Επιλύοντας την Χαρακτηριστική Εξίσωση με τις συναρτήσεις `disper.m` και `disper0.m`

Οι συναρτήσεις disper και disper0 είναι η ψηχή του προγράμματος. Δέχονται σαν εισόδους τα n_1 , n_2 , h (structural inputs) και την κυκλική συχνότητα ω του σήματος εισόδου και υπολογίζουν το πλήθος των ρυθμών , τις φασικές σταθερές και τους ενεργούς δείκτες διάθλασης των εμφανιζόμενων ρυθμών στην εν λόγω συχνότητα (ω).

Οι δύο συναρτήσεις κάνουν ακριβώς την ίδια δουλειά (επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης -ΧΕ- των ΤΕ ρυθμών στην κανονικοποιημένη της μορφη b=f(V)) αλλά με αρκετά διαφορετικό τρόπο.

Η disper0 είναι η παλαιότερη (εξ'ου και το disper**0**) και πιο «πρωτόγονη» , αλλά γενικά είναι πιο γρήγορη και δεν «κολλάει», απλά βγάζει άσχημα αποτελέσματα χάνοντας ρυθμούς όσο αυξάνεται η κανονικοποιημένη συχνότητα V. Επειδή είναι πιο γρήγορη χρησιμοποιήθηκε στα διαγράμματα διασποράς όπου γίνεται επεξεργασία πολλών συχνοτήτων. Μπορεί θεωρητικά να αντιμετωπίσει οποιαδήποτε εξίσωση χωρίς ή με απειρισμούς (όπως η ΧΕ των ΤΕ ρυθμών του εξεταζόμενου κυματοδηγού).

Η disper είναι μεταγενέστερη και βασίζεται σε πιό σχολαστική παρατήρηση της συμπεριφοράς της ΧΕ κοντά στα σημεία απειρισμού και κάνει χρήση της ρουτίνας `fzero` του MATLAB. Είναι γενικά πιό ακριβής σε μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων (V) αλλά πιό αργή , και όταν ξεπεράσει το κατώφλι λειτουργικότητας της, κρεμάει. Χρησιμοποιήθηκε στην μονοχρωματική απόκριση, όπου δεν μας ενδιαφέρει πολύ ο χρόνος επεξεργασίας που ούτως ή άλλως είναι μικρός για μία μόνο συχνότητα εισόδου.

Χαρακτηριστική εξίσωση:

Η ΧΕ των ΤΕ ρυθμών του κυματοδηγού αυτού προκύπτει από μια σύντομη ηλεκτρομαγνητική ανάλυση με χρήση των οριακών συνθηκών :

$$XE(h,\kappa,\gamma) = \tan(\kappa h) - \frac{2\gamma/\kappa}{1-(\gamma/\kappa)^2}$$

Όπου, όπως γνωρίζουμε, είναι :

$\kappa = \sqrt{(n_1 k_0)^2 - (n_{eff} k_0)^2}$ ο κυματάριθμος στο στρώμμα οδήγησης

$\gamma = \sqrt{(n_{eff} k_0)^2 - (n_2 k_0)^2}$ ο κυματάριθμος στο υπο/υπέρστρωμμα

n_{eff} ο ενεργός δείκτης διάθλασης του κάθε ρυθμού στην δεδομένη συχνότητα (ω)

n_1, n_2 , h τα δομικά χαρακτηριστικά

Κανονικοποιώντας την ΧΕ σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$V = \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_0 \cdot \sqrt{n_1^{\,2} - n_2^{\,2}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\omega}{C_0} \cdot \sqrt{n_1^{\,2} - n_2^{\,2}} \; , \; V \in [0,+\infty]$$

