

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Πολυτεχνική Σχολή,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών,
Τομέας Τηλεπικοινωνιών

Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

ΘΕΜΑ 1: Ατομική Εργασία



Διδάσκων: Λεόντιος Χατζηλεοντιάδης

Φοιτητής: Χρυσοβέργης Ηλίας

A.E.M.: 8009

E-mail: iliachry@ece.auth.gr

15/11/2016

Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

- a) Για τον υπολογισμό του διπλού φάσματος θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις παραθύρων που ικανοποιούν τους παρακάτω περιορισμούς:

(α) $W(m, n) = W(n, m) = W(-m, n - m) = W(m - n, -n)$ (από τις ιδιότητες συμμετρίας των σωρειτών τρίτης τάξης).

(β) $W(m, n) = 0$ έξω από την περιοχή υποστήριξης του $\hat{c}_3^x(m, n)$.

(γ) $W(0, 0) = 1$ (συνθήκη κανονικοποίησης).

(δ) $W(\omega_1, \omega_2) \geq 0$ για όλα τα (ω_1, ω_2) .

Μία οικογένεια παραθύρων που ικανοποιεί τους περιορισμούς αυτούς είναι η :

$$W(m, n) = d(m)d(n)d(n - m)$$

Τα μονοδιάστατα παράθυρα, από τα οποία ορίζονται τα παράθυρα $W(m, n)$ των εξισώσεων (2.50) και (2.51) είναι τα εξής:

(α) Βέλτιστο παράθυρο (minimum bispectrum bias supremum):

$$d_0(m) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left| \sin \frac{\pi m}{L} \right| + \left(1 - \frac{|m|}{L}\right) \cos \frac{\pi m}{L}, & |m| \leq L \\ 0, & |m| \geq L \end{cases}$$

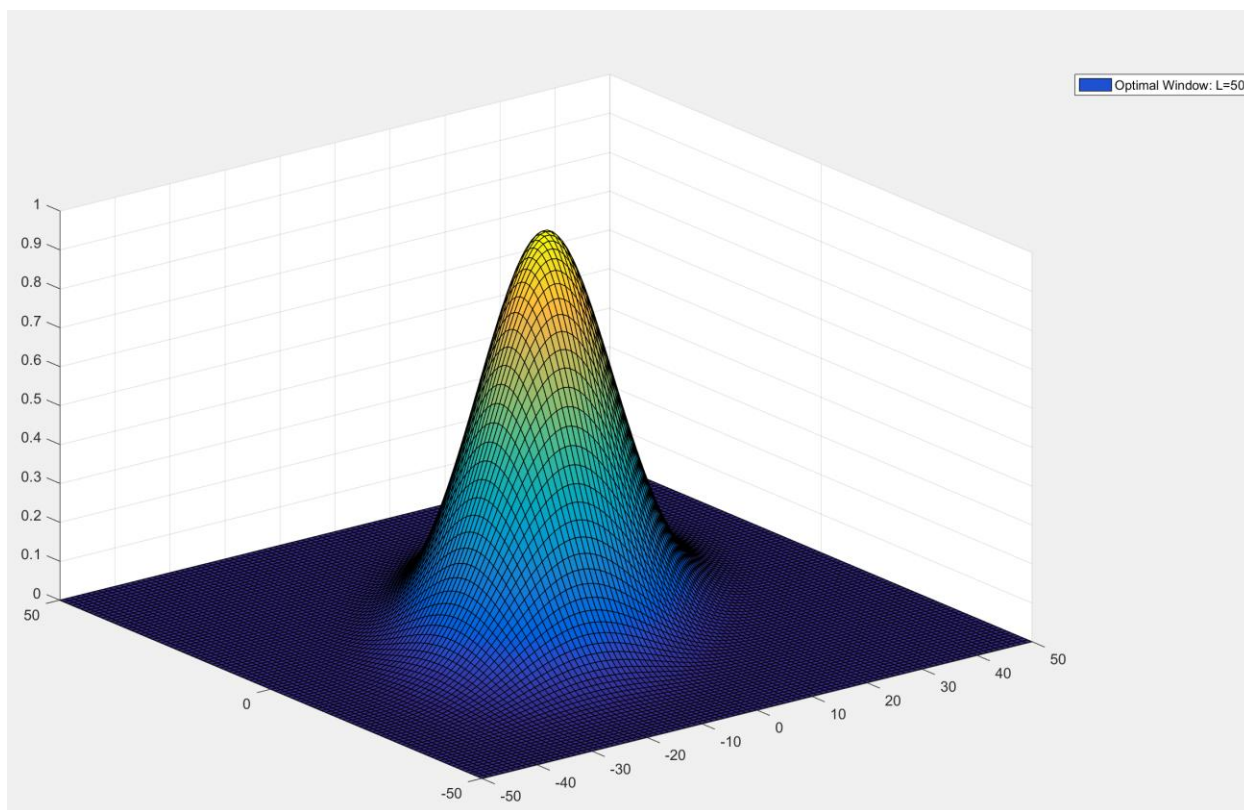
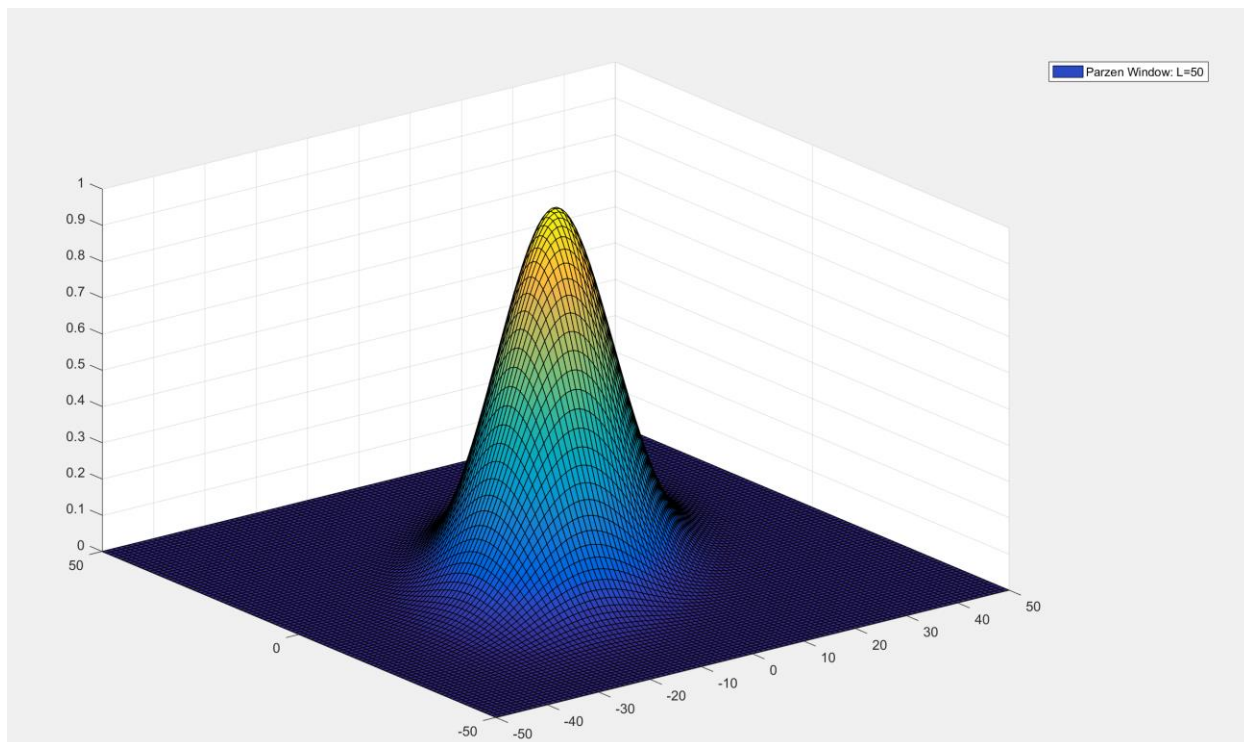
(b) Παράθυρο Parzen:

$$d_0(m) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{|m|}{L} \right)^2 + 6 \left(\frac{|m|}{L} \right)^3, & |m| \leq \frac{L}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{|m|}{L} \right)^3, & \frac{L}{2} \leq |m| \leq L \\ 0, & |m| > L \end{cases}$$

