^{\text{koreksi}}(\phi_{\text{false}}))/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \quad (\text{B.22})$$

Maka kita dapatkan bahwa koefisien  $\mathcal{A}$  adalah

$$\mathcal{A} = \left( \frac{\mathcal{B}}{2\pi\hbar} \right)^2 \left[ \frac{\det' S''_E(\bar{\phi})}{\det S''_E(\phi_{\text{false}})} \right]^{-1/2} e^{-(S_E^{\text{koreksi}}(\bar{\phi}) - S_E^{\text{koreksi}}(\phi_{\text{false}}))/\hbar}. \quad (\text{B.23})$$

## LAMPIRAN C

### EFEK GRAVITASI PADA *BUBBLE*

Lampiran ini merujuk pada referensi [4] dan [2]. Setelah terbentuk, *bubble* akan berkembang secara cepat dan *bubble* memiliki energi  $\epsilon$  maka semakin besar energi ini maka semakin besar kontribusi gravitasi. Radius Schwarzschild bernilai

$$r_S = \frac{2GM}{c^2},$$

dengan  $c \equiv 1$  dan radius *bubble*  $r$ . *Bubble* memiliki massa (dari kontribusi energi *true vacuum* dan dindingnya)

$$M = \frac{4\pi r^3 \epsilon}{3},$$

sehingga

$$r_S = \frac{\kappa \epsilon r^3}{3},$$

dengan  $\kappa = 8\pi G/c^2$  dan kita set  $c \equiv 1$ . Gravitasi mulai berkontribusi saat  $r \approx r_S$

$$r_S = \sqrt{\frac{3}{\kappa \epsilon}}. \quad (\text{C.1})$$

Aksi Minkowskian yang mengikutsertakan gravitasi dengan kontribusi konstanta kosmologi  $\Lambda$  adalah

$$S(\phi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) - \frac{(R - 2\Lambda)}{2\kappa} \right], \quad (\text{C.2})$$

dengan  $R$  skalar kelengkungan atau biasa dikenal sebagai skalar Ricci dan determinan metrik Minkowski  $g = \det(g_{\mu\nu}) < 0$  sehingga integrasi  $d^4x$  harus dirubah dengan melibatkan akar kuadrat determinan metrik  $d^4x \sqrt{-g}$ . Menambahkan konstanta pada potensial  $V$  (atau menambahkan sesuatu dalam kurung kurawal) sama saja dengan memberikan secara eksplisit konstanta kosmologi. Sehingga, dengan berubahnya  $V$  dari sebelum dan setelah *bounce*, maka konstanta kosmologi pun berubah, merubah keseluruhan teori gravitasi. Konstanta kosmologi kita set nol.

Kita membutuhkan batasan yang jelas untuk kerapatan energi. Kita definisikan  $\phi_{\text{false}} = \phi_+$  dan  $\phi_{\text{true}} = \phi_-$ . Ada dua kasus yang akan kita gunakan, yaitu pertama  $V(\phi_+)$  nol dan  $V(\phi_-)$  negatif, dan kedua  $V(\phi_+)$  positif dan  $V(\phi_-)$  nol.

Kita definisikan elemen panjang Euklidean dalam bentuk koordinat *three-*

*sphere*  $d\Omega$  ditambah satu dimensi koordinat radial  $\xi$  untuk mengukur jarak antar kelengkungan-kelengkungan

$$ds^2 = d\xi^2 + \rho(\xi)^2 d\Omega^2, \quad (\text{C.3})$$

dengan  $\rho(\xi)$  radius koordinat bola 4 dimensi dan

$$d\Omega^2 = d\alpha^2 + \sin^2 \alpha (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{C.4})$$

sehingga metrik tensornya

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(\xi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(\xi)^2 \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho(\xi)^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Dikarenakan determinan metrik Euklidean  $g = \det(g_{\mu\nu}) > 0$  sehingga  $\sqrt{-g} \rightarrow \sqrt{g}$  dan suku potensial dalam kurung kurawal berubah tanda jika dalam ruang Euklidean sehingga saat kita ubah terlebih dahulu aksi Minkowskian menjadi aksi Euklidean menjadi

$$S_E(\phi) = \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) - \frac{R}{2\kappa} \right]. \quad (\text{C.6})$$

Kita juga definisikan koefisien  $\mathcal{B}$  sebagai

$$\mathcal{B} = S_E(\phi) - S_E(\phi_{\text{false}}), \quad (\text{C.7})$$

yang memberikan informasi bahwa koefisien  $\mathcal{B}$  pada *false vacuum* harus didesain sama dengan nol. Jika ini tidak nol, maka nilai konstanta kosmologi menjadi tidak nol, yang tentu kita hindari.