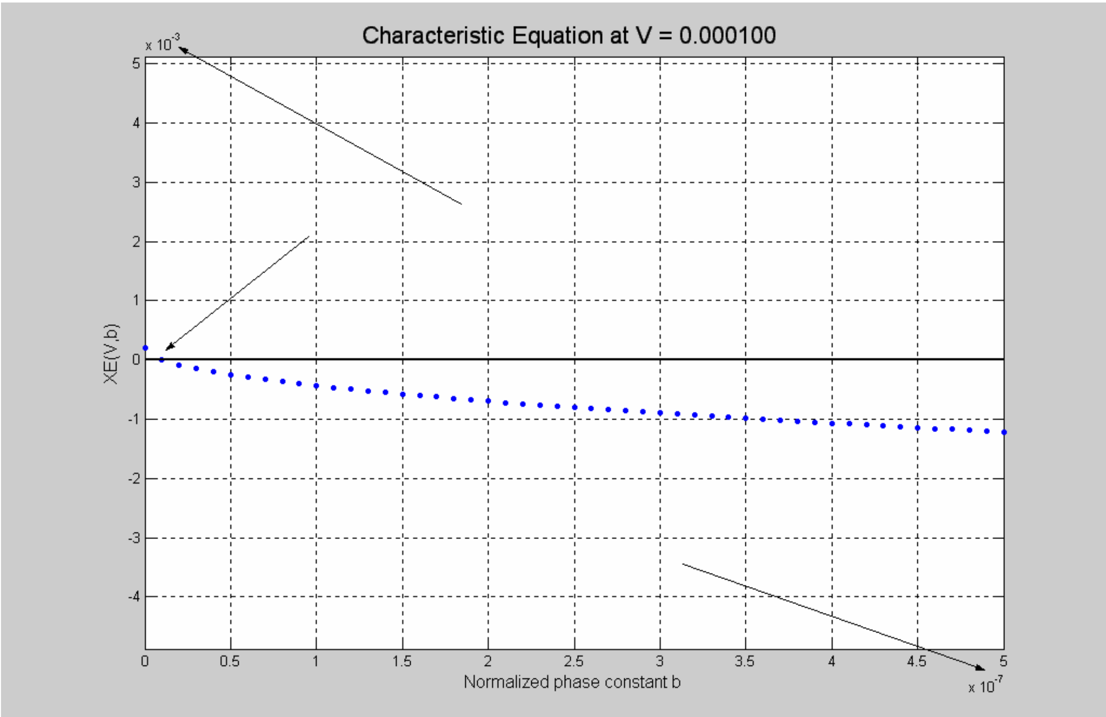
$$b = \frac{n_{eff,\nu}^{\;2} - n_2^{\,2}}{n_1^{\,2} - n_2^{\,2}} \; , \; b \in [0,1]$$

και κατόπιν εκτελώντας κάποιες πράξεις η ΧΕ μετασχηματίζεται στην κανονικοποιημένη της μορφή :

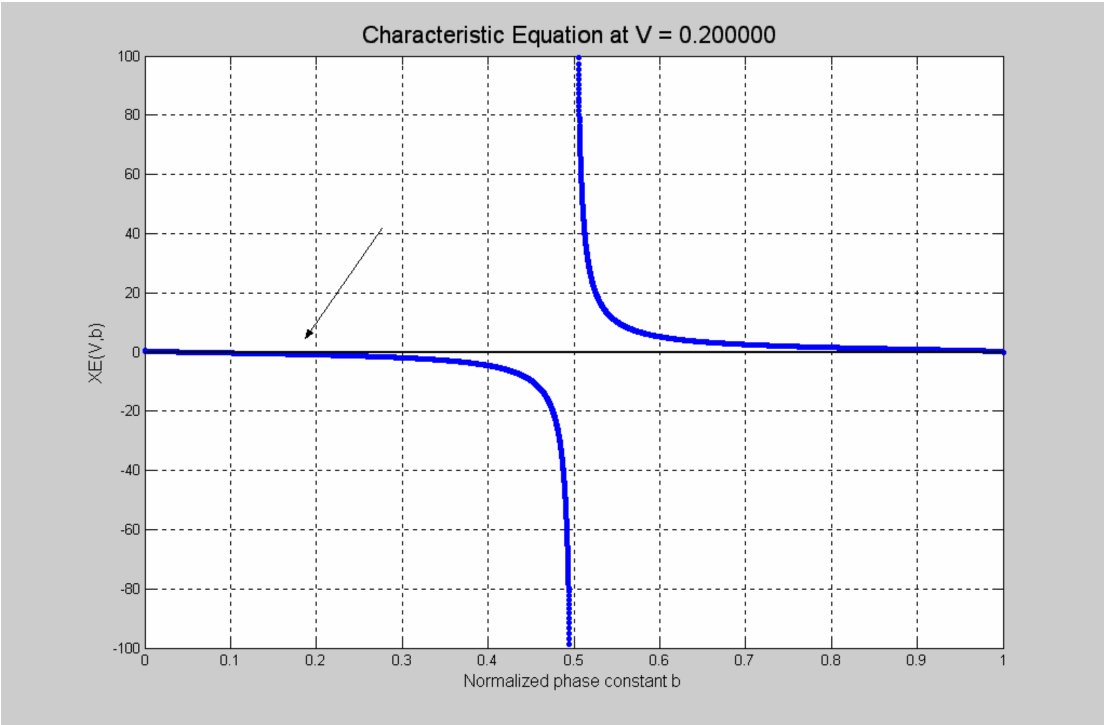
$$XE(V,b) = \tan(2V\sqrt{1-b}) - \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{1-2b}$$

