

# Indice

Le funzioni.....	3
Che cos'è una funzione?.....	3
La funzione y la variabile x. ....	3
Alcune semplici funzioni e la loro rappresentazione geometrica. ....	3
Funzioni continue e funzioni discontinue.....	6
Funzione crescente e decrescente.....	7
Funzioni positive e negative in un intervallo.....	8
Massimi, minimi e flessi di una funzione continua	
.....	10
Derivate.....	12
Misura di un incremento regolare od uniforme. ....	13
La funzione di proporzionalità diretta .....	17
La funzione lineare .....	19
Misura di un incremento non regolare o non uniforme. ....	25
Pendenza di una strada .....	25
La velocità istantanea.....	26
L'ingrassamento istantaneo.....	27
Definizione di derivata e di retta tangente al grafico in un punto.....	28
Calcolo delle derivate.....	32
Formule per calcolare le derivate.....	36
.....	36
.....	36
.....	36
Somme, prodotti, quozienti.....	39
Riassunto formule.....	42
Curva delle pendenze come derivata della funzione altitudine.....	44
Confronto tra termini matematici e linguaggio comune.....	46
Ingrassamento come derivata della funzione peso.....	47
Arricchimento come derivata della funzione patrimonio.....	49
Studio del segno della derivata y'.....	56
Studio del segno della derivata y".....	58
.....	59
Studio di funzioni polinomiali.....	60
Funzioni quadratiche .....	60
Funzioni di terzo e quarto grado.....	62
Problemi di max e minimo	
.....	66
Problemi di massimo e minimo di secondo grado.....	68
Problemi di massimo e minimo di terzo grado.....	70
Funzione esponenziale.....	71
Crescita dei batteri.....	72
La funzione esponenziale	
.....	74
Capitalizzazione .....	75
La funzione uguale alla sua derivata : $y=e^x$ .....	77
Funzioni esponenziali della forma $y=a \cdot b^x$ .....	80
Funzioni goniometriche.....	85
Definizione geometrica di seno e coseno .....	85
Angoli misurati in radianti.....	86

Vantaggi del radiante.....	87
I radianti per calcolare la velocità angolare .....	88
Modelli periodici.....	92
Formula generale .....	95
Derivata delle funzione seno e coseno.....	97
Rappresentazione grafica di funzione nella forma $y=a \cdot \sin(bx)$ .....	98
Funzione integrale.....	99
Dagli incrementi regolari alla funzione integrale .....	100
Dai quadretti alla funzione.....	104
Integrale indefinito di funzioni polinomiali.....	107
Esercizi sulle applicazioni del concetto di integrale alla fisica.....	108
Calcolo di aree e integrale definito.....	109
Area compresa tra 2 curve.....	111
Solido di rotazione.....	112
Volume di un cono.....	115
Volume di una sfera.....	115

# Le funzioni

## Che cos'è una funzione?

La lunghezza d'una sbarra di ferro dalla sua temperatura; il quadrato d'un numero dipende da questo numero, la spesa di carburante dipende dai km effettuati. Ecc.

**Qualsiasi grandezza che dipende da un'altra grandezza è funzione di quest'ultima.**

In questa definizione non c'è altro di nuovo che l'idea di dipendenza:

- Una funzione è una grandezza;
- Una funzione è una grandezza variabile;
- Essa dipende da un'altra grandezza.

Quando indicherete una funzione, abbiate cura di aggiungere di che cosa.

Se io dicessi: l'altezza d'un arbusto è una funzione, l'informazione sarebbe insufficiente.

E come se dicessi: l'altezza di un arbusto dipende da qualche cosa, senza aggiungere da che cosa dipende.

Dirò dunque: l'altezza di un arbusto è funzione del tempo (cioè dipende dal tempo); allora non c'è più dubbio alcuno.

## La funzione y la variabile x.

Quando due grandezze dipendono l'una dall'altra, si può considerare a piacimento la prima come funzione della seconda o la seconda come funzione della prima.

Ma è uso di chiamare funzione la grandezza che costituisce l'oggetto di studio e di chiamare variabile quella che fa una parte accessoria.

Quando considero la funzione altezza di un arbusto che dipende dal tempo, il mio scopo non è in genere di misurare come fugge il tempo per mezzo delle variazioni dell'arbusto, bensì di misurare le variazioni dell'arbusto con l'aiuto del tempo.

Chiamerò dunque funzione l'altezza dell'arbusto, e chiamerò variabile il tempo.

E consuetudine indicare con y la funzione e con x la variabile.

Chiamerò quindi y l'altezza dell'arbusto ed x il tempo. Dirò che a x anni l'arbusto misurava y metri d'altezza, e dirò che y è una funzione di x;

Ciò si scrive:  $y = f(x)$  e si legge: y è eguale a una funzione di x.

## Alcune semplici funzioni e la loro rappresentazione geometrica.

Immaginiamo un albero che cresce di un metro all'anno.

All'età di un anno misurerà un metro.

A 2 anni, 2 metri.

A 3 anni, 3 metri

E ad x anni, x metri.

Se ora chiamo y l'altezza in metri ed x il tempo in anni, questi due numeri saranno sempre eguali tra

loro, poichè l'albero avrà sempre tanti metri d'altezza quanti sono i suoi anni, e si avrà:

$$y = x;$$

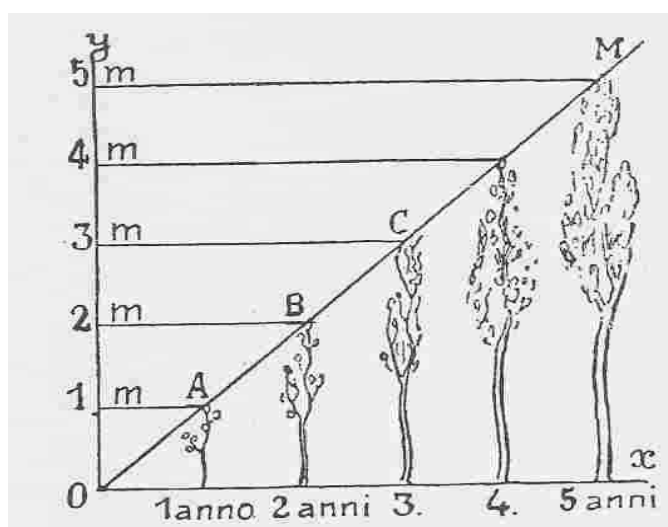
e questa la funzione algebrica che rappresenta l'altezza dell'albero.

Vediamo la rappresentazione geometrica di questa funzione. Sull'asse  $x$  (detto asse delle ascisse) si portano a partire da sinistra e verso destra, gli anni: 1 anno, 2 anni, ecc. (rappresenteremo ad esempio, il tempo di 1 anno con la lunghezza di 1 centimetro.)

Sull'asse  $y$  (detto asse delle ordinate) si portano dal basso in alto i metri: 1 metro, 2 metri, ecc.; adotteremo, ad esempio, la scala di 1 : 100, e quindi rappresenteremo la lunghezza di 1 metro con quella di 1 centimetro.

Per tutti questi punti si conducono le parallele agli assi, e si contrassegna con una lettera ciascun punto di intersezione.

Si ottiene il seguente grafico:



La linea OM, che riunisce i punti A, B, C... così ottenuti, rappresenta graficamente la funzione “altezza della pianta”

Spesso la linea che è rappresentazione grafica di una funzione si chiama il **diagramma della funzione o grafico della funzione**.

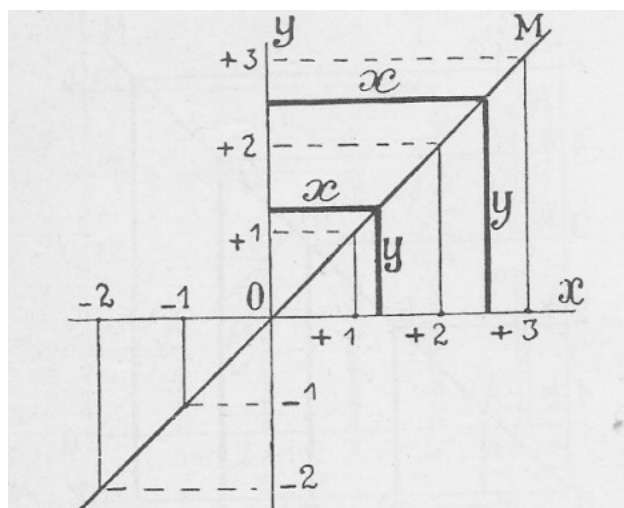
Nel caso in esame il diagramma è una retta.

Invece d'un albero che cresce di un metro all'anno, avremmo potuto considerare il caso di un ponte che si dilata di un cm per ogni grado di aumento di temperatura o di un pollo che ingrassa di un kg all'anno o di un patrimonio che aumenta di un euro al giorno.

In tutti questi casi avremmo trovato  $y=x$

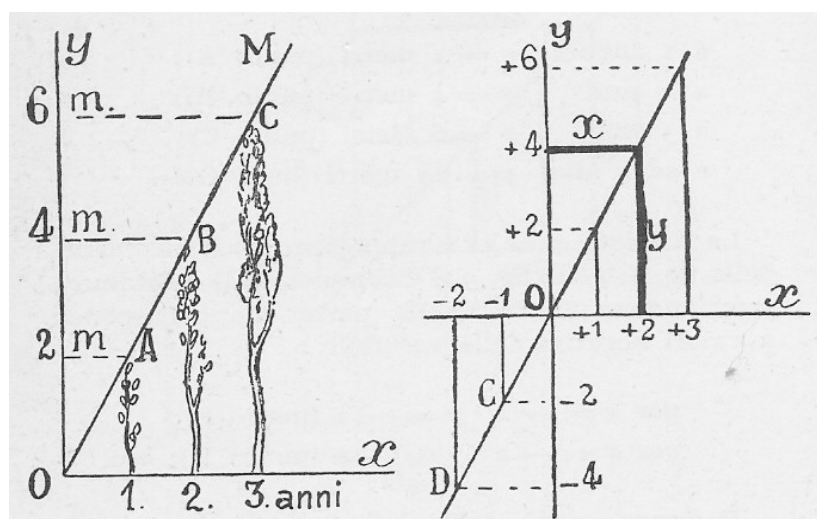
C'è quindi l'interesse a studiare la funzione  $y=x$  in generale poichè i risultati del nostro studio si possono applicare a questi casi e a tanti altri ancora.

Costruiamo quindi la retta che rappresenta la funzione  $y=x$ .



Si osserverà che a dei valori negativi di  $x$  corrispondono dei valori egualmente negativi di  $y$ . Il significato della linea è quindi più generale di quello dei casi sopra esposti.

Invece d'un albero che cresce di un metro all'anno avremmo potuto considerare il caso di un albero che cresce 2 metri all'anno ottenendo così la funzione  $y=2x$  che graficamente si rappresenta nel seguente modo.



In generale tutte le espressioni che contengono la  $x$  e dipendono da essa sono funzioni:

$$y=2x+3; \quad y=3/x+2 \quad y=2^x.$$

Noi prenderemo in considerazione solo alcuni tipi di funzione ovvero:

### **Funzioni polinomiali o funzioni razionali intere**

$$y=mx+q \quad \text{funzioni lineari}$$

$$y=ax^2+bx+c \quad \text{funzioni quadratiche}$$

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \quad \text{funzioni di terzo grado}$$

$$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \quad \text{funzioni di quarto grado}$$

Tra le funzioni polinomiali particolarmente importanti sono le funzioni di **proporzionalità diretta** della forma  $y=kx$ , dove  $k$  è la costante di proporzionalità diretta.

### Funzioni razionali fratte

Sono funzioni della forma  $y=N/D$ , dove  $N$  e  $D$  sono dei polinomi.

Esempio.

$$y = \frac{x^3 + 2x}{x - 1} \quad y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} \quad y = \frac{3}{x + 4}$$

Tra le funzioni razionali fratte particolarmente importanti sono le funzioni di **proporzionalità inversa** della forma  $y = \frac{k}{x}$ , dove  $k$  è la costante di proporzionalità inversa.

### Funzioni esponenziali

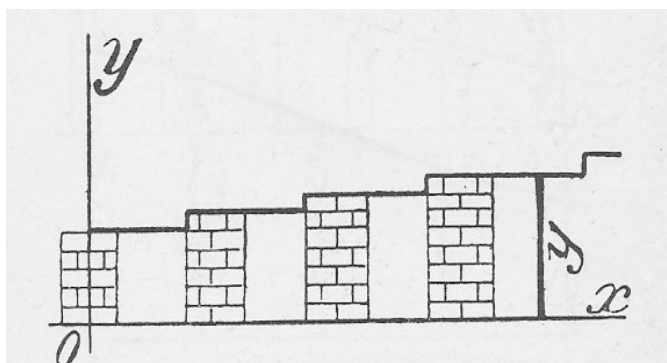
Sono funzioni della forma  $y = a^x$ , dove  $a$  è un numero positivo.

### Funzioni irrazionali

Sono funzioni della forma  $y = \sqrt{\frac{N}{D}}$ , dove  $N$  e  $D$  sono dei polinomi.

### Funzioni continue e funzioni discontinue

L'altezza d'una pianta è una funzione del tempo. Ora, una pianta cresce e per gradi insensibili; essa non può passare bruscamente da un'altezza di 3 metri all'altezza di 4 metri; anche se crescesse in modo rapidissimo l'altezza deve passare per tutti i valori intermedi. Questa altezza è quindi una funzione continua del tempo.



Al contrario, l'altezza d'un pilastro di mattoni in costruzione è una funzione discontinua del tempo. poichè essa non può aumentare che dello spessore d'un mattone per volta e mai meno.

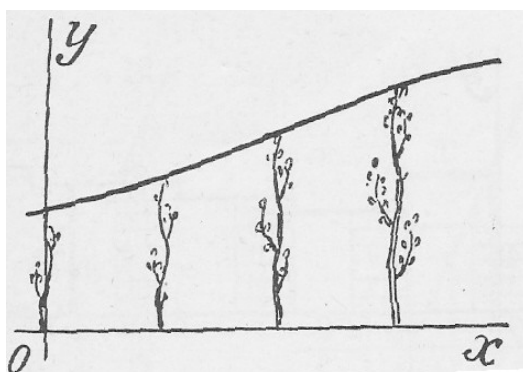
Una funzione è continua quando non può passare da un valore ad un altro senza prendere tutti i valori intermedi. Essa è invece discontinua nel caso contrario.

## Funzione crescente e decrescente

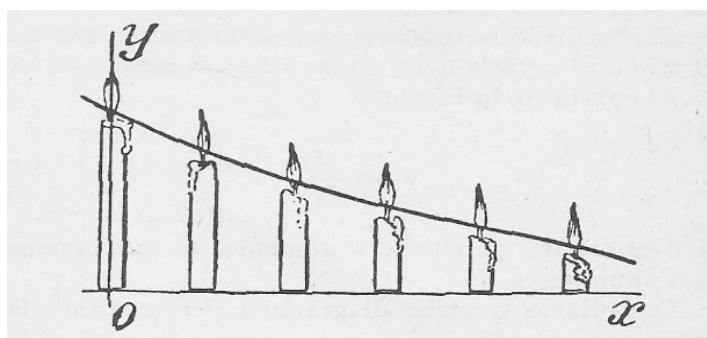
Una funzione è crescente quando varia nello stesso senso della variabile, è decrescente nel caso contrario.

Esempio:

L'altezza d'una pianta che cresce è funzione d'una variabile che è il tempo. L'altezza aumenta quando il tempo aumenta, la funzione e la variabile vanno nello stesso senso: ecco un esempio di funzione crescente.



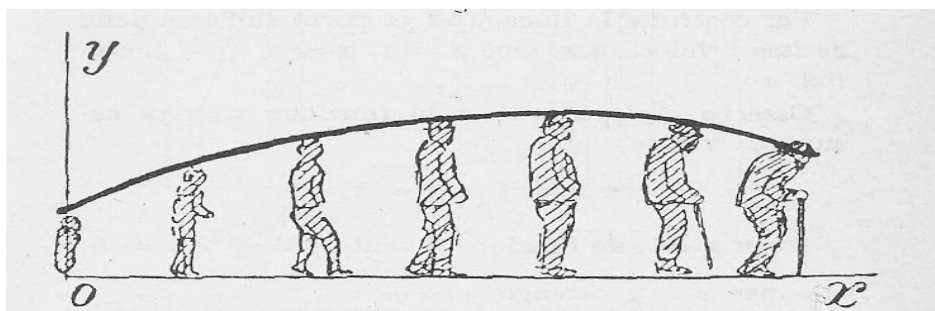
L'altezza di una candela che brucia dipende pure dal tempo, ma varia in senso inverso, quando il tempo aumenta la candela si accorcia, cioè la sua altezza diminuisce; la funzione e la variabile vanno in senso inverso: ecco un esempio di funzione decrescente. Il suo diagramma discende.



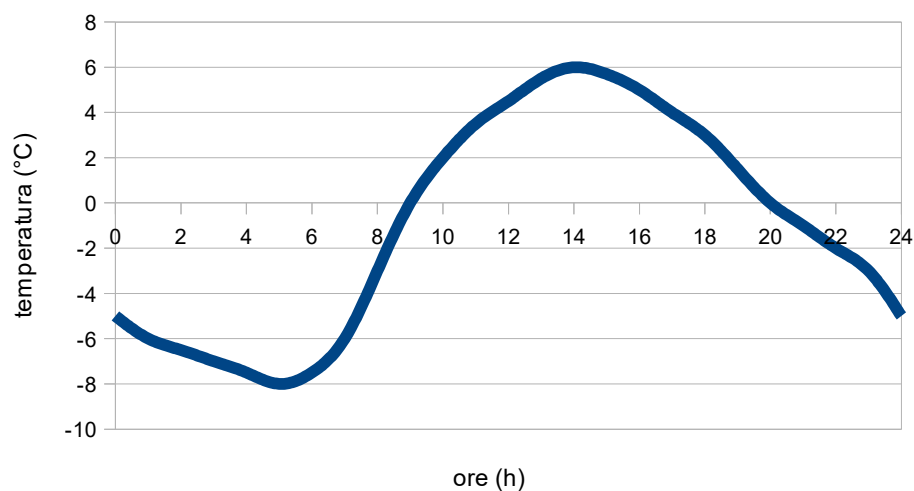
Infine una funzione può essere ora crescente ora decrescente, come è della statura umana.

Nella gioventù la statura aumenta quando il tempo aumenta: la funzione è crescente.

Nella vecchiaia la statura diminuisce quando il tempo aumenta: la funzione è decrescente.



## Funzioni positive e negative in un intervallo



La funzione rappresenta l'andamento della temperatura in funzione del tempo nell'arco di una giornata.

Rispondi ora alle seguenti domande:

In quali ore della giornata la temperatura è positiva?

La temperatura è positiva dalle ....alle .....

Segna sul grafico con un segno + le ore dove la temperatura è negativa.

In quali ore della giornata la temperatura è negativa?

La temperatura è negativa dalle ....alle ..... e dalle .....alle

Segna sul grafico con un segno - le ore dove la temperatura è negativa.

Nel linguaggio matematico si preferisce usare la seguente terminologia: la funzione temperatura è positiva nell'**intervallo aperto**  $(9 ; 20)$  e negativa negli intervalli  $(0 ; 9)$  e  $(20 ; 24)$

Ricordo che

Intervallo aperto  $(a ; b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$  (numero reale compreso tra a e b).

