Рассуждения от противного и принцип Дирихле

Пример 1. В классе 30 учащихся. Докажите, что найдется трое учащихся, родившихся в одном и том же месяце.

Решение. Предположим, что в каждом месяце родилось меньше трех учащихся, т.е. не более двух. Тогда всего учащихся не более $2 \cdot 12 = 24$ человек. Значит наше предположение неверно и найдется месяц, в котором родилось не менее трех учащихся.

Пример 2. Шесть мальчиков съели 13 конфет. Докажите, что найдутся два мальчика, которые съели поровну конфет (возможно, что ни одной).

Решение. Предположим, что все мальчики съели разное число конфет. Найдем, какое наименьшее число конфет они могли тогда съесть: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Но конфет они съели меньше, значит наше предположение неверно, и найдутся два мальчика, которые съели одинаковое число конфет.

Пример 3. В семи кабинетах стоят 107 парт. Докажите, что для проведения письменного экзамена можно выбрать из этих кабинетов три, в которых вместе не менее 47 парт.

Решение. Рассмотрим три кабинета, в которых находится больше всего парт. Пусть в них вместе не более 46 парт. Тогда в каком-то одном из них не более 15 парт. *(Если бы в каждом было не менее 16 парт, то в этих трех кабинетах парт было бы не меньше, чем* $16 \cdot 3 = 48$*, что противоречит предположению.)* Но тогда в оставшихся четырех кабинетах не более $15 \cdot 4 = 60$ парт *(поскольку выбрали три самых «больших» кабинета)*. А всего в семи кабинетах не более $46 + 60 = 106$ парт, что противоречит условию. Значит предположение неверно, и найдется три кабинета, в которых вместе не менее 47 парт.

Пример 4. В походе участвовало 18 школьников. Докажите, что среди них либо были пять школьников из одного класса, либо в походе приняли участие школьники не менее чем из пяти классов.

Решение. Предположим, что в походе приняли участие школьники не более чем четырех классов, причем из каждого не более четырех учащихся. Тогда всего в походе участвовало не более $4 \cdot 4 = 16$ учащихся, что противоречит условию. Значит предположение неверно, и в походе приняли участие либо школьники не менее чем пяти классов, либо не менее пяти учащихся из одного класса.

Задачи

Задача 2.1. В коробке «Ассорти» 50 конфет трех видов. Докажите, что конфет какого-то вида не менее 17.

Задача 2.2. На школьном дворе гуляют 25 детей в возрасте от 7 до 14 лет. Докажите, что найдутся четыре школьника одинакового возраста.

Задача 2.3. Какое наименьшее количество учащихся должно быть в школе, чтобы гарантированно можно было найти трех учащихся, отмечающих день рождения в один и тот же день?

Задача 2.4. Докажите, что существуют две различные степени семерки такие, что три их последние цифры совпадают.

Задача 2.5. В соревнованиях по бегу участвуют 100 спортсменов. Известно, что среди любых 12 из них найдутся двое знакомых между собой. Докажите, что как бы ни раздали спортсменам стартовые номера (не обязательно от 1 до 100), найдутся два знакомых спортсмена, номера которых начинаются с одинаковой цифры.

Задача 2.6. **а)** В течение учебного года 70 учащихся девятых классов написали три срезовые контрольные работы. За каждую ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Докажите, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки за все три контрольные. **б)** А сколько школьников точно имеют одинаковые наборы оценок (не важно, в каком порядке и за какие контрольные оценки получены)?

Задача 2.7. **а)** Докажите принцип Дирихле: если в n клетках сидит не менее $kn+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит не менее $k+1$ кроликов. **б)** Укажите, что является «клетками», а что — «кроликами» в предыдущих задачах.

Задача 2.8. В пять школ поставили 58 компьютеров, в каждую не меньше 10. Докажите, что найдутся две школы, которые получили компьютеров поровну.

Задача 2.9. Для награждения по итогам школьного конкурса имеется 70 конфет. При каком наибольшем количестве конкурсантов им можно будет раздать конфеты так, что все они получат разное количество конфет? А если помимо этого еще требуется, чтобы каждый из конкурсантов получил не менее 3 конфет?

Задача 2.10. Докажите, что если в n клетках сидит менее $n(n-1)/2$ кроликов, то найдутся две клетки, в которых сидит одинаковое количество кроликов (может быть, ни одного).

Задача 2.11. На заводе 7 цехов, в которых работает 360 человек. Докажите, что в каких-то пяти из этих цехов работает не менее 258 человек.

Задача 2.12. Пять мальчиков собрали 53 гриба, причем известно, что никакие двое не собрали грибов поровну. Докажите, что какие-то трое из них собрали не менее 36 грибов.

Задача 2.13. В отряде в летнем лагере собраны ребята 10, 11, 12 и 13 лет. Их 23 человека и вместе им 253 года. Сколько в отряде 12-летних ребят, если известно, что их в полтора раза больше, чем 13-летних?

Задача 2.14. В классе 20 человек. Средняя оценка за последнюю контрольную оказалась равной ровно 4, причем есть все оценки от 1 до 5. Какое наименьшее количество пятерок могло быть за эту работу?

Задача 2.15. В коробке 70 карандашей. Докажите, что найдутся либо 9 карандашей одного цвета, либо 9 карандашей разного цвета.

Задача 2.16. Придумайте аналогичную задачу, чтобы нашлось либо n разноцветных, либо n одноцветных карандашей. Каким наименьшим числом карандашей вам удастся обойтись? Объясните, почему это число действительно наименьшее.

Задача 2.17. В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

Задача 2.18. Числа от 1 до 9 некоторым образом разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

Задача 2.19. На складе имеется несколько ящиков общей массой 10 тонн, причем масса каждого не превосходит тонны. Какое наименьшее количество трехтонок нужно заказать, чтобы точно суметь вывезти их все за один раз?

Задача 2.20. Сумма любых семи натуральных чисел из набора меньше 15, а сумма всех чисел из набора равна 100. Какое наименьшее количество чисел может быть в наборе?

Принцип Дирихле: более сложные задачи

Пример 1. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Решение. У каждого человека в этой компании может быть 0, 1, 2, 3 или 4 знакомых, всего 5 вариантов. Если у некоторого человека A имеется 4 знакомых, то каждый в компании знаком с человеком A, и не может быть человека, имеющего 0 знакомых. Значит в компании либо не будет человека, имеющего 4 знакомых, либо не будет человека, имеющего 0 знакомых. Имеем 5 человек и 4 варианта возможных количеств знакомых (либо 0, 1, 2, 3, либо 1, 2, 3, 4). Тогда по принципу Дирихле найдутся два человека, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Пример 2. Докажите, что из 52 различных натуральных чисел не превосходящих 100 всегда можно выбрать два, одно из которых на три больше другого.

Решение. Разделим первые 100 натуральных чисел на три последовательности, в первой из которых 34, а в двух других по 33 числа:

$$1, 4, 7, 10, \ldots, 100,$$

$$2, 5, 8, 11, \ldots, 98,$$

$$3, 6, 9, 12, \ldots, 99.$$

В каждой из последовательностей любые два соседних числа отличаются на три.

Докажем, что какие-то два из данных 52 чисел окажутся стоящими рядом в одной из последовательностей. Разобьем числа в каждой из последовательностей на группы из двух соседних чисел. В первой последовательности получится 17 пар, во второй и третьей последовательности по 16 пар и по одному непарному числу. Всего получим 17+16+1+16+1=51 группу. Поскольку чисел 52, а групп 51, то какие-то два из данных чисел попадут в одну группу. Но числа одной группы различаются на 3, значит среди данных 52 чисел есть два, отличающиеся на три.

Задачи

Задача 3.1. Докажите, что у любого многогранника найдутся две грани, которые имеют одинаковое число сторон.

Задача 3.2. В канун Нового года 10 друзей посылали праздничные открытки друг другу. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, пославшие открытки друг другу.

Задача 3.3. На большую «шахматную» доску 2007×2007 поставили 2007 ладей так, что ни одна из них не бьет другую. Докажите, что в любом квадрате 1004×1004 найдется хотя бы одна ладья.

Задача 3.4. Петя пытается занумеровать вершины куба числами от 1 до 8 так, чтобы суммы чисел на концах каждого ребра куба были различны. Удастся ли ему это сделать?

Задача 3.5. На шахматной доске стоят фигуры: на каждой горизонтали есть хотя бы одна фигура, а на разных горизонталях стоит разное число фигур. Докажите, что можно убрать часть фигур так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали останется ровно одна фигура.

Задача 3.6. В поход пошло 30 школьников. Оказалось, что среди любых десяти из них обязательно найдется трое одноклассников. Докажите, что в походе приняло участие не менее 8 человек из одного класса.

Задача 3.7. Докажите, что из 51 натурального числа первой сотни можно выбрать 6 так, что никакие два из них не имеют одинаковых цифр в одном разряде.

Задача 3.8. Верно ли, что среди любых а) 34 б) 32 различных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два, одно из которых вдвое больше другого?

Задача 3.9. Даны 70 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 200. Докажите, что какие-то два из них отличаются на 4, 5 или 9.

Задача 3.10. Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

Задача 3.11. Из ряда $1, 2, \ldots, 200$ каким-то способом выбрано 101 число. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

Задача 3.12 (у). На пир собралось 100 людоедов. Известно, что среди любых 10 хотя бы один оказался в желудке у другого (из этой десятки). Докажите, что есть «матрешка» из 12 людоедов, каждый из которых (кроме последнего) находится в желудке у следующего.

Задача 3.13 (у). Пять школьников решили в воскресенье посмотреть все новые фильмы последнего месяца. Для этого был выбран семизальный кинотеатр, в котором сеансы начинаются в 9.00, 10.40, 12.20, 14.00, 15.40, 17.20, 19.00, 20.40 и 22.00. На каждый сеанс школьники делились на две группы, одна шла в один зал, а другая — в другой. Вечером выяснилось, что каждый из школьников побывал в каждом из залов. Докажите, что в каждом из залов был сеанс, на котором никто из школьников не был.

Задача 3.14 (у). В течение прошлого учебного года Саша каждый день решал хотя бы одну задачу по математике. Однако, боясь перетрудиться, за неделю он решал не более 12 задач. Докажите, что можно найти несколько последовательных дней, в течение которых Саша решил ровно 20 задач.

Задача 3.15 (у). В банде 50 гангстеров. Все вместе они ни в одной разборке ни разу не участвовали, а каждые двое встречались на разборках ровно по разу. Докажите, что кто-то из гангстеров был не менее, чем на восьми разборках.

Задача 3.16 (у). В каждом из двух одинаковых правильных 16-угольников отметили по 7 вершин. Докажите, что можно так наложить эти многоугольники друг на друга, чтобы не менее 4 отмеченных вершин одного многоугольника совпали с отмеченными вершинами другого.

Рассуждения от противного и принцип Дирихле в геометрии

Пример 1. Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке из трех полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

Решение. Легко проверить, что «шахматная» раскраска доски, при которой закрашено ровно 32 поля, удовлетворяет условию задачи.

Попробуем выяснить, можно ли закрасить больше клеток. Пусть оказалось закрашено **не менее** 33 полей. Разобьем доску на 16 квадратов размером 2×2. Тогда по принципу Дирихле хотя бы в одном из квадратов закрашено **не менее** 3 полей. *(Если в каждом квадрате закрашено не более 2 полей, то всего на доске закрашено не более* $2 \cdot 16 = 32$ *полей.)* Но если в одном квадрате 2×2 закрашено **не менее** 3 полей, то там очевидно можно выбрать уголок, состоящий из трех закрашенных клеток. Значит предположение неверно и на доске не может быть более закрашено более 32 клеток.

Ответ: 32 поля.

Пример 2. На окружности длиной 1 закрашено несколько дуг, причем расстояние между любыми двумя закрашенными точками вдоль по окружности не равно 0,1. Докажите, что сумма длин закрашенных дуг не превосходит 0,5.

Решение. Будем для определенности считать, что дуги покрасили в красный цвет. На расстоянии 0,1 по часовой стрелке от каждой красной точки найдем соответствующую ей точку и покрасим ее в синий цвет. При этом мы не можем случайно перекрасить красную точку в синий цвет, поскольку тогда на окружности существовали бы две точки красного цвета на расстоянии 0,1 друг от друга, что противоречит условию. После такой окраски каждой красной дуге будет соответствовать дуга синего цвета точно такой же длины, но «повернутая» на 0,1 по часовой стрелке. Значит сумма длин красных дуг равна сумме длин синих дуг, при этом они нигде не накладываются друг на друга и вместе имеют длину не более 1. Значит сумма длин красных дуг не превосходит 0,5, что и требовалось доказать.

Пример 3. На квадратном столе со стороной 70 см лежит 100 квадратных салфеток со стороной 10 см, которые не вылезают за край стола. Докажите, что в стол можно вбить гвоздь, который проткнет не менее трех салфеток.

Решение. Предположим, что любой гвоздь протыкает **не более** двух салфеток. Это означает, что в любом месте стол покрыт **не более** чем в два «слоя», и суммарная площадь всех лежащих на столе салфеток **не превосходит** $2 \cdot (70\text{ см})^2 = 9\,800\text{ см}^2$. Однако суммарная площадь всех салфеток на столе равна $100 \cdot (10\text{ см})^2 = 10\,000\text{ см}^2$. Противоречие, значит наше предположение неверно и в стол можно вбить гвоздь, который проткнет **не менее** 3 салфеток.

Задачи

4 ○ **1.** На журнальном столике лежит 10 газет и журналов, полностью покрывая его (некоторые возможно вылезают за край стола). Докажите, что можно убрать 5 из них так, что оставшиеся будут закрывать не менее половины стола.

4 ○ **2.** На плоскости дано 50 точек, причем не все они находятся на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек проводится прямая. Докажите, что найдется точка, через которую проходит не менее 8 из этих прямых.

4 ○ **3.** Шарообразная планета окружена 37 точечными астероидами. Доказать, что в любой момент на поверхности планеты найдется точка, из которой астроном не сможет наблюдать более 17 астероидов. (Астероид, расположенный на линии горизонта, не виден.)

4 ○ **4.** На плоскости отметили 15 точек так, что из любых трех отмеченных точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что существует круг единичного радиуса, который закрывает не менее 8 отмеченных точек.

4 ○ **5 (у).** На прямой отметили 101 отрезок. Докажите, что либо 11 из этих отрезков имеют общую точку, либо можно найти 11 отрезков, никакие два из которых не пересекаются.

4 ○ **6.** Для того, чтобы застеклить 15 окон различных размеров и форм, заготовлено 15 стекол в точности по окнам (окна такие, что в каждом окне должно быть одно стекло). Стекольщик, не зная, что стекла подобраны, работает так: он подходит к очередному окну и перебирает неиспользованные стекла до тех пор, пока не найдет достаточно большое (то есть либо в точности подходящее, либо такое, из которого можно вырезать подходящее), если же такого стекла нет, то переходит к следующему окну, и так, пока не обойдет все окна. Составлять стекло из нескольких частей нельзя. Какое максимальное число окон может остаться незастекленными?

4 ○ **7.** Какое наименьшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке из трех клеток было по крайней мере одно черное поле?

4 ○ **8.** Квадратная площадь размером 100 м $\times$ 100 м выложена квадратными плитами 1 м $\times$ 1 м четырех цветов: белого, красного, черного и серого — так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (то есть не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

4 ○ **9.** На шахматной доске поставили 10 королей (возможно и в соседние клетки). Докажите, что обязательно найдется пустая клетка, находящаяся под боем не менее двух королей.

4 ○ **10.** В квадратном ковре со стороной 2 м моль проела 80 дырок. Докажите, что из ковра можно вырезать неиспорченный молью квадратик со стороной 20 см. Рассмотрите два случая: **а)** дырки точечные; **б)** дырки круглые, каждая радиусом не более 1 см.

4 ○ **11.** В парке растет 10000 деревьев, посаженных квадратно-гнездовым способом (100 рядов по 100 деревьев). Какое наибольшее число деревьев можно срубить, чтобы выполнялось следующее условие: если встать на любой пень, то не будет видно ни одного другого пня? (Деревья можно считать достаточно тонкими.)

4 ○ **12.** Каждая грань кубика $3 \times 3 \times 3$ разбита на 9 квадратов 1×1. Какое наибольшее количество из получившихся 54 квадратов можно покрасить так, чтобы никакие два из окрашенных квадратов не имели общих вершин?

4 ○ **13.** В клетки квадратной таблицы 6×6 записаны числа от 1 до 36. Всегда ли можно выбрать такие две клетки, соседние по стороне или вершине, что сумма чисел в этих клетках делится на 4?

4 ○ **14 (у).** На окружности длиной 1 закрашено несколько дуг, причем расстояние между любыми двумя закрашенными точками вдоль по окружности не равно 0,4. Докажите, что сумма длин закрашенных дуг не превосходит 0,4.

4 ○ **15.** В квадрате со стороной 1 расположено девятнадцать окружностей, радиус каждой из которых не менее 0,05 (окружности могут пересекаться). Верно ли, что обязательно найдется прямая, параллельная одной из сторон квадрата и имеющая общие точки по крайней мере с четырьмя окружностями?

4 ○ **16.** Внутри квадрата со стороной 1 находится 10 фигур, общая площадь которых более 9. Докажите, что найдется точка, которая принадлежит всем этим фигурам.