Στο συγκεκριμένο πρόγραμμα έχουμε σαν είσοδο το ω και τα n_1 , n_2 , h που τα συμπυκνώνουμε στον V αριθμό, και ζητάμε τις ρίζες της ΧΕ για γνωστό V, έχοντας το ισχυρό πλεονέκτημα ότι ξέρουμε πόσες ρίζες θέλουμε – όσες και το πλήθος των ρυθμών που αντιστοιχούν στον V αυτό.

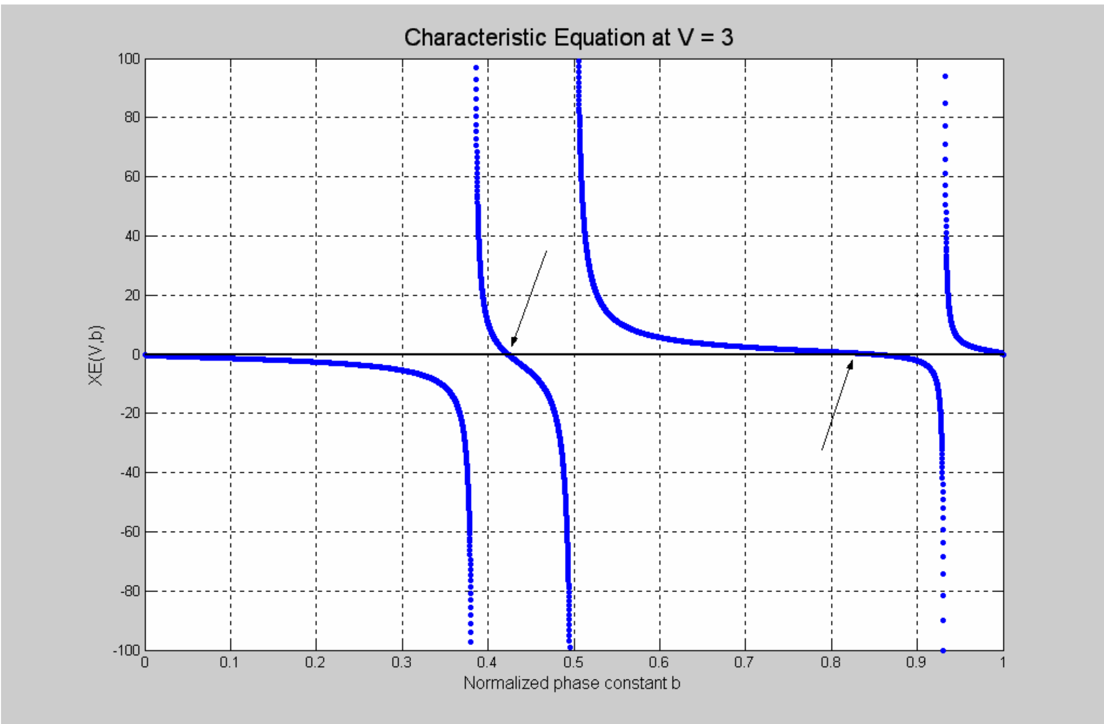
Η ΧΕ(V,b) είναι μια υπερβατική εξίσωση που εμφανίζει απειρισμούς στο σημείο b=0.5 (πάντα) και στα σημεία όπου το όρισμα της εφαπτομένης γίνεται μηδέν (και b είναι μεταξύ 0 και 1 προφανώς). Μερικές ενδεικτικές μορφές της ΧΕ φαίνονται στα παρακάτω σχήματα όπου οι ρίζες σημειώνονται προσεγγιστικά με μαύρα βέλη