Intervallo chiuso  $[a ; b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$

si definisce inoltre **intorno di un punto**  $a \in \mathbb{R}$  un qualsiasi intervallo aperto contenente a.  
 $(4,7)$  per esempio è un intorno del punto 5.

Al posto di a e b si può scrivere  $+\infty$  (più infinito) o  $-\infty$  (- infinito)

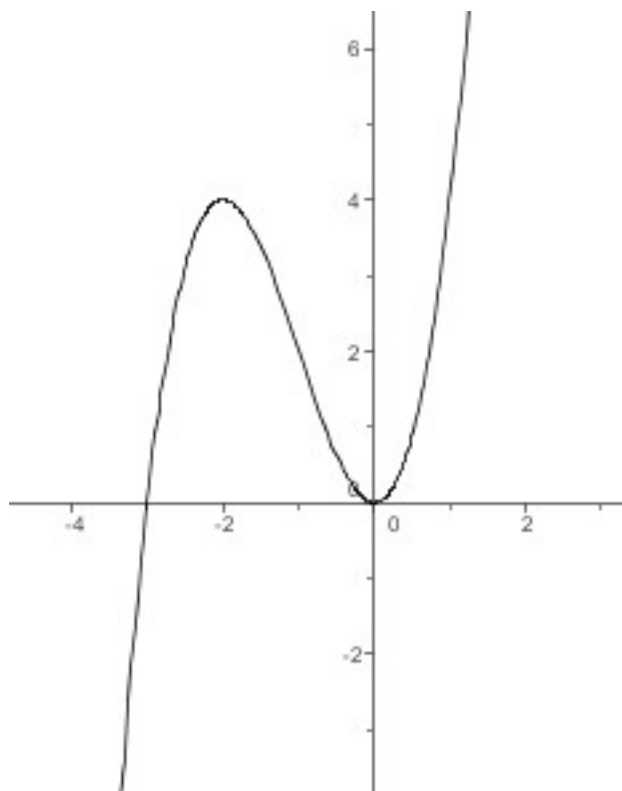
Esempio  $(a ; +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < +\infty\}$



*Esercizio*

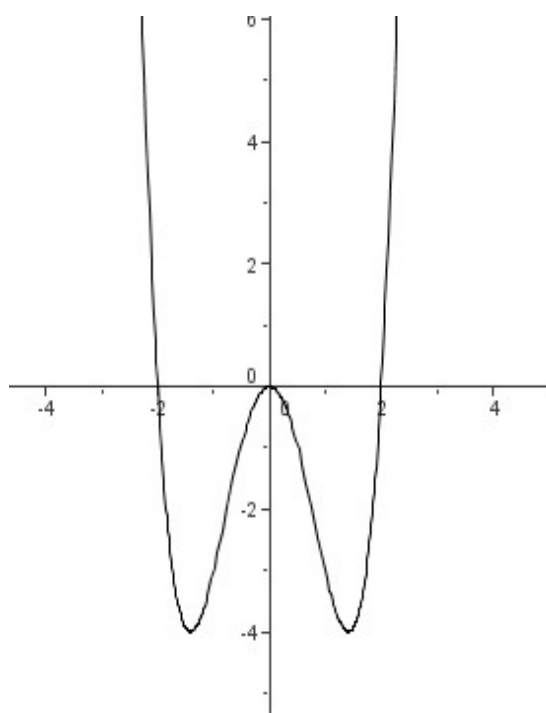
La funzione seguente è positiva nell'intervallo  $I_1=(\quad, \quad)$  e nell'intervallo  $I_2=(\quad, \quad)$

La funzione è negativa nell'intervallo  $I_3=(\quad, \quad)$

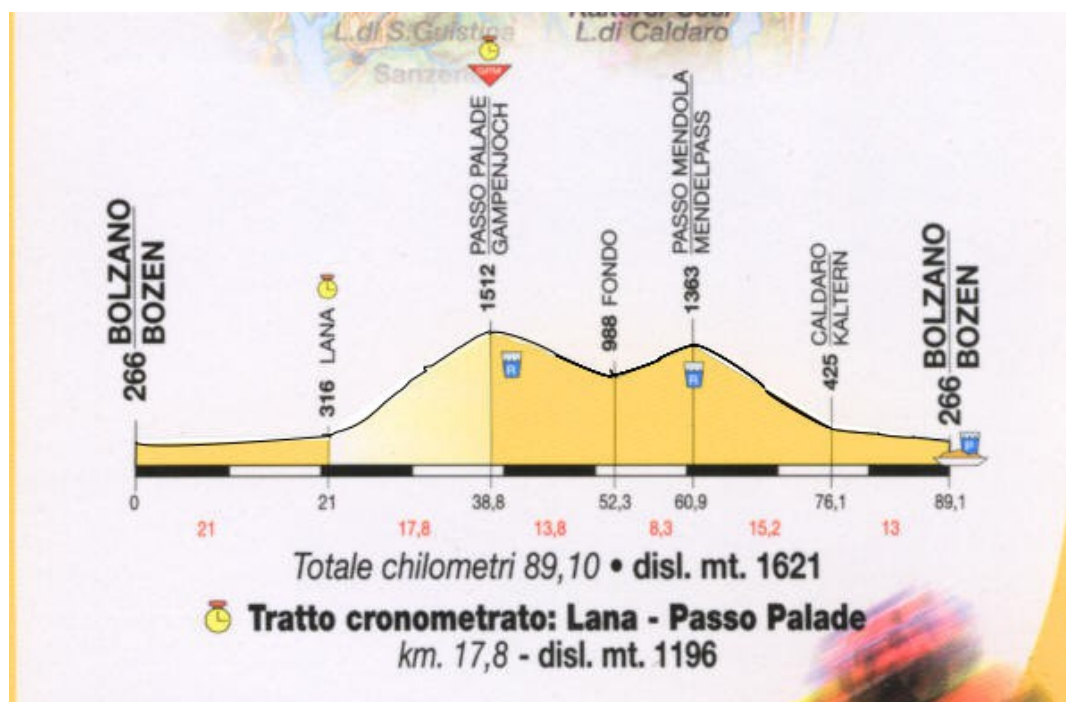


La funzione seguente è positiva nell'intervallo  $I_1=(\quad, \quad)$  e nell'intervallo  $I_2=(\quad, \quad)$

La funzione è negativa nell'intervallo  $I_3=(\quad, \quad)$  e nell'intervallo  $I_4=(\quad, \quad)$



## Massimi, minimi e flessi di una funzione continua



Osserviamo la figura che rappresenta l'altimetria di un tappone dolomitico del giro d'Italia di 89,9Km da Bolzano a Bolzano.

Il km 38,8 e il km 60,9 sono i **punti di massimo relativo**.

Il km 38,8, oltre ad essere punto di massimo è anche **il punto di massimo assoluto**, poiché la strada raggiunge la vetta più alta dell'intero percorso.(1512 m)

Il km 0, il km 52,3 e il km 89,9 sono i **punti di minimo relativo della funzione**.

Il km 21 non è un punto di minimo relativo in quanto immediatamente prima del km 21 l'altitudine diminuisce.

Segniamo ora sul grafico il punti dove cambia la concavità della curva.

Approssimativamente il km 29,9, il km 45,5, il km 56,6 e il km 68,5 sono i **punti di flesso**.

Cerchiamo ora di essere un po' più rigorosi da un punto di vista matematico:

Un punto  $c$  è detto punto di **massimo assoluto** (minimo assoluto) se la funzione assume nel punto  $c$  il massimo (minimo) tra tutti i valori possibili.

Un punto  $c$  è detto punto di **massimo relativo** (minimo relativo) se il punto  $c$  è un punto di massimo assoluto (minimo assoluto), relativamente ad un intorno piccolo a piacere del punto  $c$ .

Un punto  $F$  è detto punto di flesso se in tale punto cambia la concavità della curva.

Ripeti l'esercizio la procedura considerando i grafici sottostanti.

**Tappa/Etappe - Giovedì/Donnerstag 05.08.2010**  
**km 155.6 - disl. m 3235**

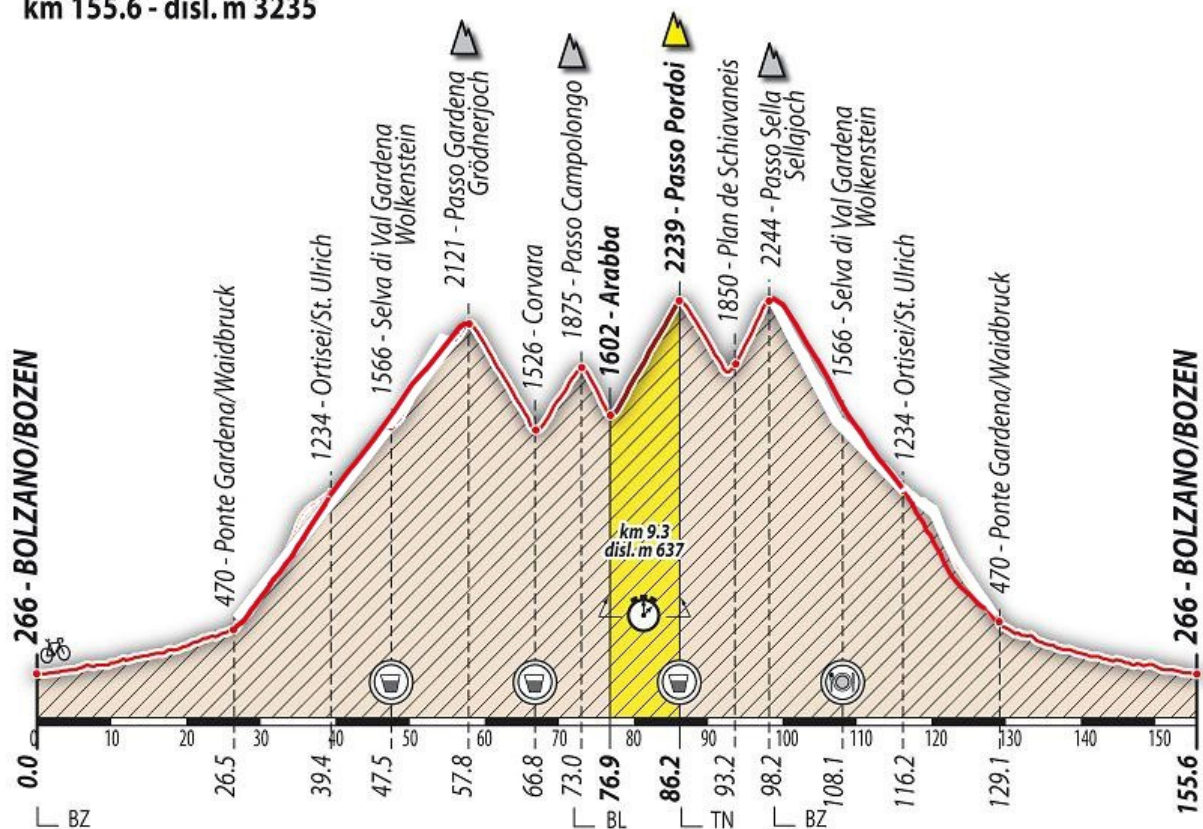


Grafico Peppa



# Derivate

**L'incremento** o accrescimento è una grandezza misurabile.

L'idea feconda del calcolo differenziale è di **misurare gli incrementi** o variazioni delle grandezze.

Un albero grande può crescere lentamente, un albero piccolo può, invece, crescere rapidamente.

La grandezza è una cosa, l'incremento è un'altra.

Quasi tutti i fenomeni studiati nelle scienze si riducono a delle questioni d'accrescimento o di decremento di talune grandezze.

Siccome queste grandezze dipendono le une dalle altre, esse sono delle funzioni.

I 2 due problemi essenziali dell'analisi sono i seguenti:

1) Data una funzione, misurare il suo incremento (diremo anche: trovare la sua derivata).

2) Conoscendo una misura d'incremento (o derivata) ritrovare la funzione.

Questi due problemi danno luogo ad un gran numero di problemi particolari.

Quelli che entrano nella prima categoria costituiscono il calcolo delle derivate o calcolo differenziale.

Quelli della seconda categoria formano il calcolo integrale.

(Incontreremo più avanti una terza categoria di problemi, più elevati, quando parleremo delle equazioni differenziali).

Il nostro studio avrà carattere elementare, ma sarà sufficiente per molte applicazioni.

Diamo subito della derivata una definizione provvisoria che verrà precisata e completata più avanti:

**la derivata di una funzione è il suo incremento riferito all'unità di variabile.**

Ciò non può essere ben compreso se non per mezzo di esempi. Eccone subito parecchi.

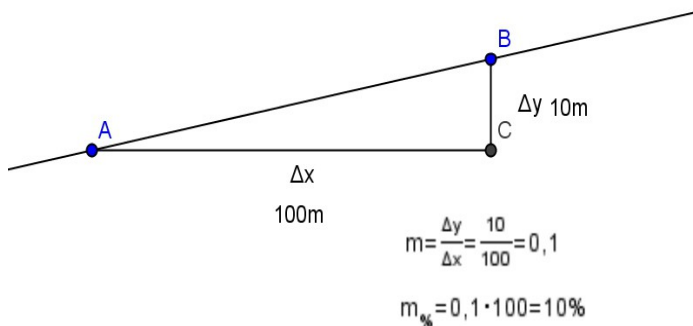
## Misura di un incremento regolare od uniforme.

Quando una grandezza dipende dal tempo, si chiama derivata di questa grandezza il suo incremento per unità di tempo.

Così l'altezza d'una pianta è funzione del tempo. Se questa pianta cresce uniformemente di 2 metri all'anno, l'incremento della sua altezza in metri all'anno è 2.

Se la funzione dipende da una lunghezza, la derivata è l'incremento per unità di lunghezza.

Per esempio se l'altitudine di una strada che monta aumenta uniformemente di 10m ogni 100metri, l'incremento d'altitudine o pendenza è 0,1 metri per metro, cioè ogni metro la strada cresce in altitudine di 0,1m (10cm).



Da notare che nei cartelli stradali in questa situazione ci sarebbe stato scritto 10% cioè ogni 100 m la strada cresce in altitudine di 10m.

$$m_{\%} = m \cdot 100\%$$

Consideriamo ancora altri esempi: se un patrimonio s'accresce uniformemente di 2000 euro all'anno, il suo incremento od arricchimento, in euro all'anno, è di 2000.

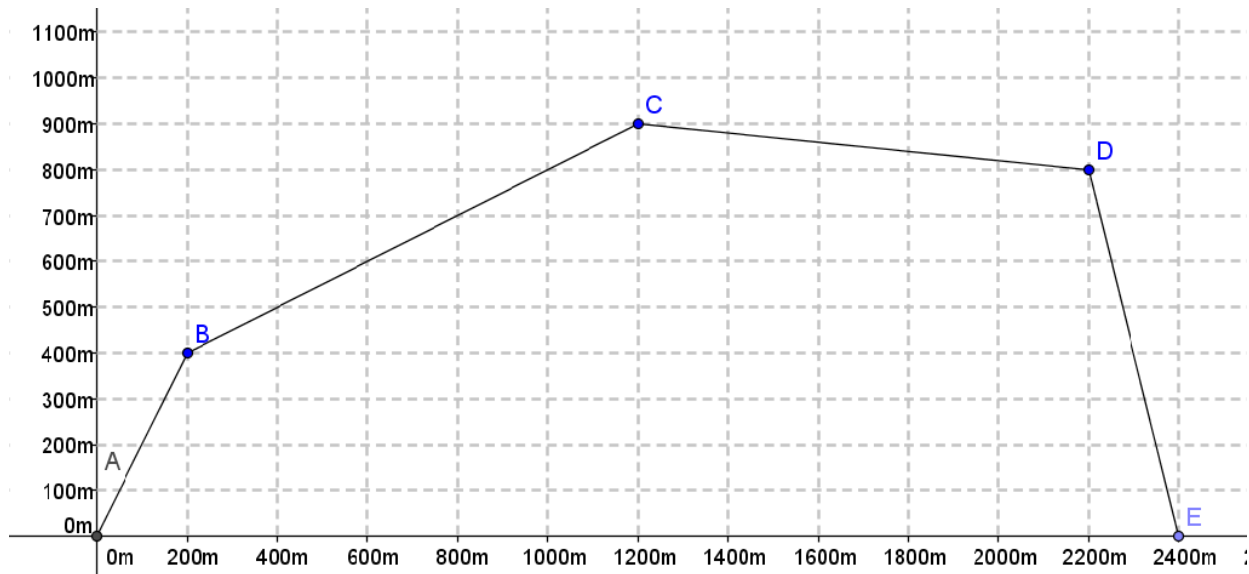
Se il peso di un animale aumenta regolarmente di 5 chilogrammi al mese, il suo incremento od ingrassamento, in chilogrammi al mese, è 5.

Se la lunghezza di una sbarra di ferro aumenta uniformemente di 0,1 millimetri per grado di temperatura, il suo incremento in millimetri per grado di temperatura è 0,1.

Tutte queste grandezze sono delle funzioni il cui incremento è stato supposto uniforme; i numeri che misurano l'incremento danno senza calcolo le derivate, poichè questi numeri misurano l'accrescimento della funzione all'anno, per metro, al mese, per grado, insomma, per unità di variabile.

## Esercizi su incrementi regolari

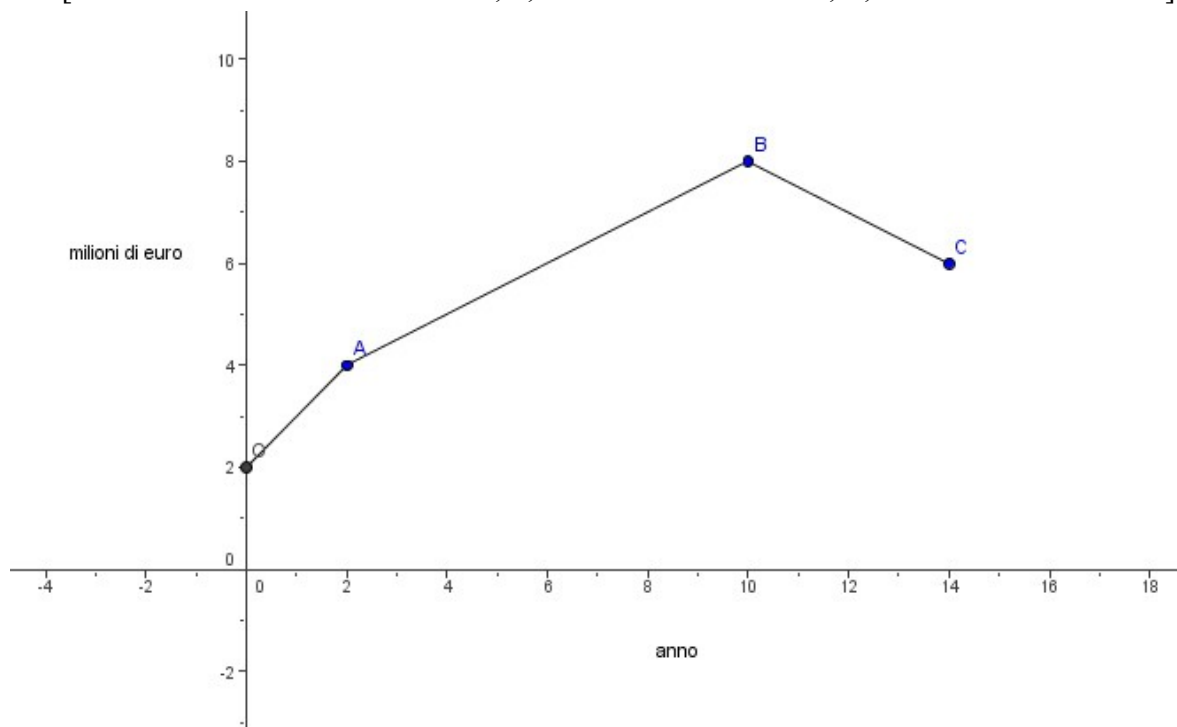
- Il seguente grafico rappresenta una fotografia di una strada di montagna nella quale sono stati segnati alcuni punti significativi. Sull'asse delle x è riportata la distanza orizzontale (non la lunghezza del percorso), mentre sull'asse delle y l'altitudine. Calcola la pendenza dei 4 tratti.