Ο υπολογισμός και η απεικόνιση των παραθύρων $W(m, n)$ πραγματοποιήθηκε με χρήση των συναρτήσεων **optimal.m** και **parzen.m** για το βέλτιστο και το parzen μονοδιάστατο παράθυρο αντίστοιχα.

Στην συνέχεια απεικονίζονται τα δισδιάστατα παράθυρα τα οποία όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι αρκετά όμοια μεταξύ τους. Η διαφορά τους κυμαίνεται στο γεγονός ότι η χρήση του βέλτιστου μονοδιάστατου παραθύρου οδηγεί σε πιο παχύ δισδιάστατο παράθυρο :

Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος



Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

- b) Στο συγκεκριμένο ερώτημα αρχικά κατασκευάζεται ένα σήμα $x[k]$, $k = 1:N$, $N = 2048$, το οποίο προκύπτει από μια **MA – διαδικασία** με συντελεστές $[1 \ 0.91 \ 0.81 \ -0.7 \ 0.57 \ -0.1]$, έχοντας ως είσοδο έναν **λευκό Non – Gaussian θόρυβο** $v[k]$, που προκύπτει από **εκθετική κατανομή** μοναδιαίας μέσης τιμής.
- i. Η κατασκευή του σήματος $x[k]$ καθώς και η λοξότητα του σήματος $v[k]$ υλοποιούνται με την συνάρτηση **Skewness** η οποία δίνεται για ευκολία και παρακάτω:

```
%Advanced Signal Processing Techniques
```

```
%2nd Question
```

```
%1st Subquestion
```

```
%Calculation of the Skewness of an exponential distributed signal and
```

```
%implementation of the output signal of a MA process
```

```
function [skewness, x, h, v] = Skewness()
```

```
%Input of the system, created by exponential distribution with mean = 1  
v = exprnd(1,1,2048);
```

```
%The MA filter coefficients
```

```
h = [1.0 0.91 0.81 -0.7 0.57 -0.10];
```

```
%Generating the x signal
```

```
x = filter(h,1,v);
```

```
%Calculating the Skewness of the input
```

```
mean_v = mean(v);
```

```
std_v = std(v);
```

```
gama_v = 0;
```

```
for i=1:2048
```

```
    gama_v = gama_v + (v(i)-mean_v)^3;
```

```
end
```

```
skewness = gama_v/(2047*std_v^3);
```

```
end
```

Ο Non – Gaussian χαρακτήρας του λευκού θορύβου επιβεβαιώθηκε από την τιμή της λοξότητας της συνάρτησης η οποία προέκυψε ίση με 1,881. Η τιμή είναι πολύ κοντά στην θεωρητική τιμή της λοξότητας της εκθετικής κατανομής η οποία προκύπτει ίση με 2. Μετά από έναν αριθμό επαναλήψεων προέκυψαν οι συγκεκριμένες τιμές για την λοξότητα οι οποίες βλέπουμε πως καθώς αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων, η τιμή προσεγγίζει όλο και περισσότερο την θεωρητική τιμή:

Αριθμός Επαναλήψεων = N	Λοξότητα
100	1,9713
1000	1,9808
10000	1,9851
100000	1,9875

Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

- ii. Οι σωρείτες 3ης τάξης του $x[k]$ υπολογίζονται με την συνάρτηση **Cumulants** η οποία δίνεται για ευκολία και παρακάτω:

```
%Advanced Signal Processing Techniques
%2nd Question
%2nd Subquestion

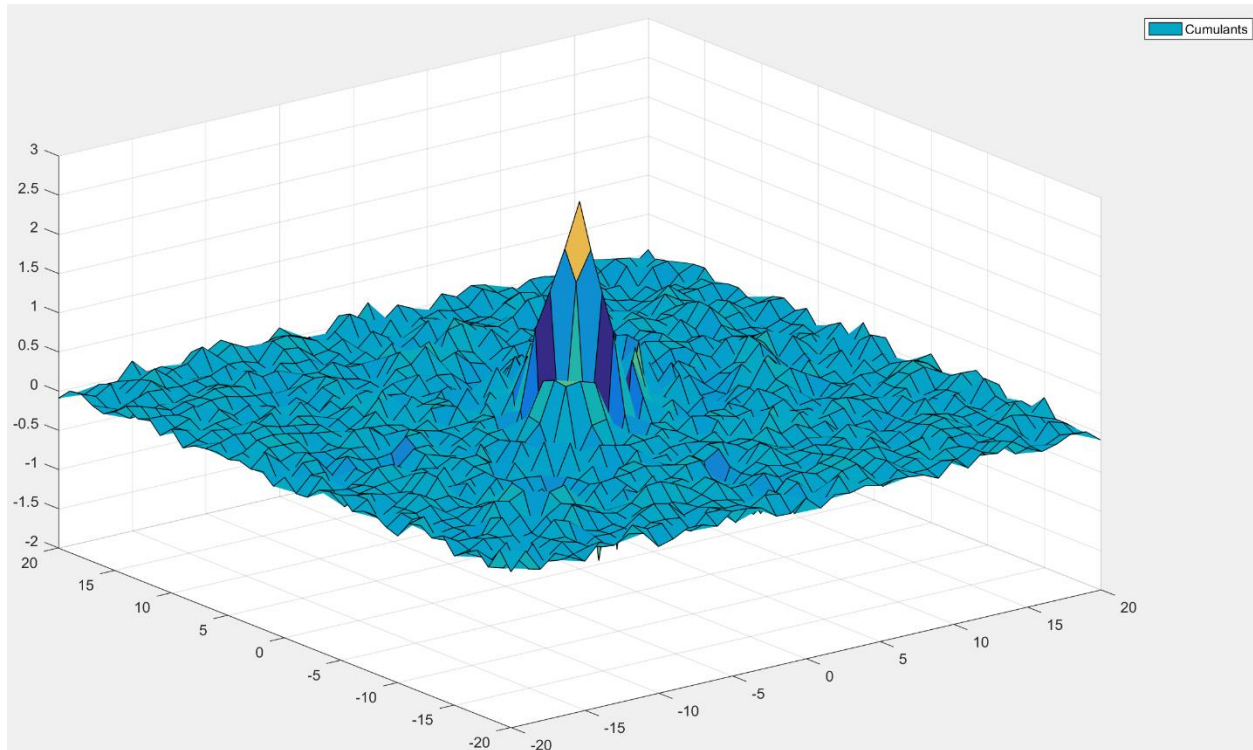
%Calculation of the Cumulants of a signal x using the indirect method

function cumulants = Cumulants(x)
K = 32;
M = 64;
data = cell(1,32);
mean_segment = zeros(1,32);
for i=1:K
    data{i} = x((M*(i-1)+1) : (i*M));
    mean_segment(i) = mean(data{i});
    data{i} = data{i} - mean_segment(i);
end
cumulants = zeros(2*20+1,2*20+1);
for m = -20:20
    for n = -20:20
        s1 = max([0 -m -n]);
        s2 = min([M-1 M-1-m M-1-n]);
        r = cell(1,32);
        for i = 1:32
            r{i} = zeros(2*20+1,2*20+1);
            for l = s1:s2
                r{i}(m+20+1,n+20+1) = r{i}(m+20+1,n+20+1) + data{i}(l+1)*data{i}(l+m+1)*data{i}(l+n+1);
            end
            r{i}(m+20+1,n+20+1) = 1/M*r{i}(m+20+1,n+20+1);
            cumulants(m+20+1,n+20+1) = cumulants(m+20+1,n+20+1) + r{i}(m+20+1,n+20+1);
        end
        cumulants(m+20+1,n+20+1) = 1/K * cumulants(m+20+1,n+20+1);
    end
end
figure;
surf(-20:20,-20:20,cumulants);
legend('Cumulants');
```