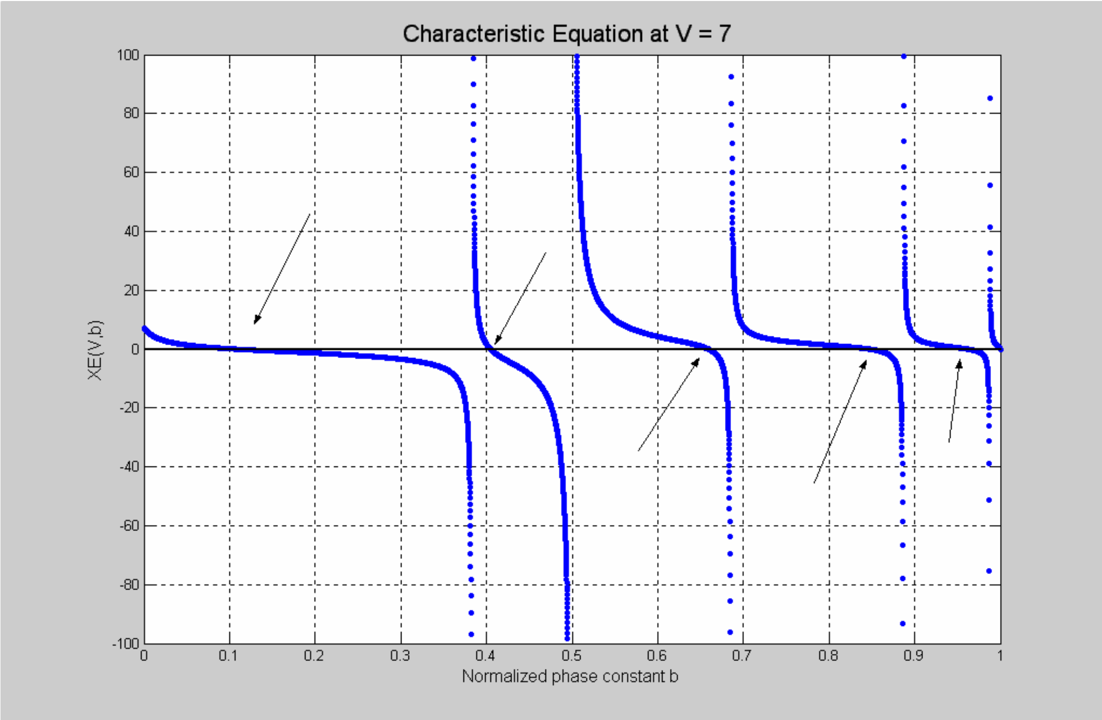
V = 0.0001 δηλαδή μία ρίζα
(δείτε και τις τάξεις μεγέθους των b και XE(V,b))