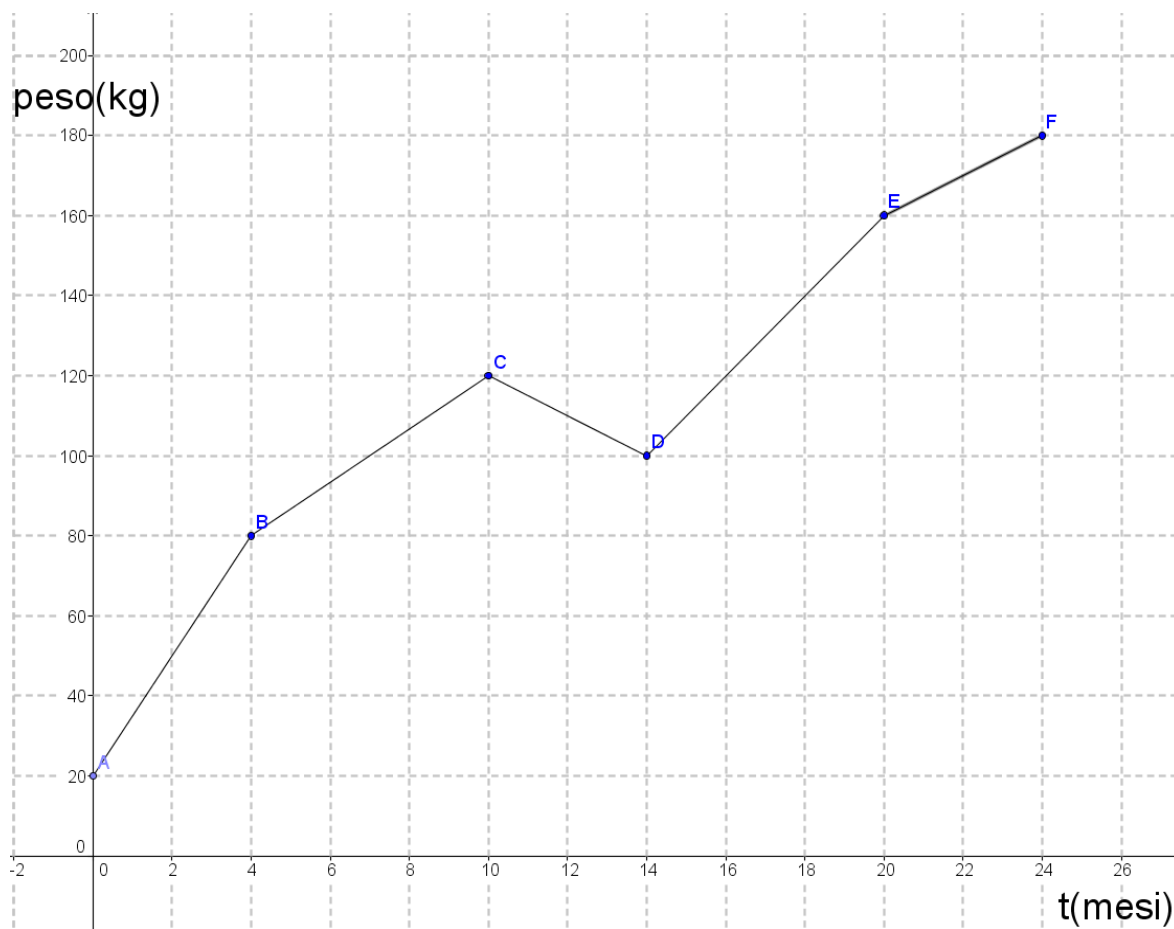
[soluzione :  $m_1=2$  (200%) ;  $m_2=0,5$  (50%) ;  $m_3=-0,1$  (-10%) ;  $m_4=-4$  (-400%)]

- Disegna una strada che ha pendenza 100%.
- Che pendenza ha una parete verticale e una orizzontale?
- Il grafico sottostante indica il patrimonio dell'impresa nei primi 14 anni di attività. Determina l'incremento del patrimonio nei 3 i periodi.

[soluzione : 1 milione di euro/anno; 0,5 milioni di euro/anno ; -0,5 milioni di euro/anno]

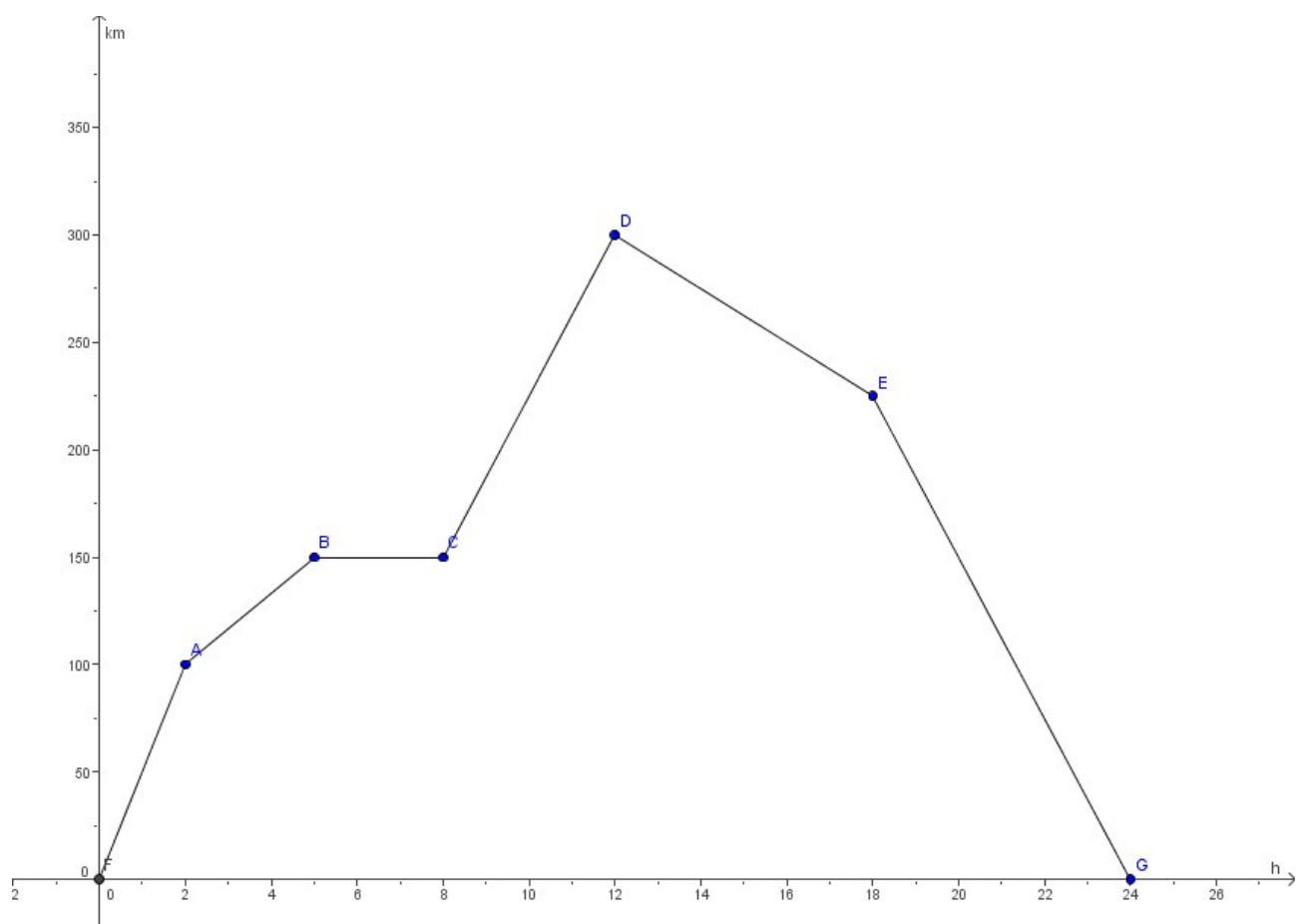


5. Calcola l'ingrassamento del maiale nei vari tratti in kg/anno.

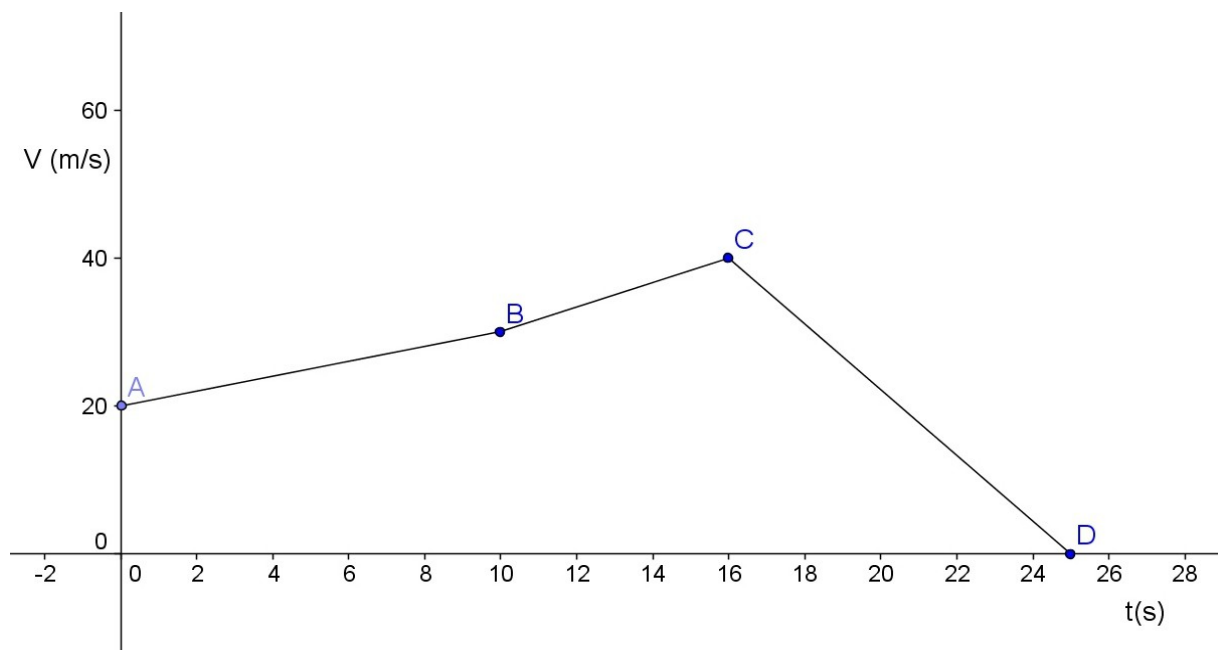


[soluzione :10kg/mese; 6,7 kg/mese ; -5 kg /mese; 10 kg/mese ;5kg/mese]

6. Calcola la velocità con cui si sposta un motorino nell'arco di 24 ore.



7. Calcola l'accelerazione di un veicolo nei primi 25 secondi.



### *Dall'incremento al grafico*

Una macchina parte dal km 10 e viaggia a 50km/h per 2 ore poi si ferma per mezz'ora e torna indietro con una velocità di 40Km/h per 3 ore. Rappresenta questo moto in un grafico s-t.

Un maialino pesa 20kg e ingrassa di 15kg/mese per 3 mesi, poi di 10kg/mese per 5 mesi, infine si ammala e dimagrisce di 2kg/mese per 2 mesi.

Un'azienda ha un capitale iniziale di 6 milioni di euro ed ha un incremento di capitale di 0,5 milioni/anno per 3anni, in seguito mantiene per 2 anni lo stesso capitale ed in seguito per la crisi diminuisce il suo capitale con un ritmo di 2 milioni di euro all'anno per 3 anni.

Una macchina ha una velocità iniziale di 15m/s e accelera per 5 secondi con un'accelerazione di  $2\text{m/s}^2$ , poi mantiene la stessa velocità per 3 secondi ed infine decelera con un'accelerazione (negativa) di  $-10\text{ m/s}^2$  per 4 secondi. Rappresenta questo moto in un grafico v-t.

Una strada parte da un'altezza di 100m e ha una pendenza del 20% per 800m, poi una pendenza del 10% per altri 200m ed in seguito scende con una pendenza del 5% per 500m.



## La funzione di proporzionalità diretta $y = mx$

Ora parleremo delle funzioni più semplici ovvero le funzioni di proporzionalità diretta, partendo dal seguente esercizio.

**Ogni esercizio svolto vale mezzo punto, trova la funzione che esprime la relazione tra il punteggio y e il numero degli esercizi svolti x.**

**-Rappresenta la funzione in un grafico x-y.**

**-Utilizzando la funzione trova il punteggio ottenuto con 25 esercizi giusti.**

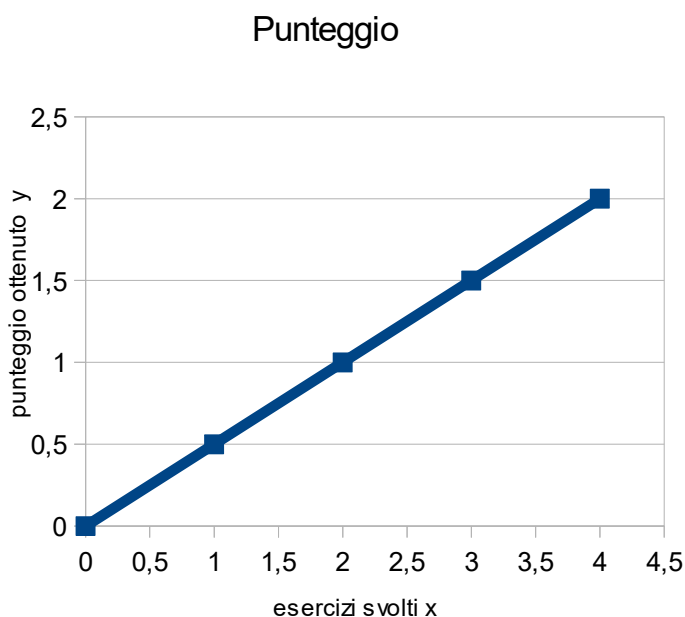
**-Utilizzando la funzione trova il quanti esercizi giusti deve fare per ottenere un punteggio di 30 punti.**

Soluzione:

La funzione cercata è ovviamente  $y = \frac{1}{2}x$

Sostituiamo al posto di x alcuni valori e troviamo il corrispondente valore di y e infine rappresentiamo la funzione

x	y
0	0
1	0,5
2	1
3	1,5
4	2



Rispondiamo ora alle ultime 2 domande:  $y = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5$

$$30 = \frac{1}{2}x \quad x = 60$$

### Esercizi su proporzionalità diretta

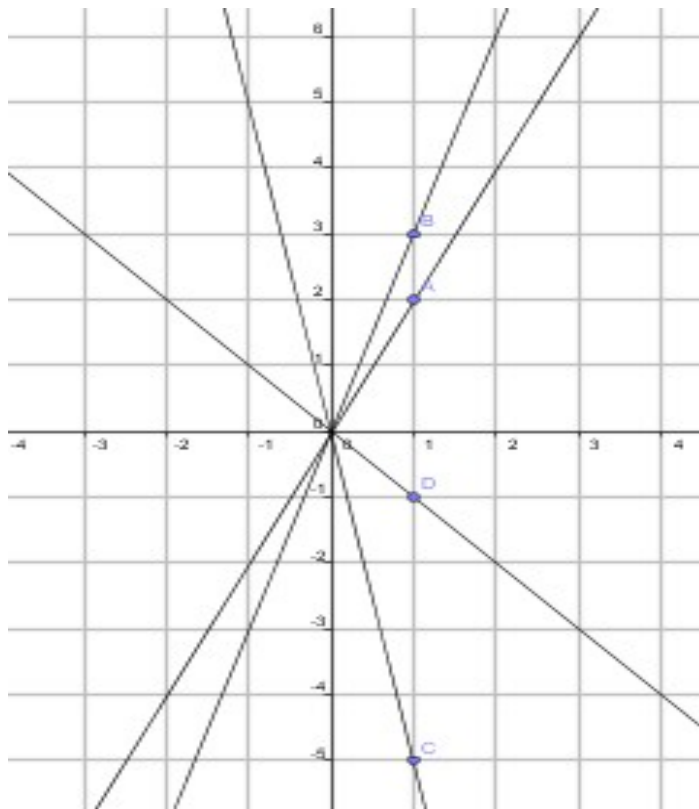
1. Trova la funzione che esprime la relazione tra un prodotto senza IVA ( $x$ ) e con l'IVA del 20% ( $y$ ).  
Rappresenta la funzione in grafico  $x$ - $y$ .  
Utilizzando la funzione che hai trovato, calcola il costo di un prodotto compreso di IVA, se il costo senza IVA è 10, 50 euro. Utilizzando la funzione che hai trovato, calcola il costo di un prodotto senza IVA, se il costo con IVA è 100 euro. [Soluzione  $y=1,2x$ , 12 €, 60€, 83,3€]
2. Un rombo ha diagonale maggiore 6 cm, trova la funzione che esprime la relazione tra l'area del rombo( $y$ ) e la diagonale minore ( $x$ ).  
Rappresenta la funzione in grafico  $x$ - $y$ .  
Utilizzando la funzione che hai trovato, calcola l'area del rombo, se la diagonale minore è 4cm, 5cm o 0cm. [Soluzione  $y=3x$ ]
3. Una piramide rettangolare ha perimetro di base di 22cm e uno dei 2 lati di 8cm, trova la funzione che esprime la relazione tra il volume della piramide( $y$ ) e l'altezza della piramide ( $x$ ). Rappresenta la funzione in grafico  $x$ - $y$ .  
Utilizzando la funzione che hai trovato, calcola il volume della piramide, se l'altezza è 5cm, 6cm o 10 cm. [Soluzione  $y=8x$ ]
4. Un liquido ha una densità di 1,5 kg/l, una molla si allunga di 2cm/kg, una macchina viaggia a 30km/h. Trova le 3 funzioni e disegna i 3 grafici.
5. Trova l'incremento (pendenza) e quindi la funzione che graficamente è rappresentata dalle seguenti rette.

a:  $y=$

b:  $y=$

c:  $y=$

d:  $y=$



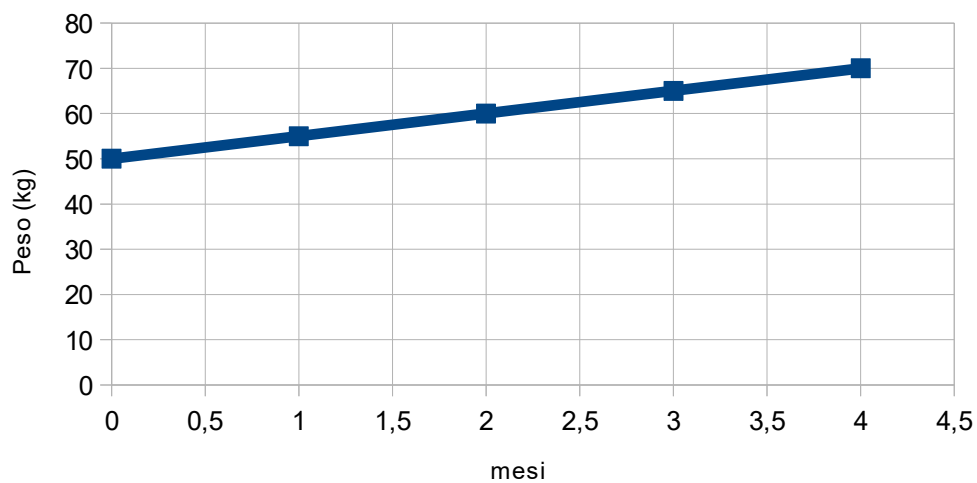
## La funzione lineare $y = mx + q$

1. Un maiale pesa 50kg e ingrassa ogni mese di 5kg. Trova la funzione che rappresenta la relazione tra il peso del maiale e i mesi.  
Usando la funzione trova quanto impiega a diventare 170kg.