Kita variasikan  $S_E$  terhadap  $\delta g^{\mu\nu}$  didapatkan dan dengan menggunakan  $\delta \sqrt{g} = -(1/2)\sqrt{g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$

$$\frac{\delta S_E}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi) - \frac{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R}{2\kappa} \right],$$

sehingga didapatkan persamaan Einstein  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$  dengan tensor energi-momentumnya adalah

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (\text{C.8})$$

Metrik tensor yang dipakai akan memberikan komponen koefisien koneksi  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  yang tidak nol berikut

$$\Gamma_{11}^0 = -\rho\rho', \quad \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{11}^0 \sin^2 \alpha, \quad \Gamma_{33}^0 = \Gamma_{22}^0 \sin^2 \theta, \quad (\text{C.9})$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\rho'}{\rho}, \quad (\text{C.10})$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin \alpha \cos \alpha, \quad \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{22}^1 \sin^2 \theta, \quad (\text{C.11})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \cot \alpha, \quad (\text{C.12})$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad (\text{C.13})$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \quad (\text{C.14})$$

Kemudian, kita bisa dapatkan komponen tensor Ricci yang tidak nol yaitu

$$R_{00} = -\frac{3\rho''}{\rho}, \quad R_{11} = 2 - 2\rho'^2 - \rho\rho'', \quad (\text{C.15})$$

$$R_{22} = R_{11} \sin^2 \alpha, \quad R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (\text{C.16})$$

Konstanta Ricci (*curvature scalar*) akan kita dapatkan berupa

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \frac{6}{\rho^2}(1 - \rho'^2 - \rho\rho''), \quad (\text{C.17})$$

di mana  $\rho' = d\rho/d\xi$  dan  $\rho'' = d^2\rho/d\xi^2$ . Kita harus definisikan  $\phi$  terlebih dahulu untuk mencari komponen tensor energi-momentum. Pada saat kita tidak mengikutsertakan gravitasi, kita gunakan  $\phi = \phi(\rho)$ . Pada perhitungan ini, radius *four-sphere*  $\rho$  tidak lagi variabel bebas tetapi bergantung variabel bebas  $\xi$ ,  $\rho = \rho(\xi)$ , sehingga  $\phi = \phi(\xi)$ . Kita cari komponen tensor energi-momentum

$$T_{00} = \frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi), \quad T_{11} = -\left[\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi)\right]\rho^2, \quad (\text{C.18})$$

$$T_{22} = T_{11} \sin^2 \alpha, \quad T_{33} = T_{22} \sin^2 \theta. \quad (\text{C.19})$$

Dengan menggunakan fakta kita menggunakan koordinat *four-sphere* kita bisa gunakan  $d^4x\sqrt{g} = 2\pi^2\rho^3 d\xi$  sehingga

$$S_E = 2\pi^2 \int d\xi \rho^3 \left[ \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) - \frac{1}{2\kappa} \frac{6}{\rho^2}(1 - \rho'^2 - \rho\rho'') \right],$$

$$S_E = 2\pi^2 \int d\xi \left[ \rho^3 \left\{ \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right\} - \frac{3}{\kappa}(\rho - \rho\rho'^2 - \rho^2\rho'') \right]. \quad (\text{C.20})$$

Menggunakan  $\rho\rho'^2 + \rho^2\rho'' = (\rho^2\rho')' - \rho\rho'^2$  dan argumen aksi pada batas [2] adalah

$$S_E^{\text{boundary}} = -2\pi^2 \int d\xi \frac{3}{\kappa} (\rho^2\rho')'.$$

Kita hanya tertarik pada aksi selain aksi pada batas sehingga dengan membuat  $S_E^{\text{boundary}} = 0$  menjadikan

$$S_E = 2\pi^2 \int d\xi \left[ \rho^3 \left\{ \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right\} - \frac{3}{\kappa}(\rho + \rho\rho'^2) \right]. \quad (\text{C.21})$$