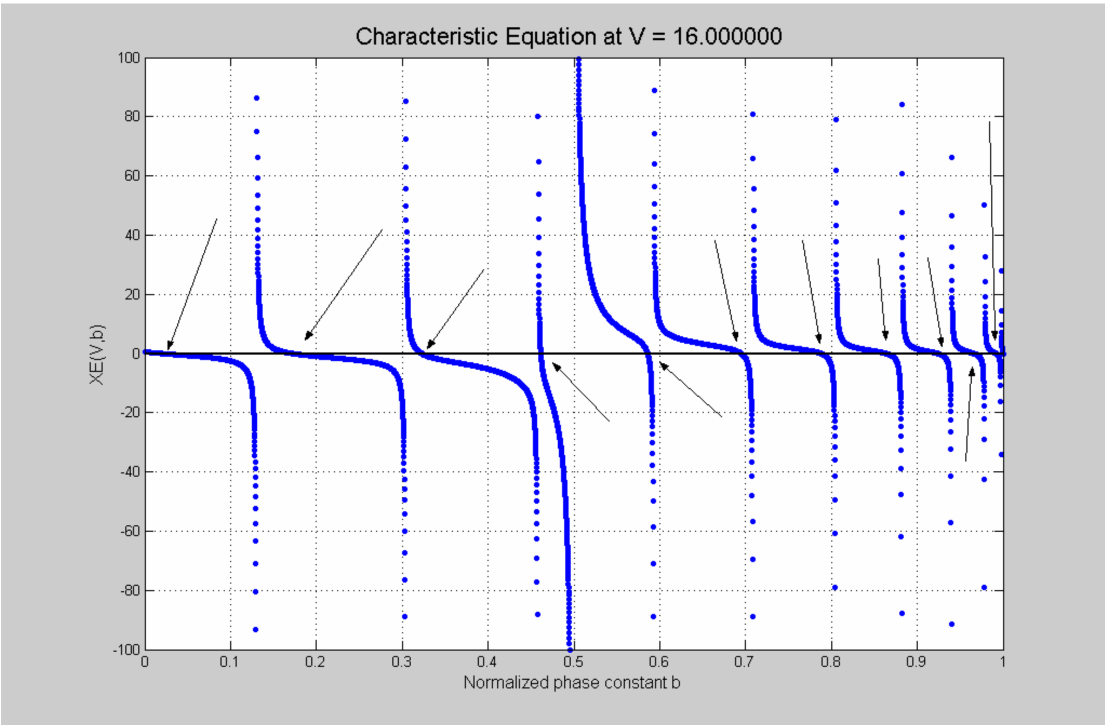
V = 0.2 δηλαδή μία ρίζα



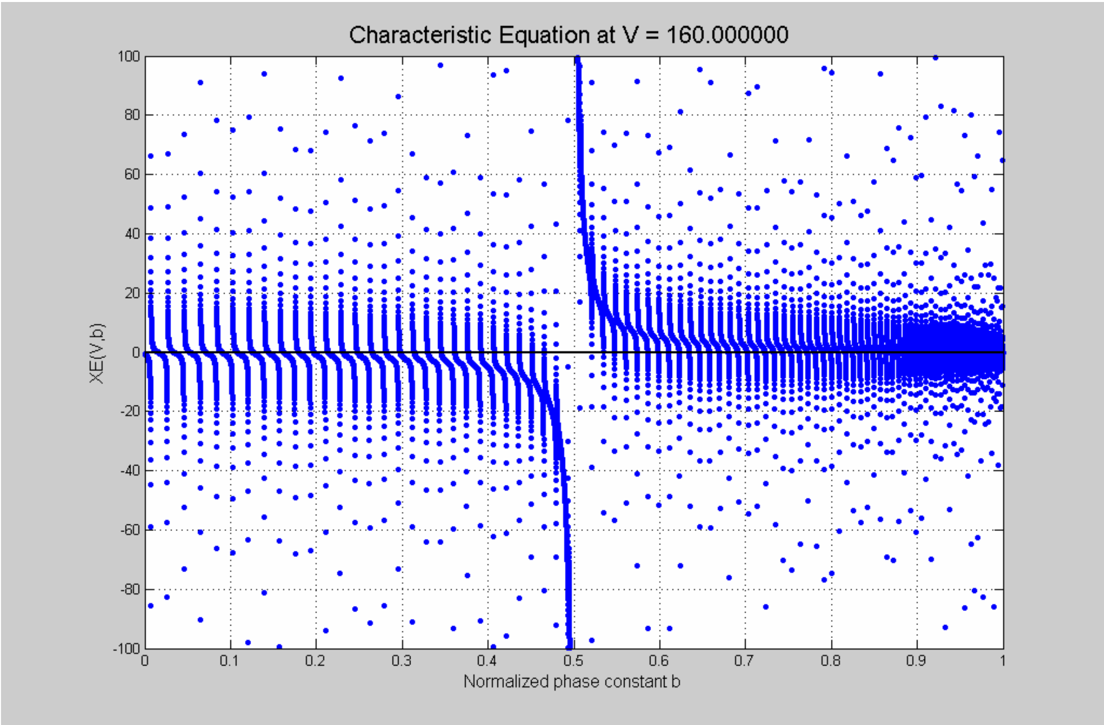
V = 3 , δηλαδή 2 ρίζες



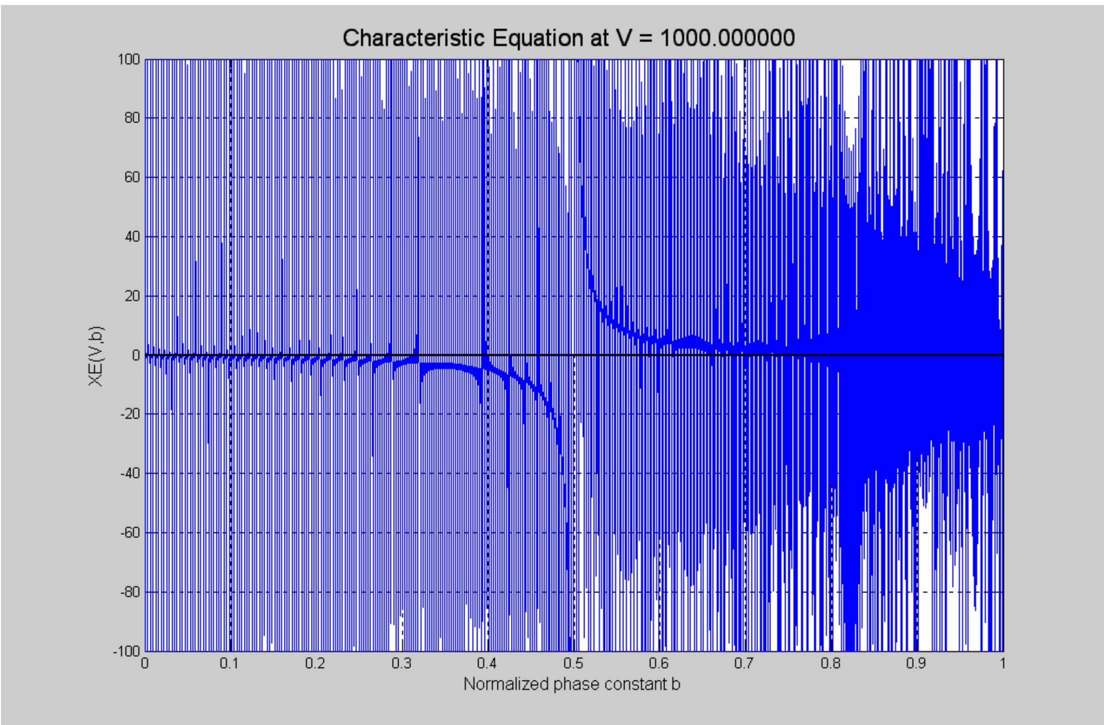
V=7 δηλαδή 5 ρίζες



V = 16 δηλαδή 11 ρίζες



V = 160 δηλαδή ΠΟΛΛΕΣ ρίζες ...



V = 1000 δηλαδή ΠΑΡΑ ΠΑΡΑ ΠΟΛΛΕΣ ρίζες.

Η γενική εικόνα του προβλήματος εύρεσης των ριζών άρχισε να γίνεται πιό καθαρή πιστεύω ...

*<u>Επίλυση της Χαρακτηριστικής Εξίσωσης με τη ρουτίνα **disper0** :</u>*

Η ρουτίνα disper0 αντιμετωπίζει το πρόβλημα ως εξής:

- Ορίζει μια διακριτοποίηση του χώρου των b, όσο πιο «πυκνή» τόσο πιό αποτελεσματική (και αργή) η ρουτίνα. Έστω ότι το πλήθος της διακριτοποίησης του b είναι 50.000 σημεία.

```
b = linspace( 0 , 1 , 50000 )
```

- Δημιουργεί από τα διακριτά b, τα δείγματα της XE(b) σύμφωνα με την προς επίλυση εξίσωση, για κάθε τιμή του αριθμού V χωριστά .

```
for j = 1 : length(V)
XE(j) = tan( 2*V(j)*sqrt(1-b) ) – 2*sqrt( b – b.^2 )./( 1 – 2*b )
```

