ამოცანათა კრებული მათემატიკურ ანალიზში

ზ. კუჭავა, LaTeX

11.2.2025

§ 3. ფუნქციები.

0.1

სამეულს $f=(F,X,Y)$, სადაც X და Y სიმრავლეებია, ხოლო $F\subset X\times Y$ ეწოდება f **შესაბამისობა**. F-ს ეწოდება f შესაბამისობის **გრაფიკი**. X სიმრავლეს ეწოდება საწყისი სიმრავლე, ხოლო Y-ს საბოლოო. სიმრავლეს $\Big\{x:(\exists y)\Big((x,y)\in F\Big)\Big\}$ ეწოდება F გრაფიკის **პირველი პროექცია** და აღინიშნება "pr_1F" სიმბოლოთი. შესაბამისად **მეორე პროექცია** არის $pr_2F=\Big\{y:(\exists x)\Big((x,y)\in F\Big)\Big\}$.

$f=(F,X,Y)$ ჩანაწერის მაგივრად ხშირად გამოიყენება ჩანაწერები $f:X\to Y$ და $X\xrightarrow{f}Y$. ასეთ შემთხვევაში, აგრეთვე, ამბობენ, რომ "შესაბამისობა f ასახავს X სიმრავლეს Y სიმრავლეში".

ვთქვათ $f:X\to Y$ შესაბამისობაა. განვიხილოთ $A\subset X$ და $B\subset Y$. სიმრავლეს $\{y:(\exists x)(x\in A\ \&\ (x,y)\in F)\}$ ეწოდება A **სიმრავლის სახე** f შესაბამისობის დროს და აღინიშნება სიმბოლოთი "$f(A)$". სიმრავლეს $\{x:(\exists y)(y\in B\ \&\ (x,y)\in F)\}$ ეწოდება B **სიმრავლის წინასახე** f შესაბამისობის დროს და აღინიშნება სიმბოლოთი "$f^{-1}(B)$" (აქ არ იგულისხმება სიმბოლოს f^{-1} დამოუკიდებლად გამოყენება).

ამგვარად
$f(A)=\{y:(\exists x)(x\in A\ \&\ (x,y)\in F)\}$
$f^{-1}(B)=\{x:(\exists y)(y\in B\ \&\ (x,y)\in F)\}$.

შესაბამისობას $f=(F,X,Y)$ ეწოდება **ფუნქცია** თუ სრულდება ორი პირობა

1. $pr_1F=X$
2. $(\forall y)(\forall z)\Big((x,y)\in F\ \&\ (x,z)\in F\Big)\Rightarrow y=z$

ამ შემთხვევაში X კიდევ უწოდებენ ფუნქციის **განსაზღვის არეს** და, ჩვეულებრივ, აღნიშნავენ $D(f)$ სიმბოლოთი, ხოლო pr_2F-ს უწოდებენ ფუნქციის **მნიშვნელობათა სიმრავლეს** (ცვლილების არეს) და აღნიშნავენ $E(f)$ სიმბოლოთი.

თუ $\boldsymbol{f=(F,X,Y)}$ ფუნქციაა და $\boldsymbol{(x,y)\in F}$, მაშინ $\boldsymbol{f(\{x\})=\{y\}}$ შეიცავს მხოლოდ ერთ ელემენტს და ასოსთვის $\boldsymbol{y}$ გამოიყენება სპეციალური აღნიშვნა $\boldsymbol{f(x)}$ და წერენ $\boldsymbol{y=f(x)}$. ამგვარად სამართლიანია $\boldsymbol{(x,y)\in F \Leftrightarrow y=f(x) \Leftrightarrow (x,f(x))\in F}$.

ფუნქციისთვის სახის და წინასახის ჩანაწერები შემდეგნაირად გამარტივდება
$\boldsymbol{f(A)=\{y:(\exists x)\big(x\in A \,\&\, y=f(x)\big)\}}$
$\boldsymbol{f^{-1}(B)=\{x:f(x)\in B\}}$.

ვთქვათ $\boldsymbol{X\xrightarrow{f}Y}$ და $\boldsymbol{Y\xrightarrow{g}Z}$ ფუნქციებია. მაშინ ფუნქციას $\boldsymbol{X\xrightarrow{h}Z}$, რომლისთვისაც სამართლიანია $\boldsymbol{h(x)=g(f(x))}$, ეწოდება $\boldsymbol{f}$ ფუნქციის **კომპოზიცია** $\boldsymbol{g}$ ფუნქციასთან და აღინიშნება "$\boldsymbol{g\circ f}$" სიმბოლოთი. $\boldsymbol{h}$ ფუნქციას ეწოდება კიდევ **რთული ფუნქცია**.