Jika aksi Euklidean ini kita variasikan terhadap  $\delta\phi$  kita dapatkan

$$\phi'' + \frac{3\rho'}{\rho}\phi' = \frac{dV}{d\phi}. \quad (\text{C.22})$$

Pada indeks  $\mu\nu = 00$ , persamaan Einstein akan menjadi  $R_{00} - g_{00}R/2 = \kappa T_{00}$  dan kita dapatkan

$$\rho'^2 = 1 + \frac{\kappa\rho^2}{3} \left( \frac{\phi'^2}{2} - V \right). \quad (\text{C.23})$$

(persamaan lain dari persamaan Einstein adalah konsekuensi dari persamaan ini) yang kemudian kita masukkan pada persamaan C.21 menjadi

$$S_E = 4\pi^2 \int d\xi \left( \rho^3 V - \frac{3\rho}{\kappa} \right). \quad (\text{C.24})$$

Kita akan menggunakan persamaan C.7 dan definisi yang diambil dari pendekatan *thin-wall*. Pada luar *bubble* ( $\phi = \phi_+$ ) kita dapatkan aksinya adalah

$$\mathcal{B}_{\text{luar}} = S_E(\phi_+) - S_E(\phi_+) = 0. \quad (\text{C.25})$$

Pada dinding *bubble* ( $\phi = \bar{\phi}(\rho - \bar{\rho})$ ) kita dapatkan

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\text{dinding}} &= S_E(\phi) - S_E(\phi_+), \\ \mathcal{B}_{\text{dinding}} &= 4\pi^2 \int d\xi \left( \rho^3 V(\phi) - \rho^3 V(\phi_+) \right), \\ \mathcal{B}_{\text{dinding}} &= 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \int d\xi \left( 2(V(\phi) - V(\phi_+)) \right). \end{aligned}$$

Pendekatan *thin-wall* menggunakan aproksimasi  $\epsilon$  kecil dan  $\rho = \bar{\rho} \gg 0$ . Hal ini membuat  $3\rho'\phi'/\rho$  cukup kecil sehingga persamaan gerak menjadi

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi}.$$

Persamaan ini kita kalikan kedua sisinya dengan  $\phi' = d\phi/d\xi$  sehingga

$$\left[ \frac{1}{2} \phi'^2 - V \right]' = 0.$$

Syarat batasnya adalah pada  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $V(\phi) = V(\phi_+)$  dan  $(\phi')_{\phi_+} = 0$  sehingga

$$\frac{1}{2} \phi'^2 = V(\phi) - V(\phi_+),$$

dan kita dapatkan bahwa solusi  $\phi$  dalam *thin-wall limit* dapat diturunkan melalui

$$\int_{(\phi_+ + \phi_-)/2}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2[V(\phi) - V(\phi_+)]}} = \int_{\xi}^{\xi} d\xi. \quad (\text{C.26})$$

Maka dari itu, kita dapatkan

$$\mathcal{B}_{\text{dinding}} = 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \int d\xi \, 2(V(\phi) - V(\phi_+)) = 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \sigma. \quad (\text{C.27})$$

dengan aksi per luasan permukaan *bubble*

$$\sigma = \int d\xi \left[ \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) - V(\phi_+) \right]. \quad (\text{C.28})$$

Aksi pada bagian dalam *bubble*

$$\mathcal{B}_{\text{dalam}} = S_E(\phi_-) - S_E(\phi_+).$$

Sebelum itu, kita gunakan persamaan C.23 pada  $\phi = \phi_{\pm}$  sehingga

$$d\xi = \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \kappa\rho V/3}},$$