- Εξετάζει τα διαδοχικά δείγματα της XE(b_0) , XE(b_1) , XE(b_2) … XE(b_{49999}), για κάθε V, και ψάχνει για αλλαγή προσήμου μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών.

```
for i = 1 : length(b) – 1
sgn = sing( XE(j,i) ) * sign( XE(j,i+1) )
if sgn == -1
???
```

- Εάν υπάρχει αλλαγή προσήμου πρέπει να ξεχωρίσει εάν πρόκειται για ρίζα (zero-cross) ή για απειρισμό (-inf → +inf transision) καθώς όπως παρατηρήθηκε η XE έχει φθίνουσα συμπεριφορά, αφού η πρώτη της παράγωγος ως προς b είναι πάντα αρνητική για το εύρος τιμών των b,V που μας απασχολούν. Για να ξεχωρίσει λοιπόν τις δύο αυτές περιπτώσεις αλλαγής προσήμου, ορίζει το «διαφορικό» της XE, δηλαδή έναν πίνακα με 50.000 – 1 σημεία, που προκύπτει από την διαφορά κάθε δείγματος της XE από το προηγούμενο της. Για πολύ πυκνή διακριτοποίηση η διαφορά δύο δειγμάτων είναι πολύ μικρή στα σημεία που είναι συνεχής η XE και σχεδόν άπειρη στα σημεία που έχουμε ασυνέχεια με απειρισμό (-inf → +inf transision).

```
DXE(j) = diff( XE(j) )
infinite = 10
......
if ( sgn == - 1 ) & ( DXE(j,i) < infinite )
```