Per prima cosa facciamo una tabella

mesi	Peso (kg)
0	50
1	55
2	60
3	65
4	70

e rappresentiamo i dati



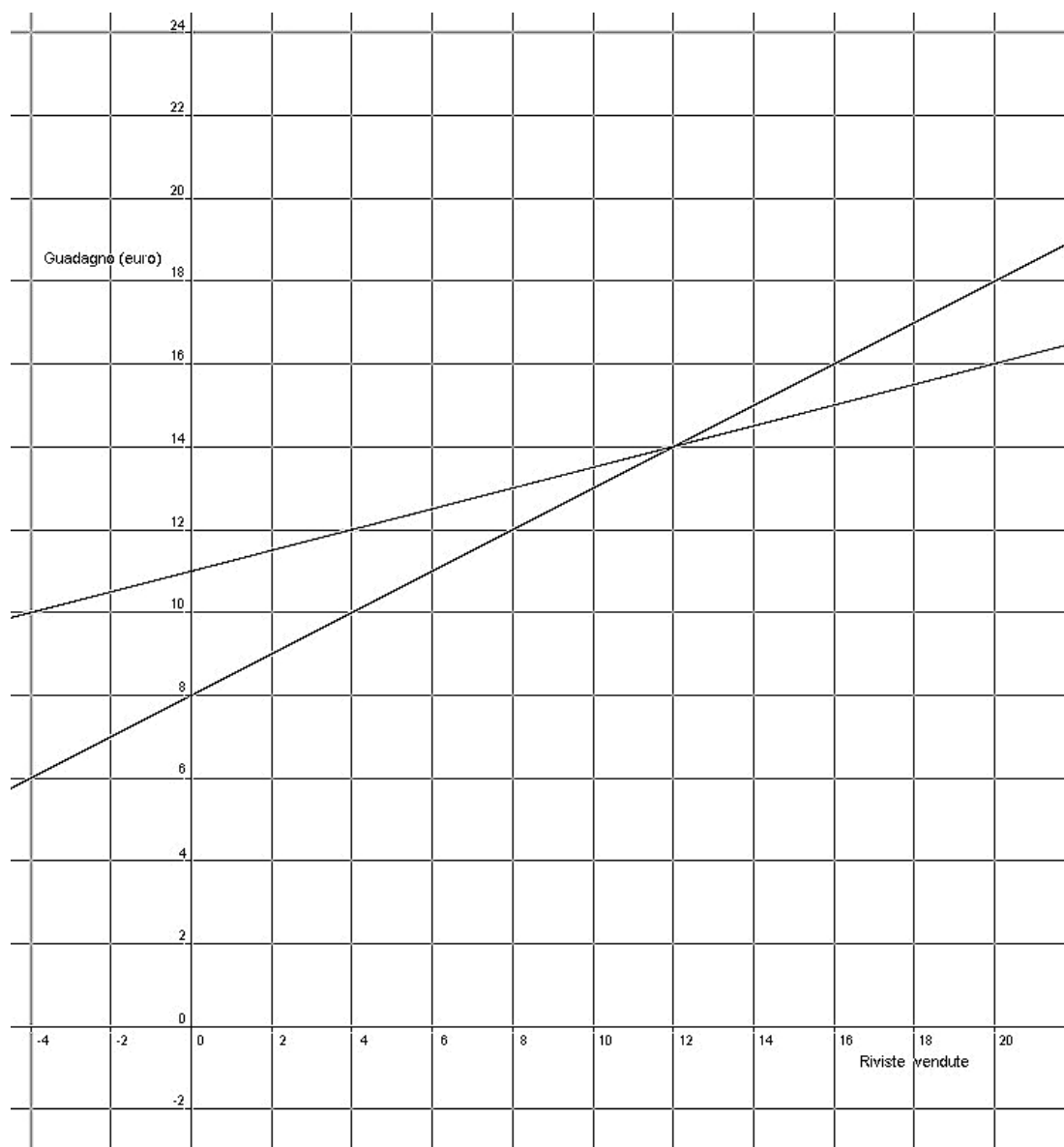
La nostra funzione sarà  $y = 5x + 50$ , dove  $y$  rappresenta il peso e  $x$  i mesi.

Risolvendo l'equazione  $170 = 5x + 50$  otteniamo  $x = 24$ .

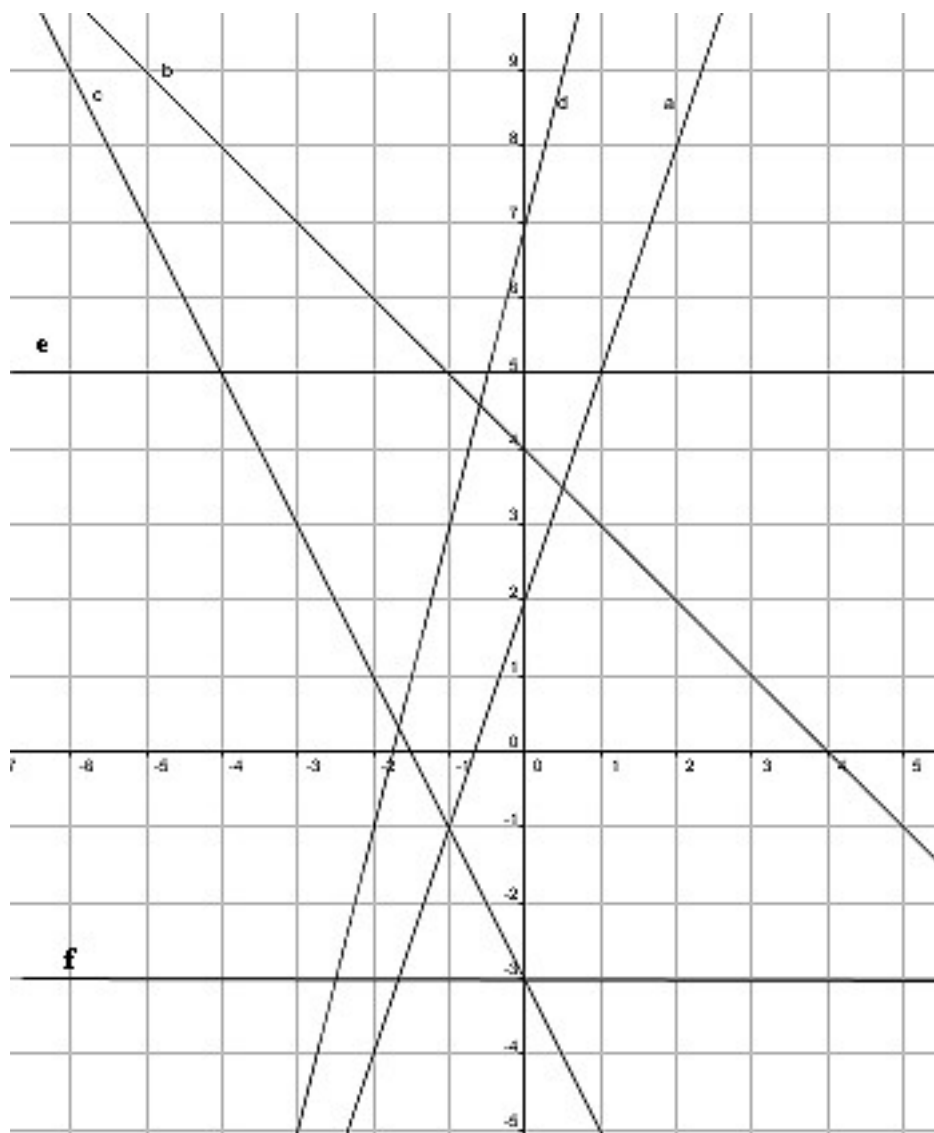
Il maiale dopo 24 mesi raggiunge il peso di 170kg.

2. Una telefonata con un certo operatore costa 12 centesimi lo scatto alla risposta e 10 centesimi al minuto con tariffazione al secondo.  
Trova la funzione che esprime la relazione tra il costo della chiamata e la durata in minuti.  
Trova e rappresenta graficamente la funzione che esprime la relazione tra il costo della chiamata e la sua durata in secondi.  
Utilizzando la funzione ottenuta, determina il costo della chiamata se la sua durata è 53 secondi.
3. Un rappresentante di aspirapolveri guadagna mensilmente 400 euro più una provvigione del 15% (dello stipendio) su ogni pezzo venduto. Trova la funzione che rappresenta il guadagno in funzione dei pezzi venduti. Attraverso la funzione calcola quanti aspirapolveri deve vendere per avere un guadagno mensile di 1000 euro.
4. Uno scalatore si trova in una parete a 100m di altezza e scende con un ritmo di 6 m/minuto. Trova la funzione che esprime la relazione tra l'altezza della parete e il tempo trascorso.
5. Una macchina che si trova a 200km sud di Roma e sta viaggiando verso il Brennero a velocità costante di 120km/h.  
Determina la funzione che esprime la relazione tra la distanza dell'auto dalla capitale e il tempo in ore.  
Utilizzando la funzione ottenuta, determina la distanza dell'auto dalla capitale dopo 5 ore e dopo quanto tempo arriva a Roma.
6. Una macchina viaggia a 5 m/s accelera con un'accelerazione di  $0,5\text{m/s}^2$ .  
Trova la funzione che esprime la relazione tra la velocità dell'auto e il tempo (s).  
Rappresenta graficamente la funzione e determina, utilizzando la funzione:  
-Dopo 12 secondi che velocità raggiunge.  
-Dopo quanto tempo raggiunge una velocità di 36Km/h.
7. Un liquido che occupa un volume di  $10\text{cm}^3$ , si dilata in modo costante di  $1\text{cm}^3$  ogni  $10^\circ\text{C}$  di aumento di temperatura.  
Trova la funzione che esprime la relazione tra il volume e la temperatura in gradi.
8. Un'agenzia per il noleggio di automobili fa pagare 25 cent. al km se i km percorsi sono meno di 100.  
Se il kilometraggio totale supera i 100km, l'agenzia fa pagare 25 centesimi i primi 100km e 15 cent i km successivi. Trova e rappresenta graficamente le 2 funzioni che esprimono la relazione tra il costo C del noleggio e i km x percorsi.

9. Trova le 2 equazioni e prova a descriverle. Determina algebricamente il punto d'intersezione tra le 2 rette.



10. Trova tutte le funzioni lineari presenti nel grafico



Esplícita la  $y$  nelle seguenti equazioni, stabilisci il valore di  $m$  e  $q$  e fai il grafico.

$$3x - y = 3 \quad \frac{1}{2}x - 2y = 3 \quad 10x = 4y - 6$$

### Esercizio guida

Trova l'equazione della retta passante per A(-2;-3) B(3;4).

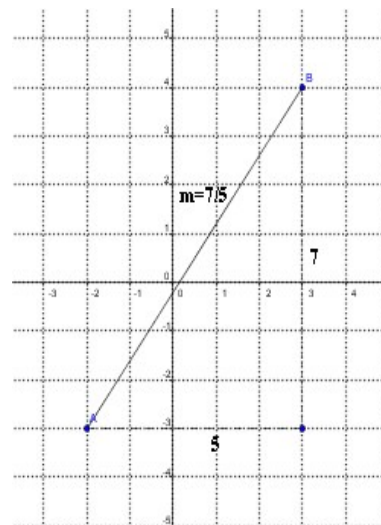
Rappresento i 2 punti, e calcolo m dal grafico, facendo particolare attenzione **al segno**.

$m > 0$  /  
 $m < 0$  \

Nel nostro caso  $m = \frac{7}{5}$

dato che l'equazione della retta è

$y = mx + q$ , sostituisco il valore di m trovato  $y = \frac{7}{5}x + q$



Sostituisco ora le coordinate di uno dei 2 punti a scelta nell'equazione trovata.  
Nel nostro caso sostituisco B.

$$4 = \frac{7}{5} \cdot 3 + q \quad 4 = \frac{21}{5} + q \quad 4 - \frac{21}{5} = q \quad -\frac{1}{5} = q$$

Infine scrivo l'equazione della retta  $y = \frac{7}{5}x - \frac{1}{5}$

Ripeti quanto visto per le seguenti coppie di punti.

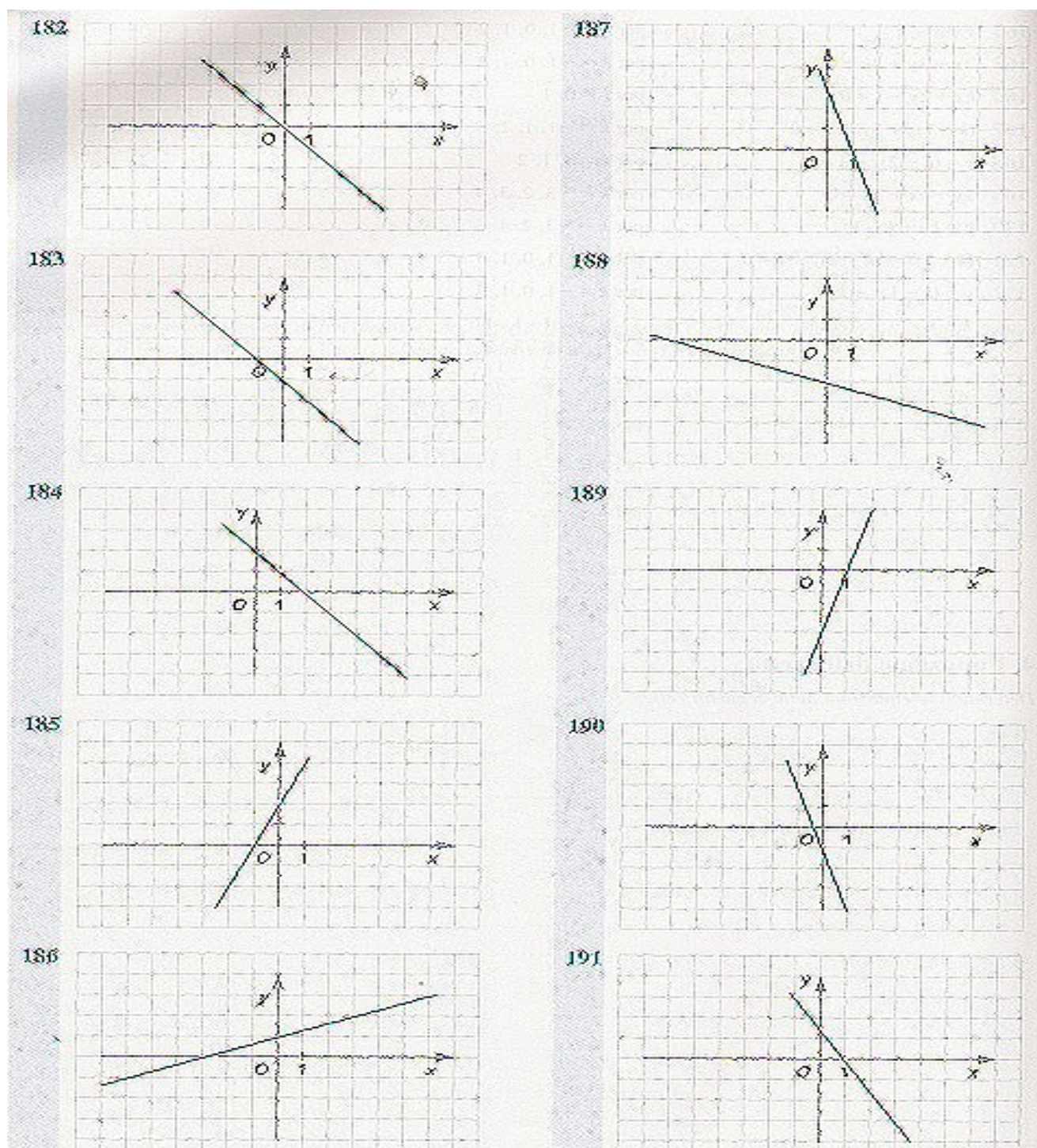
A(-3;-1) B(2;4)    A(-2;2) B(3;-1)    A(1;-2) B(2;3,5)    A(-3;0) B(4,-3)

### Metodo 2

Per trovare m si può anche applicare la seguente formula  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Calcola l'incremento m usando la formula nei casi precedenti.

Trova  $m$  e poi  $q$  attraverso il metodo visto in precedenza scegliendo 2 punti a tua scelta per ogni retta



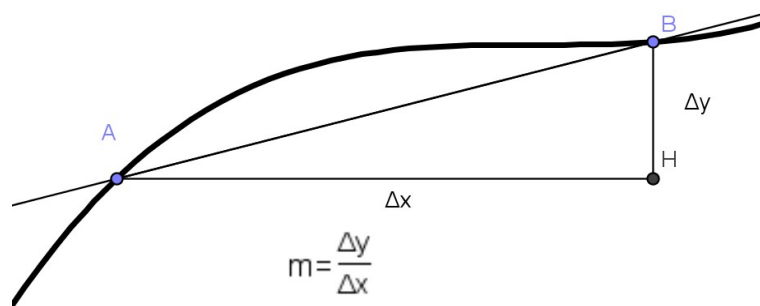


## Misura di un incremento non regolare o non uniforme.

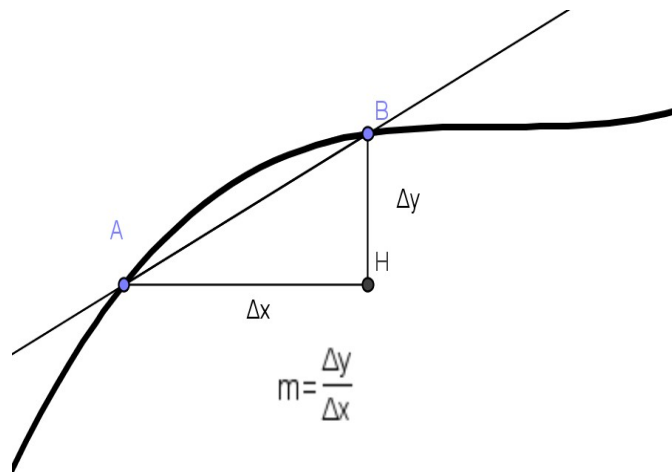
### *Pendenza di una strada*

Supponiamo di voler calcolare la pendenza d'una strada in un punto A. (vedi linea curva scura in figura).