$\boldsymbol{f:X\to Y}$ ფუნქციას ეწოდება **ინექცია** თუ $(\forall \boldsymbol{x})(\forall \boldsymbol{y})\Big(\boldsymbol{x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y)}\Big)$.

თუ $\boldsymbol{X\xrightarrow{f}Y}$ ინექციაა და $\boldsymbol{B=pr_2F}$, მაშინ განიმარტება $\boldsymbol{f}$ ფუნქციის **შექცეული** ფუნქცია, რომლის აღსანიშნავად გამოიყენება $\boldsymbol{f^{-1}}$ სიმბოლო და სამართლიანია $\boldsymbol{f^{-1}:B\to X}$ და $(\forall \boldsymbol{x\in X})\ \boldsymbol{f^{-1}(f(x))=x}$.

$\boldsymbol{f:X\to Y}$ ფუნქციას ეწოდება **სურექცია** თუ $\boldsymbol{f(X)=Y}$. თუ $\boldsymbol{f}$ ერთდროულად არის ინექცია და სურექცია, მაშინ მას ეწოდება **ბიექცია**.

მოვიყვანოთ მაგალითების გამოყვანის ნიმუში. განვიხილოთ №17 მაგალითი:

$\boldsymbol{f}$ ინექციაა $\boldsymbol{\Leftrightarrow \forall A,B\subset D(f), f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)}$

დავუშვათ ჯერ, რომ f ინექციაა და ვაჩვენოთ ტოლობა $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$. ტოლობის ჩვენებისთვის საჭიროა ვაჩვენოთ ორი საფეხური $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ და $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$ $\forall A,B\subset D(f)$-ის.

ჯერ დავამტკიცოთ პირველი საფეხური. დავუშვათ $y\in f(A\cap B)\Leftrightarrow (\exists x)\big(x\in A\cap B \,\&\, y=f(x)\big)\Leftrightarrow(\exists x)\big(x\in A \,\&\, x\in B \,\&\, y=f(x)\big)$ უკანასკნელ გამოსახულებას მივუყენოთ §2 №8, ანუ დავუნაწილოთ არსებობის ქვანტორი ცალცალკე კონიუქციის წევრებს. გვექნება

$$(\exists x)\Big(x\in A \,\&\, x\in B \,\&\, y=f(x)\Big)\Rightarrow(\exists x)\Big(x\in A \,\&\, y=f(x)\Big)\,\&\,(\exists x)\Big(x\in B \,\&\, y=f(x)\Big)$$

მიღებული გამოსახულება წარმოადგენს $y\in f(A)\,\&\,y\in f(B)$ რაც ექვივალენტურია $y\in f(A)\cap f(B)$.

მეორე საფეხურის $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$ დამტკიცებისთვის დავუშვათ $y\in f(A)\cap f(B)$. განმარტებით მივიღებთ $y\in f(A)\,\&\,y\in f(B)$

ანუ $(\exists x)\Big(x \in A \ \& \ y = f(x)\Big) \ \& \ (\exists t)\Big(t \in A \ \& \ y = f(t)\Big)$. გამოვიყენოთ, რომ f ინექციაა. ეს ნიშნავს, რომ $f(x) = f(t) \Rightarrow x = t$. ამდენად შეიძლება დავწეროთ $(\exists x)\Big(x \in A \ \& \ x \in B \ \& \ y = f(x)\Big) \Leftrightarrow y \in f(A \cap B)$.

ახლა დაგვრჩა იმის დამტკიცება, რომ თუ სრულდება $\forall A, B \subset D(f), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$-ის მაშინ f ინექციაა. ამისათვის საკმარისია დავატკიცოთ $(\forall x_1)(\forall x_2), f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. თუ $D(f) = \varnothing$ ან თუ ის შედგება ერთადერთი ელემენტისგან, მაშინ დასკვნა ტრივიალურია. ამიტომ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\exists x_1 \in D(f)$ და $\exists x_2 \in D(f)$. რადგან $\{x_1\} \subset D(f)$ და $\{x_2\} \subset D(f)$, ამიტომ ჩვენი დაშვება გადავწეროთ შემთხვევისთვის $A = \{x_1\}$ და $B = \{x_2\}$. გვექნება $f\Big(\{x_1\} \cap \{x_2\}\Big) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\}$ სადაც ბოლო ტოლობაში გამოვიყენეთ მაგალითი №4. დავუშვათ $f(x_1) = f(x_2)$. მაშინ $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} \neq \varnothing$ და ამიტომ აგრეთვე $f\Big(\{x_1\} \cap \{x_2\}\Big) \neq \varnothing$. თუ სრულდება $x_1 \neq x_2$ მაშინ $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \varnothing$ და მივიღებთ წინააღმდეგობას №1 მაგალითთან, რომლის მიხედვით $f(\varnothing) = \varnothing$. ამიტომ $x_1 = x_2$ რ.დ.გ.