(ingatlah syarat batas  $\phi'_{\pm} = 0$ ). Kita substitusikan ini pada  $d\xi$  di  $S_E(\phi_{\pm})$  menjadikan

$$S_E(\phi_{\pm}) = 4\pi^2 \int_0^{\bar{\rho}} \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \kappa\rho V/3}} \left[ \rho^3 V(\phi_{\pm}) - \frac{3\rho}{\kappa} \right],$$

$$S_E(\phi_{\pm}) = \frac{-12\pi^2}{\kappa} \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \, \rho \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho^2 V(\phi_{\pm})}{3}},$$



$$\begin{aligned}
S_E(\phi_{\pm}) &= \frac{-6\pi^2}{\kappa} \frac{d(\rho^2)}{d\left(1 - \frac{\kappa\rho^2 V(\phi_{\pm})}{3}\right)} \int_0^{\bar{\rho}} d\left(1 - \frac{\kappa\rho^2 V(\phi_{\pm})}{3}\right) \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho^2 V(\phi_{\pm})}{3}}, \\
S_E(\phi_{\pm}) &= \frac{6\pi^2}{\kappa} \frac{3}{\kappa V(\phi_{\pm})} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\kappa\rho^2 V(\phi_{\pm})}{3}\right)^{3/2} \Big|_0^{\bar{\rho}}, \\
S_E(\phi_{\pm}) &= \frac{12\pi^2}{\kappa^2 V(\phi_{\pm})} \left[ \left(1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2 V(\phi_{\pm})}{3}\right)^{3/2} - 1 \right]. \tag{C.29}
\end{aligned}$$

Kita dapatkan aksi pada bagian dalam bubble adalah  $\mathcal{B}_{dalam} = S_E(\phi_-) - S_E(\phi_+)$  yang menjadi

$$\mathcal{B}_{dalam} = -\frac{12\pi^2}{\kappa} \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \rho \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho^2 V(\phi_-)}{3}} + \frac{12\pi^2}{\kappa} \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \rho \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho^2 V(\phi_+)}{3}}. \tag{C.30}$$

Setelah diintegrasikan, kita akan dapatkan

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{dalam} &= \frac{12\pi^2}{\kappa^2} \left\{ \frac{1}{V(\phi_-)} \left[ \left(1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2 V(\phi_-)}{3}\right)^{3/2} - 1 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{V(\phi_+)} \left[ \left(1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2 V(\phi_+)}{3}\right)^{3/2} - 1 \right] \right\}. \tag{C.31}
\end{aligned}$$

Kita  $\mathcal{B}$  minimum yang kita dapatkan berupa

$$\frac{d\mathcal{B}}{d\bar{\rho}} = \frac{d(2\pi^2\bar{\rho}^3\sigma)}{d\bar{\rho}} + \frac{(-12\pi^2)}{\kappa} \bar{\rho} \sqrt{1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2 V(\phi_-)}{3}} - \frac{(-12\pi^2)}{\kappa} \bar{\rho} \sqrt{1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2 V(\phi_+)}{3}},$$

menjadikan  $\bar{\rho}$  harus memenuhi

$$6\pi^2\bar{\rho}\sigma - \frac{12\pi^2}{\kappa} \left[ \sqrt{1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2 V(\phi_-)}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2 V(\phi_+)}{3}} \right] = 0. \tag{C.32}$$

Dari sini kita mulai gunakan kedua kasus khusus yang telah disebutkan pada bagian awal lampiran ini. Hal ini dilakukan karena persamaan C.31 memberikan hasil yang rumit. Tetapi, persamaan ini adalah hasil aproksimasi *thin-wall limit* yang bisa digunakan untuk potensial dua sumur yang umum.

Untuk kasus pertama  $V(\phi_+) = \epsilon$ ,  $V(\phi_-) = 0$  pada persamaan C.32, kita dapatkan

$$0 = 6\pi^2\bar{\rho}\sigma - \frac{12\pi^2}{\kappa} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{\bar{\rho}}{r_S^2}} \right].$$

Kedua sisi dikalikan  $12\pi^2/\kappa$  menjadi

$$\sqrt{1 - \frac{\bar{\rho}^2}{r_S^2}} = 1 - \frac{\kappa\sigma\bar{\rho}}{2}.$$

Kemudian, kedua sisi dikuadratkan menjadi

$$1 - \frac{\bar{\rho}^2}{r_S^2} = 1 - 2\frac{\kappa\sigma\bar{\rho}}{2} + \left(\frac{\kappa\sigma\bar{\rho}}{2}\right)^2,$$

atau

$$\bar{\rho} \left( \frac{1}{r_S^2} + \frac{\kappa^2\sigma^2}{4} \right) = \kappa\sigma.$$