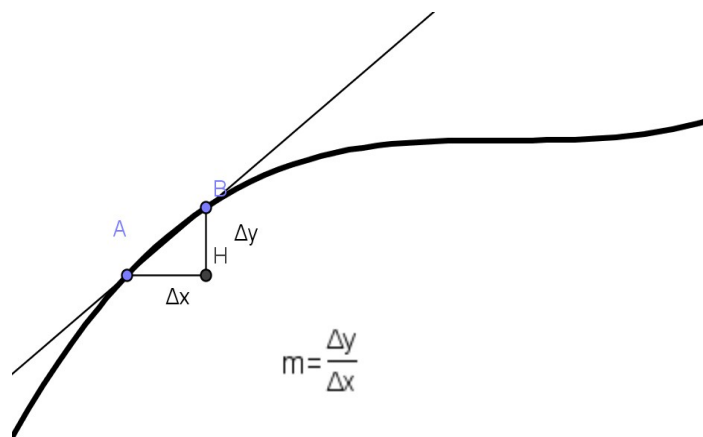
Si potrebbe prendere un punto B, misurare la differenza di altitudine  $\Delta y$  e quindi calcolare il rapporto  $\Delta y / \Delta x$ . E' evidente però che il valore calcolato non rappresenta la pendenza nel punto A, ma la pendenza media nel tratto AB. Da notare che la pendenza media coincide con quella di una strada rettilinea che congiunge i 2 punti.



Per arrivare ad un valore più attendibile si dovrebbe prendere un punto B più vicino ad A come nella figura seguente



o ancora meglio il punto B della figura successiva.



In quest'ultimo grafico si può notare che la pendenza media nel tratto AB si avvicina alla pendenza della strada nel punto A.

**Possiamo quindi dire che la pendenza è ancora l'incremento dell'altitudine riferito all'unità di distanza, ma la misura dell'incremento viene fatta su un piccolissimo tratto di strada attiguo ad A.**

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

### *La velocità istantanea*

Mi trovo su di un'automobile e mi allontano dalla autorimessa. Che cosa cresce? La mia distanza dall'autorimessa, la quale dipende dal tempo.

L'incremento della distanza nell'unità di tempo è la velocità.

Se la distanza aumenta di 65km in un ora, si suol dire che la velocità è di 65 Km all'ora.

Ma questa non è che una velocità media .

Se voglio misurare con precisione la velocità attuale divido l'ora in 60 parti.

Misuro poi il cammino (in km) fatto in un 1/60 di ora cioè in minuto e poi calcolo la velocità in Km/h.

Ma anche nell'intervallo di un minuto la velocità può variare, sicché sarà preferibile misurare i metri percorsi in 1/3600 di ora cioè in un secondo e poi calcolare la velocità in km/h.

Insomma si avrà un risultato tanto più adatto a rappresentare la velocità quanto più piccolo sarà l'intervallo di tempo considerato.

E' quindi evidente che la velocità istantanea è l'incremento della distanza riferito all'unità di tempo, ma la misura dell'incremento dev'essere fatta in un piccolissimo tempo all'istante considerato, a cui la velocità si riferisce.

$$V_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

### *L'ingrassamento istantaneo*

Immaginiamo un animale il cui peso, funzione del tempo, cresca o decresca in una maniera che supporremo continua. Per valutare il suo ingrassamento attuale in chilogrammi all'anno, non attenderemo un anno; ciò sarebbe troppo lungo e sbagliato perchè ci darebbe soltanto l'ingrassamento medio annuale. Per avere l'ingrassamento attuale è preferibile misurare l'accrescimento del peso (in kg) in  $1/365$  di anno cioè in un giorno, e poi calcolare l'ingrassamento in in kg/anno.

Faremo meglio calcolando l'ingrassamento in  $1/8760$  di anno cioè in un'ora.

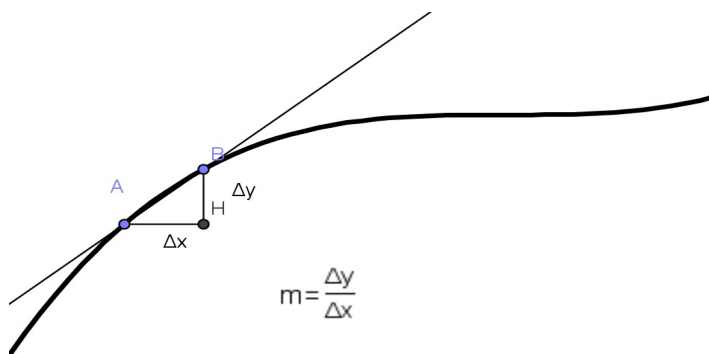
E' quindi evidente che l'ingrassamento è l'incremento del peso riferito all'unità di tempo, ma la misura dell'incremento dev'essere fatta in un piccolissimo tempo all'istante considerato, a cui la l'ingrassamento si riferisce.

L'ingrassamento è quindi la derivata del peso rispetto al tempo.

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

## Definizione di derivata e di retta tangente al grafico in un punto

Abbiamo già detto che la derivata di una funzione è il suo incremento riferito all' unità di variabile.



Ora possiamo essere ancora più precisi:

**Sia  $y$  una grandezza che dipende da  $x$ , la derivata di una funzione in un punto A è il rapporto tra l'incremento della funzione e l'incremento della variabile, calcolata in un intervallo  $\Delta x$  prossimo a zero. In formule.**

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Definita inoltre **secante** una retta che passa per due punti distinti A e B di una curva, si può pensare la **tangente in A** come la retta cui tende (eventualmente) la secante quando il punto B si avvicina a A lungo la curva.

**La pendenza o il coefficiente angolare della retta tangente coincide con la derivata della funzione nel punto A.**

Inoltre riferendoci agli esempi precedenti possiamo affermare che:

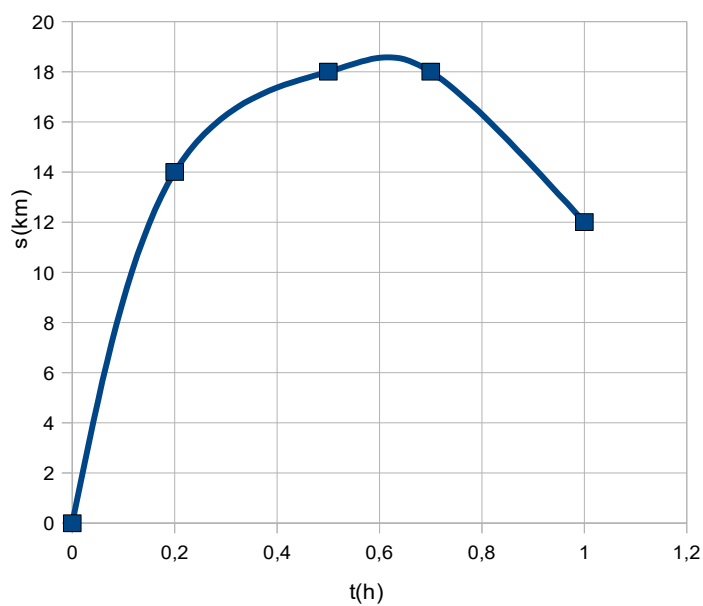
- la derivata della funzione **altitudine** rispetto alla distanza orizzontale è la **pendenza** di una strada.
- la derivata della funzione **peso** rispetto al tempo è l'**ingrassamento**
- la derivata della funzione **distanza** rispetto al tempo è la **velocità**.

Trova altri esempi di derivata aiutandoti con gli esercizi successivi.

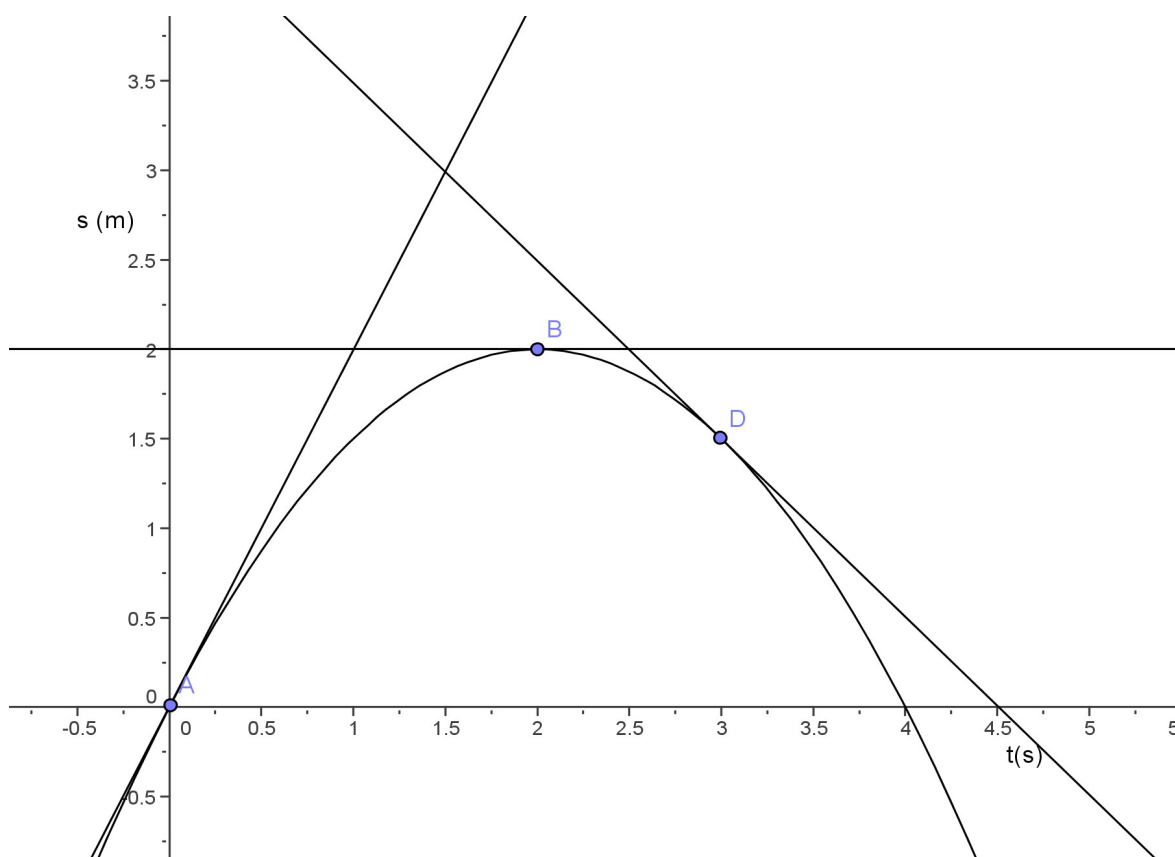
- la derivata della funzione.....rispetto rispetto al ..... è ..... .
- la derivata della funzione.....rispetto rispetto al ..... è ..... .
- la derivata della funzione.....rispetto rispetto al ..... è ..... .

*Esercizi su incrementi non uniformi*

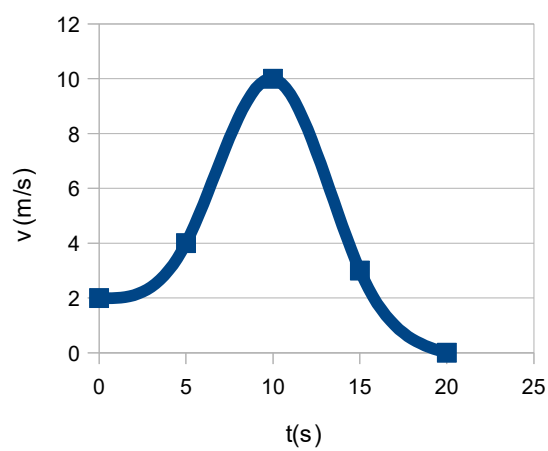
1. Il grafico rappresenta il moto di una bicicletta. C. Calcola la velocità media (incremento della distanza nel tempo) nei vari tratti.



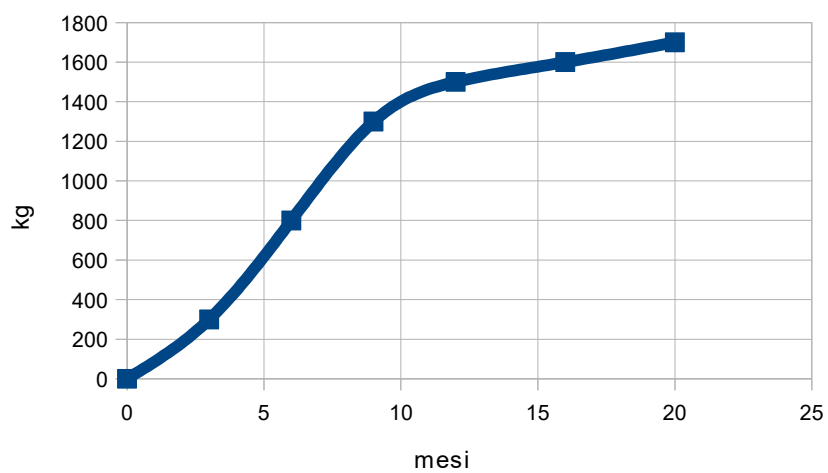
2. Calcola la velocità istantanea nei punti A, B, D. (derivata nei punti indicati)



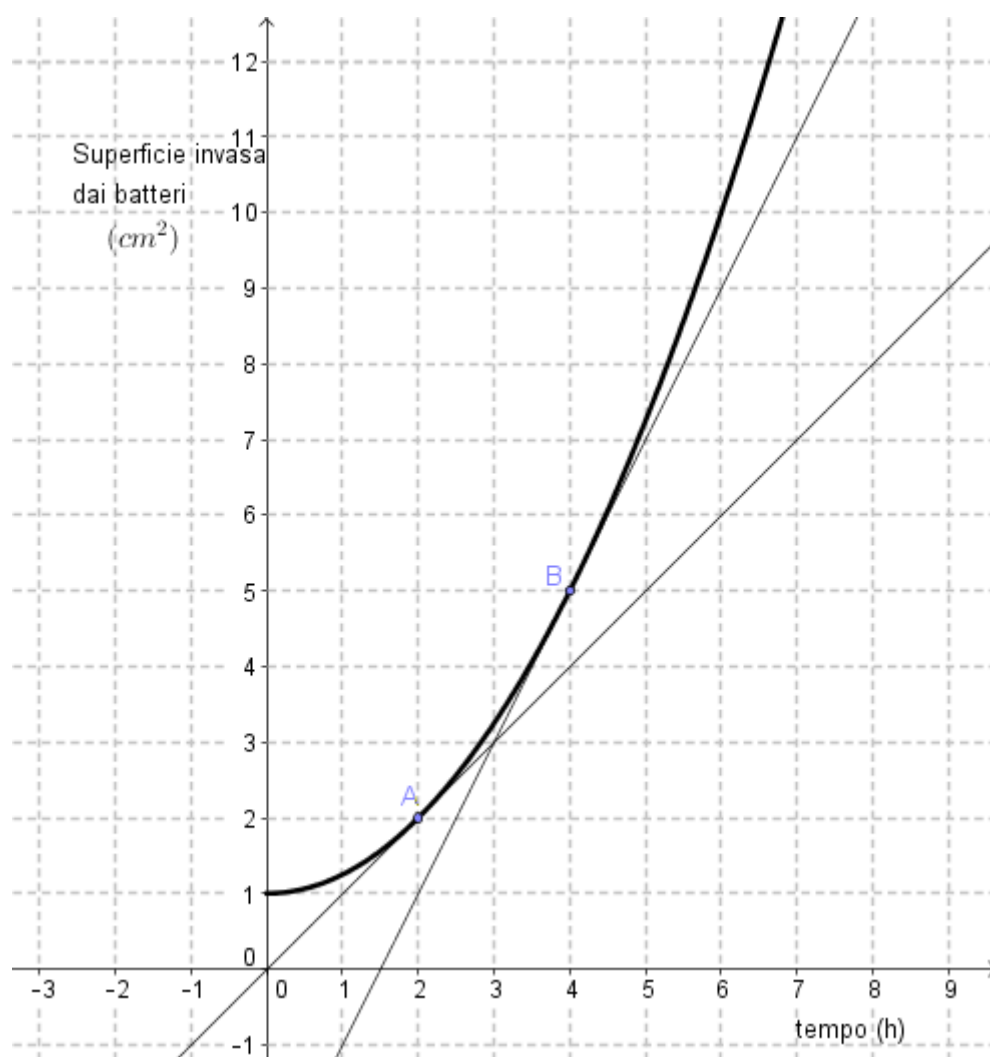
3. Calcola l'accelerazione (incremento di velocità nel tempo) nei vari tratti percorsi dal fondista.



4. Calcola l'ingrassamento medio del toro nei 6 periodi in Kg/giorno.



5. La funzione in grassetto esprime la superficie invasa dai batteri in funzione del tempo espresso in ore. Calcola la velocità di crescita dei batteri dopo 2 ore e dopo 4 ore. Esprimi tale velocità con l'unità di misura appropriata.



## Calcolo delle derivate di funzioni polinomiali

Immaginiamo che la seguente funzione  $s=4t^2$  rappresenti lo spazio percorso da un oggetto che cade da un grattacielo in funzione del tempo.

Quale è la velocità istantanea dell' oggetto dopo 5 secondi?

Per rispondere a questa domanda bisogna calcolare l'incremento della distanza in un piccolissimo intervallo di tempo dall'istante considerato, ovvero dopo 5 secondi.

Per prima cosa calcoliamo quanti metri a percorso in caduta libera l'oggetto dopo 5 secondi.

Sostituiamo quindi nella funzione al posto di  $t$  il valore 5

$$s(5)=4\cdot 5^2=100\text{m}$$

• Calcoliamo in seguito quanti metri a percorso in caduta libera l'oggetto dopo 6 secondi. Sostituiamo quindi nella funzione al posto di  $t$  il valore 6.

$$s(6)=4\cdot 6^2=144\text{m}$$

Possiamo quindi concludere che in un intervallo  $\Delta t = 1$  secondo l'oggetto ha percorso 44m e che la velocità media è :

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{144-100}{1} = 44\text{m/s}$$

• Proviamo a ripetere la procedura considerando un intervallo  $\Delta t=1/10$  secondi.

$$s(5,1)=\dots\dots\dots$$

Possiamo quindi concludere che in un intervallo  $\Delta t = 1/10$  secondi l'oggetto ha percorso .....m e che la velocità media è :

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\dots\dots-100}{\frac{1}{10}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{m/s}$$

• Ripeti ora la stessa procedura considerando  $\Delta t = 1/100$  s

$$s(5,01)=\dots\dots\dots$$

Possiamo quindi concludere che in un intervallo  $\Delta t = 1/100$  secondi l'oggetto ha percorso .....m e che la velocità media è :

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\dots\dots-100}{\frac{\dots\dots}{\dots\dots}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{m/s}$$



Osserva le velocità medie che hai trovato: 44m/s, .....m/s , ..... m/s.  
 Riesci ad intuire quale sarà la velocità istantanea dopo 5 secondi.

$$V(5) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{.....m/s}$$

**Ma quale è la velocità istantanea dopo t secondi?**

Ripetiamo la procedura considerando un intervallo generico  $\Delta t$   
 Dopo t secondi l'oggetto ha percorso uno spazio

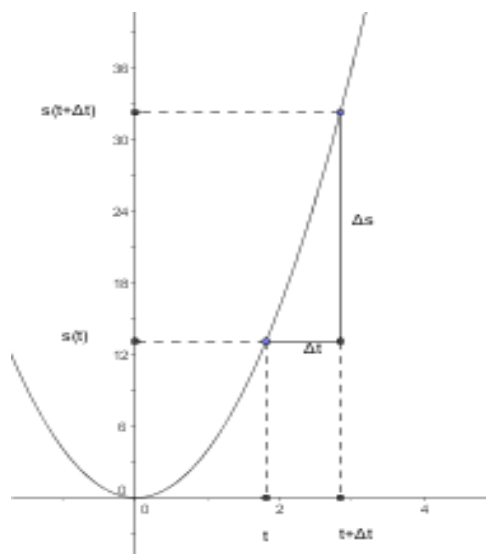
$$s = 4t^2 \quad 0 \leq t \leq 20$$

Dopo  $t + \Delta t$  secondi l'oggetto percorre uno spazio

$$s(t + \Delta t) = 4(t + \Delta t)^2 = 4(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) = 4t^2 + 8t\Delta t + 4\Delta t^2$$

Quindi l'oggetto in un intervallo  $\Delta t$  percorre una distanza  $\Delta s$

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = 4(t + \Delta t)^2 - 4t^2 = 4(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 4t^2 = 4t^2 + 8t\Delta t + 4\Delta t^2 - 4t^2 = 8t\Delta t + 4\Delta t^2$$



La velocità media nell'intervallo  $\Delta t$  è quindi

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{8t\Delta t + 4\Delta t^2}{\Delta t} = 8t + 4\Delta t$$

La velocità istantanea al tempo t, è la velocità media calcolata in un intervallo di tempo  $\Delta t$  prossimo a zero.