4 ○ **17.** Квадрат 16×16 разрезан на фигурки вида «Т» из четырех клеток. Докажите, что найдется прямая, идущая по линиям сетки и рассекающая не менее **а)** 7; **б)** 8 фигурок.

4 ○ **18.** Клетки квадратной таблицы 15×15 раскрашены в красный, синий и зеленый цвета. Докажите, что найдутся, по крайней мере, две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

Комбинаторика: правило суммы и произведения

Пример 1. Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых используются только нечетные цифры?

Решение. Представим, что мы начали выписывать все такие четырехзначные числа. Для начала напишем первую цифру. Поскольку нечетных цифр всего пять (1, 3, 5, 7, 9), то она может быть любой из пяти. Если мы написали первой цифрой 1, то к ней можно приписать любую из тех же пяти цифр и получить числа 11, 13, 15, 17, 19. Аналогично можно к 3 приписать любую из пяти цифр, а также к 5, 7 и 9. Получаем, что из каждого из пяти имевшихся однозначных чисел получилось по 5 новых. Всего получилось $5 \cdot 5 = 25$ различных двузначных чисел, в которых используются только нечетные цифры: 11, 13, 15, ..., 97, 99. Продолжим выписывать все четырехзначные числа. К числу 11 можно приписать любую из пяти цифр и получить 111, 113, 115, 117, 119. Точно также к любому из оставшихся 24 двузначных чисел можно приписать одну из пяти цифр и получить пять новых. А раз из каждого двузначного числа получается 5 трехзначных, то всего трехзначных чисел станет $25 \cdot 5 = 125$.

Итак, у нас получилось 125 трехзначных чисел. К каждому из них можно приписывать по очереди любую нечетную цифру и получать пять четырехзначных чисел. Но раз из каждого трехзначного числа получаются по пять новых, то всего четырехзначных чисел станет $125 \cdot 5 = 625$, что и является ответом к задаче.

Коротко решение можно было бы записать так:

поскольку на каждом из четырех мест может стоять любая из пяти цифр, то всего существует $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ *таких четырехзначных чисел.*

Ответ: 625.

Пример 2. Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых используются только нечетные цифры и все цифры которых различны?

Решение. Будем действовать также, как и в предыдущей задаче: начнем выписывать все такие числа. В качестве первой цифры напишем любую из пяти. Но дальше к 1 можно приписать второй цифрой только 3, 5, 7, 9, а еще одну 1 уже нельзя. Значит с первой цифрой 1 получится только 4 двузначных числа: 13, 15, 17 и 19. Точно также произойдет и с любой другой первой цифрой: к ней можно будет приписать любую из четырех цифр. Значит с каждой из первых пяти цифр получится 4 двузначных числа, а всего их окажется $4 \cdot 5 = 20$. Возьмем каждое из получившихся 20 двузначных чисел и посмотрим, сколько трехзначных чисел из него можно получить. В любом двузначном числе уже задействовано две нечетных цифры, значит к нему можно приписать любую из оставшихся трех цифр. Из любого имеющегося двузначного числа получаем три трехзначных числа, а поскольку двузначных чисел было всего 20, то трехзначных чисел будет $20 \cdot 3 = 60$. Теперь в записи каждого трехзначного числа использовано три нечетных цифры, поэтому к каждому можно приписывать любую из двух неиспользованных нечетных цифр и получать по два четырехзначных числа. (Так, из числа 397 можно получить 3971 и 3975.) Значит всего искомых четырехзначных чисел получится $60 \cdot 2 = 120$.

Короткий способ записи решения выглядит следующим образом:

на первом месте может стоять любая из 5 цифр, на втором любая из оставшихся четырех, на третьем любая из оставшихся трех, на четвертом любая их оставшихся двух, значит всего таких чисел существует $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Ответ: 120.

Пример 3. Сколько существует четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, причем хотя бы одна из них равна 5?

Решение. Основная сложность задачи состоит в том, что не ясно, какая из цифр по счету является 5, условию задачи удовлетворяют и те числа, в которых цифр 5 несколько. В первой задаче удалось выяснить, что число четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, равно 625. Найдем теперь количество четырехзначных чисел, в которых все цифры нечетны, но нет ни одной цифры 5. Это четырехзначные числа, в записи которых встречаются только четыре цифры: 1, 3, 7, 9. Начнем проводить рассуждения как в первой задаче. На первом, втором, третьем и четвертом месте может находиться любая из четырех цифр. Значит всего таких чисел может быть $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$.

Итак, количество четырехзначных чисел, в которых встречаются цифры 1, 3, 5, 7, 9, равно 625, а количество четырехзначных чисел, в которых встречаются цифры 1, 3, 7, 9, т.е. все цифры которых нечетны, но нет ни одной цифры 5, равно 256. Тогда количество четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, но есть хотя бы одна цифра 5, равно $625 - 256 = 369$.

Коротко решение можно было бы записать так:

количество четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$; *количество четырехзначных чисел, которые состоят из цифр 1, 3, 7, 9 равно* $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$; *тогда количество четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, причем хотя бы одна из них 5, равно* $625 - 256 = 369$.

Ответ: 369.

Задачи

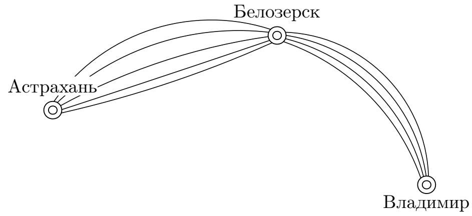
6 ∘ 1. В магазине имеются 3 красных, 5 зеленых и 4 голубых шапки, а также шарфы трех цветов: 7 красных, 2 зеленых и 5 голубых. **а)** Сколькими способами Маша может выбрать себе шапку и шарф? **б)** А сколькими способами можно выбрать шапку и шарф одного цвета? **в)** Разных цветов?

6 ∘ 2. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

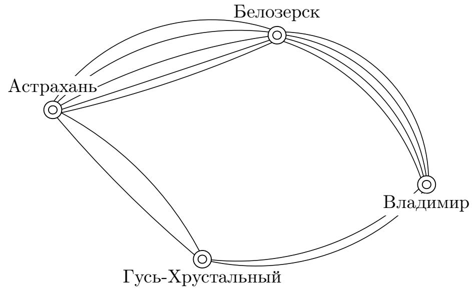
6 ∘ 3. Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. Сколько существует номеров **а)** все цифры которых четны? **б)** в которых любые две соседние цифры различны? **в)** все цифры которых различны? **г)** в которых есть не менее двух одинаковых цифр? **д)** содержащих цифру 7? **е)** в которых есть хотя бы одна четная цифра? **ж)** в которых ровно две одинаковые цифры? **з)** в которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

6 ∘ 4. Автомобильные номера в одном регионе РФ состоят либо из 3 букв и 3 цифр, либо из 2 букв и 4 цифр, при этом порядок следования букв и цифр в номере фиксирован. Из букв используются не все, а только а, в, е, к, м, н, о, р, с, т, у, х. Какое максимальное число автомобилей может быть в одном регионе?

6 ∘ 5.



а) В стране три города: Астрахань, Белозерск и Владимир. Из Астрахани в Белозерск ведёт 5 дорог, а из Белозерска во Владимир – 4 дороги. Сколькими способами можно проехать из Астрахани во Владимир?



б) В стране построили город Гусь-Хрустальный и несколько новых дорог: две из Астрахани в Гусь-Хрустальный и две из Гуся-Хрустального во Владимир. Сколькими способами можно теперь проехать из Астрахани во Владимир?

6 ∘ 6. В 7б классе работают три преподавателя: Алексей Анатольевич, Дмитрий Викторович и Андрей Юрьевич. Обращаясь к преподавателю, Ваня обычно меняет его имя на имя другого преподавателя, либо меняет отчество на отчество другого преподавателя, либо и то, и другое вместе. **а)** Сколькими способами он может позвать преподавателя? **б)** Сколькими способами он может это сделать, если стало известно, что он может менять местами имя и отчество (то есть назвать Алексея Анатольевича Анатолием Алексеевичем или Виктором Дмитриевичем)?

6 ∘ 7. а) Сколько можно составить разных (не обязательно осмысленных) слов из k букв, используя русский алфавит? **б)** А если потребовать, чтобы буквы в словах не повторялись? **в)** Сколькими способами можно переставить буквы в слове из k различных букв?

6 ∘ 8. 33 богатыря решили продемонстрировать Черномору все возможные построения. Каждую секунду они перестраиваются по-новому. Смогут ли они показать Черномору все построения за один час? За один день? За один год? За один век?

6 ∘ 9. Световое табло состоит из лампочек, каждая из которых может быть включена или выключена. Какое наименьшее количество лампочек должно находиться на табло, чтобы с его помощью можно было передать 100 различных сигналов?

6 ∘ 10.

а) Для передачи сигналов на флоте используют специальные сигнальные флаги определенных видов. На корабле имеется большое количество флагов каждого вида. На мачту можно вывесить последовательность из трех флагов. Сколько можно таким образом передать сигналов, если количество различных видов флагов равно 10?

б) Какое количество разных видов флагов должно быть на корабле (флагов каждого вида при этом много), чтобы с их помощью можно было передать не менее 50 различных сигналов?

6 ∘ 11. а) В заборе 20 досок, каждую надо покрасить в синий, зеленый или желтый цвет, причем соседние доски красятся в разные цвета. Сколькими способами это можно сделать? **б)** А если требуется еще, чтобы хоть одна из досок обязательно была синей?

6 ∘ 12. а) Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга? **б)** Тот же вопрос для двух королей.

6 ∘ 13. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 различных ладей так, чтобы они не били друг друга?

6 ∘ 14. а) Сколько различных строк можно составить из 0 и 1, чтобы в каждой строке было 8 цифр? **б)** На столе 8 различных конфет. Сколькими способами можно съесть несколько из них? **в)** Сколькими способами можно распределить 8 вновь пришедших учеников по трем классам?

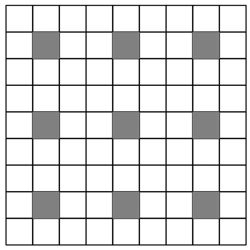
6 ∘ 15. Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n разных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (за раз он может съесть от 0 до n разных блюд). **а)** Сколько дней ему удастся это делать? **б)** Сколько блюд он съест за это время?

6 ∘ 16. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

6 ∘ 17. Сколькими способами можно покрасить квадрат 2×2, составленный из 4 квадратиков, если каждый квадратик надо покрасить в один из n цветов, и соседние (имеющие общую сторону) квадратики должны быть покрашены по-разному?

6 ∘ 18. а) Сколькими способами можно разбить 7 юношей и 7 девушек на пары для танцев? **б)** 14 школьников на пары?

6 ∘ 19. В таблицу размера $k \times l$ записывают числа $+1$ и -1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялось 1. Сколькими способами это можно сделать?



6 ∘ 20. В квадратной таблице из 9×9 клеток отмечены 9 клеток так, как показано на рисунке справа. Сколькими путями можно из левой нижней клетки попасть в правую верхнюю, двигаясь только по неотмеченным клеткам вверх или вправо?

Сравнение количеств

Очень часто в повседневной жизни нам приходится сравнивать количества различных объектов. Во многих случаях нас интересует не само количество тех или иных объектов, а скорее ответ на вопрос: каких из них больше? Так, при игре в слова победителем считается тот, кто придумал больше слов. Поэтому при подведении итогов совсем не обязательно считать количество слов каждого, достаточно как-то придумать, как сравнить эти количества. Приведем несколько примеров, как можно проводить такие сравнения без всяких подсчетов и вычислений.

Пример 1. Предположим, что воспитатель детского сада во время утренней прогулки решил выяснить, кого у него в группе больше: мальчиков или девочек. Попробовать их посчитать довольно сложно, поскольку они все время двигаются и есть опасность кого-то посчитать два раза, а кого-то пропустить. Наверно одним из самых простых выходов в данной ситуации является следующий: перед возвращением в корпус предложить детям построиться парами мальчик-девочка. Если у них это получится, то мальчиков и девочек в группе поровну. Если же какие-то мальчики окажутся без пары, то мальчиков больше. В противном же случае больше девочек.

Пример 2. Предположим, что первоклассники Петя и Вася решили выяснить, кто из них может сделать больше приседаний. Считать сначала, сколько может присесть первый, а потом второй, им не подходит, поскольку после двух десятков приседаний они боятся сбиться со счета и ошибиться. Поэтому можно предложить им начать приседать одновременно и делать приседания синхронно (т.е. тоже одновременно). В этом случае тот, кто первый не сможет больше приседать, и будет проигравшим.

Пример 3. Пусть в зале собралось некоторое количество людей, и мы хотим установить, хватит ли на них на всех стульев (или надо принести еще). Тем самым нам нужно сравнить количество людей и количество стульев. Можно конечно попытаться пересчитать и людей, и стулья. Но это осложняется тем, что люди постоянно перемещаются, некоторые стулья мы можем не заметить, да и количество тех и других может оказаться довольно значительным. Вместо этого предложим всем людям сесть на стулья. Если все люди сумели сесть и свободных стульев при этом не осталось, то количество людей равно количеству стульев. Если же, к примеру, окажется, что все стулья заняты, а какое-то количество людей все еще продолжает стоять, то стульев меньше, чем людей.

На самом деле во всех трех примерах мы делали некоторую однотипную операцию, которая имеет также и математическую формулировку.

Определение 7.1. Говорят, что между двумя множествами установлено **взаимно-однозначное соответствие** (или **биекция**), если любому элементу (объекту) первого множества соответствует единственный элемент (объект) второго множества и наоборот.

В первом примере мы рассматривали множество мальчиков и множество девочек. Строя их парами мальчик-девочка, мы как раз и пытались установить взаимно-однозначное соответствие между множеством мальчиков и множеством девочек.

Во втором примере первое множество состояло из таких объектов, как отдельные приседания Пети, а второе — из отдельных приседаний Васи. После этого мы пытались сравнить количество отдельных приседаний в первом множестве и во втором, чтоб определить победителя. Для этого мы первому приседанию Пети ставили в соответствие первое приседание Васи, второму приседанию Пети — второе приседание Васи и т.д. Тем самым мы пытались установить биекцию между этими двумя множествами.

В третьем примере мы пробовали установить биекцию между множеством людей и множеством стульев. В случае, если бы все стулья оказались заняты людьми, а часть людей еще продолжала бы стоять, можно было бы сказать, что нам удалось установить взаимно-однозначное соответствие между множеством стульев и частью множества людей.

Все сказанное выше позволяет сделать два очевидных утверждения:

Утверждение. Если имеются два конечных множества A и B с одинаковым количеством элементов, то между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, разбив их на пары: первому элементу множества A можно поставить в соответствие первый элемент множества B, второму элементу множества A — второй элемент множества B и т.д.

Обратное утверждение. Если между двумя конечными множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие, то в них одинаковое количество элементов.[1]

В дальнейшем нам будет полезнее и нас будет больше интересовать именно второе утверждение, а также небольшое не менее очевидное добавление к нему.

Утверждение. Если между конечным множеством A и частью конечного множества B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то в множестве B больше элементов, чем в множестве A.

Прежде чем переходить к решению математических задач, отметим их некоторое отличие от разобранных ранее примеров. Если люди могли сами находить себе стулья, то в математических задачах объекты не смогут сами разбиться на пары без нашего участия и четкого описания, какому объекту какой соответствует. Поэтому решение математических задач, в которых устанавливается биекция, должно состоять из трех этапов. Если эти этапы перевести на язык людей и стульев, то они выглядят следующим образом:

1. Указать, какому человеку на какой стул садиться.
2. Проверить, что разные люди при этом должны будут сесть на разные стулья, т.е. убедиться, что нескольким людям не указано на один и тот же стул.
3. Выяснить, для каждого ли стула есть человек, который должен на него сесть.

Разберем теперь примеры решения задач.

Пример 4. Каких чисел больше: трехзначных, у которых цифры идут в порядке убывания, или семизначных с убывающим порядком цифр?

Решение. Возьмем произвольное семизначное число с убывающим порядком цифр. Все цифры в этом числе различны, рассмотрим те три цифры, которые не используются в его записи. Их можно единственным образом записать в порядке убывания и получить трехзначное число. Тем самым каждому семизначному числу с убывающим порядком цифр будет поставлено в соответствие трехзначное число с убывающим порядком цифр. Так, числу 9865420 будет поставлено в соответствие число 731. (Можно считать, что мы проверили, что каждому человеку (семизначному числу) соответствует какой-то стул (трехзначное число).)

Поскольку семь различных цифр выписываются единственным образом в убывающем порядке, значит разные семизначные числа не могут состоять из одинаковых цифр и разным семизначным числам будут соответствовать разные трехзначные. (Теперь мы проверили, что на каждом стуле сидит не более одного человека.)

По любому трехзначному числу с убывающим порядком цифр можно восстановить соответствующее ему семизначное число, для этого достаточно выписать в убывающем все цифры, которые отсутствуют в записи этого трехзначного числа. (Проверили, что на каждом стуле кто-то сидит).

Это означает, что нам удалось установить взаимно-однозначное соответствие между множеством семизначных чисел с убывающим порядком цифр и множеством трехзначных чисел с убывающим порядком цифр, а значит тех и других чисел поровну.

Ответ: поровну.