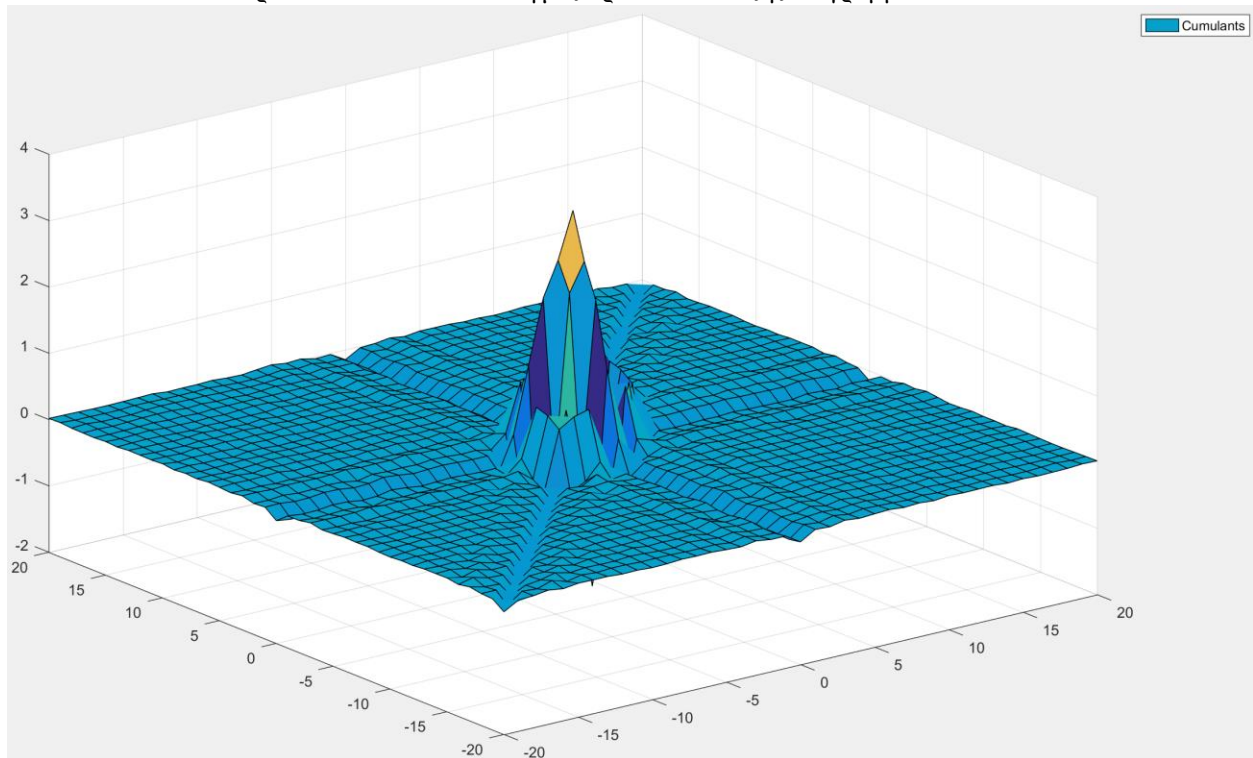
Παρατηρούμε ότι με αύξηση των επαναλήψεων οι σωρείτες τείνουν να προσεγγίσουν μία δισδιάστατη συνάρτηση δέλτα του Dirac με κάποιες βυθίσεις στις ευθείες $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$ και $\tau_1 = \tau_2$.

Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

Εκτελώντας την συνάρτηση Cumulants προκύπτει το εξής διάγραμμα:



Ύστερα από $N = 100$ επαναλήψεις προκύπτει το εξής διάγραμμα:



Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

- iii. Σε αυτό το ερώτημα υπολογίζονται 3 εκτιμήσεις της κρουστικής απόκρισης του συστήματος με την μέθοδο του Γιαννάκη, δηλαδή χρησιμοποιώντας μόνο τους σωρείτες τρίτης τάξης της εξόδου του συστήματος. Οι τάξεις των φίλτρων οι οποίες διαλέγονται είναι η πραγματική, δηλαδή $q = 6$, μία υποεκτίμηση της $q_1 = q - 2$, και μία υπερεκτίμηση της $q_2 = q + 2$.

Ο υπολογισμός πραγματοποιείται με την συνάρτηση **Impulse_Response** στο Matlab η οποία δίνεται κι εδώ για ευκολία:

```
%Advanced Signal Processing Techniques
%2nd Question
%3rd Subquestion

%Estimation of the impulse response using the third order cumulants
%of the output signal

function [h, h1, h2] = Impulse_Response(cumulants)

h=zeros(1,6);
for i=1:6
    h(i)=cumulants(26,i+20)/cumulants(26,21);
end

h1=zeros(1,4);
for i=1:4
    h1(i)=cumulants(24,i+20)/cumulants(24,21);
end

h2=zeros(1,8);
for i=1:8
    h2(i)=cumulants(28,20+i)/cumulants(28,21);
end

end
```

Οι εκτιμήσεις της κρουστικής απόκρισης δίνονται στην συνέχεια:

h = [1.0 0.619 0.3936 -0.2863 0.3387 0.5625]

h1 = [1.0 0.5162 2.6039 -1.7843]

h2 = [1.0 0.0971 0.0658 0.0304 0.0588 0.1770 0.1833 1.0578]

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης για ορθή τάξη φίλτρου διαφέρει πολύ από την πραγματικότητα καθώς κάποιες φορές δεν μπορεί να εκτιμήσει ούτε το πρόσημο του συντελεστή του φίλτρου. Στην συνέχεια δημιουργώντας την έξοδο του φίλτρου με την χρήση των εκτιμήσεων της κρουστικής απόκρισης θα μπορούμε να βγάλουμε περισσότερα συμπεράσματα για τις εκτιμήσεις της κρουστικής απόκρισης από την μέθοδο του Γιαννάκη. Για $N = 50$ επαναλήψεις τα αποτελέσματα προέκυψαν χειρότερα από τα συγκεκριμένα και για αυτό δεν δίνονται.

Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

- iv. Στο συγκεκριμένο ερώτημα υπολογίζονται οι έξοδοι του συστήματος χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις της χρονιστικής απόκρισης από το προηγούμενο ερώτημα. Έπειτα, υπολογίζεται το σφάλμα εκτίμησης της $x[k]$ καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Οι υπολογισμοί υλοποιήθηκαν στην συνάρτηση **Signal_Generation** στο Matlab και δίνονται στην συνέχεια για ευκολία:

```
%Advanced Signal Processing Techniques
```

```
%2nd Question
```

```
%4th Subquestion
```

```
%Estimation of the input signal by using the impulse responses
```

```
%of the signal and calculation of the estimation error and the MSE
```

```
function [x1, x2, x3, e1, e2, e3] = Signal_Generation(x, v, h, h1, h2)
```

```
%Input Signal Estimation
```

```
x1 = conv(v, h, 'same');
```

```
x2 = conv(v, h1, 'same');
```

```
x3 = conv(v, h2, 'same');
```

```
x1 = circshift(x1, 3, 2);
```

```
x2 = circshift(x2, 2, 2);
```

```
x3 = circshift(x3, 4, 2);
```

```
%Estimation Error Calculation
```

```
e1 = immse(x, x1);
```

```
e2 = immse(x, x2);
```

```
e3 = immse(x, x3);
```

```
t=1:1:2048;
```

```
%x1 vs x plot
```

```
figure(1)
```

```
plot(t,x1(t),t,x(t));
```

```
legend('x1','x');
```

```
title('x1 vs x');
```

```
%x-x1 plot
```

```
figure(2)
```

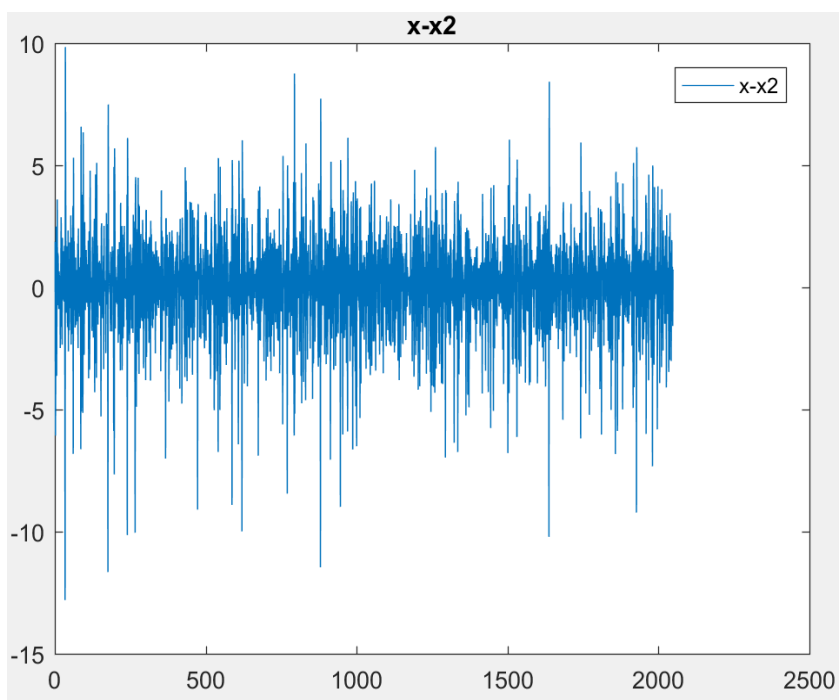
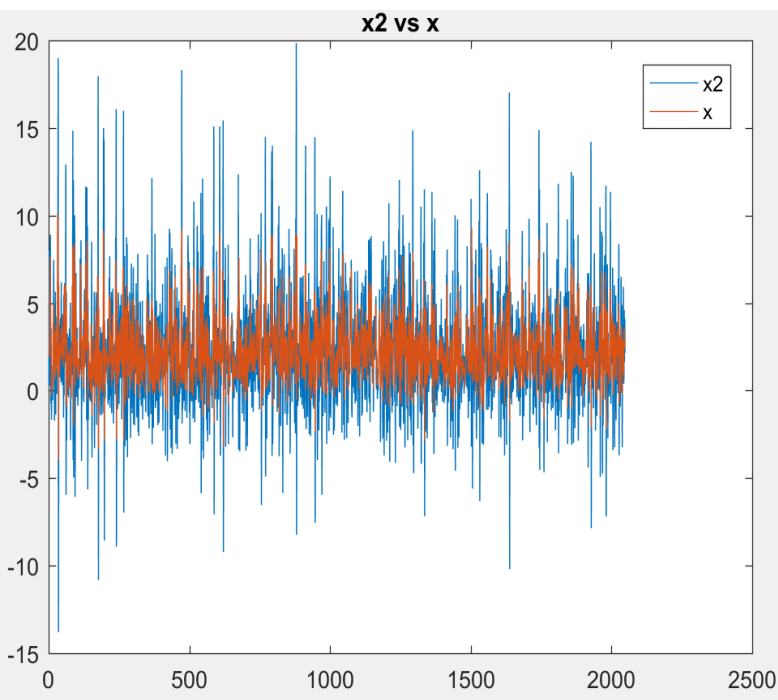
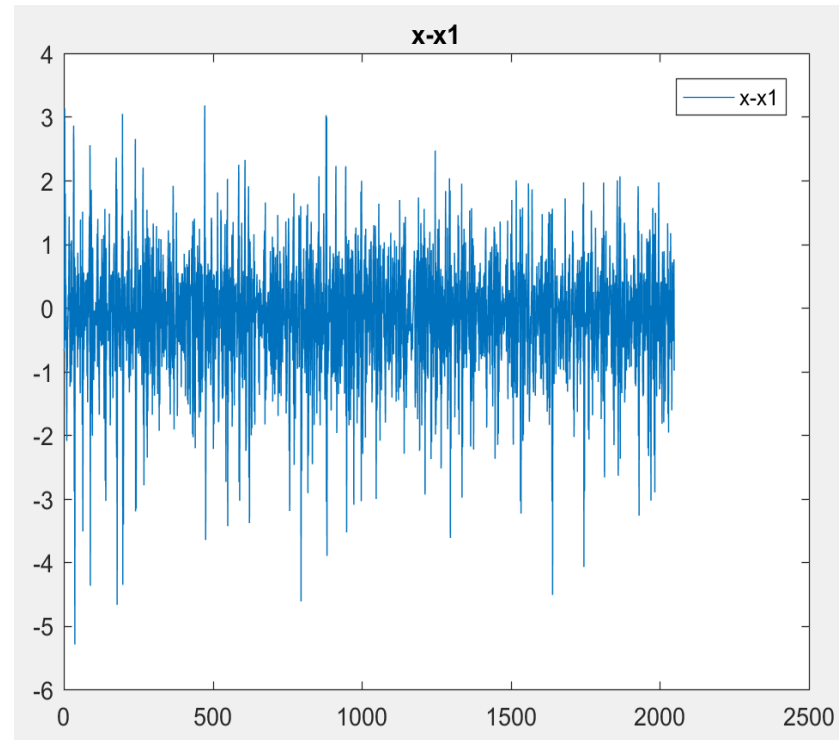
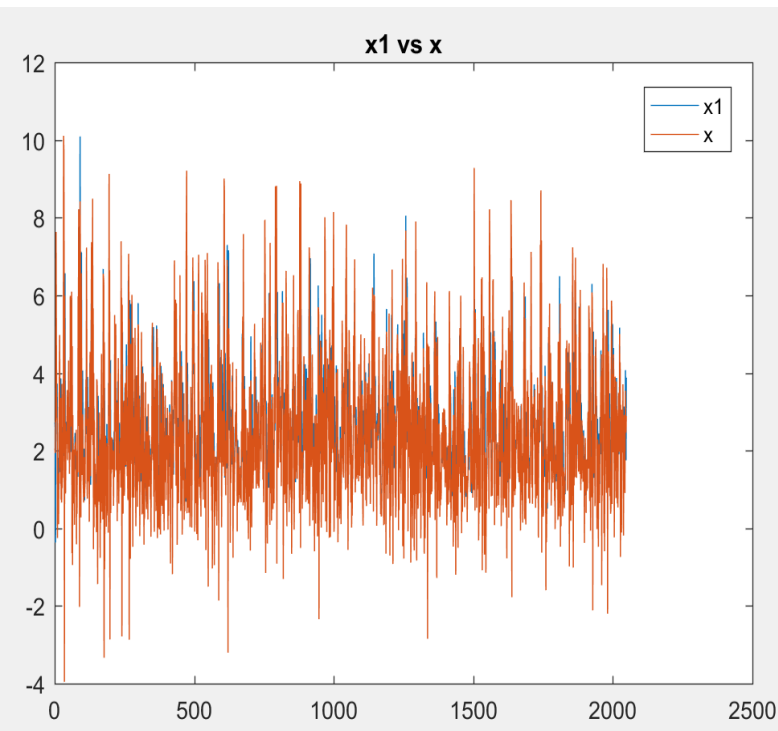
```
plot(t,x - x1);
```

```
legend('x-x1');
```