Quindi

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 8t + 4\Delta t = 8t$$

(il termine  $4\Delta t$  può essere eliminato perché l'intervallo  $\Delta t$  è prossimo a zero)

La velocità istantanea al tempo  $t$ , cioè la derivata della funzione  $s=4t^2$ , è quindi:

$s'=V(t)=8t$ ,  $s'$  indica la derivata della funzione  $s$ .

Possiamo inoltre verificare che la velocità istantanea dopo 5 secondi è:

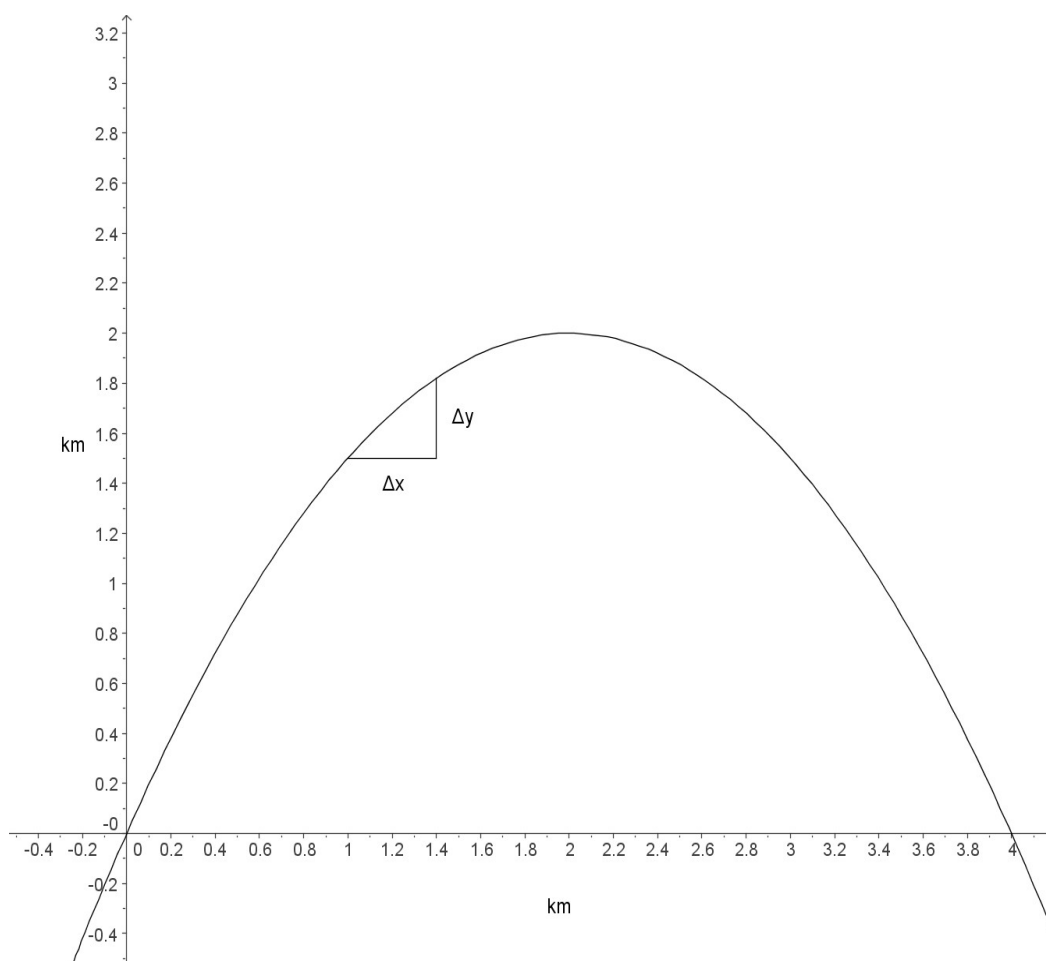
$V(5)=8*5=40\text{m/s}$  come avevamo intuito precedentemente.

### Esercizi

Il profilo di una montagna può essere approssimato con la seguente funzione:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 4$$

La funzione è rappresentata nella figura sottostante ( $y$  rappresenta l'altitudine e  $x$  la distanza orizzontale).



Cerca di intuire la pendenza della montagna al km 1, considerando un incremento orizzontale  $\Delta x$  di strada sempre più piccolo. (vedi esempio precedente)

Calcola infine la derivata della funzione, che rappresenta la pendenza della montagna in un tratto  $x$  generico.

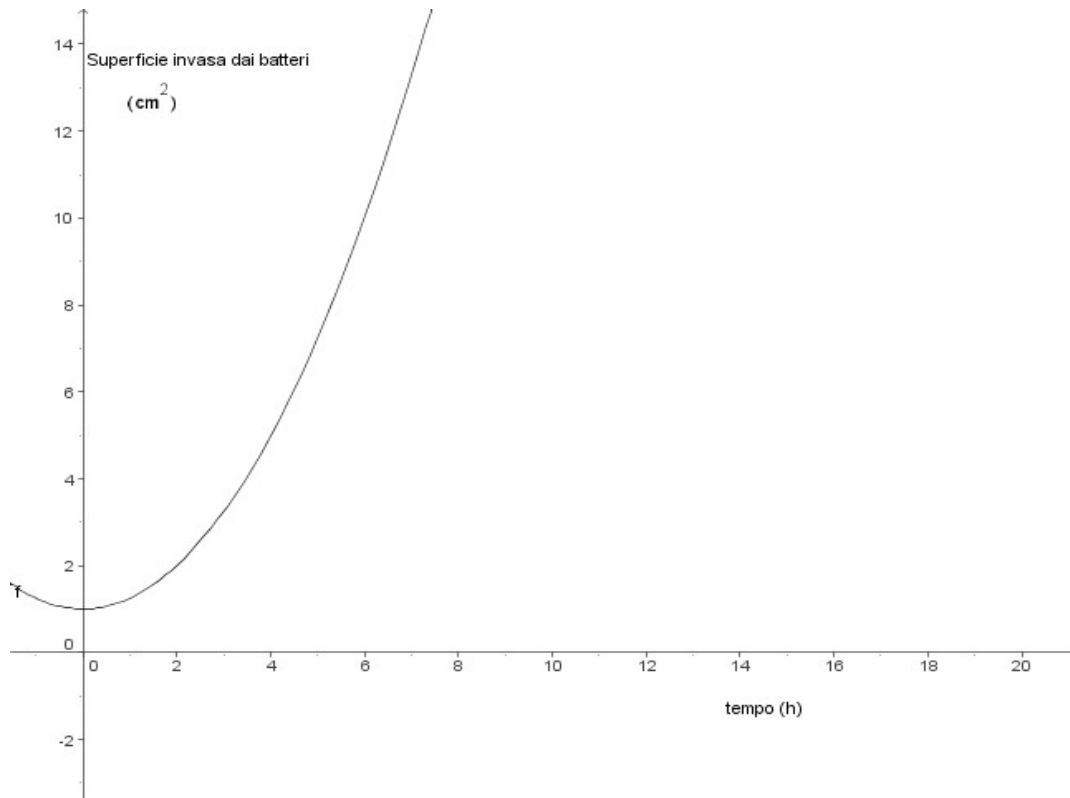
Utilizzando la derivata, verifica che il valore precedentemente trovato è corretto e calcola la pendenza al km 0, al km 2, al km 3 e al km 4.

Rappresenta graficamente la funzione derivata.

### Esercizi

La seguente funzione rappresenta la superficie  $A(\text{cm}^2)$  invasa dai batteri in funzione del tempo  $t$  (h).

$$A = \frac{1}{4}t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 8$$



Cerca di intuire la velocità di crescita dei batteri ( $\text{cm}^2/\text{h}$ ) al tempo 1, considerando un intervallo di tempo  $\Delta t$  sempre più piccolo.

Calcola infine la derivata della funzione, che rappresenta la velocità di crescita dei batteri al tempo  $t$ .

Utilizzando la derivata, verifica che il valore precedentemente trovato è corretto e calcola la velocità di crescita dopo 1, 2, 3, 4, 5h.

Rappresenta graficamente la funzione derivata.

## Formule per calcolare le derivate di funzioni polinomiali

- $y = mx \quad y' = m$

La derivata di una funzione di proporzionalità diretta che ha come grafico una retta passante per l'origine è ovviamente uguale alla sua pendenza.

Un albero che cresce di 3 metri all'anno può essere rappresentato dalla seguente funzione.

$$y = 3x$$

L'accrescimento annuale dell'albero, cioè la derivata della funzione  $y = 3x$ , è ovviamente di 3 m/anno.

In generale  $y = mx \quad y' = m$ .

- $y = k \quad y' = 0$

La derivata di una funzione costante è ovviamente uguale a zero.

Se infatti consideriamo una pianta che rimane con il passare degli anni rimane ferma all'altezza di 10m, il suo accrescimento è nullo e quindi la derivata è nulla.

In generale sia  $y = k \quad y' = 0$ .

$$y = x^n \quad y' = nx^{(n-1)}$$

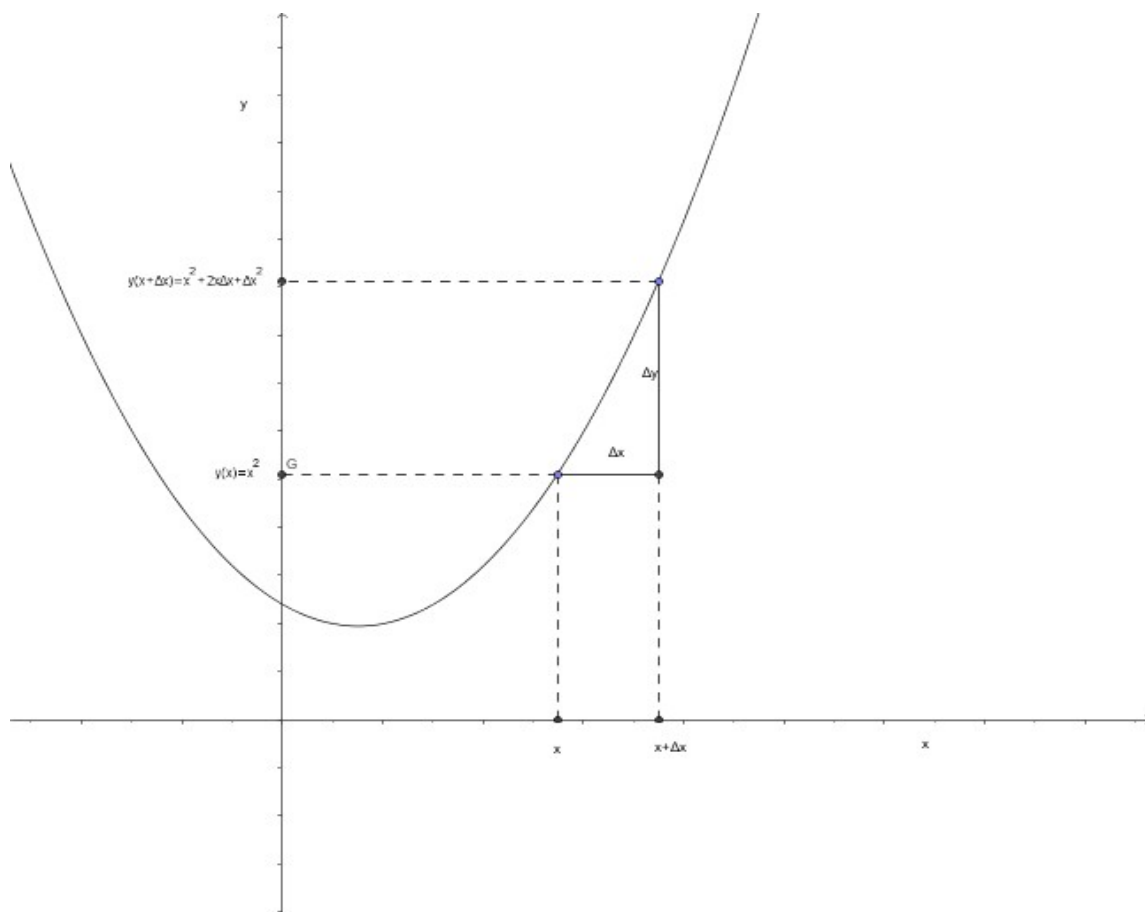
Partiamo dimostrando il caso più semplice:  $y = x^2$ .

Se incrementiamo il valore della variabile  $x$  di  $\Delta x$  la funzione assume il valore

$$y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Quindi in un intervallo  $\Delta x$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$



L'incremento medio nell'intervallo  $\Delta x$  è quindi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

L'incremento istantaneo ovvero la derivata della funzione  $y=x^2$  è:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x$$

Ripeti la procedura per calcolare la derivata della funzione  $y=x^3$ .

Se incrementiamo il valore della variabile  $x$  di  $\Delta x$  la funzione assume il valore

$$y(x + \Delta x) = \dots = \dots$$

Quindi

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \dots = \dots$$

L'incremento medio nell'intervallo  $\Delta x$  è quindi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dots\dots\dots}{\Delta x} = \dots\dots\dots$$

L'incremento istantaneo ovvero la derivata della funzione  $y=x^3$  è:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

## Conclusioni

Abbiamo trovato le derivate di  $x^2$  e  $x$ ; per le altre derivate si procede allo stesso modo e si ottiene la seguente tabella:

$$\begin{aligned} y=x^2 &\rightarrow y'=2x \\ y=x^3 &\rightarrow y'=3x^2 \\ y=x^4 &\rightarrow y'=4x^3 \\ y=x^5 &\rightarrow y'=5x^4 \end{aligned}$$

In generale si può intuire che :

$$y=x^n \quad y'=nx^{(n-1)}$$

## Derivata di un prodotto di una funzione per una costante numerica

Consideriamo la seguente funzione:

$$y=2x^3$$

Notiamo che si tratta del prodotto della costante numerica 2 per il termine  $x^3$

Per calcolare la derivata della funzione si può dimostrare che bisogna moltiplicare la costante numerica 2 per la derivata di  $x^3$  cioè :

$$y'=2 \cdot 3x^2 = 6x^2$$

In generale quindi se chiamiamo  $c$  la costante numerica e  $f$  il termine contenente l'incognita

$$y=cf \quad y'=cf'$$

## Derivata di una somma

Consideriamo una funzione costituita da una somma come la seguente:

$$y=3x^2+3x+4x^3+6$$

Per calcolare la derivata di questa funzione si può dimostrare che basta sommare la derivata di ciascun termine.

$$y'=6x+3+12x^2$$

In generale quindi si ha

$$y=f+g+h+i \quad y'=f'+g'+h'+i'$$

## Riassunto formule

$$y=k \quad y'=0$$

$$y=mx \quad y'=m$$

$$y=x^n \quad y'=nx^{(n-1)}$$

$$y=cf \quad y'=cf'$$

$$y=f+g+h+i \quad y'=f'+g'+h'+i'$$

## Esercizi

Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

$$y=3x-2 \quad y=\pi x^2+3\pi x+2 \quad y=3x^3+x^2-2x \quad y=-\pi r^3+3r^3-7\pi$$

$$y=x^4-2x^2 \quad y=-x^4+2x^2+\sqrt{3}+1 \quad y=\frac{x^5}{5}+3 \quad y=-x^5+4x^3-3x$$

$s=\frac{1}{2}t^2-2t+2$  rappresenta la posizione in metri di un oggetto in funzione del tempo. Calcola la posizione e la velocità dell'oggetto a 10 secondi.

$P=\frac{1}{6}t^3-2t^2+4$  Rappresenta il peso in kg di un oggetto in funzione del tempo espresso in anni. Calcola il peso e l'ingrassamento a 3 anni.

$v=\frac{1}{8}t^2-3t+2$  rappresenta la posizione in metri di un oggetto in funzione del tempo. Calcola la velocità e l'accelerazione dell'oggetto a 4 secondi.

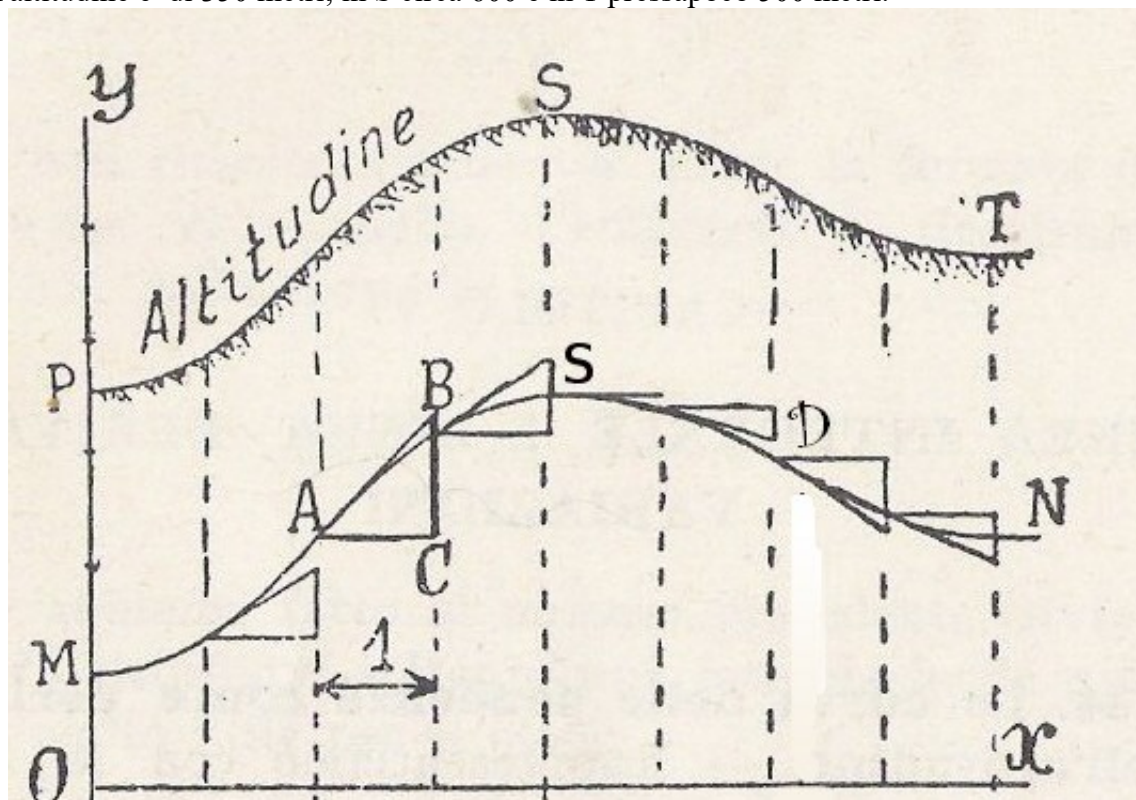
## Curva delle pendenze come derivata della funzione altitudine

Rappresentiamo con la linea P S T la sezione d'una collina situata fra due valloni P e T ;  
la linea P S T rappresenterà, per es., il profilo longitudinale d'un ripido sentiero che supera la collina.