Пример 5. Каких трехзначных чисел больше: с возрастающим порядком цифр или с убывающим?

Решение. Если в числе с возрастающим порядком цифр переставить их в обратном порядке, то получится число с убывающим порядком цифр, например $259 \to 952$. Такая перестановка всегда возможна, поскольку последняя цифра числа с возрастающим порядком цифр обязательно отлична от нуля, именно она окажется на первом месте. Значит любому числу с возрастающим порядком цифр соответствует число с убывающим порядком цифр.

[1] Во всех формулировках мы пишем словосочетание «конечное множество». Это делается специально, поскольку множества бывают и бесконечные, например множества натуральных и целых чисел. Для них тоже определяется понятие биекции, однако ее свойства в случае бесконечных множеств оказываются немного другими.

Поскольку при перестановке цифр в обратном порядке из двух различных чисел не может получиться одно и то же, то разным числам с возрастающим порядком цифр будут соответствовать разные числа.

Однако пока рано делать вывод, что и тех, и других чисел поровну. Если проводить аналогию со стульями, то пока удалось рассадить всех людей на стулья, причем на каждом сидит ровно один человек. Но все ли стулья заняты?

Заметим, что не всем числам с убывающим порядком цифр соответствует какое-либо число с возрастающим порядком цифр. Так, не найдется числа, которое соответствовало бы числу 530 (им должно было бы стать число 035, но оно не трехзначное). А значит чисел с убывающим порядком цифр больше (не на каждом стуле кто-то сидит).

Ответ: с убывающим порядком цифр больше.

Задачи

Все задачи с этого листка можно и нужно сдавать устно.

7 ∘ 1. В зале 8 светильников. Сравните количество способов включить ровно 5 из них с количеством различных слов, которые можно получить из слова АХАХАХАА, переставляя в нем буквы.

7 ∘ 2. Город имеет форму прямоугольника 3×5, разбитого улицами на кварталы 1×1. Сравните количество кратчайших путей, которые ведут из левого нижнего угла в правый верхний, с количествами из предыдущей задачи.

7 ∘ 3. а) Сравните количество решений уравнения $x + y + z + t = 5$ в натуральных числах и количество решений этого же уравнения в целых неотрицательных числах. Каких решений больше? **б)** Совпадает ли какое-то из этих количеств с количествами из двух предыдущих задач?

7 ∘ 4. У Маши и Даши есть мешок с конфетами 9 видов. К Новому году Маша составляет различные наборы, в каждом из которых 4 конфеты разного вида, а Даша — аналогичные наборы, но из 5 конфет. У какой из девочек получится составить больше наборов?

7 ∘ 5. У Маши и Даши на кухне есть черный и белый хлеб, сдобные булочки, вареная и копченая колбаса, ветчина, «Российский» сыр, плавленый сыр, масло, кетчуп и майонез. К празднику они решили приготовить как можно больше бутербродов различного вида. Маша делает все бутерброды без масла, а Даша — исключительно с маслом. У какой из девочек получится сделать больше видов бутербродов? (Бутерброды, отличающиеся только порядком ингредиентов или их количеством, считаются одинаковыми.)

7 ∘ 6. Учительница подготовила к уроку 10 примеров. Она хочет выдать Пете и Васе на дом задания, составленные из этих примеров так, чтобы им достались разные примеры. (Порядок примеров в задании не важен, количество примеров в заданиях может быть различным, не обязательно раздавать все примеры. Так, возможен случай, когда Пете не будет задано ни одного примера, а Васе все 10 или тоже ни одного.) Докажите, что количество способов, которыми она может это сделать, равно количеству различных последовательностей из нулей, единиц и двоек длины 10.

7 ∘ 7. Докажите, что если учительница из предыдущей задачи захочет выдать Пете и Васе задания так, чтобы Вася получил все те примеры, которые получил и Петя, а также, возможно, и какие-то еще, то количество способов это сделать будет таким же, как и в предыдущей задаче.

7 ∘ 8. У Пети и Васи есть по одинаковому набору из 12 кубиков: 3 красных, 3 синих, 3 желтых и 3 зеленых. Петя строит из всех своих кубиков башню, а Вася — стену размером 3×4. При этом оба хотят, чтобы любые два соседних по грани кубика в их постройках имели разный цвет. Кто из них может соорудить больше различных построек?

7 ∘ 9. Каких способов больше: расселить пять друзей на ночь в трех комнатах (гостиной, спальне и на кухне) или раздать пять одинаковых карамелек трем детям?

7 ∘ 10. Каких способов больше: выбрать из 10 человек пять в команду по мини-футболу или разбить их на две равные команды по мини-футболу?

7 ∘ 11. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Каких делителей у него больше: четных или нечетных? (1 и само число тоже считаются делителями)

7 ∘ 12. а) На окружности отмечено 100 синих точек и одна красная. Чего больше: треугольников с вершинами в синих точках или четырехугольников, одна из вершин которых красная, а три — синие? **б)** Многоугольников, все вершины которых синие, или многоугольников, у которых одна из вершин красная?

7 ∘ 13. Меню школьной столовой постоянно и состоит из 11 блюд. Петя и Вася решили поспорить, кто из них дольше сможет питаться в школьной столовой. Условия спора следующие: Петя каждый день съедает четное число блюд (возможно, что и ни одного), а Вася — нечетное, причем каждый день необходимо съедать новый набор блюд. Кто из них победит в споре?

7 ∘ 14. А кто победит в споре, если блюд будет 10?

7 ∘ 15. Предположим, что одно из блюд в столовой — компот. Кто из них выпьет больше компотов за время спора в каждом из случаев?

7 ∘ 16. В одной деревне 10 юношей и 10 девушек. Для одного танца нужно из этих 20 молодых людей выбрать группу, в которой поровну юношей и девушек, а для другого — просто выбрать группу из 10 молодых людей[2]. Каждый день они танцуют как первый танец, так и второй (оба по одному разу), причём и тот, и другой — по-новому. Могут ли они за некоторое количество дней станцевать первый танец всеми способами, станцевав при этом всеми способами и второй танец?

7 ∘ 17. а) Каких способов больше: раздать 10 пирожков с повидлом четырем школьникам или разложить 10 одинаковых синих шариков по 4 одинаковым картонным коробкам? **б)** Совпадает ли какое-нибудь из этих количеств с количеством решений уравнения $x+y+z+t=10$ в целых неотрицательных числах?

7 ∘ 18. Сравните количество способов раздать 20 конфет шести детям так, чтобы каждый получил хотя бы одну конфету и количество способов раздать 15 конфет тем же детям, если некоторым из них можно вообще не давать конфет.

7 ∘ 19. При каком значении a количество решений уравнения $x+y+z+t=10$ в целых неотрицательных числах равно количеству решений уравнения $x+y+z+t=a$ в натуральных числах?

7 ∘ 20. Придумайте уравнение, количество решений которого в натуральных числах было бы равно числу способов расположить в ряд 4 черных и 10 белых шаров так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом.

7 ∘ 21. Каких чисел больше среди всех чисел от 100 до 999: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

7 ∘ 22. Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной, а плохим, если стрелки расположены в обратном порядке. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

7 ∘ 23. Дана шахматная доска. Ее вертикали перенумерованы числами от **1** до **8**, а горизонтали обозначены латинскими буквами от **a** до **h**. Рассматриваются покрытия доски доминошками, содержащими две соседние клетки[3]. Каких разбиений больше — тех, которые содержат доминошку **a1-a2**, или тех, которые содержат доминошку **b2-b3**?

[2] Юношей или девушек — не важно.

[3] Доминошки при этом не накладываются.

Подсчеты с кратностью

Пример 1. В спортзале находятся трое школьников. Сколькими способами тренер может поставить их в шеренгу?

Решение. Первым можно поставить любого из трех школьников, следующим можно поставить любого из двух оставшихся. Поскольку для каждого из трех вариантов выбора первого школьника существует два варианта выбора второго школьника, то двух школьников можно поставить $2 \cdot 3 = 6$ вариантами. Тогда последний школьник в шеренге для каждого из вариантов уже определяется однозначно. Значит и число способов поставить трех школьников в шеренгу равно 6.

Коротко решение запишется так:

первым можно поставить любого из 3 школьников, следующего — любого из 2 оставшихся, а последний школьник определяется однозначно, всего способов $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.[1]

Ответ: 6.

Если обозначить школьников буквами A, B и C, то можно выписать и все варианты их расстановки: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Но в этом случае довольно трудно объяснить, почему выписаны все возможные случаи и почему других нет, хотя это и может казаться очевидным.

Пример 2. В классе 20 человек. **а)** Сколькими способами можно выбрать из них трех человек для поездки на олимпиады по матетматике, физике и информатике, которые проводятся в один день. **б)** А сколькими способами можно выбрать трех человек для участия в олимпиаде по математике?

Решение. Для начала попробуем разобраться, в чем различие между двумя пунктами в условии задачи. Пусть было решено отправить на олимпиаду Иванова, Петрова и Сидорова. Тогда на этом некоторый окончательный выбор в случае пункта б) был сделан и теперь именно эти три человека пойдут на олимпиаду по математике. А в случае пункта а) еще не все понятно, ведь варианты, когда Иванов идет на олимпиаду по математике, а Петров — на олимпиаду по физике или Иванов — на олимпиаду по физике, а Петров — на олимпиаду по математике, являются различными. Поэтому в пункте а) нужно выбрать не только три человека, но после этого еще указать, на какую олимпиаду какой из них пойдет, а значит и количество способов должно получиться больше, чем в пункте б).

Начнем считать количество вариантов в пункте а). Для этого составим следующий список:

1. Олимпиада по математике:__________________
2. Олимпиада по физике:______________________
3. Олимпиада по информатике:________________

Начнем теперь в каждой из строк записывать фамилию ученика. Первую можно записать 20 способами, вторую можно записать любую из 19 оставшихся, третью — любую из оставшихся 18. Всего $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ способов.

б) Попробуем сделать список похожий на список из предыдущего пункта, только выглядеть теперь он будет следующим образом:

Олимпиада по математике

[1] Выражение $n!$ (читается «эн факториал») обозначает произведение всех чисел от 1 до n, причем считается, что $0! = 1$.

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Тогда превую фамилию можно вписать в него 20 способами, вторую — 19, третью — 18. Как и в пункте а) оказывается $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ способов заполнить этот список. Но списки «1. Иванов, 2. Петров, 3. Сидоров» и «1. Петров, 2. Сидоров, 3. Иванов» были посчитаны нами как разные, хотя на самом деле соответствуют отправке на олимпиаду одной и той же группы школьников. Значит среди 6840 списков некоторые будут отличаться только порядком фамилий, но окажутся совершенно одинаковыми с точки зрения поездки на олимпиаду. Представим, что нам удалось составить на листах бумаги все 6840 списков. Попробуем разложить эти листы на несколько стопок, причем в каждой стопке списки будут содержать одни и те же три фамилии, но отличаться их порядком. Тогда любые два списка из одной стопки будут соответствовать отправке на олимпиаду одной и той же группы школьников, а два списка из разных стопок — двум разным группам школьников, которые отличаются по составу хотя бы на одного человека.

Посчитаем, сколько списков попало в каждую стопку. Раз в одной стопке указаны фамилии трех людей, но в разных порядках, то количество списков в стопке равно количеству способов вписать три определенных фамилии в один список. Итак, если есть три определенных фамилии, то на первое место можно записать любую из трех фамилий, второй можно записать любую из двух оставшихся, ну а последняя определяется однозначно. Получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ способов. Данные вычисления полностью совпадают с вычислениями первой задачи. Значит в каждой стопке находится по 6 списков, задающих одинаковые группы людей, а всего списков 6840. Тогда всего стопок, а значит и вариантов, будет $6840 : 6 = 1140$.

Приведем короткий способ записи решения задачи:

а) На олимпиаду по математике можно отправить любого из 20 школьников, по физике — любого из 19 оставшихся, по информатике — любого из 18, всего способов $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

б) Первого школьника можно выбрать 20 способами, второго — 19, третьего — 18, при этом количество способов, отличающихся лишь порядком выбора школьников равно количеству различных перестановок в группе из трех школьников, т.е. $3! = 6$, *значит количество способов равно* $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140$.

Ответ: а) 6840; б) 1140.

Задачи

8 ∘ 1. а) Сколькими способами можно выбрать четырех человек в классе из 20 человек для участия в школьном спектакле на роли Медведя, Волка, Лисы и Зайца? **б)** А сколькими способами можно выбрать в этом классе четырех дежурных? **в)** А выбрать старосту, двух дежурных и ответственного за проездные билеты, если все это должны быть разные люди?

8 ∘ 2. а) Сколькими способами в заборе из 9 досок можно покрасить 4 доски в красный цвет и 5 в синий? **б)** А покрасить 4 доски в красный цвет и 5 в синий в заборе из 12 досок?

8 ∘ 3. Сколькими способами из двух взрослых и десяти школьников можно выбрать 4 человека для приготовления обеда так, чтобы среди них был хотя бы один взрослый?

8 ∘ 4. В магазине имеются в продаже рубашки семи фасонов и двенадцать видов галстуков. **а)** Сколькими способами можно купить три рубашки трех разных фасонов и два разных галстука? **б)** А пять рубашек трех разных фасонов?

8 ∘ 5. а) Сколькими способами можно расселить 9 приезжих в двухместный, трехместный и четырехместный номера гостиницы? **б)** А расселить 10 человек по пяти двухместным номерам?

8 ∘ 6. У Пети 7 различных открыток, а у Васи — 5. Сколькими способами они могут обменять три открытки одного на три открытки другого?

8 ∘ 7. а) Сколькими способами можно из 10 спортсменов выбрать 5 для участия в соревнованиях? **б)** А разделить их на две команды по 5 человек для игры в футбол?

8 ∘ 8. Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. Сколько существует номеров, в которых все цифры различны и идут в возрастающем порядке?

8 ∘ 9. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах **а)** ТОРГ; **б)** НАПИТОК; **в)** ВОСТОРГ; **г)** БАРАБАН; **д)** $\underbrace{\text{АА}\ldots\text{А}}_{5\text{ раз}}\underbrace{\text{ББ}\ldots\text{Б}}_{7\text{ раз}}$?

8 ∘ 10. а) Сколькими способами можно выбрать 4 карты одинаковой масти из колоды в 52 карты? **б)** А 9 карт одинаковой масти? **в)** Объясните совпадение результатов.

8 ∘ 11. а) Сколько существует различных последовательностей из 4 нулей и 7 единиц? **б)** Найдите число решений уравнения $a+b+c+d+e+f=10$, если a, b, c, d, e, f могут принимать значения только 1 или 2.

8 ∘ 12. Сколько решений имеет уравнение $x+y+z+t=9$ **а)** в целых неотрицательных числах; **б)** в натуральных числах?

8 ∘ 13. Переплетчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, синий или зелёный переплёты. Сколькими способами он может это сделать? (Не обязательно использовать все цвета.)

8 ∘ 14. Фабрика игрушек выпускает пирамидки, все грани которых — правильные равносторонние треугольники. Далее каждая из граней раскрашивается в один из нескольких цветов, причем разные грани окрашиваются в разные цвета. **а)** Сколько различных видов пирамидок одинакового размера может выпустить фабрика, если для окрашивания пирамидок имеется 4 различных краски? **б)** А если красок 10?

8 ∘ 15. На гранях игрального кубика написаны числа от 1 до 6, каждое ровно по разу. Сколько существует различных игральных кубиков, если считать различными два кубика, которые нельзя спутать, как ни переворачивай?

8 ∘ 16. У мамы есть 10 разных конфет. Сколькими способами она может раздать некоторые из них двум детям? (Она может раздать все конфеты, а может не дать и ни одной.)

8 ∘ 17. На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в этих точках?

8 ∘ 18. а) Сколькими способами можно разложить 10 различных шаров по 4 цветным коробкам? **б)** А 10 одинаковых шаров по 4 цветным коробкам?

8 ∘ 19. В волейбольной секции 24 спортсмена. Сколькими способами их можно разделить на 4 команды по 6 спортсменов в каждой для проведения тренировочного турнира?

8 ∘ 20. У Пети имеется набор из 24 кубиков, окрашенных в 4 цвета: красный, синий, желтый и зеленый, при этом кубиков каждого цвета поровну. Сколько различных стенок 4×6 он может из них построить, если **а)** известно, какая сторона стенки является передней; **б)** не известно, какая сторона стенки передняя, а какая задняя?

Графы. Степени вершин и число ребер

Определение 10.1. Пусть задано некоторое конечное множество объектов или элементов, некоторые из которых попарно связаны между собой. Тогда данное множество элементов, а также весь набор связей между этими элементами называются **графом**. В этом случае данные объекты или элементы называются **вершинами графа**, а связи между ними — **ребрами графа**. Вершины, связанные ребром, называются **концами** этого **ребра**. Такие вершины называются **смежными**.