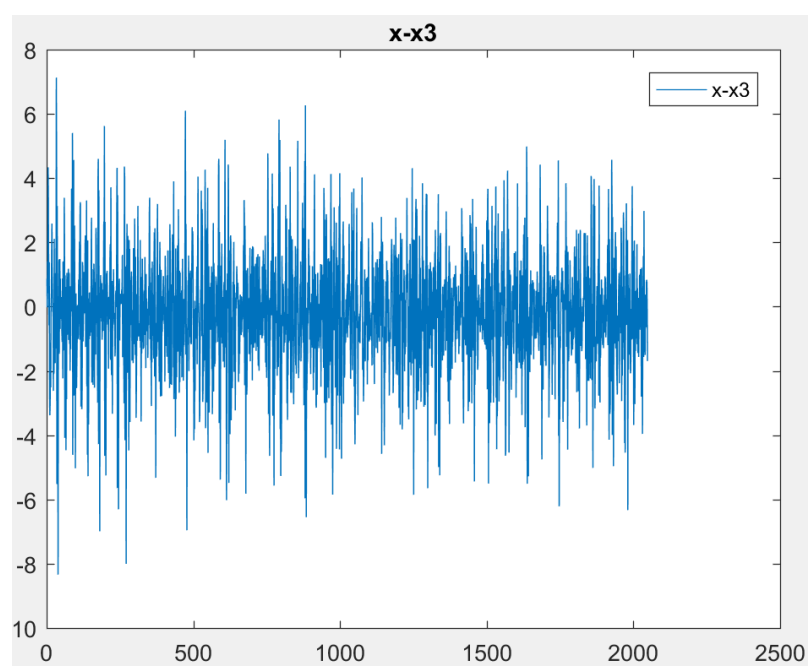
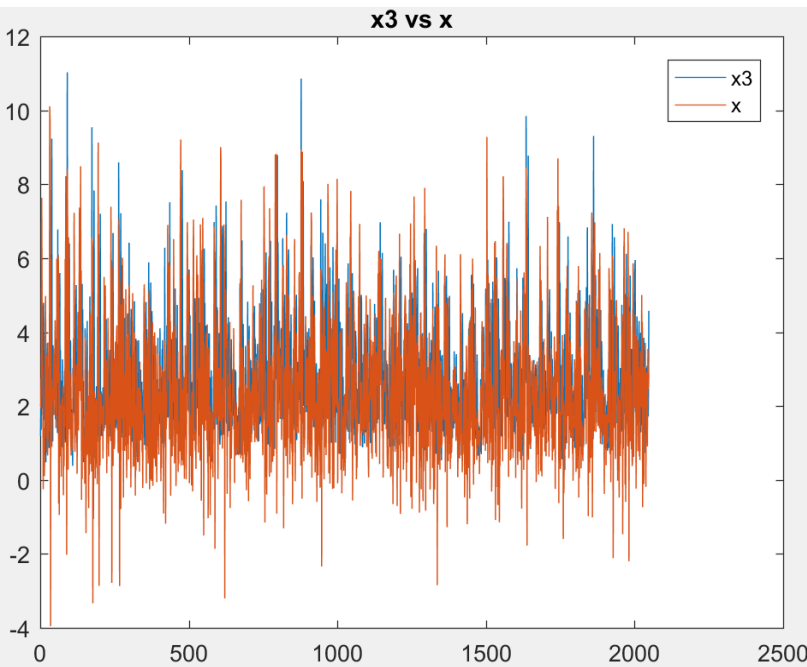
```
title('x-x1');
```


Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

Εκτελώντας την συνάρτηση `Signal_Generation` παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα.



Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος



Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση x_1 η οποία προκύπτει από το εκτιμώμενο φίλτρο τάξης q οδηγεί στην καλύτερη εκτίμηση της εξόδου του συστήματος. Έπειτα, καλύτερη εκτίμηση δίνει το φίλτρο που υπερεκτιμά την τάξη του, ενώ την χειρότερη εκτίμηση την δίνει το φίλτρο που υποεκτιμά την τάξη του. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει και από το μέσο τετραγωνικό σφάλμα το οποίο προκύπτει για τα τρία φίλτρα $e_1 = 1.0025$, $e_2 = 5.1080$ και $e_3 = 3.522$.

Για $N = 50$ προέκυψαν χειρότερα αποτελέσματα από ότι για $N = 1$ πράγμα που σημαίνει ότι ήμασταν αρκετά τυχεροί στην πρώτη εκτέλεση. Τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα για $N = 50$ επαναλήψεις προέκυψαν: $e_1 = 2.2511$, $e_2 = 6.3433$ και $e_3 = 160.3158$.

Οι πολλές υλοποιήσεις όλων των συναρτήσεων υπολογίστηκαν με την συνάρτηση **Multiple_Implementations**.

Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

- v. Σε αυτό το ερώτημα προστέθηκε λευκός Gaussian θόρυβος στην έξοδο του συστήματος. Εκτιμήθηκε το $x[k]$ και πάλι με την μέθοδο του Γιαννάκη για διαφορετικές τιμές του SNR. Οι υπολογισμοί υλοποιήθηκαν στην συνάρτηση **Add_Gaussian_Noise** στο Matlab και δίνονται στην συνέχεια για ευκολία:

```
%Advanced Signal Processing Techniques
%2nd Question
%5th Subquestion
%Calculate the estimation error of the input signal x in the output of the
%system in AWGN environment
function [total_errors1, total_errors2, total_errors3] = Add_Gaussian_Noise(x, v)
    initial_signal = x;
    total_errors1=zeros(1,8);
    total_errors2=zeros(1,8);
    total_errors3=zeros(1,8);
    j = 1;

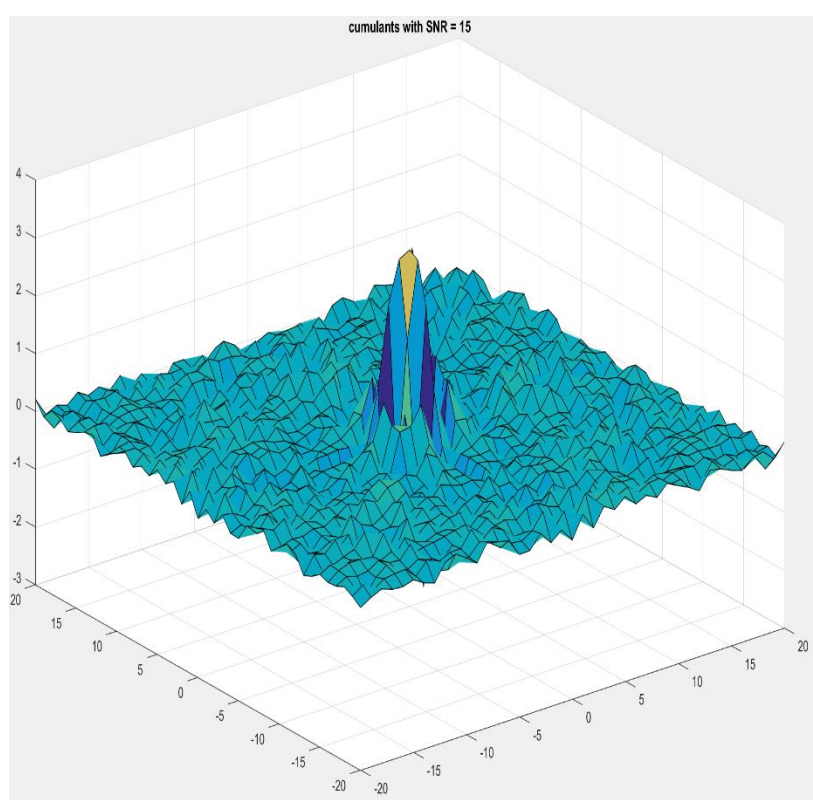
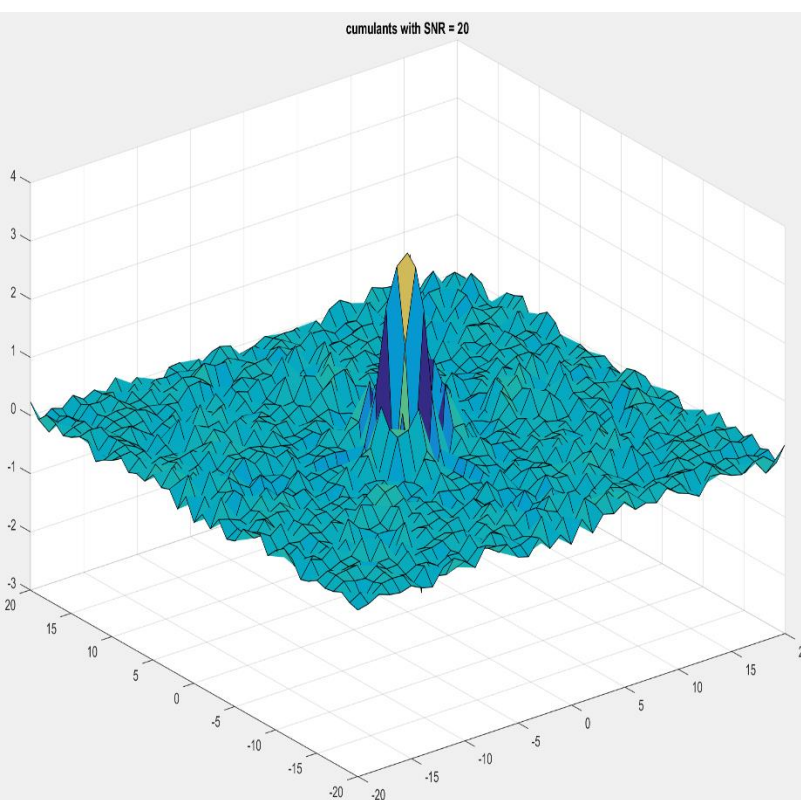
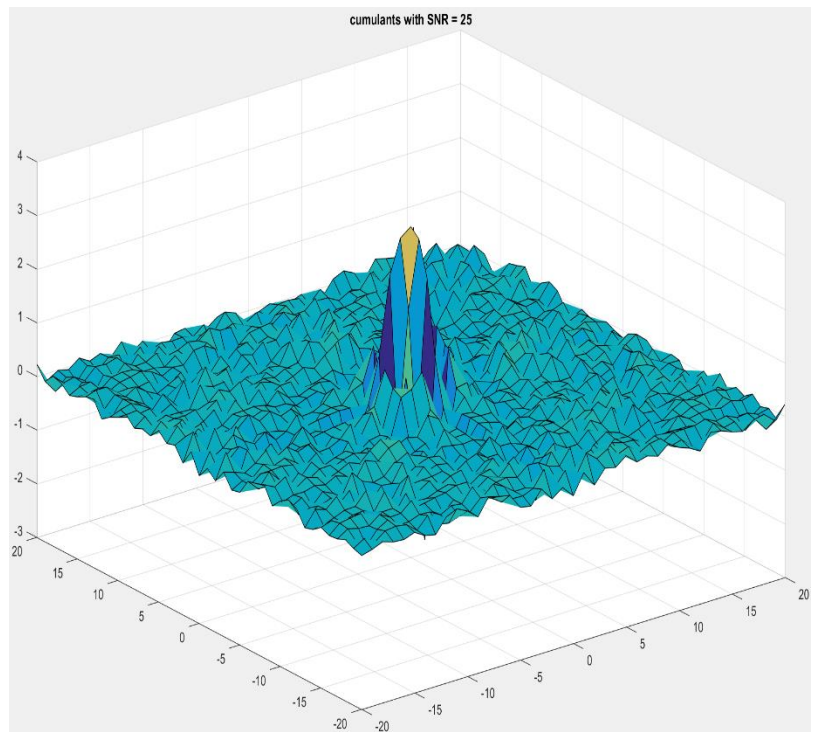