Sulla retta Ox vengono segnate le distanze in ettometri (ben inteso misurate orizzontalmente), su Oy le altitudini in ettometri. Supponiamo che Ox sia al livello del mare.

L'altezza o altitudine è una grandezza variabile.

In P l'altitudine è di 350 metri; in S circa 600 e in T pressapoco 500 metri.



Osserviamo attentamente la curva altitudine o la curva identica sottostante. Immaginiamo di essere un alpinista che parte dal punto M e arriva al punto N e allo stesso tempo un ingegnere che osserva ogni 100m quanto la strada sale..

Come prima cosa possiamo notare che la pendenza è positiva ( la strada sale ) da ..... a ....., mentre la pendenza è negativa (la strada scende) da ..... a .....

Osserviamo ora come varia la pendenza nel tratto M-S

Nel punto M la pendenza è .....(punto di .....), in seguito la pendenza ..... sempre di più fino ad arrivare al punto ..... dove la pendenza raggiunge il valore massimo. (  $m = \frac{1}{1} = 1$  )

A è un punto di .....della funzione, ovvero un punto nel quale ..... la concavità della.....

Dal punto A fino al punto ... la pendenza diminuisce. In particolare nel punto S la pendenza è .....

Il punto S è un punto di ..... della funzione.

Osserviamo ora come varia la pendenza nel tratto S-N



Dal punto S fino al punto D la pendenza diminuisce e raggiunge il valore massimo negativo nel punto D. D è un punto di .....della funzione. La pendenza in tale punto è circa -..... (Fai il calcolo con righe e calcolatrice)

Dal punto D fino al punto N la pendenza aumenta e nel punto N la pendenza è.....

Il punto N è un punto di.....

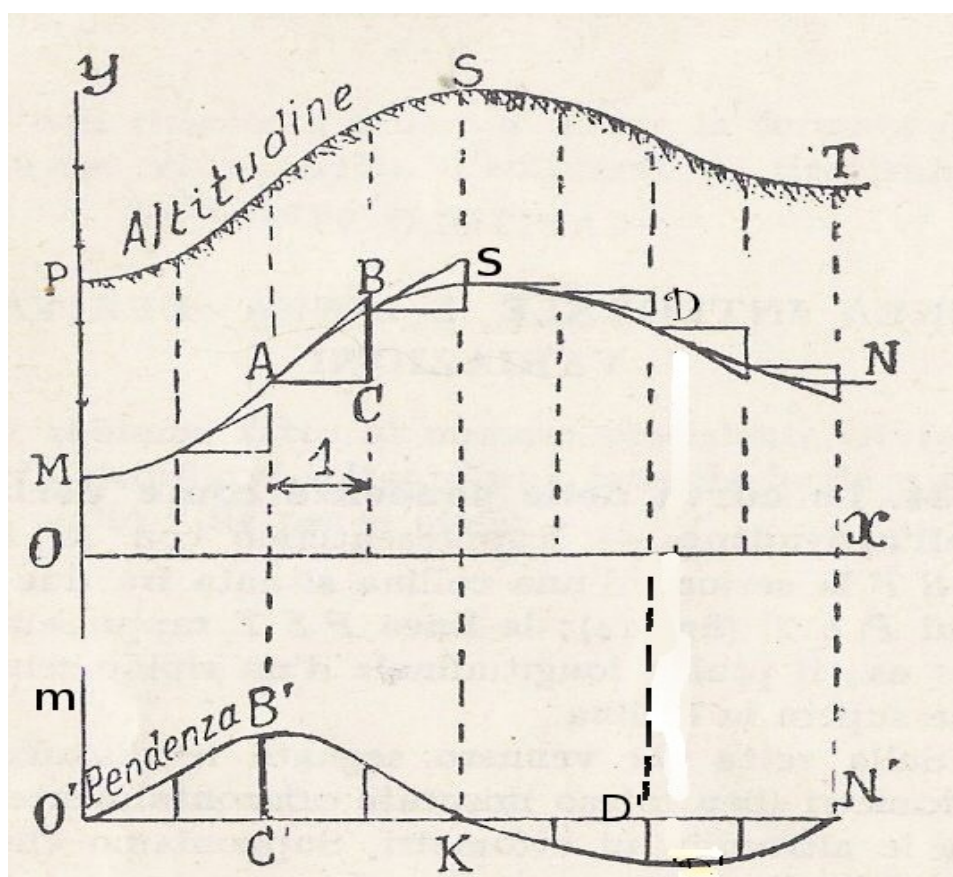
### Chiarimento

Dal punto di vista dell'alpinista da S a D la pendenza aumenta (il sentiero da pianeggiante diventa ripido) mentre da D a N la pendenza diminuisce (il sentiero da ripido diventa di nuovo pianeggiante)

Il matematico invece ragiona in modo numerico: in S la pendenza è 0, in D la pendenza è -0,7, in N la pendenza è 0 quindi la pendenza diminuisce nel tratto S-D e poi aumenta nel tratto DN.

Proviamo ora a disegnare approssimativamente la funzione «pendenza», cioè la funzione che rappresenta la pendenza  $m$  della montagna al variare della distanza orizzontale  $x$ .

Proiettiamo i punti di massimo, minimo e flesso nel grafico sottostante con una linea tratteggiata.



Anzitutto, segniamo i punti  $O'$ ,  $K$  e  $N'$  dove la pendenza è nulla (in corrispondenza dei punti di max, di minimo) in seguito i punti  $B'$  e  $D'$  dove la pendenza raggiunge rispettivamente un massimo positivo e un minimo negativo.

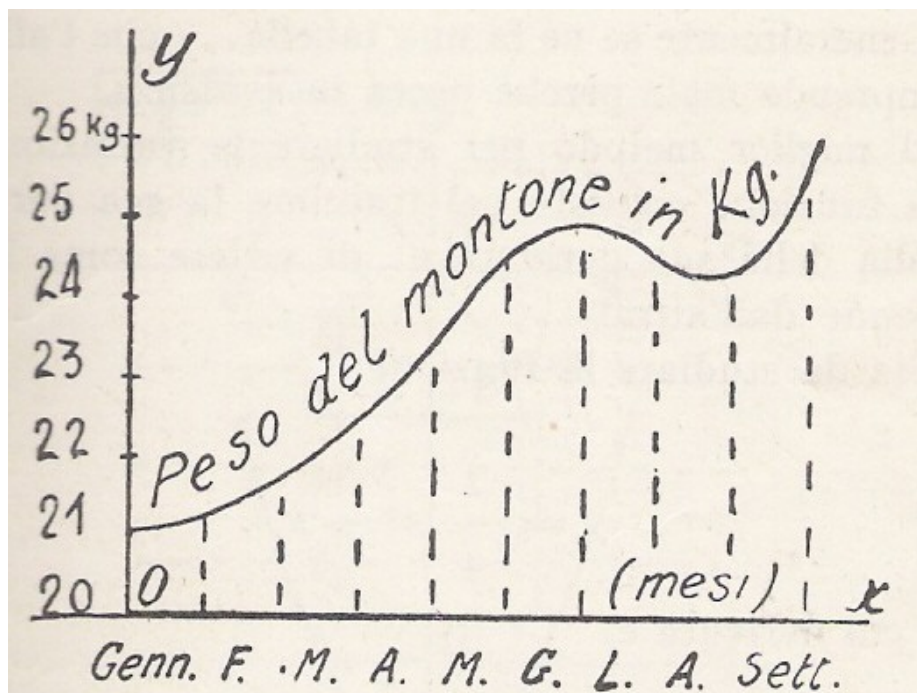
In fine congiungendo tali punti dovremmo ottenere il grafico in figura che rappresenta la curva della pendenza ovvero la derivata della funzione altitudine.

## Confronto tra termini matematici e linguaggio comune.

Linguaggio comune	Linguaggio matematico
Quando la strada è orizzontale la sua pendenza è nulla	La derivata di una costante è nulla
Quando la strada sale la sua pendenza è positiva.	La derivata di una funzione crescente è positiva.
Quando la strada scende la sua pendenza è negativa.	La derivata di una funzione decrescente è negativa.
Nel punto più in alto della salita e nel punto più basso della discesa la pendenza è nulla	Nel punto di massimo e minimo della funzione la derivata è nulla.
2 profili paralleli hanno la stessa pendenza	2 funzioni che non differiscono che per una costante hanno la stessa derivata
Dove cambia la concavità della montagna la pendenza è massima o minima.	In un punto di flesso la derivata ha un massimo o un minimo.

## Ingrassamento come derivata della funzione peso

La curva in figura rappresenta il peso di un montone in funzione del tempo.  
Il peso è espresso in kg mentre il tempo in mesi.



La pendenza del grafico rappresenta in questo caso l'ingrassamento del montone (kg/mese).

Come prima cosa possiamo notare che la pendenza è positiva ( il peso aumenta ) dall'inizio di ..... alla fine di ..... e dall'inizio di settembre circa fino alla fine del mese, mentre la pendenza è negativa (il peso diminuisce) dall'inizio di ..... alla fine di.....

Osserviamo ora come varia la pendenza ovvero l'ingrassamento da gennaio a fine giugno.

All'inizio di gennaio l'ingrassamento è ..... , in seguito l'ingrassamento aumenta sempre di più fino alla fine del mese di aprile (punto di.....del grafico) dove raggiunge il valore massimo. Aiutandoti con un righello prova a calcolare tale valore che è circa .....kg/mese. Dall'inizio di maggio fino alla fine di giugno l'ingrassamento diminuisce anche se il peso aumenta . In particolare alla fine di giugno-inizio luglio l'ingrassamento è 0

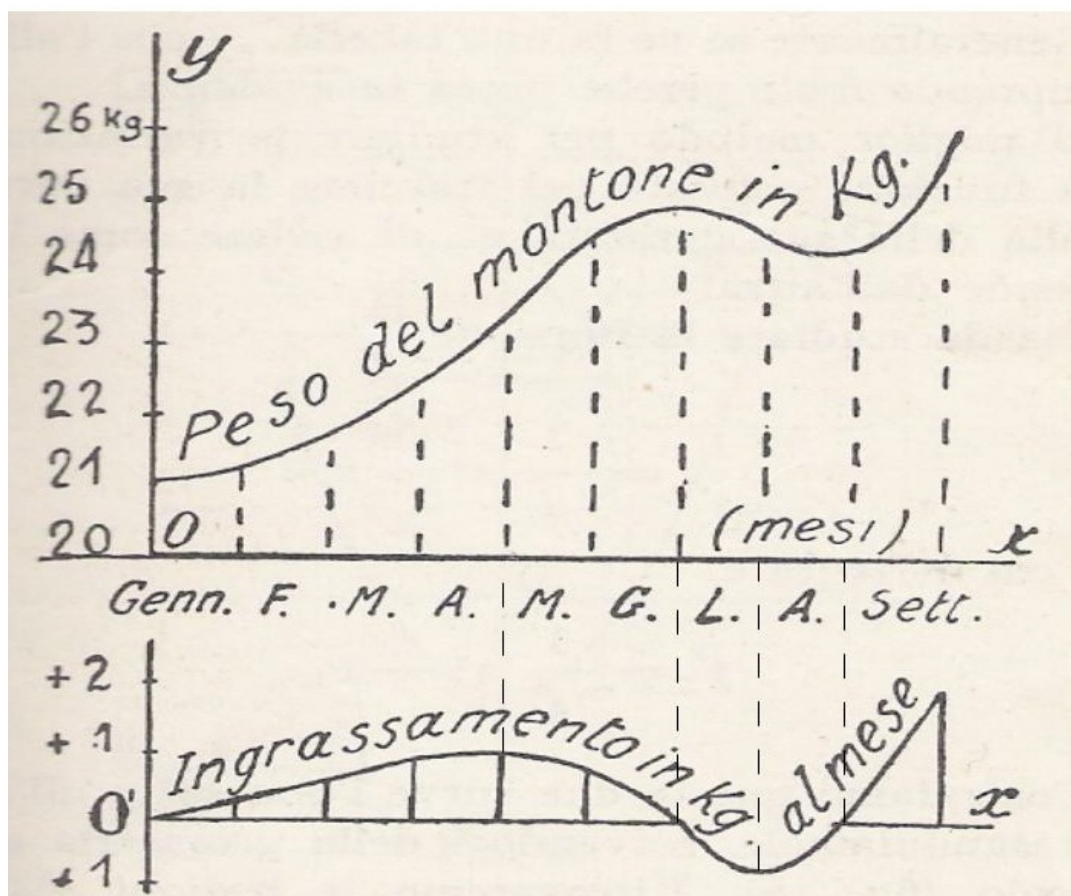
Osserviamo ora come varia la pendenza ovvero l'ingrassamento dall'inizio di luglio alla fine di agosto.

Dall'inizio del mese di luglio fino alla fine del mese di luglio (punto di.....del grafico) l'ingrassamento diminuisce .Aiutandoti con un righello prova a calcolare il valore massimo negativo dell'ingrassamento che è circa - .....kg/mese. Dall'inizio di agosto alla fine di agosto l'ingrassamento aumenta.

In particolare alla fine di agosto-inizio settembre l'ingrassamento è .....

Dal mese di settembre in poi l'ingrassamento è positivo ed aumenta sempre di più.

Proviamo ora a disegnare la funzione ingrassamento , cioè la funzione che rappresenta l'ingrassamento del montone al trascorrere dei mesi.



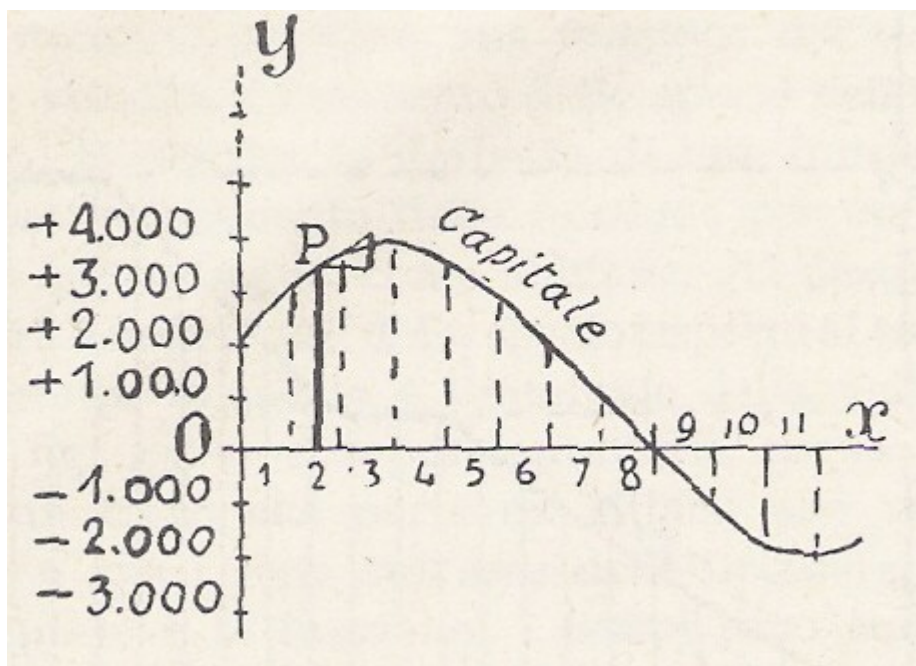
Anzitutto, segneremo i punti dove l'ingrassamento è nullo (in corrispondenza dei punti di max, di minimo) in seguito i punti di flesso dove l'ingrassamento raggiunge rispettivamente un massimo(.....) e un minimo (circa .....).

In fine congiungendo tali punti dovremmo ottenere il grafico in figura che rappresenta la curva dell'ingrassamento del montone ovvero la derivata della funzione peso.

Dalle tue risposte puoi trarre alcune considerazioni:

negli intervalli in cui la concavità della funzione è rivolta verso il basso la pendenza .....mentre negli intervalli in cui la concavità è rivolta verso l'alto la pendenza .....

## Arricchimento come derivata della funzione patrimonio



La curva in figura rappresenta un patrimonio che varia in modo continuo; non è molto verosimile ma lo si può immaginare e ciò basta.

Il patrimonio è espresso in migliaia di euro mentre il tempo in mesi.

La pendenza del grafico rappresenta in questo caso l'arricchimento in (migliaia di euro/mese).

Come prima cosa possiamo notare che la pendenza è positiva (capitale aumenta) dall'inizio di gennaio alla fine di ....., mentre la pendenza è negativa (capitale diminuisce) dall'inizio di ..... alla fine di .....

Osserviamo ora come varia la pendenza ovvero l'arricchimento da gennaio a fine marzo.

Dall'inizio di gennaio alla fine di marzo l'arricchimento ..... A fine marzo-inizio aprile l'arricchimento è .....euro/mese.

In corrispondenza di tale data nel grafico abbiamo un punto di.....

Osserviamo ora come varia la pendenza ovvero l'arricchimento da inizio aprile a fine novembre.

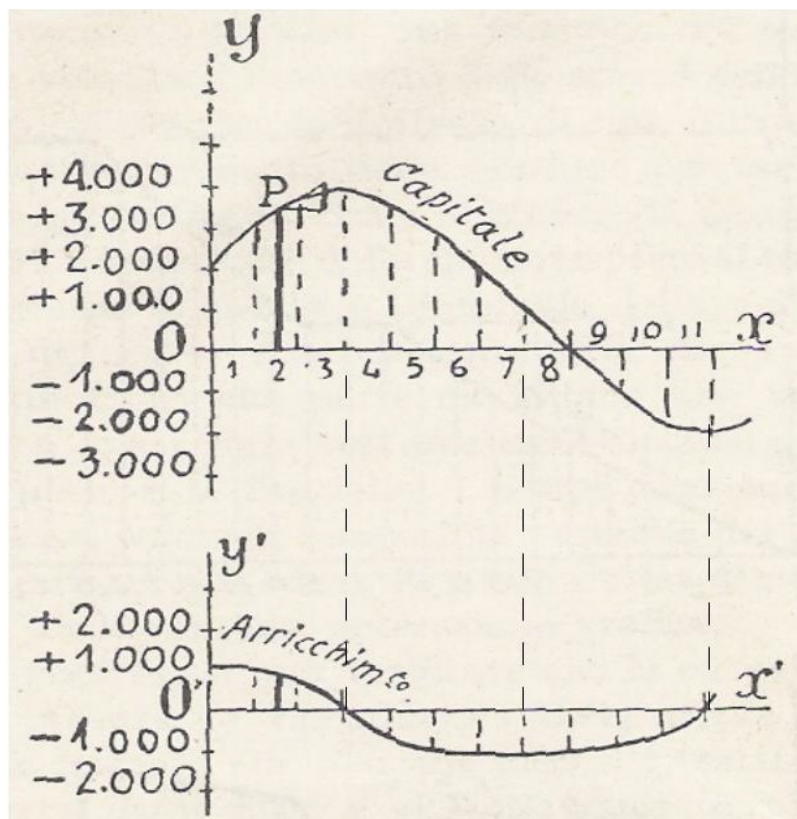
Dall'inizio del mese di aprile fino alla fine del mese di luglio (punto di.....del grafico) l'arricchimento diminuisce. Aiutandoti con un righello prova a calcolare il valore massimo negativo dell'arricchimento che è circa - .....euro/mese.