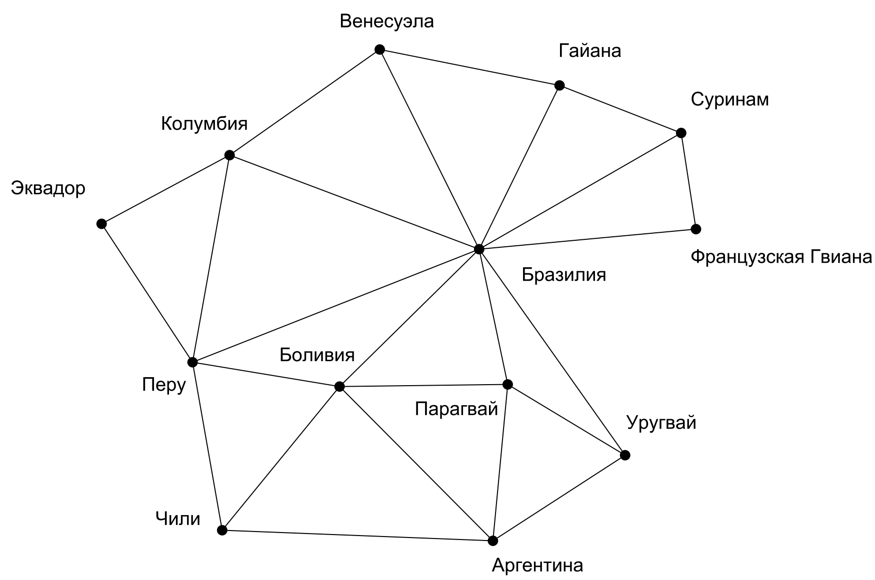
Пример 1. В качестве примеров графов можно привести следующие:

а) Люди — вершины графа, ребрами связаны те из них, которые знакомы друг с другом.

б) Страны — вершины графа, ребрами связаны страны, имеющие общую границу.

в) Вершинами графа являются ученые и языки, если ученый говорит на некотором языке, то ученый и этот язык соединяются ребрами.

Вершины графа (элементы) часто бывает удобным изображать точками, а ребра (связи между элементами) — линиями. Так, на рисунке приведен пример одного из графов. Вершины в нем — это страны Южной Америки, а связаны те из них, которые имеют общий участок границы. Благодаря такому способу изображения оказывается проще понять, сколько и какие у каждой страны соседи, через какие страны нужно проехать, чтобы попасть из одной страны в другую и т.п.



Отметим, что из определения графа следует, что любое ребро соединяет две различные вершины, а любые две вершины либо не связаны, либо между ними существует связь — ребро. Однако иногда бывает полезно расширить понятие графа.

Определение 10.2. Мультиграфом называется граф, в котором разрешается, чтобы некоторые пары ребер соединялись более чем одним ребром. Несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, называются **кратными**.

Данный вид графов бывает иногда полезен. Например мультиграфом зачастую является система городов и связывающих их дорог, поскольку некоторые два города могут оказаться соединены сразу несколькими дорогами.

Определение 10.3. Петлей называется ребро, соединяющее вершину саму с собой. Граф, в котором допускается наличие петель, называется **псевдографом**.

Например, если в качестве элементов рассмотреть множество букв какого-нибудь языка и соединить ребрами те из них, которые в словах данного языка могут стоять рядом, то получим псевдограф, поскольку в некоторых словах встречаются две одинаковые буквы подряд. Другим примером псевдографа может являться схема движения прогулочных теплоходов между пристанями: некоторые маршруты могут начинаться у одной пристани, а заканчиваться у другой, а некоторые — начинаться и заканчиваться у одной и той же пристани.

К сожалению некоторой единой терминологии в теории графов до сих пор не сложилось. В отдельных случаях, определяя граф, считают, что он может содержать петли и кратные ребра, а граф, в котором петли и ребра отсутствуют, отдельно выделяют и называют простым графом. Однако в дальнейшем изложении мы будем считать, граф не содержит ни петель, ни кратных ребер, если не будет оговорено обратное.

Определение 10.4. Степенью вершины называется количество ребер, выходящих из этой вершины. Если это количество четно, то вершина называется четной, в противном случае вершина называется нечетной.

Теорема 1. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству всех ребер.

Доказательство. Степень вершины — это количество концов ребер, сходящихся в этой вершине. Поэтому сумма степеней всех вершин графа равна количеству всех концов ребер, которые есть в графе. Но у каждого ребра ровно два конца, значит общее количество ребер в два раза меньше количества концов всех ребер, откуда и получаем утверждение теоремы. □

Поскольку удвоенное количество ребер — четное число, то сумма степеней всех вершин любого графа должна также являться четным числом. Помимо этого данная теорема имеет еще два довольно простых, но часто используемых следствия.

Следствие 1. Число нечетных вершин любого графа четно.

Действительно, если бы нечетных вершин в графе было бы нечетное число, то сумма степеней всех нечетных вершин выражалась бы нечетным числом. А сумма степеней любого количества четных вершин выражается четным числом. Поэтому сумма степеней всех вершин графа будет нечетным числом, что противоречит предыдущему замечанию.

Прежде чем сформулировать второе следствие дадим еще одно определение.

Определение 10.5. Граф называется **полным**, если в нем любые две вершины соединены ребром.

Следствие 2. Количество ребер в полном графе на n вершинах равно $n(n-1)/2$.

Доказательство. В полном графе каждая из n вершин имеет степень $n-1$, поскольку соединена ребрами со всеми вершинами, кроме самой себя. Поэтому сумма степеней всех вершин равна $n(n-1)$, а количество ребер в два раза меньше суммы степеней вершин, т.е. $n(n-1)/2$. □

Задачи

10 ∘ 1 (у). Людоед захватил маленькую принцессу. Он нарисовал на земле k квадратов в ряд. Людоед обещал отпустить принцессу, если она сможет пропрыгать по всем квадратам по разу и снова вернуться на первый, при этом прыгать с любого квадратика на соседний нельзя, можно прыгать только через один или через два квадратика (например, с 5 можно прыгнуть только на 2, 3, 7 или 8). Если принцесса не выполнит задание, людоед ее съест. Помогите принцессе спастись при **а)** $k=5$; **б)** $k=10$.

10 ∘ 2 (у). Можно ли расставить числа от 1 до 9 по кругу, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

10 ∘ 3 (у). В шахматном турнире по круговой системе участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя — пять, Леша и Дима по три, Семен и Илья по две, Женя — одну. С кем сыграл Леша?

10 ◦ 4 (у). В углах доски 3×3 стоят шахматные кони — два черных и два белых. **а)** Можно ли поменять черных и белых коней местами? **б)** Можно ли поменять одного черного коня с одним белым? Если это можно сделать, то в каждом из случаев укажите, какое минимальное количество ходов для этого нужно.

10 ◦ 5 (у). Можно ли подобрать компанию, где у каждого ее члена было бы пять друзей, а у любых двух – ровно два общих друга?

10 ◦ 6. В футбольном турнире 20 команд сыграли 8 туров: каждая команда сыграла с 8 разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

10 ◦ 7. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с пяти нулей. Среди пятерок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найдите пять последних цифр последовательности.

10 ◦ 8. У Пети 28 одноклассников. У них различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

10 ◦ 9 (у). Верно ли утверждение теоремы листка для мультиграфов? Как следует определить степень вершины, из которой выходит петля, чтобы утверждение теоремы осталось верным для псевдографов?

10 ◦ 10. В соревновании по круговой системе с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько встреч было сыграно?

10 ◦ 11. Рассмотрим граф, вершинами которого являются клетки шахматной доски, а ребрами соединены пары клеток, отстоящие друг от друга на ход коня. Сколько ребер в данном графе?

10 ◦ 12. Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

10 ◦ 13. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

10 ◦ 14. Занятия кружка по математике посещает 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с 3 из кружковцев, а каждый мальчик ровно с 5?

10 ◦ 15. Существует ли многогранник, у которого 17 треугольных граней и 2 четырехугольных?

10 ◦ 16. Семеро друзей, разъезжаясь в отпуск, условились, что каждый из них пошлет открытки троим из остальных. Может ли случиться так, что каждый из них получит открытки именно от тех друзей, которым напишет сам?

10 ◦ 17. Существует ли граф, содержащий более одной вершины, никакие две вершины которого не имеют одинаковой степени?

10 ◦ 18. Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее, чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

10 ◦ 19. Чемпионат лагеря по футболу проводился по круговой системе. За победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Если две команды набирали одинаковое число очков, то место определялось по разнице забитых и пропущенных мячей. Чемпион набрал семь очков, второй призер — пять, третий — три. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

10 ◦ 20. Квадрат разрезан на прямоугольники так, что никакая точка квадрата не является вершиной сразу четырех прямоугольников. Докажите, что число точек квадрата, являющихся вершинами прямоугольника, четно.

Связные графы

Определение 11.1. Маршрутом в графе называется последовательность вершин и ребер, которая обладает следующими свойствами:

1. она начинается и заканчивается вершиной;
2. вершины и ребра в ней чередуются;
3. любое ребро последовательности имеет своими концами две вершины: непосредственно предшествующую ему в этой последовательности и следующую сразу за ним.

Первая и последняя вершины в этой последовательности называются началом и концом маршрута.

Проиллюстрировать данное определение можно на примере путешествия между городами: сначала мы записываем начальный город нашего путешествия, потом дорогу, по которой из него выезжаем, потом город, в который прибываем, потом следующую дорогу, по которой едем дальше и т.д., пока не закончим путешествие в каком-нибудь городе, который и будет записан последним. Заметим, что согласно определению маршрута в нем одна и та же вершина или ребро могут встречаться несколько раз. Также можно отметить, что для задания маршрута достаточно указать только последовательность вершин, поскольку по ней последовательность ребер восстанавливается однозначно. Хотя в случае мультиграфа определение маршрута не меняется, но задать сам маршрут одной лишь последовательностью вершин может не получиться, поскольку для некоторых пар вершин ребро, соединяющее их, однозначно не определяется.

Определение 11.2. Путем называется такой маршрут, в котором никакое ребро не встречается дважды. Иногда его также называют **цепью**.

Определение 11.3. Граф называется **связным** если между любыми двумя его вершинами существует маршрут. В противном случае граф называется **несвязным**.

Определение 11.4. Любой несвязный граф состоит из нескольких связных графов, каждый из которых называется **компонентой связности графа**. В частности у связного графа ровно одна компонента связности.

Теорема 1. Граф на n вершинах, степень каждой из которых не менее $(n-1)/2$, связен.

Доказательство. Предположим, что данный граф не является связным. Рассмотрим одну из его компонент связности и выберем в ней произвольную вершину. Поскольку эта вершина соединена не менее, чем с $\frac{n-1}{2}$ другими вершинами, то всего вместе с ней в этой компоненте связности не менее $\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$ вершин. Аналогично в любой другой компоненте связности не менее $\frac{n+1}{2}$ вершин. Поскольку несвязный граф имеет хотя бы две компоненты связности, то количество вершин в этих двух компонентах не менее $\frac{n+1}{2}\cdot 2=n+1$, а это противоречит условию, что в графе n вершин. Значит сделанное предположение неверно и граф является связным. $\square$

Теорема 2. Связный граф, в котором степень каждой вершины четна, при удалении любого ребра остается связным.

Доказательство. Пусть мы удалили ребро, которое соединяло вершины A и B. Если после этого вершины A и B оказались в разных компонентах связности, то рассмотрим компоненту связности G_A, содержащую вершину A. Поскольку количество ребер, выходящих из вершины A, уменьшилось на единицу, то степень вершины A также уменьшилась на единицу и стала нечетной, а степени всех остальных вершин в G_A остались четными. Но это противоречит тому, что в любом графе количество нечетных вершин четно. (Это утверждение верно и для любой компоненты связности графа, поскольку сама по себе она тоже является графом.) А значит вершины A и B не могли оказаться в разных компонентах связности.

Однако если вершины A и B оказались в одной компоненте связности, то существует маршрут $\mathcal{M}$ их соединяющий. Пусть X и Y — две произвольные вершины графа. Тогда между ними до удаления ребра существовал маршрут. Если в этом маршруте не содержалось ребра AB, то и в получившемся графе эти вершины связаны тем же маршрутом. Если же в в нем содержалось ребро AB один или несколько раз, то в любом месте, где оно появлялось, его вместе с вершинами A и B можно заменить на маршрут $\mathcal{M}$, проходимый в прямом или обратном порядке в зависимости от того, проходилось ли ребро AB от вершины A к вершине B или наоборот. Но это означает, что граф остался связным. $\square$

Теорема 3. Если из полного графа на n вершинах удалить не более $n-2$ ребер, то граф останется связным.

Доказательство. Докажем, что для разделения полного графа на несколько компонент связности необходимо удалить более $n-2$ ребер, из этого и будет следовать утверждение теоремы. Предположим, что мы удалили некоторое количество ребер, в результате чего образовалось несколько компонент связности. Пусть в одной из них оказалось k вершин, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Во всех остальных компонентах (может одной, может нескольких) оказалось $n-k$ вершин. В полном графе каждая из k вершин была соединена ребром с каждой из этих $n-k$ вершин. Поскольку теперь эти ребра исчезли, то количество ребер, выходящих из каждой из k вершин уменьшилось хотя бы на $n-k$, а общее количество ребер уменьшилось на $k(n-k)$. Осталось показать, что пришлось удалить более $n-2$ ребер, т.е. $k(n-k) > n-2$. Для этого рассмотрим разность $k(n-k)-(n-2)$. Имеем:

$$k(n-k)-(n-2) = kn - k^2 - n + 2 = (kn-n) - (k^2-1) + 1 =$$

$$= (k-1)n - (k-1)(k+1) + 1 = (k-1)(n-k-1) + 1.$$

Поскольку $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то каждая из скобок $(k-1)$ и $(n-k-1)$ неотрицательна, а значит разность $k(n-k)-(n-2)$ больше 0. Тем самым мы доказали, что количество ребер, которое необходимо удалить из полного графа, чтобы сделать его несвязным, больше $n-2$, откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Задачи

$11\circ 1$ (у). Докажите, что если в графе от некоторой вершины существует маршрут до любой другой, то граф связен.

$11\circ 2$ (у). Докажите, что если в графе между некоторыми двумя вершинами существует маршрут, то существует также и путь, соединяющий эти две вершины.

$11\circ 3$ (у). В государстве 50 городов, причем от каждого города можно доехать до любого другого, возможно с пересадками. Какое наименьшее число дорог может быть в этом государстве?

$11\circ 4$. На плоскости нарисованы вершины графа, пронумерованные числами от 2 до 30. При этом две вершины с номерами a и b соединены ребром только в том случае, если одно из чисел a или b делится на другое. Сколько компонент связности имеет этот граф?

$11\circ 5$. Летом Иван отдыхал в молодежном лагере «Восход», где вместе с ним находилось всего 53 школьника. После окончания отдыха некоторые пары обменялись адресами, причем у каждого из отдыхающих оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Ивану понадобился адрес Николая, с которым он адресом не обменивался. Докажите, что Иван может узнать адрес Николая, т.е. существует цепочка из школьников, которая начинается с Ивана и оканчивается Николаем и в которой каждая пара соседей обменялась адресами.

$11\circ 6$. Степень каждой вершины связного графа – не менее 100. Одно ребро выкинули. Может ли получиться несвязный граф?

$11\circ 7$. В локальной компьютерной сети от сервера отходит 21 провод, от остальных компьютеров – по 4 провода, а от принтера – один провод. Докажите, что с сервера можно послать документ на принтер.

$11\circ 8$. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

$11\circ 9$. На конференции присутствуют 50 ученых, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

$11\circ 10$. В стране любые два города соединены или железной дорогой, или авиалинией. Доказать, что один из видов транспорта позволяет добраться из любого города в любой.

$11\circ 11$. На листе бумаги отмечено 2011 точек. Двое играют в следующую игру: каждый своим ходом соединяет две отмеченные точки линией. Запрещается соединять пару точек повторно. Проигрывает тот, после хода которого из любой точки можно пройти в любую другую, двигаясь от вершины к вершине по проведенным линиям. Кто выигрывает при правильной игре?

$11\circ 12$. В стране, кроме столицы, больше 100 городов. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами. Каждый из остальных городов соединен авиалиниями ровно с 10 городами. Известно, что из любого города можно перелететь в любой другой (может быть, с пересадками). В связи с экономическим кризисом было принято решение закрыть половину дорог из столицы. Докажите, что это можно сделать таким образом, чтобы после этого снова можно было бы из любого города перелететь в любой другой.

$11\circ 13$. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

11 ∘ 14. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причем каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем с n другими. Докажите, что если отменить любые $n-1$ рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолетах (с пересадками).

11 ∘ 15. В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 км, и из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам меньше 500 км. Когда одна дорога оказалась закрытой на ремонт, выяснилось, что из каждого города можно проехать по оставшимся дорогам в любой другой. Доказать, что при этом можно проехать меньше 1500 км.

11 ∘ 16. Какое наименьшее число соединений требуется для организации проводной сети связи из 10 узлов, чтобы при выходе из строя любых двух узлов связи сохранялась возможность передачи информации между любыми двумя оставшимися (хотя бы по цепочке через другие узлы)?

11 ∘ 17. На турбазе 12 домиков, между которыми крот прокопал 56 непересекающихся подземных ходов (два домика соединяются не более чем одним ходом). Докажите, что крот из любого домика может попасть в любой другой, передвигаясь по этим ходам.

11 ∘ 18. Докажите, что граф на n вершинах, имеющий более $(n-1)(n-2)/2$ ребер, связный.