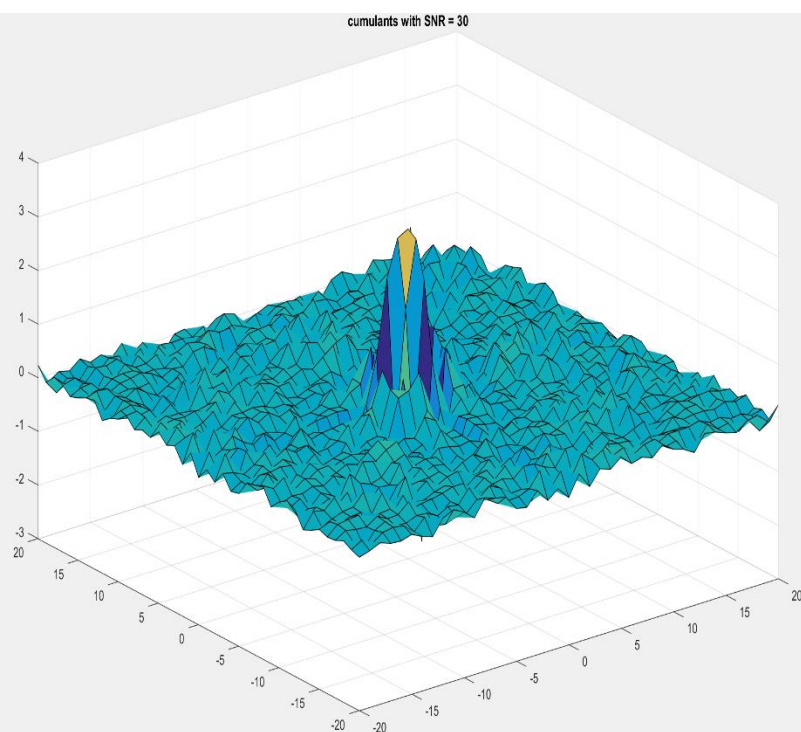
    for SNR = 30:-5:-5
        x = awgn(initial_signal,SNR);
        cumulants = Cumulants(x);
        [h, h1, h2] = Impulse_Response(cumulants);
        [x1, x2, x3] = Signal_Generation(x, v, h, h1, h2);
        figure;
        surf(-20:20,-20:20,cumulants);
        str = sprintf('cumulants with SNR = %d',SNR);
        title(str);
        total_errors1(1,j) = immse(x, x1);
        total_errors2(1,j) = immse(x, x2);
        total_errors3(1,j) = immse(x, x3);
        j=j+1;
    end

    SNR = 30:-5:-5;
    figure;
    plot(SNR, total_errors1(1:end));
    figure;
    plot(SNR, total_errors2(1:end));
    figure;
    plot(SNR, total_errors3(1:end));

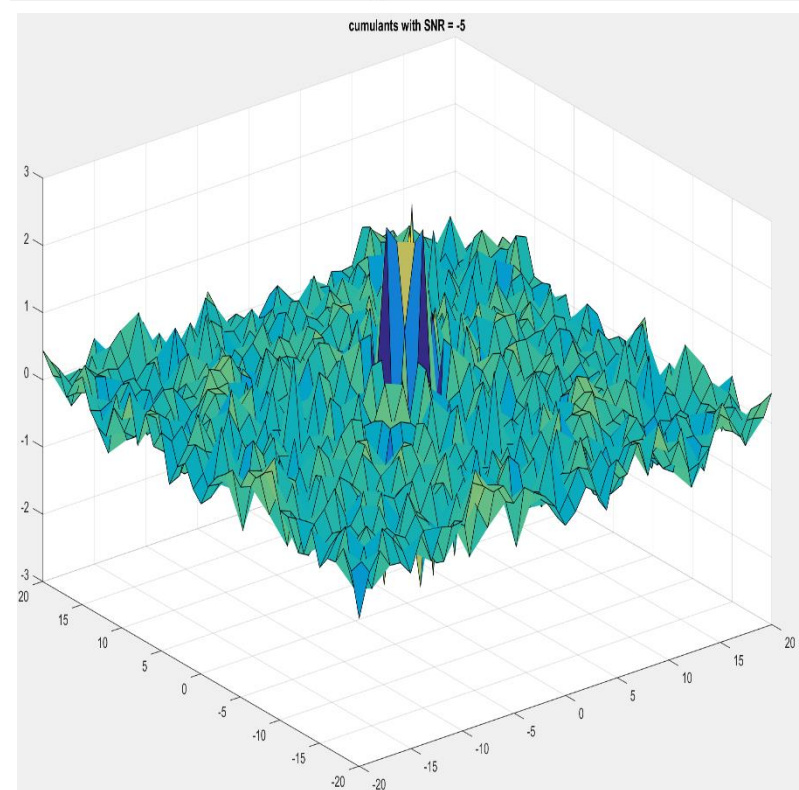
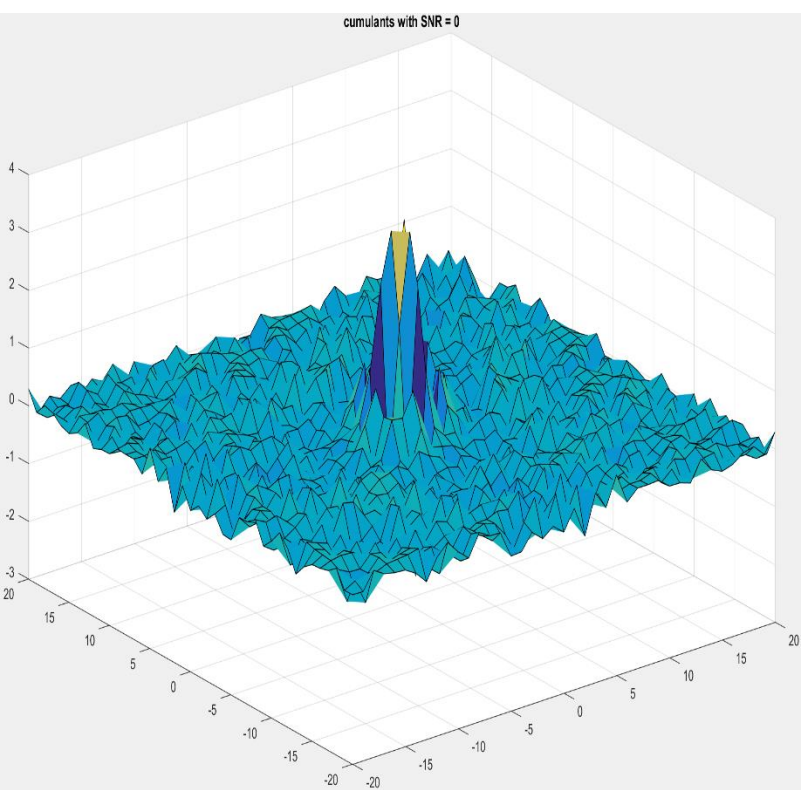
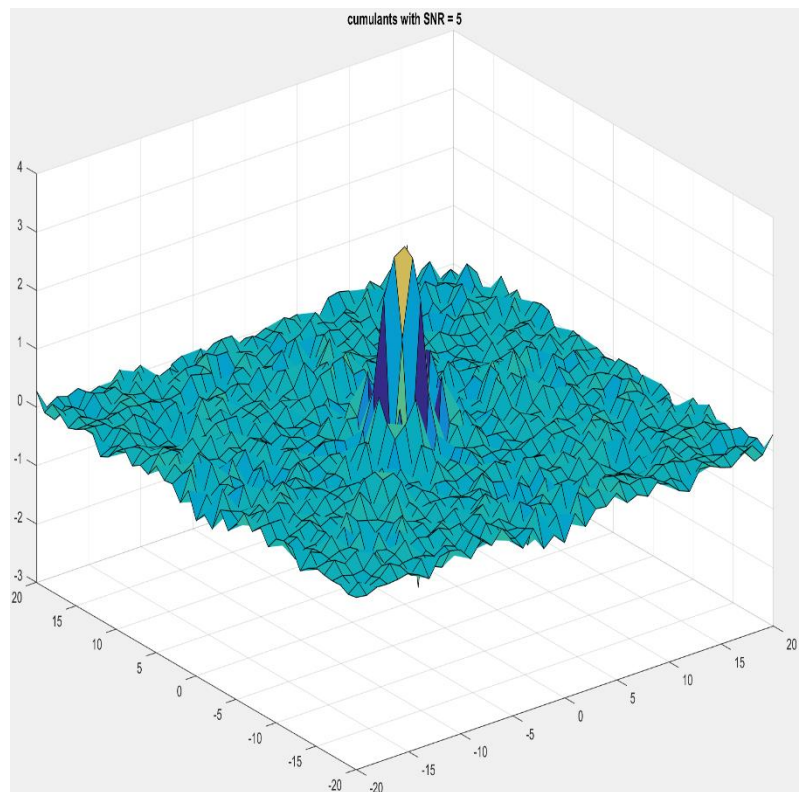
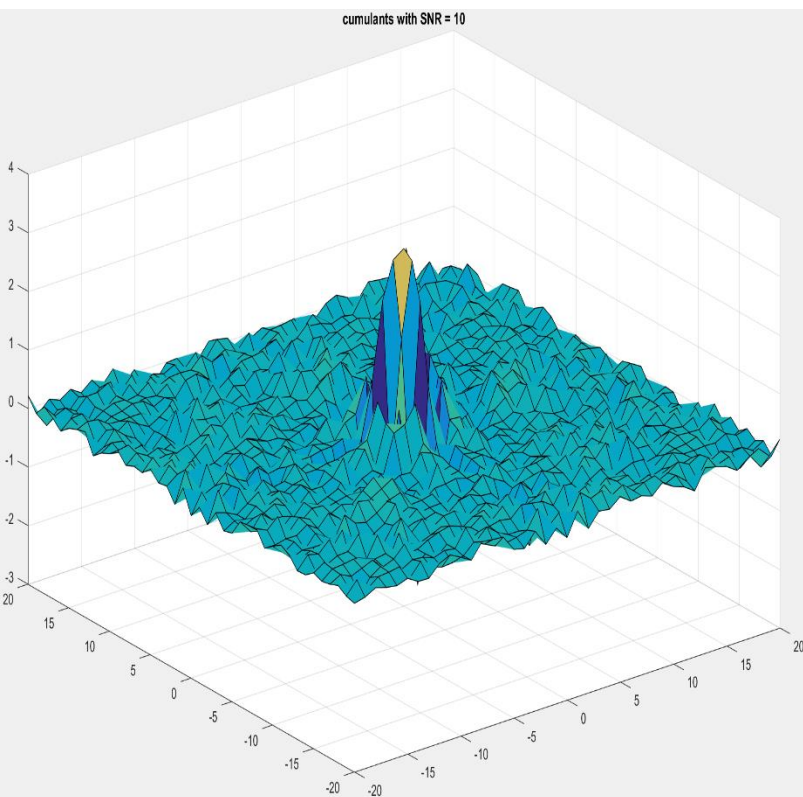
end
```