Menggunakan  $r_S^2 = 3/\kappa\epsilon$ ,  $\bar{\rho}_0 = 3\sigma/\epsilon$  sehingga  $\kappa\sigma = \bar{\rho}_0/r_S^2$  kita akan dapatkan

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_0}{1 + \bar{\rho}_0^2/4r_S^2}. \quad (\text{C.33})$$

Selanjutnya, dari persamaan C.30 dan C.27 didapatkan

$$\mathcal{B} = 2\pi^2\bar{\rho}^3\sigma - \frac{12\pi^2}{\kappa} \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \rho + \frac{12\pi^2}{\kappa} \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \rho \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_S^2}}.$$

Setelah diintegrasikan, kita dapatkan

$$\mathcal{B} = 2\pi^2\sigma\bar{\rho}^3 - \frac{6\pi^2\bar{\rho}^2}{\kappa} - \frac{4\pi^2r_S^2}{\kappa} \left[ \left(1 - \frac{\bar{\rho}^2}{r_S^2}\right)^{3/2} - 1 \right].$$

Kemudian, kita substitusikan  $\bar{\rho}$  untuk masing-masing suku. Masing-masing suku kami pisahkan perhitungannya. Untuk suku ketiga di sisi kanan, kita dapatkan

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\bar{\rho}^2}{r_S^2} &= \left( \frac{1 - \bar{\rho}_0^2/4r_S^2}{1 + \bar{\rho}_0^2/4r_S^2} \right)^2, \\ (1 - \bar{\rho}^2/r_S^2)^{3/2} - 1 &= -\frac{2(\bar{\rho}_0^2/4r_S^2)[3 + (\bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^2]}{(1 + \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3}, \\ -\frac{4\pi^2r_S^2}{\kappa} \left[ (1 - \bar{\rho}^2/r_S^2)^{3/2} - 1 \right] &= \frac{2\pi^2\bar{\rho}_0^2}{\kappa(1 + \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3} \left( 3 + \left[ \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2} \right]^2 \right). \end{aligned}$$

Untuk suku kedua di sisi kanan, kita dapatkan

$$-\frac{6\pi^2\bar{\rho}^2}{\kappa} = \frac{2\pi^2\bar{\rho}_0^2}{\kappa(1 + \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3} \left[ -3 \left( 1 + \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2} \right) \right].$$

Dan untuk suku pertama di sisi kanan, kita dapatkan

$$2\pi^2\sigma\bar{\rho}^3 = \frac{2\pi^2\bar{\rho}_0^2}{\kappa(1 + \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3} \left( \frac{\bar{\rho}_0^2}{r_S^2} \right).$$

Sehingga setelah kita tambahkan ketiga suku tersebut, kita dapatkan

$$\mathcal{B} = \frac{2\pi^2\bar{\rho}_0^2}{\kappa(1 + \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3} \left[ \frac{\bar{\rho}_0^2}{r_S^2} - 3 \left( 1 + \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2} \right) + 3 + \left( \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2} \right)^2 \right],$$

$$\mathcal{B} = \frac{2\pi^2\bar{\rho}_0^2}{\kappa(1 + \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3} \left( 1 + \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2} \right) \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2}.$$

Menggunakan  $\mathcal{B}_0 = 27\pi^2\sigma^4/2\epsilon^3$  dan  $\kappa\sigma = \bar{\rho}_0/r_S^2$  yang menjadikan  $\mathcal{B}_0 = \pi^2\bar{\rho}_0^4/2\kappa r_S^2$  maka kita dapatkan

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{B}_0}{(1 + \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^2}. \quad (\text{C.34})$$

Untuk kasus kedua  $V(\phi_+) = 0$ ,  $V(\phi_-) = -\epsilon$  pada persamaan C.32, kita dapatkan

$$0 = 6\pi^2\bar{\rho}\sigma - \frac{12\pi^2}{\kappa} \left[ \sqrt{1 + \frac{\bar{\rho}}{r_S^2}} - 1 \right].$$