11 ∘ 19. Каждая пара депутатов парламента либо дружит, либо враждует, причем имеется хотя бы одна пара враждующих депутатов. При этом неукоснительно соблюдаются условия «друг моего друга — мой друг» и «друг моего врага — мой враг». Известно, что в парламенте 50 депутатов, и что каждый из них послал открытки всем своим друзьям из числа коллег. **а)** Какое наименьшее число открыток могло быть послано? **б)** А наибольшее?

11 ∘ 20. Числом связности χ графа называется наименьшее число вершин, удаление которых (вместе с выходящими из них ребрами) приводит к несвязному или одновершинному графу. Числом реберной связности λ графа называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Данные величины показывают, насколько граф «прочен», как много вершин и ребер нужно из него удалить, чтобы он «распался» на части. **а)** Приведите примеры графа, для которого $\chi = 2, \lambda = 3$. **б)** Докажите, что для любого связного графа выполняется соотношение $\chi \leqslant \lambda \leqslant \delta$, где δ — минимальная из степеней вершин графа.

Деревья

Определение 12.1. Замкнутый путь, т.е. такой, начало и конец которого совпадают, называется **циклом**.

Определение 12.2. Путь называется **простым**, если никакая вершина в нем не встречается дважды.

Определение 12.3. Цикл называется **простым**, если никакая вершина в нем кроме начальной и конечной не встречается дважды.

Определение 12.4. **Деревом** называется связный граф, не имеющий циклов.

Определение 12.5. Вершина графа называется **висячей**, если из нее выходит ровно одно ребро.

Теорема 12.1. В любом дереве на $n \geqslant 2$ вершинах есть не менее двух висячих вершин.

Доказательство. Возьмем произвольную вершину дерева A, которая она не является висячей. Если таковой не найдется, то все вершины являются висячими, а поскольку в графе их сего не менее 2, то утверждение теоремы доказано. Итак, если вершина A не является висячей, то из нее выходит не менее двух ребер. Пройдем по одному из них, попадем в следующую вершину. Если она также не является висячей, то из нее ведет какое-то еще ребро кроме того, по которому мы в нее пришли. Пойдем по этому ребру в следующую вершину и т.д. Поскольку вершин в графе конечное число, то данный процесс не может продолжаться бесконечно. Дважды оказаться в одной вершине невозможно. (Предположим, что путь, по которому мы движемся, повторно привел в некоторую вершину X. Тогда часть пути от первого прихода в X до второго является циклом, что невозможно по определению дерева.) Значит в какой-то момент времени мы придем в вершину B, из которой не сможем продолжить путь. Но если из этой вершины нельзя выйти дальше по некоторому новому ребру, то в эту вершину ведет только одно ребро, а значит она является висячей.

Таким же образом, выйдя из первоначальной вершины A по другому выходящему из нее ребру, мы опять придем в висячую вершину. Докажем, что она отлична от висячей вершины B, в которой мы оказались в предыдущий раз. Предположим, что это не так. Тогда получается, что нашлись два пути, которые ведут из A в B. Они различны, поскольку выходят из A по двум разным ребрам. Раз они заканчиваются в одну вершину B, то в какой-то момент они оба приводят в одну вершину. Назовем первую их общую вершину C (она может совпадать с B, а может и отличаться от нее). Но тогда от A до C можно добраться по ребрам одного пути, а обратно от C в A вернуться по другому пути, что противоречит определению дерева. Значит два пути, которые выходят из A, не имеют общих вершин, а потому заканчиваются в двух различных висячих вершинах. □

Теорема 12.2. Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число вершин в нем на одну больше числа ребер.

Доказательство. В данной теореме необходимо доказать два утверждения. Первое из них: если связный граф — дерево, то число вершин в нем на одну больше числа ребер. Второе: если в связном графе число вершин в нем на одну больше числа ребер, то он является деревом.

Докажем первое утверждение. Если в графе единственная вершина, то утверждение очевидно. Пусть нам дано дерево на $n \geqslant 2$ вершинах. Выберем в нем произвольную висячую вершину. Из нее выходит ровно одно ребро. Удалим из графа эту вершину вместе с выходящим ребром. Получим некоторый новый граф. Поскольку предыдущий граф был связен, то легко понять, что и новый граф также является связным. Также, как следует из определения дерева, в исходном графе не было циклов. Понятно, что после удаления ребра циклы появиться не могли. Итак, мы получили некоторый новый граф, который является связным и не содержит циклов. Значит этот новый граф опять является деревом. Если в этом дереве не менее 2 вершин, то вновь можно найти в нем висячую вершину и удалить ее вместе с выходящим из нее ребром. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока возможно. Поскольку в графе некоторое конечное число вершин, то в какой-то момент времени от исходного дерева останется одна единственная вершина и процесс остановится. Но раз на каждом шаге мы удаляли одну вершину и одно ребро, то вершин и ребер было удалено поровну, да еще одна вершина осталась в конце. Значит в исходном дереве вершин было на одну больше, чем ребер. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть нам дан связный граф, в котором вершин на одну больше, чем ребер, но который деревом не является. Тогда в нем существует хотя бы один цикл. Возьмем какой-нибудь из циклов и выберем на нем вершины A и B, между которыми есть ребро. Тогда от вершины A до вершины B можно добраться либо по ребру AB, либо по другой части цикла без ребра AB, назовем его C_{AB}. Удалим из графа ребро AB и покажем, что он остался связным. Действительно, если между любыми двумя вершинами X и Y существовал некоторый маршрут, который не проходил по ребру AB, то этот маршрут остался и после удаления ребра AB. Если же маршрут между вершинами X и Y содержал в себе ребро AB, то в том месте его можно заменить на C_{AB}. Но это означает, что граф после удаления ребра вновь остался связным. Будем удалять по одному ребру до тех пор, пока в графе не исчезнут циклы, поскольку ребер конечное количество, то в некоторый момент мы остановимся. Тогда мы придем к новому связному графу без циклов, который является деревом. Но на основании первого утверждения в нем число вершин на одну больше числа ребер. Поскольку на каждом шаге мы удалял только ребра и не меняли количество вершин, то в исходном графе число вершин не могло быть также на одну больше числа ребер. Приходим к противоречию, значит исходное предположение было неверно. Второе утверждение доказано. $\square$

Задачи

12 ∘ 1 (у). Приведите пример пути, который не является простым. Приведите пример цикла, который не является простым.

12 ∘ 2 (у). Рассмотрим такое определение дерева: «Деревом называется граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путем.» Докажите, что оно эквивалентно другому определению дерева.

12 ∘ 3 (у). Докажите, что если из дерева удалить любое ребро, оно перестанет быть связным графом

12 ∘ 4. В некоторой островной стране 79 городов, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

12 ∘ 5. В другой островной стране 47 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

12 ∘ 6. В парке «Лотос» невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

12 ∘ 7. Администрация парка «Лотос» решила провести реконструкцию парка. Теперь от каждого перекрёстка или тупика можно добраться до любого другого, а также у дорожек и перекрёстков поставлены светильники: каждый перекресток и тупик освещается четырьмя светильниками, а аллея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик — шестью. Сколько светильников установлено, если в парке стало 18 перекрестков и тупиков?

12 ∘ 8. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

12 ∘ 9 (у). Доказать, что в связном графе с циклами вершин не больше чем ребер.

12 ∘ 10 (у). Докажите, что из связного графа можно удалить несколько ребер так, чтобы осталось дерево[1].

12 ∘ 11. Нарисуйте все 9 скелетов графа, представляющего куб.

12 ∘ 12. В связном графе В вершин и Р ребер. Какое наибольшее число ребер можно удалить, чтобы граф все еще оставался связным?

12 ∘ 13 (у). Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.

12 ∘ 14. Есть некоторая сеть метро, в которой с любой станции можно добраться до любой другой не поднимаясь на поверхность. Докажите, что можно закрыть какую-то одну станцию без права проезда через нее так, чтобы и после этого возможно было бы добраться с любой станции на любую другую.

12 ∘ 15. Клетчатая прямоугольная сетка $m \times n$ связана из веревочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную веревочку. Если не останется ни одного замкнутого веревочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть? Как зависит ответ от значений m и n?

---

[1] любое такое дерево называется **скелетом** или **остовным деревом** графа

12 ∘ 16. Посылку (куб) зашили на почте в мешковину в форме куба. Играют двое получившие посылку. За один ход разрешается сделать разрез вдоль любого ребра куба, по которому еще не делался разрез. Проигрывает тот, после хода которого мешковина распадается на две части. Кто может выиграть?

12 ∘ 17. Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички. Сколько спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с любого поля на любое?

12 ∘ 18. В дереве есть 8 вершин степени три, 10 вершин степени 4 и несколько висячих вершин. Других вершин нет. Найти число висячих вершин.

12 ∘ 19. Насыщенным углеводородом называется соединение углерода C, имеющего валентность 4, и водорода H, имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода[2].

12 ∘ 20. В ныне суверенном Зурбагане сеть железных дорог устроена так: все города стоят на кольце; кроме того, столица соединена отдельными ветками с каждым из городов, кроме соседей по кольцу. Правительство Зурбагана разбило сеть на участки между соседними городами и постановило разделить эти участки между двумя компаниями так, чтобы можно было проехать между любыми двумя городами как по дорогам только первой компании, так и по дорогам только второй компании. Можно ли выполнить постановление правительства?

12 ∘ 21. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более **а)** 198 перелетов; **б)** 196 перелетов.

12 ∘ 22. **Расстоянием** между двумя произвольными вершинами дерева будем называть длину простого пути, соединяющего их. **Удаленностью** вершины дерева назовем сумму расстояний от нее до всех остальных вершин. Докажите, что в дереве, у которого есть две вершины с удаленностями, отличающимися на 1, — нечетное число вершин.

12 ∘ 23. У царя Гвидона было три сына. Из его потомков 100 имели по два сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

12 ∘ 24. Можно ли провести в каждом квадратике на поверхности кубика Рубика диагональ так, чтобы получился несамопересекающийся путь?

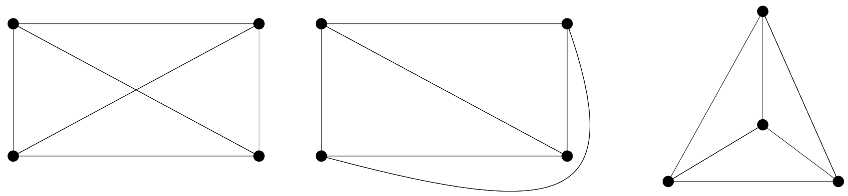
12 ∘ 25. Некоторые из сорока городов страны попарно соединены авиалиниями, принадлежащими одной из десяти авиакомпаний. Из каждого города можно перелететь в любой другой без пересадок, и каждая авиалиния действует в обоих направлениях. Докажите, что существует компания, которая может обеспечить путешествие с началом и концом в одном и том же городе, с числом перелетов не менее трех, причем каждый промежуточный город в путешествии будет посещаться только один раз.

Теорема Эйлера

Определение 13.1. Граф называется **планарным**, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались.

Определение 13.2. Граф называется **плоским**, если он изображен на плоскости так, что его ребра не пересекаются.

На первом рисунке изображен полный граф на четырех вершинах K_4, ребра которого пересекаются. Однако его можно изобразить так, чтобы его ребра не пересекались, пример такого изображения представлен на втором рисунке. Это означает, что полный граф K_4 является планарным, однако изображение его на первом рисунке плоским не является, а на втором — является. Оказывается, что можно изобразить граф K_4 и так, чтобы все его ребра были отрезками, способ сделать это представлен на третьем рисунке.



Оказывается, что и в общем случае верна следующая теорема, которую мы оставим без доказательства по причине сложности оного.

Теорема 13.1 (Вагнер, Фари, Штейн)**.** Каждый планарный граф можно изобразить на плоскости так, что каждое его ребро будет отрезком прямой, при этом ребра не будут пересекаться.

Возьмем произвольный плоский граф и обозначим число вершин в графе V, число ребер — E, а число частей, на которые граф делит плоскость — F (каждая из этих частей называется **гранью**).[1] В качестве граней считаются не только те части, которые оказываются «внутри» графа и ограничены со всех сторон ребрами (внутренние грани), но и та бесконечная часть, которая оказывается «снаружи» (внешняя грань). Так, для графа K_4 на последнем рисунке $V = 4$, $E = 6$, $F = 4$. Оказывается, что для любого плоского графа существует равенство, которое связывает величины V, E и F.

Теорема 13.2 (Эйлера)**.** Для связного плоского графа верно равенство $V - E + F = 2$.

Доказательство. Пусть на плоскости изображен некоторый граф G. Удалим некоторые ребра из данного графа так, чтобы получилось какое-нибудь остовное дерево этого графа. Поскольку число вершин любого дерева на одну больше числа числа ребер, то для этого дерева $E = V - 1$, $F = 1$, и доказываемая формула верна. Теперь начнем восстанавливать исходный граф G из его остовного дерева, для чего будем последовательно добавлять по одному удаленные ребра. При добавлении ребра число вершин никак не меняется, а вот число ребер и число граней увеличивается на 1. Поэтому равенство при добавлении ребра остается верным, а значит окажется верным и после добавления любого числа ребер, в частности для исходного графа G. □

[1] Буквы V, E и F являются начальными буквами английских слов «vertex», «edge» и «face», которые как раз и переводятся как «вершина», «ребро» и «грань».

Теорема 13.3. Для плоского графа при $F \geqslant 2$ верно неравенство $3F \leqslant 2E$.

Доказательство. Пусть $E_1, E_2, \dots E_F$ — число ребер ограничивающих грани с номерами от первого до F соответственно. Поскольку каждое ребро разделяет две грани, то в сумме $E_1 + E_2 + \ldots + E_F$ любое ребро может встретиться не более двух раз. (Ребро либо встречается дважды, если разделяет две какие-то грани, либо вообще не встречается, например если оно идет от висячей вершины.) Поэтому данная сумма не превосходит $2E$. С другой стороны, поскольку каждая грань ограничена не менее, чем тремя ребрами, то каждое из слагаемых суммы $E_1 + E_2 + \ldots + E_F$ не менее трех, а всего слагаемых F, поэтому данная сумма не менее $3F$. Итак, имеем

$$3F \leqslant E_1 + E_2 + \ldots + E_F \leqslant 2E,$$

откуда и получаем требуемое неравенство. □

Задачи

13 ∘ 1. Нарисуйте плоский граф с 6 вершинами, чтобы степень каждой из них была равна 4, а ребра изображались бы отрезками. Пронумеруйте все вершины, ребра и грани данного графа и проверьте, что для него верна теорема Эйлера.

13 ∘ 2. Мэрия решила построить в каждом квартале города, имеющего 155 перекрестков и 260 отрезков улиц между перекрестками, универсам. Сколько будет построено универсамов?

13 ∘ 3. Разумные муравьи с планеты Тямти-Лямти живут в колониях. Колонии состоят из ячеек, которые муравьи строят из палочек. В одной ячейке живет один муравей. Палочки соединяются между собой при помощи специального раствора, причем соединять можно только концы палочек. Известно, что для создания колонии муравьи использовали 58 палочек, которые скрепили в 30 местах. Сколько муравьев живет в колонии?

13 ∘ 4 (у). а) Верна ли формула Эйлера для плоского связного графа на сфере? **б)** Приведите пример плоского связного графа на торе,[2] для которого формула Эйлера оказывается неверна.

13 ∘ 5. На острове Щекотан планеты Тямти-Лямти расположено 5 колоний разумных муравьев. Известно, что эти колонии составлены из 1200 палочек и имеют 300 мест их соединения. Сколько муравьев живет на острове?

13 ∘ 6. Докажите, что для случая произвольного плоского графа, не обязательно связного, формула Эйлера имеет вид $V - E + F = C + 1$, где C — число компонент связности данного графа.

13 ∘ 7. Пусть каждая из граней включая внешнюю ограничена тремя ребрами.[3] Докажите, что тогда $2E = 3F$.

13 ∘ 8. Внутри треугольника отметили 10 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами треугольника так, что исходный треугольник разбился на несколько маленьких треугольничков. Сколько таких треугольничков получилось?

[2]тор — это математическое название поверхности бублика

[3]Такой граф называется **плоской триангуляцией**.

13 ∘ 9. Из-за недостатка земли и строительного материала на острове Болтай каждая ячейка в колонии разумных муравьев построена из трех палочек. Сколько палочек нужно для построения колонии и сколько муравьев живет в ней, если колония имеет 1200 мест соединения палочек, а снаружи ограничена 500 палочками.

13 ∘ 10. Докажите, что для планарного графа с количеством вершин $V \geqslant 3$ справедливо неравенство $E \leqslant 3V - 6$.

Неравенство, связывающее число вершин и число ребер планарного графа, является очень важным, поскольку является критерием планарности графов. С помощью него можно доказывать то, что те или иные графы не являются планарными.

13 ∘ 11. Докажите, что полный граф на 5 вершинах не является планарным.

13 ∘ 12. Печатная плата представляет собой пластинку из изолирующего материала, в специально изготовленные гнезда которой устанавливают электронные приборы. В качестве проводников, соединяющих эти приборы, служат напыленные металлические дорожки. Поскольку проводники не изолируются, то дорожки не должны пересекаться. Если это может произойти, то одну из дорожек переносят на другую сторону платы. Конструктор Иванов придумал хорошую схему печатной платы, которая состоит из 12 приборов и 32 проводников, соединяющих их. Можно ли изготовить такую плату так, что все проводники будут расположены на одной ее стороне?