0.2 მაგალითები და ამოცანები

დავუშვათ გვაქვს ფუნქცია $f = (F, X, Y)$. დაამტკიცეთ შემდეგი წინადადებები

1. $f(\varnothing) = \varnothing$
2. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
3. $f^{-1}(E(f)) = D(f)$
4. $\forall x \in D(f), f(\{x\}) = \{f(x)\}$
5. $\forall A \subset D(f), f(A) = pr_2\{F \cap (A \times Y)\}$
6. $\forall B \subset E(f), f^{-1}(B) = pr_1\{F \cap (X \times B)\}$
7. $\forall B \subset E(f), f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(X))$
8. $\forall A, B \subset E(f), f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
9. $\forall A, B \subset E(f), f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
10. $\forall A, B \subset E(f), f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$
11. $\forall A, B \subset E(f), A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
12. $\forall A, B \subset D(f), f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
13. $\forall B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$
14. f სურექციაა $\Leftrightarrow \forall B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B$

15. $\forall A \subset D(f), A \subset f^{-1}(f(A))$

16. f ინექცია $\Leftrightarrow \forall A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A$

17. f ინექცია $\Leftrightarrow \forall A, B \subset D(f), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

18. f ინექცია $\Leftrightarrow \forall A, B \subset D(f), f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

19. f ინექცია $\Leftrightarrow \forall A, B \subset D(f), f(A) \cap f(B) = \varnothing \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

20. f ინექცია $\Leftrightarrow \exists g : E(f) \to D(f), \forall x \in D(f),\ g \circ f(x) = x$ & $\forall y \in E(f),\ f \circ g(y) = y$

21. დავუშვათ $E(f) = D(f)$, მაშინ $\Big(\forall x \in D(f),\ f \circ f \circ f(x) = x\Big) \Rightarrow f$ ინექცია

22. $E(g) \subset D(f) \Rightarrow D(f \circ g) = D(f)$

23. $E(g) = D(f) \Rightarrow \Big(D(f \circ g) = D(f)$ & $E(f \circ g) = E(g)\Big)$

24. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

25. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

26. f ბიექცია $(f^{-1})^{-1} = f$

27. დავუშვათ $D(g) = D(h) \subset E(f)$ მაშინ $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

28. დავუშვათ f ინექციაა და $D(g) = D(h), E(g) \subset D(f), E(h) \subset D(f)$ მაშინ $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

29. f^{-1} ფუნქციაა $\Leftrightarrow f$ ბიექციაა

30. არის თუ არა ფუნქცია შემდეგი სამეული:$(\varnothing, \varnothing, \varnothing)$?

დავუშვათ $f : A \to B$ და $g : B \to C$ და $h = g \circ f$, მაშინ:

31. f, g ინექციაა $\Rightarrow h$ ინექციაა

32. f, g სურექციაა $\Rightarrow h$ სურექციაა

33. h ინექციაა $\Rightarrow f$ ინექციაა

34. h სურექციაა $\Rightarrow g$ სურექციაა

35. h სურექციაა და g ინექციაა $\Rightarrow f$ სურექციაა

36. h ინექციაა და f სურექციაა $\Rightarrow g$ ინექციაა

37. დავუშვათ $f : A \to B$ და $g : A \to C$, მაშინ $\Big(\exists h : C \to B$ ისეთი, რომ $f = h \circ g\Big) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)\Big(g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)\Big)$

38. დავუშვათ $f : A \to B$ და $g : B \to C$ ბიექციაა, მაშინ $\left(\exists h : A \to C\right)$ ისეთი, რომ $f = h \circ g\right) \Leftrightarrow f(A) \subset g(C)$

39. დავუშვათ $f : A \to B$, $g : B \to C$ და $h : C \to D$. $g \circ h$ და $h \circ g$ ბიექციებია $\Rightarrow f, g, h$ ბიექციებია

40. დავუშვათ $f : A \to B$, $g : B \to C$ და $h : C \to A$. თუ $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ ფუნქციებიდან ან ნებისმიერი ორი სურექციაა და მესამე ინექციაა ან ნებისმიერი ორი ინექციაა და მესამე სურექციაა, მაშინ f, g, h ბიექციებია.