Kedua sisi dikalikan  $12\pi^2/\kappa$  menjadi

$$\sqrt{1 + \frac{\bar{\rho}^2}{r_S^2}} = 1 + \frac{\kappa\sigma\bar{\rho}}{2}.$$

Kemudian, kedua sisi dikuadratkan menjadi

$$1 + \frac{\bar{\rho}^2}{r_S^2} = 1 + 2\frac{\kappa\sigma\bar{\rho}}{2} + \left( \frac{\kappa\sigma\bar{\rho}}{2} \right)^2,$$

atau

$$\bar{\rho} \left( \frac{1}{r_S^2} - \frac{\kappa^2\sigma^2}{4} \right) = \kappa\sigma.$$

Menggunakan  $r_S^2 = 3/\kappa\epsilon$ ,  $\bar{\rho}_0 = 3\sigma/\epsilon$  sehingga  $\kappa\sigma = \bar{\rho}_0/r_S^2$  kita akan dapatkan

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_0}{1 - \bar{\rho}_0^2/4r_S^2}. \quad (\text{C.35})$$

Dari persamaan C.30 dan C.27, kita dapatkan

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{dinding} + \mathcal{B}_{dalam} = 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \sigma - \frac{12\pi^2}{\kappa} \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \, \rho \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{r_S^2}} + \frac{12\pi^2}{\kappa} \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \, \rho.$$

Setelah diintegrasikan, kita dapatkan

$$\mathcal{B} = 2\pi^2 \sigma \bar{\rho}^3 - \frac{4\pi^2 r_S^2}{\kappa} \left[ \left( 1 + \frac{\bar{\rho}^2}{r_S^2} \right)^{3/2} - 1 \right] + \frac{6\pi^2 \bar{\rho}^2}{\kappa}.$$

Kemudian, kita substitusikan  $\bar{\rho}$  untuk masing-masing suku. Perhitungan ini kami hitung secara terpisah masing-masing suku. Untuk suku kedua di sisi kanan kita dapatkan

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\bar{\rho}^2}{r_S^2} &= \left( \frac{1 + \bar{\rho}_0^2/4r_S^2}{1 - \bar{\rho}_0^2/4r_S^2} \right)^2, \\ (1 + \bar{\rho}^2/r_S^2)^{3/2} - 1 &= \frac{2(\bar{\rho}_0^2/4r_S^2)[3 + (\bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^2]}{(1 - \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3}, \\ -\frac{4\pi^2 r_S^2}{\kappa} \left[ (1 + \bar{\rho}^2/r_S^2)^{3/2} - 1 \right] &= \frac{2\pi^2 \bar{\rho}_0^2}{\kappa(1 - \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3} \left( -3 - \left[ \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2} \right]^2 \right). \end{aligned}$$

Untuk suku ketiga di sisi kanan, kita dapatkan

$$\frac{6\pi^2 \bar{\rho}^2}{\kappa} = \frac{2\pi^2 \bar{\rho}_0^2}{\kappa(1 - \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3} \left[ 3 \left( 1 - \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2} \right) \right].$$

Dan untuk suku pertama di sisi kanan, kita dapatkan

$$2\pi^2 \sigma \bar{\rho}^3 = \frac{2\pi^2 \bar{\rho}_0^2}{\kappa(1 - \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3} \left( \frac{\bar{\rho}_0^2}{r_S^2} \right).$$

Sehingga setelah kita tambahkan ketiga suku tersebut, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{2\pi^2 \bar{\rho}_0^2}{\kappa(1 - \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3} \left[ \frac{\bar{\rho}_0^2}{r_S^2} - 3 - \left( \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2} \right)^2 + 3 \left( 1 - \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2} \right) \right], \\ \mathcal{B} &= \frac{2\pi^2 \bar{\rho}_0^2}{\kappa(1 - \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^3} \left( 1 - \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2} \right) \frac{\bar{\rho}_0^2}{4r_S^2}. \end{aligned}$$

Menggunakan  $\mathcal{B}_0 = 27\pi^2 \sigma^4 / 2\epsilon^3$  dan  $\kappa \sigma = \bar{\rho}_0 / r_S^2$  yang menjadikan  $\mathcal{B}_0 = \pi^2 \bar{\rho}_0^4 / 2\kappa r_S^2$ , kita dapatkan