13 ∘ 13. Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причем так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.

13 ∘ 14. Докажите, что в планарном графе найдется вершина степени не более 5.

13 ∘ 15 (у). а) Докажите, что вершины планарного графа можно раскрасить в 6 цветов так, чтобы вершины, соединенные ребром, имели разный цвет. **б)** Докажите, что конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.[4]

13 ∘ 16. Инженер Иванов придумал схему печатной суперплаты, которая может заменить целый компьютер. Плата состоит из 200 приборов и 2000 проводников. Ясно, что для реализации такой схемы нужно будет использовать многослойную плату, на которой проводники будут размещены в разных слоях. Докажите, что разработанную инженером Ивановым схему нельзя изготовить в виде трехслойной платы.

13 ∘ 17. Каждое ребро полного графа на 11 вершинах покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что граф, составленный либо из всех красных ребер, либо из всех синих, не является плоским.

13 ∘ 18 (у). Докажите, что число вершин V, ребер E и граней F любого выпуклого многогранника связано формулой $V - E + F = 2$.

13 ∘ 19. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

13 ∘ 20 (у). На плоскости отмечено n точек. Разрешается соединять некоторые две из них ломаной, не проходящей через другие точки. Два игрока по очереди соединяют ломаной какие-то две еще не соединенные точки. При этом требуется, чтобы ломаные не самопересекались и не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не

---

[4]Существует теорема, согласно которой любую такую карту можно покрасить в четыре цвета (так называемая проблема четырех красок). Однако строгого хорошего ее доказательства, которое бы не использовало компьютерный перебор тысяч вариантов, до сих пор не найдено.

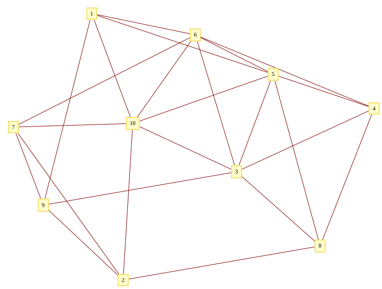
может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от n)?

13 ∘ 21 (у). На плоскости нарисовано n маленьких крестиков (у каждого крестика четыре коротких луча одинаковой длины). Каждый ход представляет собой соединение линией двух свободных лучей крестиков (лучей разных крестиков или одного). После этого проведённую линию пересекают коротенькой чёрточкой, что представляет собой простановку на этой линии нового крестика, свободные концы которого можно использовать в игре. Каждый луч крестика можно использовать только один раз, а проведённые линии не должны пересекаться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от n)?

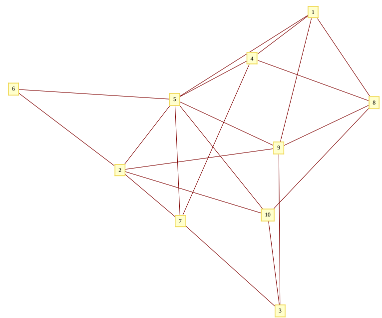
13 ∘ 22. Многогранник называется правильным, если все его грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон, а степени всех вершин равны. Иногда такие многогранники называют **платоновыми телами**. Одним из примеров правильного многогранника является куб, у которого все грани — правильные четырехугольники, а степень каждой вершины равна 3. Докажите, что правильных многогранников не более 5 (на самом деле их ровно 5).

Эйлеровы графы

14 ∘ 1 (у). Племя Мумбо-Юмбо живет на небольшом архипелаге недалеко от Новой Зеландии. Некоторые из островов архипелага соединены между собой мостами так, что с любого острова при желании можно добраться на любой другой по этим мостам. Турист прилетел на остров Троекратный и сумел обойти все острова архипелага, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист **а)** не с него начал и не на нем закончил? **б)** с него начал, но не на нем закончил? **в)** с него начал и на нем закончил?

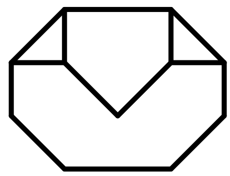


14 ∘ 2 (у). а) Годом позже турист решил осмотреть архипелаг племени Ухти-Тухти. В туристической компании ему сообщили, что можно совершить осмотр, пройдя по каждому мосту, соединяющему острова, ровно один раз. Докажите, что в архипелаге существует не более двух островов, с которых ведет нечетное число мостов. **б)** Может ли остров, с которого ведет нечетное число мостов, быть только один?



14 ∘ 3 (у). Можно ли нарисовать графы, изображенные на рисунке справа (первые два сверху), не отрывая карандаша от бумаги?

14 ∘ 4. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям, план которого изображен на рисунке, так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз? (схема парка — справа, самая нижняя)



14 ∘ 5 (у). Докажите, что если в графе существует путь, проходящий по любому ребру ровно один раз, то в этом графе не более двух вершин нечетной степени.

14 ∘ 6. Дан правильный 45-угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами.

Определение 14.1. **Цикл** графа называется **эйлеровым**, если любое ребро графа встречается в нем ровно один раз.

Определение 14.2. **Граф**, содержащий эйлеров цикл, называется **эйлеровым**.

Определение 14.3. **Путь** в графе называется **эйлеровым**, если любое ребро графа встречается в нем ровно один раз.

14 ∘ 7. а) Докажите, что связный граф эйлеров тогда и только тогда, когда все его вершины имеют четную степень.[1] **б)** Докажите, что в связном графе существует эйлеров путь тогда и только тогда, когда не более двух вершин графа имеют нечетную степень.

14 ∘ 8 (у). Докажите, что связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда его можно разбить на непересекающиеся по ребрам простые циклы.

[1] Данная теорема носит название теоремы Эйлера и была доказана в 1736 году.

14 ∘ 9. Метро города Урюпинска состоит из трех линий (линии метро бывают прямые или кольцевые) и имеет по крайней мере две конечные станции и по крайней мере два пересадочных узла, причем ни одна из конечных станций не является пересадочной. С каждой линии на каждую можно перейти по крайней мере в двух местах. Нарисуйте пример такой схемы метро, если известно, что это можно сделать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза один и тот же отрезок.

14 ∘ 10. **а)** Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? **б)** Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

14 ∘ 11. Какой максимальной длины можно вырезать кусок проволоки из каркаса куба со стороной 10 см?

14 ∘ 12. Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата 4×4, представить в виде объединения **а)** восьми ломаных длины 5; **б)** пяти ломаных длины 8?

14 ∘ 13. **а)** Город в плане выглядит как квадрат 5×5, каждая сторона квартала-квадратика — участок улицы длиной 100 м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы? **б)** Изменится ли ответ в задаче, если еще потребовать, чтобы каток вернулся в исходное место?

14 ∘ 14. Докажите, что связный граф с $2n$ нечетными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

14 ∘ 15. Какую наименьшую длину должен иметь кусок проволоки, чтобы из него можно было согнуть каркас куба с ребром 10 см? (Проволока может проходить по одному ребру дважды, загибаться на 90° и 180°, но ломать её нельзя.)

14 ∘ 16. Пешеход обошел шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

14 ∘ 17. Экспозиция картинной галереи представляет собой связную систему коридоров, на обеих стенах которых развешаны картины. Всегда ли можно предложить такой маршрут осмотра экспозиции, при котором посетитель проходит вдоль каждой стены ровно один раз?

14 ∘ 18. Турист приехал в Минск на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на площади Бангалор, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно. (Не обязательно проходить по каждой такой улице.)

14 ∘ 19. На занятии 20 школьников решили каждый по 6 задач, причем каждая задача была решена ровно двумя школьниками. Докажите, что можно организовать разбор всех задач так, чтобы каждый школьник рассказал ровно по 3 задачи.

14 ∘ 20. Рассеяный математик забыл трехзначный код своего замка. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд, даже если перед этим были набраны какие-то другие цифры. Математик набирает одну цифру за секунду. Докажите, что математик сможет открыть замок за **а)** 29 секунд, если в коде использованы только цифры 1, 3 и 7; **б)** за 1002 секунды, если в коде использованы все 10 цифр.

Число сочетаний

Определение 24.1. Числом сочетаний из n элементов по k называется количество способов выбрать k предметов из n различных предметов. Обозначение: C_n^k (читается «це из n по k»). Иногда используется обозначение $\binom{n}{k}$

24 ∘ 1 (у). Группа из 9 школьников отправилась в поход. Сколькими способами можно из этих 9 школьников выбрать троих для приготовления обеда? А выбрать шестерых и отправить за дровами? Объясните совпадения результатов. Как записываются эти количества с помощью C_n^k?

24 ∘ 2 (у). На примере предыдущей задачи объясните, почему $C_n^k = C_n^{n-k}$.

24 ∘ 3. Запишите ответы к любым 10 задачам или пунктам задач предыдущего листка с помощью C_n^k.

24 ∘ 4 (у). а) Что означают и чему равны C_n^0 и C_n^n? **б)** Докажите, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

24 ∘ 5 (у). Докажите, что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ **а)** используя формулу для C_n^k; **б)** не пользуясь формулами, а только лишь определением C_n^k.

24 ∘ 6 (у). Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n разных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (за раз он может съесть от 0 до n разных блюд). **а)** Сколько дней ему удастся это делать? **б)** Сколько блюд он съест за это время?

24 ∘ 7 (у). Пользуясь решением предыдущей задачи, докажите равенства:

а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;

б) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n2^{n-1}$.

24 ∘ 8 (у). Петя и Вася решили поспорить, кто из них дольше сможет питаться в школьной столовой. Условия спора следующие: Петя каждый день съедает четное число блюд (возможно, что и ни одного), а Вася — нечетное, причем каждый день необходимо съедать новый набор блюд. Кто из них победит в споре?

24 ∘ 9 (у). Докажите равенство $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

24 ∘ 10 (у). Вася съедает каждый день в столовой, меню которой состоит из n блюд, нечетное число блюд. **а)** Сколько дней ему удастся это делать? **б)** Сколько блюд он съест за это время? **в)** Какие равенства на число сочетаний можно получить из этой задачи?

24 ∘ 11 (у).

а) Пользуясь задачей 23.15, докажите равенство $C_{13}^4 - C_9^4 = C_4^1 C_9^3 + C_4^2 C_9^2 + C_4^3 C_9^1 + C_4^4 C_9^0$.

б) Докажите, что $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \dots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0 = C_{p+q}^m$.

24 ∘ 12. Докажите равенство $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$.

24 ∘ 13. Докажите равенство $C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$.

24 ∘ 14. Докажите равенство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.

24 ∘ 15 (у). а) Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях $(a+b)^3$, $(a+b)^4$. **б)** Раскроем скобки и приведем подобные в выражении $(a+b)^n$. Объясните, почему каждое слагаемое будет иметь вид $a^k b^{n-k}$ умноженное на некоторое число.

24 ∘ 16 (у). *(Бином Ньютона)* Докажите, что

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Другими словами, докажите, что коэффициент при $a^k b^{n-k}$ после раскрытия скобок выражении $(a+b)^n$ равен C_n^k.

Треугольник Паскаля

Определение 25.1. Треугольником Паскаля называют числовой треугольник, изображенный на рисунке (по краям треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух, стоящих справа и слева над ним).

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ . & & . & & . & & . & & . & & . \end{array}$$

В треугольнике Паскаля строки нумеруются сверху вниз, нумерация начинается с нуля. Выше выписаны строки с номерами от 0 до 4. Числа в строках нумеруются слева направо также начиная с нуля.

25 ∘ 1. Выпишите строки треугольника Паскаля с 0 по 10. Результат выучите наизусть.

25 ∘ 2. Запишите рассказанное вам доказательство того, что k-ое число n-ой строки равно C_n^k.

25 ∘ 3 (у). Решите приведенные ниже задачи, пользуясь треугольником Паскаля.
а) Сколькими способами можно выбрать в походе 3 человека для приготовления обеда среди 9 туристов? **б)** Сколькими способами среди 10 школьников выбрать 4 дежурных, причем Вася и Петя не должны оказаться дежурными одновременно? **в)** Сколькими способами из 3 сержантов и 8 солдат можно составить отряд из 4 человек так, чтобы в нем было не менее одного сержанта? **г)** Сколькими способами можно выбрать среди 7 супружеских пар комиссию из 3 человек так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

25 ∘ 4 (у). Решите приведенные ниже задачи, пользуясь треугольником Паскаля.
а) На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках? **б)** На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в этих точках? **в)** Сколько существует четырехзначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке? **г)** Сколько существует трехзначных чисел, цифры которых нечетны и идут в убывающем порядке?

25 ∘ 5. Докажите тождество $C_{n-1}^{k-1} \cdot C_n^{k+1} \cdot C_{n+1}^k = C_{n-1}^k \cdot C_{n+1}^{k+1} \cdot C_n^{k-1}$ **а)** пользуясь только формулой для числа сочетаний; **б)** не пользуясь ей; **в)** с помощью треугольника Паскаля. **г)** Данное равенство называется *свойством шестиугольника*. Попробуйте объяснить, почему.

25 ∘ 6 (у). Докажите тождество $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ с помощью треугольника Паскаля.

25 ∘ 7 (у). Вычислите сумму чисел в $1, 2, 3, \dots, 7$ строках треугольника Паскаля. Найдите и докажите наблюдаемую закономерность.[1]

25 ∘ 8 (у). Запишем в треугольник Паскаля вместо чисел слово «треугольник» следующим

[1] Полезно провести рассуждения в том же виде, как и в задаче 2.

образом:

```
                т
              р   р
            е   е   е
          у   у   у   у
        г   г   г   г   г
      .   .   .   .   .   .
```

Сколькими способами, двигаясь по данной таблице, можно прочитать слово «треугольник»?

25 ○ 9 (у). Рассмотрим прямоугольную сетку квадратов размерами $m \times n$ — шахматный город, состоящий из «кварталов», разделенных $n-1$ горизонтальными и $m-1$ вертикальными «улицами». Каково число различных кратчайших путей на этой сетке, ведущих из левого нижнего угла (точка $(0;0)$) в правый верхний угол (точку $(m;n)$)?

25 ○ 10 (у). В каких строках треугольника Паскаля все числа нечетные?

25 ○ 11 (у). Какие строки треугольника Паскаля состоят целиком (не считая краев) из четных чисел?

25 ○ 12 (у). Какие строки треугольника Паскаля состоят целиком (не считая краев) из чисел, делящихся на 3?

Определение 25.2. Лучи, параллельные сторонам треугольника Паскаля, называются **диагоналями**. Причем лучи, параллельные правой стороне, называются правыми диагоналями, а левой — левыми диагоналями.

25 ○ 13. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над данным числом.[2]

25 ○ 14. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит данное число (сами эти диагонали в данный параллелограмм не включаются).

25 ○ 15. а) Используя числа второй диагонали треугольника Паскаля, найдите сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)$. **б)** Выразите многочлен n^2 через C_n^2 и C_n^1 **в)** Найдите сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

25 ○ 16. Выразите многочлен n^3 через C_n^3, C_n^2 и C_n^1.

25 ○ 17. Найдите сумму $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

25 ○ 18 (у). Объясните, каким образом можно получить формулу для нахождения суммы $1^{10} + 2^{10} + \ldots + n^{10}$.

---

[2] Если в этой и следующей задачах вы не очень поняли, о каких числах идет речь и что нужно доказать, не стесняйтесь обратиться с вопросом к преподавателю.

Комбинаторика и алгебра

26 ∘ 1. *(Бином Ньютона)* Докажите, что

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Другими словами, докажите, что коэффициент при $a^k b^{n-k}$ после раскрытия скобок выражении $(a+b)^n$ равен C_n^k.

26 ∘ 2. а) Раскройте скобки в выражениях $(x+y)^9$ и $(x-y)^9$. **б)** Раскройте скобки в выражениях $(2x-3y)^5$. **в)** Какие коэффициенты будут при ab^{13} и $a^{11}b^3$ после раскрытия скобок в выражении $(a+b)^{14}$.

26 ∘ 3. Найдите наибольший коэффициент в многочлене **а)** $(a+b)^{12}$; **б)** $(a+2b)^{10}$.

26 ∘ 4. Используя формулу бинома, докажите, что **а)** сумма чисел в любой строке треугольника Паскаля есть степень 2; **б)** знакопеременная сумма чисел в любой строке равна 0.

26 ∘ 5. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена **а)** $(a+b)^{12}$; **б)** $(5a-3b)^{10}$; **в)** $(a+b-c)^{12}$.

26 ∘ 6. В многочлене $(a+b-c)^{12}$ найдите сумму всех всех коэффициентов при одночленах, **а)** не содержащих a; **б)** содержащих b.

26 ∘ 7 (у). а) При игре в преферанс каждому из трех игроков раздают по 10 карт, а две карты кладут в прикуп. Сколькими способами можно раздать карты Коле, Роме и Саше для игры в преферанс? **б)** В выражении $(p+q+r+s)^{32}$ раскрыли скобки. Найдите коэффициент при $p^2q^{10}r^{10}s^{10}$.

26 ∘ 8. а) Найдите коэффициент при ab^2c^3 в многочлене $(a+b+c)^6$. **б)** Найдите коэффициент при $a^{10}b^{15}c^{20}$ в многочлене $(a+b+c)^{45}$. **в)** Найдите коэффициент при $abcde$ в многочлене $(a+b+c+d+e)^5$.