Σε ιδανικές συνθήκες ο Gaussian θόρυβος δεν θα επηρεάζει το σύστημα καθώς οι σωρείτες τρίτης τάξης του είναι ίσοι με μηδέν. Παρόλα αυτά όμως, επειδή οι σωρείτες υπολογίζονται για ένα εύρος τιμών τ_1 και τ_2 έχουμε κάποιες αποκλίσεις από την κανονικότητα. Ακόμη ένα αρνητικό είναι ότι χρειαζόμαστε πολλές υλοποιήσεις για να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα. Στα διαγράμματα των σωρειτών παρατηρούμε ότι καθώς μειώνεται το SNR έχουμε μείωση του πλάτους τους στο κέντρο των αξόνων και αύξηση στα άκρα. Βλέπουμε δηλαδή ότι αποκλίνουμε κατά πολύ από την ιδανική περίπτωση. Ακόμη, στο διάγραμμα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος έχουμε αύξηση του mse συναρτήσει του SNR. Αυτό είναι τελείως παράλογο και βλέπουμε ότι για πολλές επαναλήψεις έχουμε πιο φυσιολογικά αποτελέσματα

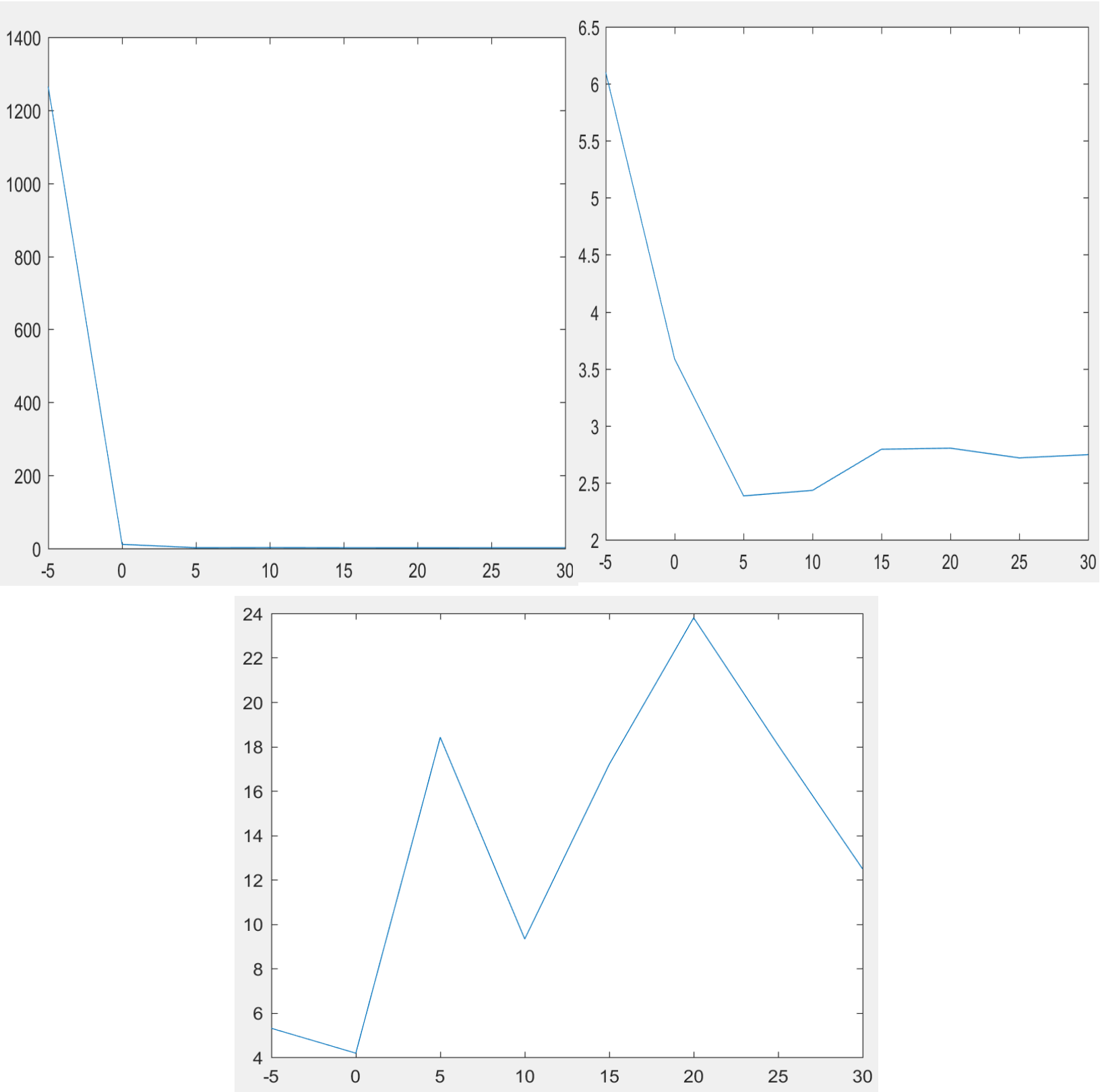
Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος



Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος



Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος



Τα παραπάνω διαγράμματα προέκυψαν μετά από μία επανάληψη της Add_Gaussian_Noise.

Προηγμένες Τεχνικές Επεξεργασίας Σήματος

Για $N = 50$ επαναλήψεις προέκυψαν τα εξής διαγράμματα για το μέσο τετραγωνικό σφάλμα συναρτήσει του SNR.