- Προφανώς ανάμεσα στα διαδοχικά δείγματα XE(b) όπου παρουσιάζεται αλλαγή προσήμου και η διαφορά τους δεν είναι «άπειρη» , βρίσκεται η ζητούμενη ρίζα , που λαμβάνεται με μιά απλή γραμμική παρεμβολή.

```
Ο k είναι ο μετρητής των ριζών k = 1 : NumberOfModes(j)
b_root(j,k) = b(i) – XE(j,i)*( b(i+1)-b(i) )/( XE(j,i+1) – XE(i) )
continue
```

*Προβλήματα της **disper0**:*

- Πως θα οριστεί το «άπειρο» διαφορικό; Ο τρόπος που προτείνει η ρουτίνα αυτή είναι βάσει του ζητούμενου αριθμού ριζών , έστω NoM, να ληφθεί το κατώφλι διαφορικού μεταξύ του (NoM-1)-οστού και του NoM-οστού μεγαλύτερου διαφορικού. Αυτό προέκυψε από μιά μια χοντρική παρατήρηση ότι το πλήθος των απειρισμων είναι περίπου ίσο με το πλήθος των ζητούμενων ριζών άρα το NoM-οστό μεγαλύτερο διαφορικό αντιστοιχεί στον μικρότερο σε ύψος απειρισμό. Χρησιμοποιήθηκαν ακόμα και «στατικοί» ορισμοί του απείρου , π.χ. για διακριτοποίηση 10.000 σημείων, ένα κατώφλι απείρου της τάξης του 3-4 δούλεψε αρκετά καλά για 30-40 ρυθμούς.

- Όσο αυξάνεται το πλήθος των ρυθμών τόσο χαμηλώνει το ύψος των μικρότερων απειρισμών, οπότε το διαφορικό τους αρχίζει και γίνεται συγκρίσιμο με αυτό των σημείων όπου η ΧΕ είναι συνεχής και βρίσκεται κοντά σε κάποιον πολύ ισχυρό απειρισμό (όπως ο απειρισμός στο b=0.5). Το πρόβλημα αυτό είναι που θέτει το κατώφλι λειτουργικότητας της disper0, πέρα από το οποίο αρχίζει να χάνει ρυθμούς και δημιουργώντας «πετάγματα» στο διάγραμμα διασποράς.

- Ειδική μέριμνα έπρεπε να ληφθεί στα ακραία σημεία: Για V πολύ κοντά στο μηδέν («DC» συχνότητα εισόδου) προφανώς θα έχουμε μόνον έναν ρυθμό , τον TE-0, και η αντίστοιχη ρίζα της ΧΕ(V,b) θα είναι πρακτικά η b=0. Σε πολύ υψηλές συχνότητες οι χαμηλότεροι ρυθμοί (TE-0,1,2) αντιστοιχούν σε ρίζες που είναι πολύ κοντά στο b=1 (ή πρακτικά ίσες με 1), άρα και εκεί ο αλγόριθμος έπρεπε να κάνει κάποια ιδιέταιρη ρύθμιση.

*Επίλυση της Χαρακτηριστικής Εξίσωσης με τη ρουτίνα **disper** :*

Η ρουτίνα disper αντιμετωπίζει το πρόβλημα ως εξής:

- Μετά από προσεκτική παρατήρηση της ΧΕ για διάφορα V, διαπιστώθηκε ότι λόγω της μονοτονικά φθίνουσας συμπεριφοράς που παρουσιάζει, κάθε ρίζα της βρίσκεται στο διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών απειρισμών.

$$\frac{\partial XE(V,b)}{\partial b} = -\frac{V(1+\tan^2(2V\sqrt{1-b}))}{\sqrt{1-b}} - \frac{4\sqrt{b(1-b)}}{(1-2b)^2} - \frac{1}{\sqrt{b(1-b)}} < 0$$

- Έπειτα απο αλγεβρική – αναλυτιή – επίλυση της ΧΕ ως προς του απειρισμούς

$$XE(V,b) = \tan(2V\sqrt{1-b}) - \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{1-2b}$$

διαπιστώθηκε ότι έχουμε απερισμούς στα σημεία όπου το όρισμα της εφαπτομένης του δευτέρου μέλους είναι κάποιο περιττό πολλαπλάσιο του π/2. Ακόμα έχουμε σε κάθε συχνότητα V έναν απειρισμό στο σημείο που μηδενίζεται ο παρονομαστής του κλάσματος του δευτέρου μέλους, b = 0.5 .