26 ∘ 9. В выражении $(x_1+\ldots+x_k)^n$ раскрыли скобки и привели подобные. Найдите коэффициент при $x_1^{i_1}\ldots x_k^{i_k}$. Этот коэффициент называется **мультиномиальным коэффициентом** и обозначается $C_n^{i_1,i_2,\ldots i_k}$ или $\binom{n}{i_1,i_2,\ldots i_k}$.

26 ∘ 10. Докажите, что $C_n^{i_1,\ldots,i_k} = C_n^{i_1}C_{n-i_1}^{i_2}C_{n-i_1-i_2}^{i_3}\ldots C_{n-i_1-i_2-\ldots-i_{k-1}}^{i_k}$ **а)** пользуясь формулой для числа сочетаний; **б)** не используя эту формулу.

26 ∘ 11. Докажите, что коэффициент при x^{10}, который получится после раскрытия скобок и приведения подобных в $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9+x^{10})^3$, равен числу решений уравнения $a+b+c=10$ в целых неотрицательных числах и найдите это число.

26 ∘ 12 (у). Докажите, что число способов разменять 20 долларов бумажками в 1, 2 и 5 долларов равно коэффициенту при x^{20} в

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{20})(1+x^2+x^4+x^6\ldots+x^{20})(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}).$$

26 ∘ 13 (у). Петя вычислил произведение $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$. Вася доказал, что, имея по одной гире в 1, 2, 4, 8 и 16 граммов, можно набрать любой вес от 1 до 31 грамма, причём единственным способом. Юра сказал Пете и Васе: «Вы решали одну и ту же задачу». Почему он так сказал?

26 ∘ 14. Придумайте задачу по комбинаторике, эквивалентную задаче о нахождении коэффициента при одночлене $x^3y^3z^3$ в многочлене $(x+y+z)^9$, и решите её.

26 ∘ 15. Докажите, что для любого неотрицательного числа h верны неравенства

а) $(1+h)^n \geqslant 1+nh$;

б) $(1+h)^n \geqslant 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3$.

26 ∘ 16. Найдите такое натуральное число $n>1$, для которого верны неравенства: **а)** $1{,}001^n > 1000$; **б)** $1{,}001^n > 100n$; **в)** $0{,}999^n < 0{,}001$; **г)** $1{,}001^n > n^2$.

26 ∘ 17 (у). Почему равенства $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$ похожи на строки треугольника Паскаля? Найдите с помощью треугольника Паскаля 11^6.

26 ∘ 18. Вычислите с помощью бинома Ньютона и треугольника Паскаля 1001^{10}.

26 ∘ 19 (у). С помощью бинома Ньютона раскроем скобки в многочлене $(1+x)^{n+m}$. Теперь раскроем скобки отдельно в каждом из выражений $(1+x)^n$ и $(1+x)^m$, после чего перемножим их. **а)** Какой получится коэффициент при x^k в каждом из случаев? **б)** Исходя из данных вычислений, докажите равенство $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0$.

По аналогии с предыдущей задачей решите следующие 4 задачи.

26 ∘ 20. Исходя из того, что C_n^k — коэффициент при x^k у многочлена $(1+x)^n$, докажите, что $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$.

26 ∘ 21. Исходя из того, что C_n^k — коэффициент при x^k у многочлена $(1+x)^n$, докажите, что $C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$.

26 ∘ 22. Исходя из того, что C_n^k — коэффициент при x^k у многочлена $(1+x)^n$, докажите, что $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$.

26 ∘ 23. Исходя из того, что C_n^k — коэффициент при x^k у многочлена $(1+x)^n$, докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.

26 ∘ 24. Из задачи про обеды известно, что $0\cdot C_n^0 + 1\cdot C_n^1 + \ldots + n\cdot C_n^n = n\cdot 2^{n-1}$. Попробуйте найти формулу для суммы

$$0\cdot C_n^0\cdot x^0 + 1\cdot C_n^1 x^1 + \ldots + n\cdot C_n^n x^n$$

при произвольном x. Задача про количество съеденных блюд будет являться частным случаем этой формулы при $x=1$.

Вероятностное пространство. События. Вероятности.

Определение 5.1. Элементарным исходом ω называется любой из возможных результатов случайного эксперимента.
Определение 5.2. Вероятностное пространство $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – множество всех элементарных исходов данного случайного эксперимента.
Определение 5.3. Событием называется любое подмножество вероятностного пространства.
Пример 5.1. Производится следующий случайный эксперимент: на игровое поле бросаются две различные игральные кости, количество очков, выпавших на первой и на второй костях, записываются. Требуется описать все элементарные исходы этого случайного эксперимента. Вероятностное пространство состоит из 36 элементарных исходов вида (i, j), где i, j меняются от 1 до 6. Элементарному исходу (i, j) соответствует неделимое событие «на первой игральной кости выпало i очков, на второй игральной кости выпало j очков». Для данного вероятностного пространства можно рассмотреть более сложные события. Например, событие «на первой игральной кости выпало 3 очка» может быть выражено через данное вероятностное пространство как множество из шести элементарных исходов: $\{(3, j) \mid j = 1..6\}$.

В некоторых случайных экспериментах мы, опираясь на наши бытовые представления, полагаем, что шансы появления любого из элементарных исходов одинаковы. В этом случае говорят, что все элементарные исходы равновероятны.

Для пространства с равновероятными исходами введем следующее
Определение 5.4. Вероятность события $A \subset \Omega$ – отношение количества элементарных исходов во множестве A к общему количеству элементарных исходов в вероятностном пространстве Ω. Другими словами, $\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

В случае пространства с равновероятными исходами получается, что вероятность любого из исходов равна $\frac{1}{|\Omega|}$, а сумма всех вероятностей равна 1.

Задачи

При решении задач нужно четко указывать, какое рассматривается вероятностное пространство, из каких элементарных исходов оно состоит, а также из каких элементарных исходов состоят те или иные события.

Задача 5.1. **а)** Постройте вероятностное пространство для подбрасывания двух симметричных монеток. Как в этом вероятностном пространстве выглядит событие «выпал хотя бы один орел»? Вычислите вероятность этого события. **б)** Постройте вероятностное пространство для подбрасывания трех симметричных монеток. Выполните те же операции, что и в пункте а). **в)** Постройте вероятностное пространство для подбрасывания двух монеток и одной игральной кости. Опишите через вероятностное пространство событие «не выпало ни одного орла и не выпала шестерка». Вычислите его вероятность.

Задача 5.2. Рассмотрим вероятностное пространство для двух игральных костей. Какова вероятность события, состоящего из одного элементарного исхода? Из каких элементарных исходов состоит событие $A = \{$произведение очков равно 8$\}$? Какова вероятность этого события?

Задача 5.3. На экзамене есть 25 вопросов, случайно выбираются два из них. Какова вероятность **а)** получить вопросы 1 и 2? **б)** получить вопрос 3? **в)** не получить вопрос 25? **г)** сначала вытащить вопрос 17?

Задача 5.4. Бросается подряд 10 монеток. При помощи вероятностного пространства вычислите **а)** вероятность того, что все монетки выпали орлами; **б)** вероятность того, что число орлов не превосходит 9; **в)** вероятность того, что число орлов равно 3; **г)** вероятность того, что число орлов не превосходит 4.

Задача 5.5. Тетя Полли велела Тому покрасить забор из десяти досок. Том пошел в сарай и нашел там три банки с красками: синей, зеленой и белой. Каждый из десяти мальчиков, помогавших Тому, красил свою доску забора в свой любимый цвет. Найдите вероятность того, что белая краска осталась неиспользованной.

Задача 5.6. Тест состоит из 10 вопросов, на каждый из которых есть 4 варианта ответа. Двоечник Вася отвечает на вопросы «наобум». Какова вероятность, что он ответит правильно **а)** на все 10 вопросов? **б)** ровно на 5 вопросов? **в)** не менее, чем на 5 вопросов?

Задача 5.7. В соревнованиях по кубковой системе участвуют 2^n спортсменов. Силы спортсменов различны и постоянны, а более сильный всегда побеждает более слабого. Найдите вероятность того, что при случайной жеребьевке в финале встретятся два самых сильных спортсмена.

Задача 5.8. Во дворе Али-Бабы стоят сорок кувшинов: восемь рядов по пять кувшинов в каждом. В двадцати пяти из этих кувшинов сидят разбойники, а остальные – пусты. Фатима выходит во двор и поливает кипятком кувшины первого ряда. Как велики ее шансы ошпарить хотя бы одного разбойника?

Задача 5.9. Найдите наименьшее число костей, при подбрасывании которых вероятность выпадения хотя бы одной шестерки будет не менее $1/2$.

Задача 5.10. Из урны, в которой лежат 3 красных и 5 белых шаров, наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность того, что **а)** вытащены красный и белый шары? **б)** вытащены только красные шары? **в)** красных шаров не вытащено?

Задача 5.11. В урне находится 10 белых и 7 черных шаров. Наугад выбирается 8 шаров. Какова вероятность вытащить ровно 5 белых шаров, если после взятия из урны шар **а)** не возвращается назад; **б)** возвращается назад.

Задача 5.12. У Пети есть несколько одинаковых тетраэдров[1], три грани которых красные, а четвертая – синяя. Найдите вероятность того, что при подбрасывании трех таких тетраэдров **а)** все три упадут на стол синей гранью; **б)** хотя бы один из тетраэдров упадет на стол красной

[1] Тетраэдр - правильная треугольная пирамида.

гранью; **в)** не менее двух тетраэдров упадут на стол красной гранью.

Задача 5.13. Члены Ордена Хаоса всегда оставляют последнее слово в принятии решений случайностям. Для принятия важных решений используется «голосование шаров»: каждый член ордена, кто за принятие решение складывает в урну белый шар, те кто против – черный шар. Чтобы решение было принято, два из трех случайно вынутых из урны шаров должны быть белыми. **а)** Какова вероятность принять решение, если в урне 15 белых шаров и 5 черных? **б)** Есть 10 членов Ордена Хаоса, 8 из которых всегда принимают верные решения, а 2 всегда ошибаются. Какова вероятность принять верное решение при помощи голосования шаров? **в)** Какова вероятность принять ошибочное решение при помощи голосования шаров в пункте б)?

Задача 5.14. Мудрец и дурак играют в такую игру. Мудрец загадывает пятизначное число, все цифры которого различны и нечетны. Дурак загадывает пару различных нечетных цифр и пару мест (из пяти возможных), на которых они могут стоять. Затем игроки «раскрывают карты», и, если в числе мудреца на местах указанных дураком стоят указанные им же цифры, то выигрыш получает дурак. В противном случае его получает мудрец. Найдите вероятность того, что дурак выиграет.

Задача 5.15. Из множества $\{1,\dots,n\}$ наугад взяли число. Какова вероятность того, что это число делится на **а)** 7; **б)** 7 и 11 одновременно; **в)** 12 и 28 одновременно?

Задача 5.16. Из множества $\{1,\dots,n\}$ извлекли два случайных подмножества A, B мощности k каждое. Какова вероятность того, что $A \cap B \neq \emptyset$?

Задача 5.17. **а)** Какова вероятность того, что хотя бы у двух учеников в классе из 16 школьников совпадут дни рождения? **б)** Какое наименьшее число учеников должно быть в классе, чтобы вероятность совпадения дней рождения хотя бы у двух учеников была не менее 1/2? (Разрешается посчитать на компьютере.)

Задача 5.18. Из множества букв русского алфавита (всего 33 буквы) случайно выбирают 12 букв. Буквы могут совпадать. Иными словами, берем из 33 букв одну наугад, потом из тех же 33 – вторую, и так далее. Возникает двенадцатибуквенное «слово». Какова вероятность того, что в этом слове есть одновременно набор букв, из элементов которого можно составить слово «статистика», и набор букв, из элементов которого можно составить слово «жаба»?

Задача 5.19. Из множества костей домино наугад взяли две кости. Какова вероятность того, что одну из них можно «приложить» к другой в соответствии с правилами игры?

Операции над событиями. Условные вероятности. Независимость.

Операции над событиями:
Происходят и событие A, и событие B – пересечение множеств: $A \cap B$.
Происходит хотя бы одно из событий A и B – объединение множеств: $A \cup B$.
Происходит событие A, а событие B не происходит – разность множеств: $A \setminus B$.
Событие A не происходит – дополнение множества: $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Определение 7.1. Условной вероятностью события A при условии события B называется величина $\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$ для событий B таких, что $\mathsf{P}(B) > 0$.

Определение 7.2. События A и B называются независимыми, если $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$ или $\mathsf{P}(B) = 0$.

Задача 7.1. События A и B называются независимыми, если $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)$.
Задача 7.2. На некотором вероятностном пространстве заданы события:
$A = \{\text{Загугрлики транклюкируются}\}, B = \{\text{Загугрлики вертепыхаюся}\}, C = \{\text{Загугрлики спят}\}$.
Выразите через эти события следующие события:

а) Загугрлики транклюкируются или вертепыхаются.
б) Загугрлики вертепыхаются и спят.
в) Загугрлики транклюкируются и вертепыхаются, но не спят.
г) Загугрлики либо транклюкируются, либо вертепыхаются (но не делают этого одновременно).

Задача 7.3. В клетке находятся храпсики четырех видов: красные, зеленые, синие и белые. Несколько храпсиков сбежали. На некотором вероятностном пространстве заданы события A={среди сбежавших есть красные храпсики}, B={среди сбежавших есть зеленые храпсики}, C={среди сбежавших есть синие храпсики} и D={среди сбежавших есть белые храпсики}, постройте события

а) E={среди сбежавших есть красные и белые, а также зеленые либо синие}
б) F={среди сбежавших есть либо красные, либо белые, либо зеленые и синие}
в) G={среди сбежавших есть красные, но нет синих храпсиков}

Задача 7.4. Из множества $\{1, \ldots, n\}$ случайно выбирается число. Событие A – «число четное», B – «число делится на 5», C – «число делится на 7». Что из себя представляют события **а)** $A \cap B \cap C$; **б)** $C \cap (B \setminus A)$; **в)** $C \cup (A \cap B)$?
Задача 7.5. Для пространства равновероятных исходов

а) докажите формулу сложения вероятностей в случае, если события A и B не пересекаются ($A \cap B = \emptyset$): $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$;
б) Докажите формулу сложения вероятностей в общем случае:

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B).$$

в) Выясните, как соотносятся $\mathsf{P}(A)$ и $\mathsf{P}(B)$, если из события A всегда следует B.
г) Выразите вероятность $\mathsf{P}(A \setminus B)$ через вероятности $\mathsf{P}(A)$ и $\mathsf{P}(A \cap B)$.

Замечание: Решения пунктов а)-г) останутся справедливыми и в случае произвольного вероятностного пространства.
Задача 7.6. В семье двое детей. Какова вероятность того, что в семье два мальчика, если известно, что один из детей мальчик?
Задача 7.7. Вероятность поразить цель при отдельном выстреле равна 0,2. Какова вероятность попасть в цель, если в 2% случаев не происходит из-за осечки.
Задача 7.8. Сумма очков на двух выкинутых костях оказалась равной 10. Какова при этом вероятность того, что на одной из костей выпало 4 очка?

Задача 7.9. Трейдер Чен, как и трейдер Лу, покупает акцию с вероятностью $\frac{2}{3}$. Вероятность того, что Чен купит акцию, при условии, что Лу не купит, составляет 1. С какой вероятностью Чен купит акцию при условии, что Лу купит?

Задача 7.10. Из промежутке $\{1, 2, ...10\}$ взяли два числа. Они оказались взаимно простыми. Какова при этом вероятность того, что одно из них простое? Можно взять числа поменьше.

Задача 7.11. **а)** В барабан шестизарядного револьвера вставлено подряд два патрона. Трейдер Чен раскручивает барабан и пытается застрелиться – выстрела не происходит, он отдает револьвер трейдеру Лу. Найдите вероятность выстрела при условии предшествующей осечки. Стоит ли трейдеру Лу после этого раскручивать барабан заново, если он также хочет застрелиться и не объяснять начальству, куда делись 2 млрд. юаней? **б)** Та же ситуация с хитрым китайским пистолетом, для которого известно, что $\mathsf{P}(\{\text{произошел выстрел}\}) = 1/3$, а $\mathsf{P}(\{\text{произошло два выстрела подряд}\}) = 1/4$.

Задача 7.12. Докажите эквивалентность определений 7.2 и 7.1.

Задача 7.13. Какие пары событий из нижеперечисленных являются зависимыми, а какие — нет?

- **а)** Двое играют в игру «камень-ножницы-бумага». Событие $A = \{\text{первый выкинул «камень»}\}$, $B = \{\text{второй выкинул «бумагу»}\}$.
- **б)** Два раза кидается монетка. Событие $A = \{\text{в первый раз выпал } x\}$, $B = \{\text{во второй раз выпал } y\}$. ($x$, y - фиксированы (орёл или решка)).
- **в)** Монетка кидается сто раз. Событие $A = \{\text{каждый раз выпадает орёл}\}$, $B = \{\text{хотя бы один раз выпал орёл}\}$, $C = \{\text{хотя бы один раз выпадает решка}\}$[1].
- **г)** 1001 раз вращают рулетку. Событие $A = \{\text{первые 1000 раз шарик попадает на красное}\}$, $B = \{\text{последний раз шарик попадает на чёрное}\}$.
- **д)** Случайно выбирается число от 1 до 100. Событие $A = \{\text{число делится на 2}\}$, $B = \{\text{число делится на 5}\}$, $C = \{\text{число делится на 7}\}$[2].
- **е)** Случайным образом из $\{1, \ldots, n\}$ выбирается множество A. $A_x = \{x \text{ лежит в } A\}$, $A_y = \{y \text{ лежит в } A\}$.