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{B}_0}{(1 - \bar{\rho}_0^2/4r_S^2)^2}. \quad (\text{C.36})$$

Hasil dari kasus  $V(\phi_+) = \epsilon$ ,  $V(\phi_-) = 0$  memberikan kesimpulan bahwa  $\bar{\rho}$  bisa berkembang tidak terbatas,  $\bar{\rho}$  bisa bernilai berapapun. Hasil dari kasus  $V(\phi_+) = \epsilon$ ,  $V(\phi_-) = 0$  memberikan kesimpulan bahwa  $\bar{\rho}$  hanya logis untuk  $\bar{\rho}_0 < 2r_S$ . Hal ini mengimplikasikan bahwa setelah *bubble* termatrealisasi kemudian berkembang hingga kontribusi gravitasi berpengaruh, kemudian mengecil lagi menjadi singularitas karena kalah besar daripada radius Schwarzschild-nya saat

$$\bar{\rho}_0 = 2r_S. \quad (\text{C.37})$$

Pada acuan [11], hal ini disebut *smooth disappearance of instanton*. Dengan  $\bar{\rho}_0 = 3\sigma/\epsilon$  dari teori yang tanpa melibatkan gravitasi (persamaan 2.42) dan  $r_S = \sqrt{3/\kappa\epsilon}$ , kita dapatkan selisih energi

$$\epsilon = \frac{3}{4}\kappa\sigma^2 \quad (\text{C.38})$$

disaat *bubble* mulai *collapse*.

Sekarang kita bahas metrik *true vacuum* dan *false vacuum*. Kita dapatkan untuk tiap vakum dari persamaan Einstein

$$\rho'^2 = 1 + \frac{\kappa\rho^2}{3} \left[ \frac{\phi_{\pm}'^2}{2} - V(\phi_{\pm}) \right] = 1 - \frac{\kappa\rho^2 V(\phi_{\pm})}{3}. \quad (\text{C.39})$$

Untuk kasus pertama pada *false vacuum*, kita dapatkan

$$\rho'^2 = 1 - \frac{\rho^2}{r_S^2}, \quad (\text{C.40})$$

yang menghasilkan

$$\int_0^{\xi} d\xi = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{1 - \rho^2/r_S^2} = r_S \sin^{-1} \left( \frac{\rho}{r_S} \right) \implies \rho = r_S \sin \frac{\xi}{r_S}. \quad (\text{C.41})$$

Ini memberikan metrik de-Sitter

$$ds^2 = d\xi^2 + r_S^2 \sin^2 \frac{\xi}{r_S} d\Omega_S^2. \quad (\text{C.42})$$

dengan  $d\Omega$  sudut ruang *spacelike* yang merupakan karakteristik metrik de-Sitter. Untuk kasus pertama pada *true vacuum* dan kasus kedua pada *false vacuum*, kita dapatkan

$$\rho'^2 = 1, \quad (\text{C.43})$$

sehingga dikarenakan  $0 \leq \rho < \infty$  didapatkan

$$\int_0^\xi d\xi = \int_0^\rho d\rho \implies \rho = \xi. \quad (\text{C.44})$$

Ini memberikan metrik Minkowski

$$ds^2 = d\xi^2 + \xi^2 d\Omega^2. \quad (\text{C.45})$$

Untuk kasus kedua pada *true vacuum*, kita dapatkan

$$\rho'^2 = 1 + \frac{\rho^2}{r_S^2}, \quad (\text{C.46})$$

yang menghasilkan

$$\int_0^\xi d\xi = \int_0^\rho \frac{d\rho}{1 + \rho^2/r_S^2} = r_S \sinh^{-1} \left( \frac{\rho}{r_S} \right) \implies \rho = r_S \sinh \frac{\xi}{r_S}. \quad (\text{C.47})$$

Ini memberikan metrik anti-de-Sitter

$$ds^2 = d\xi^2 + r_S^2 \sinh^2 \frac{\xi}{r_S} d\Omega_T^2. \quad (\text{C.48})$$

dengan  $d\Omega_T$  sudut ruang *timelike* yang merupakan karakteristik metrik de-Sitter.