- Προφανώς θέλουμε να βρούμε τόσες ρίζες όσοι είναι οι εμφανιζόμενοι ρυθμοί για δεδομένο V. Έστω ότι έχουμε NoM ρυθμούς , τότε θα θέλαμε να ορίσουμε συνολικά NoM+1 «κρίσιμα» σημεία για να ψάξουμε στο ενδιάμεσο καθενός διαδοχικού ζεύγους για μία ρίζα. Ύστερα από μία πρόχειρη προσομοίωση φάνηκε ότι τα «κρίσιμα» σημεία θα μπορούσαν να είναι τα σημεία απειρισμού που προέκυψαν από το προηγούμενο βήμα, που ήταν πάντα NoM ή NoM +1 σε πλήθος. Στην δεύτερη περίπτωση δεν έχουμε πρόβλημα , στην πρώτη όμως θα πρέπει να προσθέσουμε στα «κρίσιμα» σημεία το b=0 , παρόλο που στην πράξη δεν έχουμε απειρισμό, για να ορίσουμε συνολικά πάλι NoM+1 σημεία. Μια ποιοτική εξήγηση για την παραπάνω προσέγγιση είναι ότι όταν για ένα V κάποιος ρυθμός αρχίζει να βγαίνει από την αποκοπή θα έχει n_{eff} πολύ κοντά στο n_2 άρα η κανονικοποιημένη ρίζα που θα του αντιστοιχεί θα είναι πολύ κοντά στο b=0 .

- Αφού έχουμε έτσι συμπληρώσει το πλήθος των NoM+1 «κρίσιμων» σημείων, δίνουμε στην συνάρτηση `fzero` του MATLAB τα διαδοχικά ζεύγη σημείων, και περιμένουμε να μας βρεί την ρίζα της ΧΕ μέσα στο εύρος αυτό. Για να δουλέψει αποτελεσματικά η `fzero` του MATLAB πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι στις οριακές τιμές του εύρους που δίνουμε, η ΧΕ θα έχει διαφορετικό πρόσημο. Αυτό το επιτυγχάνουμε προσθέτονατς στο πρώτο κρίσιμο σημείο και αφαιρώντας από το δεύτερο έναν απειροστά μικρό αριθμό που θα είναι το «όριο ευαισθησίας» του αλγορίθμου. Ανάλογα με την τάξη μεγέθους του V αριθμού προσαρμόζουμε αντίστοιχα και τον αριθμό αυτό. Για συνήθεις εφαρμογές του εύρους V ~ [10^{-8} έως 10^{3}] επιλέχθηκε ο αριθμός `3*eps` , όπου `eps` ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να χειριστεί σε «κανονικές» ρουτίνες το MATLAB (της τάξης μεγέθους του 10^{-16}) .

*<u>Προβλήματα της **disper**:</u>*

- Το βασικό πρόβλημα της disper είναι ότι είναι αρκετά αργή, κυρίως όταν αυξάνει το πλήθος των ρυθμών , και συνεπώς και των κλήσεων στην συνάρτηση `fzero` του MATLAB. Ο χρόνος επεξεργασίας σε σχέση με την disper0 διακριτοποίησης 20.000 σημείων ήταν 3-4 φορές μεγαλύτερος για 70-80 ρυθμούς. Βέβαια είναι γενικά πιο ακριβής , καθώς μπορεί να διακρίνει αλάνθαστα μέχρι και 630 διαφορετικούς ρυθμούς.

- Δεν κατέστη δυνατός ο προσδιορισμός κάποιου αποδοτικού τρόπου προσαρμογής του «ορίου ευαισθησίας» (το `3*eps` που αναφερθήκαμε παραπάνω) στην τάξη μεγέθους του V αριθμού καθώς χρειαζόταν αρκετή προσομοίωση. Το αποτέλεσμα είναι εκτός του εύρους V ~ [10^{-8} έως 10^{3}] ο αλγόριθμος να μην δουλεύει και να εμφανίζεται μήνυμα λάθους. Ίσως σε κάποια επόμενη έκδοση γίνει μια καλύτερη προσέγγιση.