Задача 7.14. Верно ли, что если события A и B независимы, то независимы также пары событий **а)** A и $\overline{B}$; **б)** $\overline{A}$ и B; **в)** $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

Задача 7.15. Даны вероятности независимых событий A и B: $\mathsf{P}(A) = t$, $\mathsf{P}(B) = s$. Найти вероятность события **а)** $A \setminus B$, **б)** $(A \cup B) \setminus (A \cup B)$.

Задача 7.16. В телеигре ведущий предлагает игроку угадать, за какой из закрытых дверей находится автомобиль. Играющий выбирает одну из дверей. После этого ведущий, зная, где находится автомобиль, открывает одну из двух оставшихся дверей, за которой автомобиля нет. Далее ведущий дает игроку возможность поменять свое решение и выбрать снова любую из двух закрытых дверей. Имеет ли смысл игроку менять свое решение?

Задача 7.17. В жюри из трех человек окончательное решение выносится большинством голосов. Председатель жюри и второй человек выносят решение независимо друг от друга с вероятностью 0,9 и 0,7 соответственно, а третий для вынесения решения бросает монету. Как изменится для жюри вероятность вынесения верного решения, если третий начнет копировать решение председателя?

Задача 7.18. Васе обещают приз, если он выиграет подряд две теннисные партии против своего тренера и своего приятеля по одной из схем: тренер-приятель-тренер или приятель-тренер-приятель. Тренер играет лучше приятеля. Какую схему стоит выбрать Васе?

Задача 7.19. Верно ли, что для любых трех событий, попарно независимых между собой, выполняется равенство $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{P}(C)$?

Задача 7.20. Существуют ли три попарно зависимые события, для которых выполнено равенство $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{P}(C)$?

---

[1]здесь нужно проверить зависимость всех трёх пар событий

[2]здесь тоже

Задача 7.21. События A и B называются **несовместными**, если $A \cap B = \varnothing$. Существуют ли несовместные и зависимые события? А несовместные и независимые? Совместные и независимые? Совместные и зависимые?

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Теорема 8.1. Пусть $B_1, \ldots, B_n$ – такие непересекающиеся события на пространстве Ω, что $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$. Тогда справедливы следующие формулы:

1. Формула полной вероятности $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|B_1)\,\mathsf{P}(B_1) + \ldots + \mathsf{P}(A|B_n)\,\mathsf{P}(B_n)$.

2. Формула Байеса $\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\mathsf{P}(A|B_1)\mathsf{P}(B_1)+\ldots+\mathsf{P}(A|B_n)\mathsf{P}(B_n)}$.

Задача 8.1. Докажите формулы **а)** полной вероятности; **б)** Байеса.

Задача 8.2. В урне 3 белых и 2 чёрных шара. Когда игрок извлекает три случайных шара, мастер игры смотрит на количество вытащенных белых шаров. Если вытащен один белый шар, мастер игры подкидывает игральную кость. При выпадении на кости шестёрки он отдаёт игроку конфету, в противном случае ничего не отдаёт. Если игроком было вытащено ровно два белых шара, то мастер игры подкидывает симметричную монетку. На этот раз мастер игры отдаёт конфету при выпадении орла. В случае если игрок вытащил сразу три белых шара, мастер игры отдаёт ему конфету просто так. Найдите вероятность выиграть конфету у мастера игры.

Задача 8.3. В двух урнах лежит по 5 белых и 3 чёрных шара. Из первой урны случайно вынимается шар и перекладывается во вторую. После этого из второй урны берётся случайный шар. Какова вероятность того, что он белый?

Задача 8.4. Имеются три урны: в первой – 3 белых и 2 черных, во второй – 2 белых и 3 черных, в третьей – 5 белых шаров. Наугад выбирается урна и из нее извлекается один шар. Этот шар оказался белым. Найдите вероятность того, что шар вынут из первой урны.

Задача 8.5. Имеются три урны. В первой урне 5 белых шаров и 3 чёрных шара; во второй – 4 белых шара и 2 чёрных шара; в третьей – 7 белых шаров и 1 чёрный шар. Сначала из первой урны наугад извлекается шар и кладётся во вторую урну. Затем из второй урны случайным образом вынимаются два шара и кладутся в третью урну. Найдите вероятность того, что при выборе с возвращением четырёх шаров из третьей урны по крайней мере два из них будут белыми.

Задача 8.6. Имеется 10 белых и 10 черных шаров. Вам предлагают каким-то образом разложить эти шары по двум урнам. Далее случайно выбирается одна из урн, а из нее вытаскивается шар. Если он оказывается белый, то вы получаете приз. Как нужно разложить шары по урнам, чтобы вероятность выиграть приз оказалась наибольшей?

Задача 8.7. Предположим, что в условии предыдущей задачи будет n белых и n черных шаров. **а)** Докажите, что при любом $n > 1$ их можно разложить по урнам таким образом, чтобы вероятность вытащить белый шар была больше $1/2$. **б)** Докажите, что при любом способе разложения шаров вероятность вытащить белый шар будет менее $3/4$. **в)** Каким образом нужно разложить шары по урнам, чтобы эта вероятность была наибольшей?

Задача 8.8. В двух пакетах по 20 конфет одинаковой формы, в первом пакете 5 конфет с начинкой, а во втором — 8. Наугад выбранная конфета оказалась с начинкой. Найдите вероятность того, что она была вынута из второго пакета.

Задача 8.9. Имеются три колоды в 32 карты, две — в 36 и одна — в 52. Случайно выбирается колода и из нее одну карту. Какова вероятность того, что вынутая карта окажется тузом?

Задача 8.10. Два охотника одновременно выстрелили одинаковыми пулями в медведя. Медведь был убит одной пулей. Как поделить охотникам шкуру, если вероятность попадания у первого — 0,3, а у второго — 0,6?

Задача 8.11. Петя делает опечатку при наборе текста с вероятностью $1/2$, Вася – с вероятностью $1/10$. Вероятность того, что Пете доверят набирать текст на компьютере, равна $5/8$, Васе – $3/8$. В тексте найдена опечатка; какова вероятность того, что её допустил Петя?

Задача 8.12. Три завода выпускают одинаковые изделия. Первый производит 50% всей продукции, второй — 20%, третий — 30%. Первый завод выпускает 1% брака, второй — 8% брака, третий — 3% брака. Выбранное наугад изделие бракованное. Какова вероятность того, что оно со второго завода?

Задача 8.13. По каналу связи передаётся одна из последовательностей букв: ЖЖЖЖ (с вероятностью p_1), АААА (с вероятностью p_2), ББББ (с вероятностью p_3), $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Каждая из трёх букв не претерпевает изменений с вероятностью $\frac{1}{4}$, а с вероятностью $\frac{3}{8}$ принимается за каждую из двух других букв. Буквы искажаются независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что было передано ББББ, если получено было ЖАБА.

Задача 8.14. Два снайпера одновременно стреляют по цели. Первый попадает с вероятностью $1/2$, второй – с вероятностью $1/3$. Какова вероятность поразить цель?

Задача 8.15. Два снайпера при поддержке наводчика стреляют по цели. Если наводчик успешно произвёл наведение, вероятность того, что первый снайпер попадёт в цель, равна $2/3$, а вероятность того, что второй снайпер попадёт в цель, равна $1/2$. Если наводчик не смог произвести наведение, вероятности попадания составляют $1/3$ и $1/4$ соответственно. Какова вероятность поразить цель, если наводчик успешно выполняет наведение в 60% случаев?

Биномиальные вероятности

Определение 9.1. Испытанием Бернулли назовём случайный эксперимент с двумя исходами: успехом и неудачей. Вероятность успеха обычно обозначается p, вероятность неудачи – $q = 1 - p$. Удобной интерпретацией испытания Бернулли является подкидывание несимметричной монетки.

Как отдельные испытания Бернулли, так и серии таких испытаний, очень часто встречаются в жизни в виде некоторых событий, которые могут произойти с вероятностью p или не произойти с вероятностью q. Так, если мы отвечаем случайным образом на вопрос теста с четырьмя вариантами ответа, то мы либо отвечаем правильно с вероятностью $1/4$, либо неправильно с вероятностью $3/4$. Случайно взятый прибор может оказаться либо бракованным с некоторой вероятностью p, либо исправным с вероятностью q. Если мы играем в казино, то с некоторой вероятностью наша ставка выигрывает, а с некоторой – проигрывает. Далее можно рассматривать серии таких испытаний и интересоваться количеством успехов в них: какова вероятность получить положительную оценку, если отвечать наугад на все вопросы теста; какова вероятность обнаружить в коробке не более одного бракованного прибора; какова вероятность, что из нескольких ставок выиграет минимум две.

Задача 9.1. Производится n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Найдите вероятность того, что ровно m испытаний закончатся успехом.

Задача 9.2. Аня делает ошибку в сложном слове в диктанте с вероятностью $\frac{1}{10}$. Если в диктанте допущено хотя бы 2 ошибки, ставится оценка 4, если 5 ошибок – оценка 3, если 8 ошибок – оценка 2. Найдите вероятности того, что Аня получит **а)** 5; **б)** 4 или 3; **в)** 2, если всего в диктанте 12 сложных слов, а в простых словах Аня не ошибается.

Задача 9.3. В классе 16 человек. На входе в школу имеются два гардероба. Школьники равновероятно раздеваются либо в одном, либо в другом. Найдите вероятность того, что в правом гардеробе курток школьников этого класса втрое больше, чем в левом.

Задача 9.4. Вероятность, что изделие окажется бракованным, равна 0,005. Запишите выражение для вычисления вероятности того, что из 10000 наугад взятых изделий окажется бракованными **а)** ровно 40; **б)** не более 40.

Задача 9.5. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сколько надо класть в коробку сверл, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, в ней было не менее 100 исправных. (Вычисления предлагается провести с помощью компьютера.)

Задача 9.6. Десять членов Ордена Хаоса по очереди складывают в урну шары чёрного или белого цветов. Каждый из них кладет в урну чёрный шар с вероятностью, равной той, с которой две игральные кости выпадают одинаково. После этого из урны достают три шара. Какова вероятность того, что хотя бы 2 из них белые?

Задача 9.7. В условиях предыдущей задачи белым оказался лишь один шар из вытащенных трех. Какова вероятность того, что больше половины принимавших участие в ритуале положили в урну чёрный шар?

Задача 9.8. (О тестах ЕГЭ) Тест состоит из 12 вопросов, каждый из которых имеет 4 варианта ответов. Школьник отвечает на вопросы наобум. Какова вероятность получить положительную оценку, если для ее получения достаточно ответить правильно на 4 вопроса? Как изменится эта вероятность, если школьник точно знает ответ на один вопрос?

Задача 9.9. (О трактовке результатов тестов) Предположим, что в условиях предыдущей задачи учащийся ответил верно на 9 вопросов, при этом на те вопросы, ответы на которые он знает, он отвечает верно, а на остальные отвечает наобум. Какова вероятность того, что школьник знал ответы хотя бы на 7 вопросов? Хотя бы на 8 вопросов?

Задача 9.10. (О соответствии оценки действительности) Как и ранее положим, что школьник верно отвечает на вопросы теста, если знает ответ, в противном случае отвечает наобум. Оценка «3» ставится за 4-6 верных ответов. Какова вероятность того, что школьник, получивший «3» действительно знал ответы на 4-6 вопросов теста?

Задача 9.11. (Наборы случайных множеств) Рассмотрим множество $R = \{1, \ldots, n\}$ и будем производить последовательные испытания Бернулли. Если на ν-том шаге неудача – вынимаем элемент ν из R. Иначе – не вынимаем. В результате получается множество A_1. Точно так же строим $A_2, \ldots, A_m$. Найдите $\mathsf{P}\left(A_i \bigcap A_j = \varnothing \ \ \forall\, i, j\right)$.

Задача 9.12. Найдите $\mathsf{P}\left(|A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_m| = k\right)$.

Задача 9.13. Найдите $\mathsf{P}\left(\forall\, i_1, \ldots, i_r \ \ A_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap A_{i_r} = \varnothing\right)$ ($r \leqslant m$ фиксировано).

Задача 9.14. Найдите $\mathsf{P}\left(A_i \bigcap A_j \subseteq A_k \subseteq A_i \bigcup A_j\right)$ (i, j, k фиксированы).

Комбинаторика

Задача 1.1. В языке одного древнего племени было 6 гласных и 8 согласных, причем при составлении слова гласные и согласные непременно чередовались. Сколько слов из девяти букв могло быть в этом языке?

Задача 1.2. Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

Задача 1.3. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а, когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнил, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наименьшее количество вариантов нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру? Числа 23 и 37 можно увидеть и в числе 237.

Задача 1.4. **а)** Сколькими способами можно составить шеренгу из n солдат? **б)** Сколькими способами можно составить хоровод из n девушек? **в)** Сколькими способами можно составить ожерелье из n различных драгоценных камней?

Задача 1.5. Двадцать школьников пришли в столовую. Сколькими различными способами они могут выстроиться в очередь, если: **а)** Сережа обязательно стоит первым, Андрей – четвертым, а Володя – седьмым? **б)** Сережа, Андрей и Володя непременно занимают первую, четвертую и седьмую позиции в очереди (в произвольном порядке)? **в)** Сережа, Андрей и Володя занимают позиции с номерами i, j, k (опять-таки, в произвольном порядке), причем $j - i = 3$, $k - j = 3$?

Задача 1.6. **а)** Сколькими различными способами можно поставить 8 одинаковых ладей на шахматную доску, так, чтобы они не били друг друга? **б)** Сколькими различными способами можно поставить 8 занумерованных ладей на шахматную доску, так, чтобы они не били друг друга?

Задача 1.7. **а)** Сколько существует последовательностей длины n, составленных из нулей и единиц («(0,1)-последовательностей»)? **б)** Сколько существует (0,1)-последовательностей длины n с ровно k единицами?

Задача 1.8. Сколькими способами можно разбить группу из $2n$ школьников на две команды, в каждой из которых ровно n учеников?

Задача 1.9. На плоскости даны n точек, $n \geqslant 2$. **а)** Сколько имеется отрезков с концами в этих точках? **б)** Сколько существует различных картинок, на которых некоторые (быть может даже, все) точки соединены отрезками, а некоторые (быть может даже, все) не соединены отрезками?

Комбинаторика - 2

Задача 2.1. (1 балл) Дайте определение числа сочетаний C_n^k. Докажите, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Задача 2.2. **а)** (1 балл) Сколько существует различных последовательностей из m единиц и k знаков «+»? **б)** (1 балл) Сколько существует решений уравнения $a + b + c + d = 20$ в целых неотрицательных числах? **в)** (1 балл) А в натуральных числах?

Задача 2.3. (2 балла) В кондитерском магазине продаются 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Задача 2.4. В языке одного племени было 5 букв. Два слова в этом языке считались одинаковыми, если они отличались только порядком букв. **а)** (2 балла) Сколько можно было составить различных десятибуквенных слов на этом языке? **б)** (3 балла) Сколько можно было составить различных фраз на этом языке, если в каждой фразе должно было быть 6 различных десятибуквенных слов? Знаки препинания не учитываются.

Задача 2.5. (4 балла) В языке одного племени было 10 букв. Два слова в этом языке считались одинаковыми, если они отличались только порядком букв. И две фразы в этом языке считались одинаковыми, если они отличались только порядком слов. Любое слово в этом языке состояло из четырех различных букв. Знаков препинания во фразах не было. Сколько можно было составить на этом языке фраз, если в каждой фразе должно было быть шесть слов и в каждом слове фразы должна была присутствовать хотя бы одна из первых двух букв алфавита? (Ответы в виде сумм не принимаются.)

Задача 2.6. (2 балла) У мужа 12 знакомых – 5 женщин и 7 мужчин. У жены тоже 12 (других) знакомых – 7 женщин и 5 мужчин. Сколькими способами можно так составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 – жена? (Ответ можно не вычислять и оставить в виде суммы.)

Задача 2.7. (2 балла) Сколькими способами можно так выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт, чтобы среди них были все 4 масти?

Задача 2.8. (4 балла) Сколькими способами можно так расселить 10 школьников по пяти номерам гостиницы, чтобы ни один номер не пустовал? (Ответ можно не вычислять и оставить в виде суммы.)

Задача 2.9. На книжной полке стоят 40 книг. Сколькими способами их можно так переставить, чтобы **а)** (1 балл) три тома сочинений А.С. Пушкина, имеющиеся среди них, расположились в правильном порядке (но не обязательно вплотную друг к другу)? **б)** (2 балла) те же тома по-прежнему шли в порядке нумерации, но никакие два из них друг к другу не примыкали?

Задача 2.10. (4 балла) На клетчатой бумаге изображен квадрат, $n \times n$ клеток. Сколько в этом квадрате можно нарисовать различных «свастик»? Каждая из «свастик» должна «вписываться» в прямоугольник, причем все 4 конца «свастики» должны являться угловыми клетками этого прямоугольника. (Ответы в виде сумм не принимаются.)