Dall'inizio di agosto alla fine di novembre l'arricchimento .....(diminuisce negativamente).

In particolare alla fine di novembre-inizio dicembre l'arricchimento è .....



Proviamo ora a disegnare la funzione arricchimento , cioè la funzione che rappresenta l'arricchimento al trascorrere dei mesi.



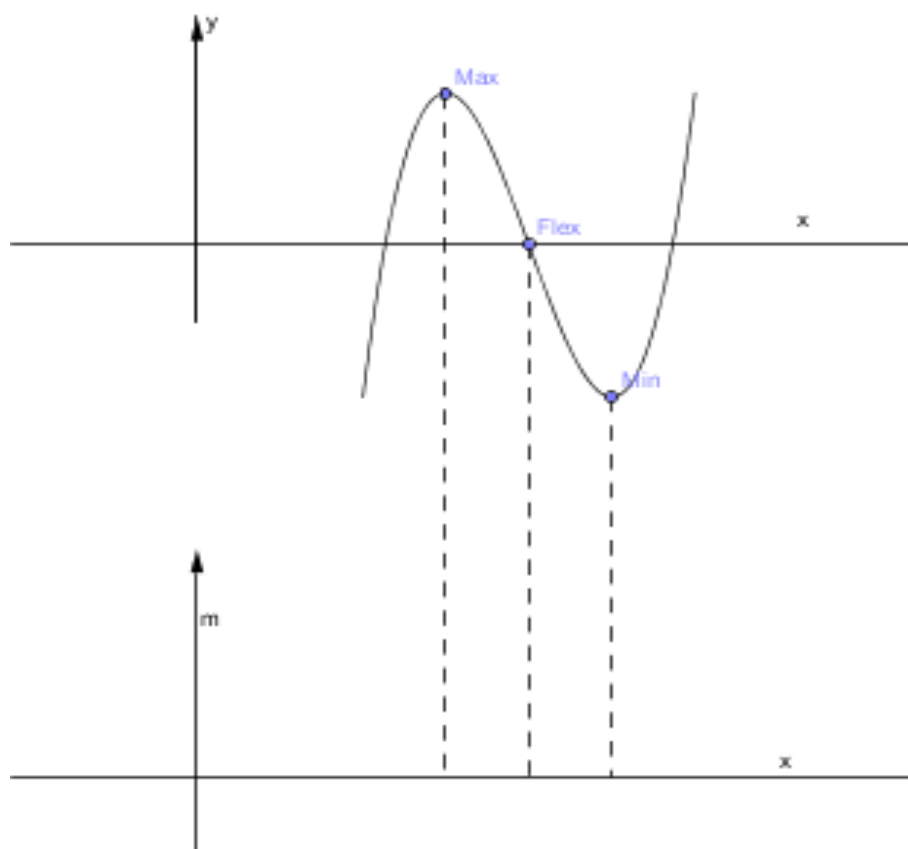
Proiettiamo i punti di massimo, minimo e flesso nel grafico sottostante con una linea tratteggiata.

Anzitutto, segneremo i punti dove l'arricchimento è nullo (in corrispondenza dei punti di max, di minimo) in seguito i punti di flesso dove l'arricchimento raggiunge rispettivamente un massimo(.....) e un minimo (circa .....).

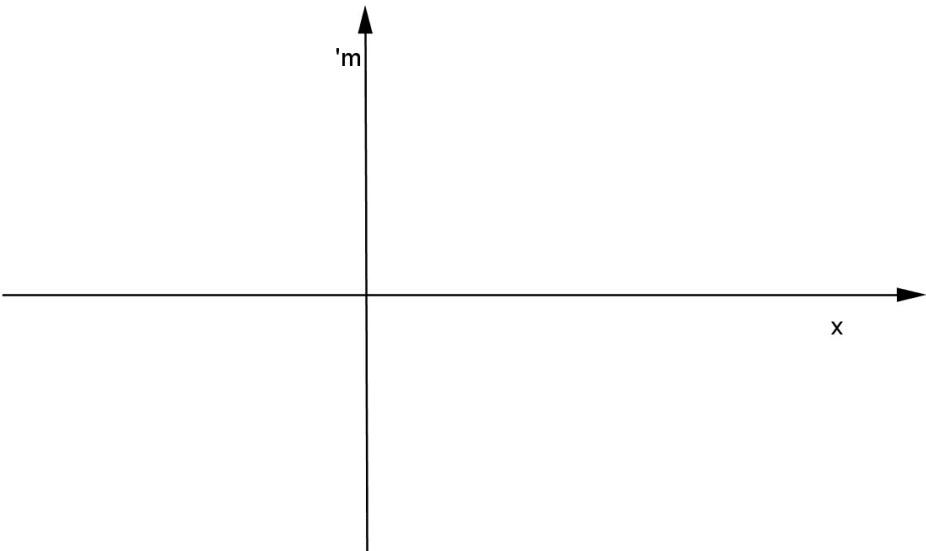
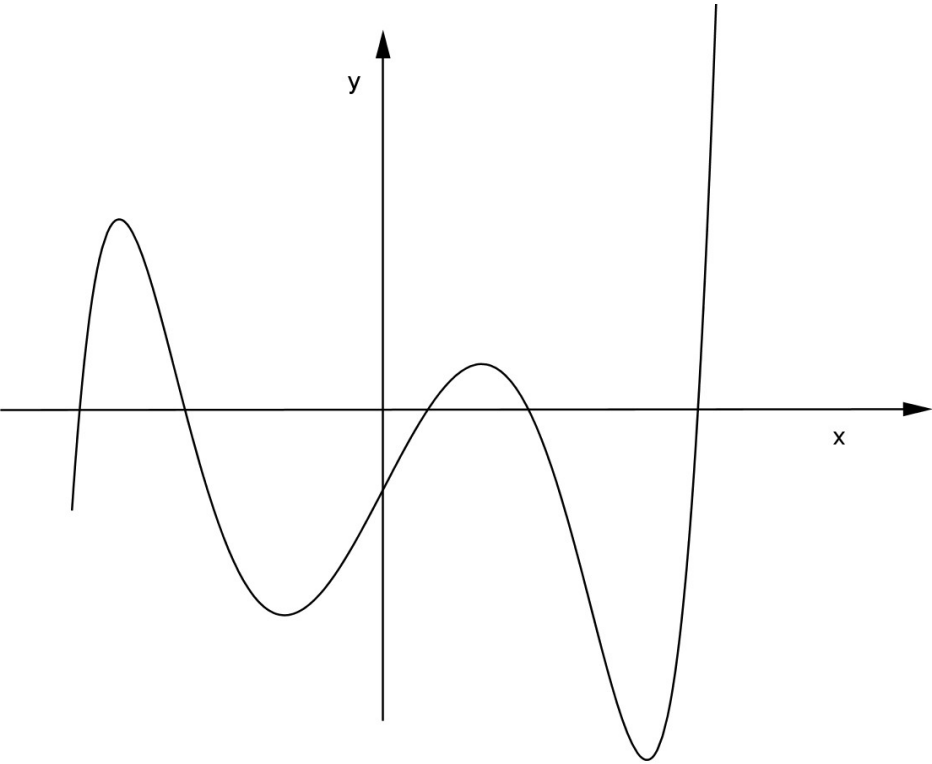
In fine congiungendo tali punti dovremmo ottenere il grafico in figura che rappresenta la curva dell'arricchimento del capitale e ovvero la derivata della funzione capitale rispetto al tempo.

## Esercizi

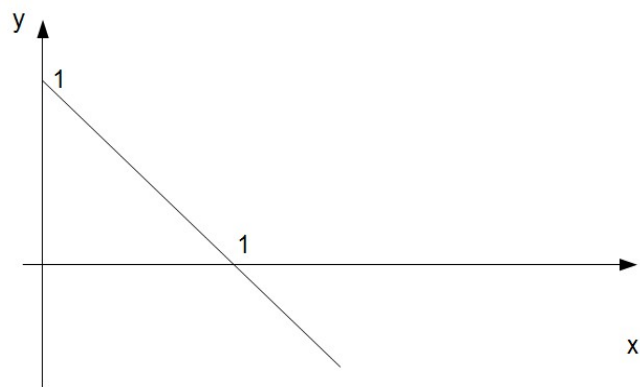
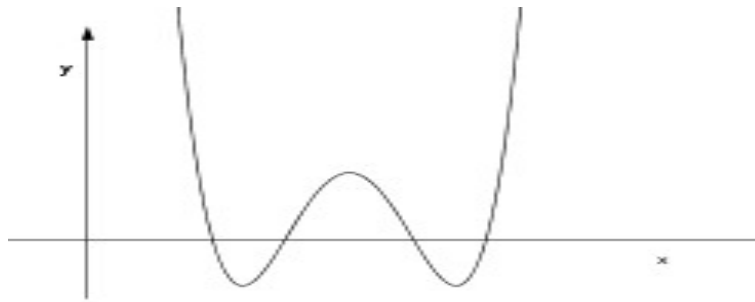
Rappresenta in modo approssimato la derivata di queste funzioni.

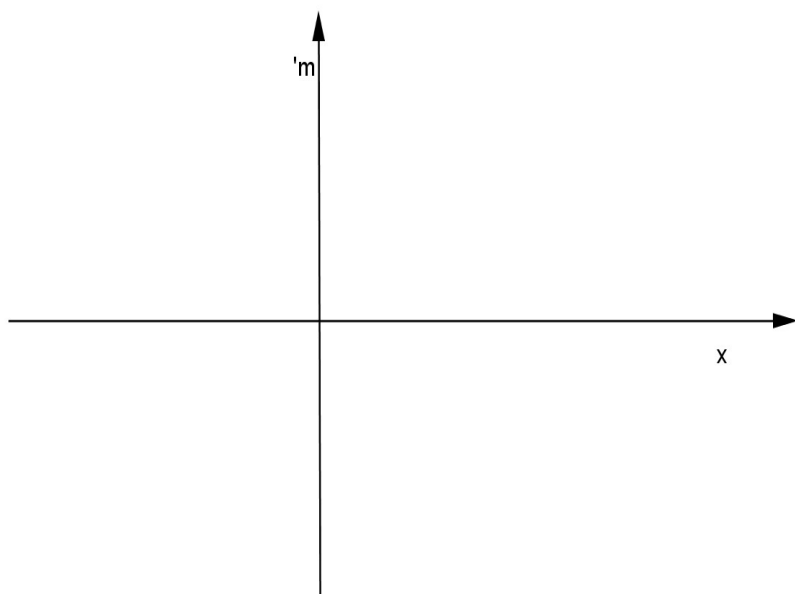
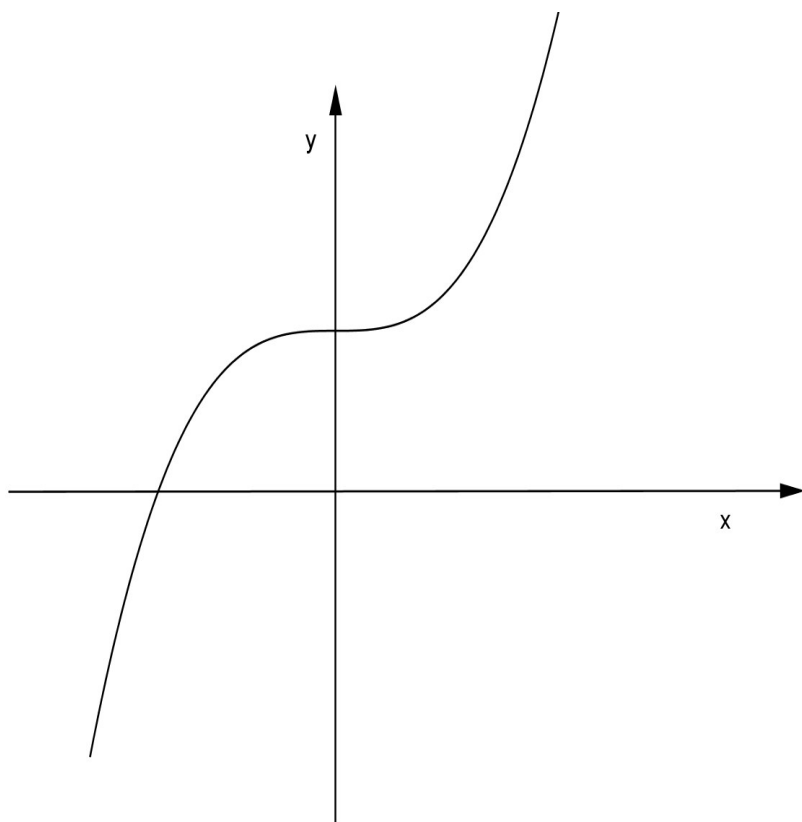


**Rappresenta approssimativamente la graficamente la derivata di queste funzioni dopo aver proiettato massimi minimi e flessi.**









*Esercizi con GeoGebra.*

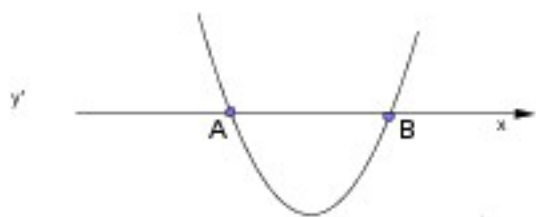
1. Rappresenta graficamente la funzione  $y=x^3+2x$  con Geogebra.  
Per fare questa operazione devi scrivere nella casella d'inserimento  $f(x)=x^3+2x$  e poi invio.
2. Riporta il grafico sul tuo quaderno e prova a disegnare la derivata della funzione nello stesso sistema di assi cartesiani.
3. Calcola la derivata della funzione utilizzando le formule che hai imparato.
4. Rappresenta graficamente la derivata della funzione appena trovata, immettendo nella casella d'inserimento:  $g(x)=3x^2+2$ .
5. Verifica la correttezza del tuo grafico.

Ripeti la stessa procedura con le seguenti funzioni:

$$\begin{array}{llll} y=3x-2 & y=x^2+3x+2 & y=x^3+x^2-2x & y=-x^3+3x-7 \\ y=x^4-2x^2 & y=-x^4+2x^2+1 & y=\frac{x^5}{5}+3 & y=-x^5+4x^3-3x \end{array}$$

## Studio del segno della derivata $y'$

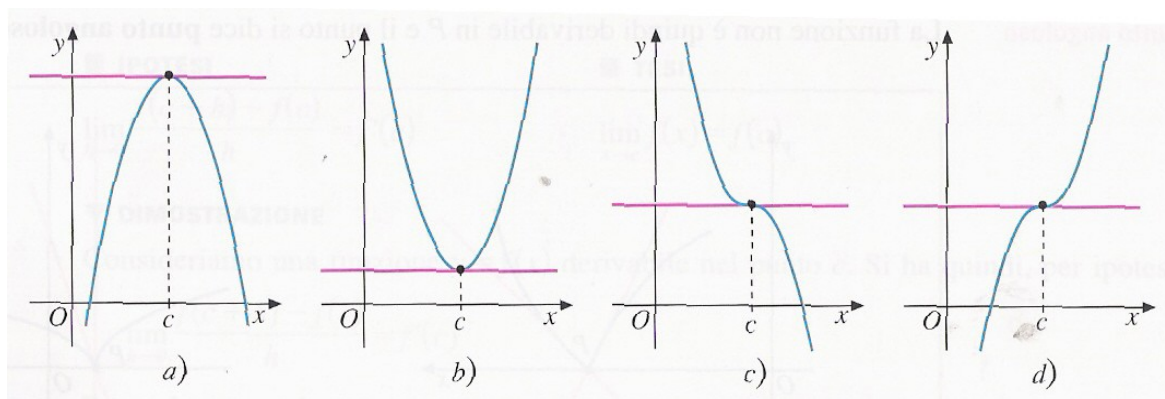
Supponiamo di conoscere il grafico della curva delle pendenze  $y'$  di una funzione che cosa possiamo dire sulla funzione  $y$  ?



Innanzitutto possiamo notare che la curva  $y'$  interseca l'asse delle  $x$  in 2 punti A e B. Questo ci permette di dire che la funzione  $y$  ha pendenza zero in tali punti, cioè in termini più corretti, la pendenza della retta tangente alla funzione  $y$  in tali punti è zero.

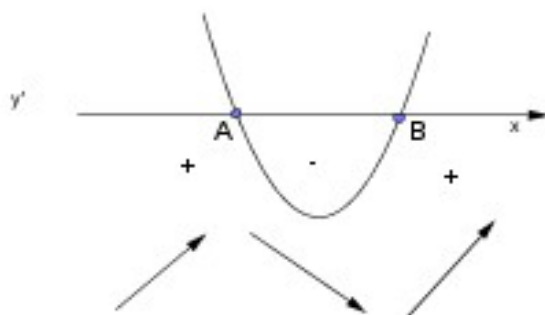
Ma quali sono i punti di una funzione che hanno pendenza zero ?

Sicuramente i punti di max e di minimo, ma anche i punti di flesso a tangente orizzontale discendenti (c) o ascendenti (d), come possiamo notare dal grafico.



Abbiamo quindi bisogno di maggiori informazioni dal grafico per poter affermare se il punto A o il punto B sono punti di max, di minimo o di flesso a tangente orizzontale.

Queste informazioni possono essere fornite dallo studio del segno della derivata.



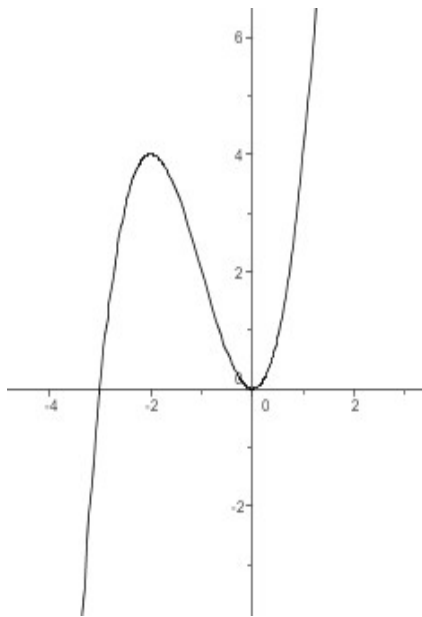
La funzione pendenza  $y'$  è positiva nell'intervallo  $(-\infty; A)$  e nell'intervallo  $(B; +\infty)$ , mentre è negativa nell'intervallo  $(A; B)$ .

Negli intervalli in cui la pendenza è positiva la funzione è crescente  $\uparrow$ , mentre negli intervalli in cui la derivata è negativa la funzione è decrescente  $\downarrow$ , come possiamo riassumere nel seguente schema.

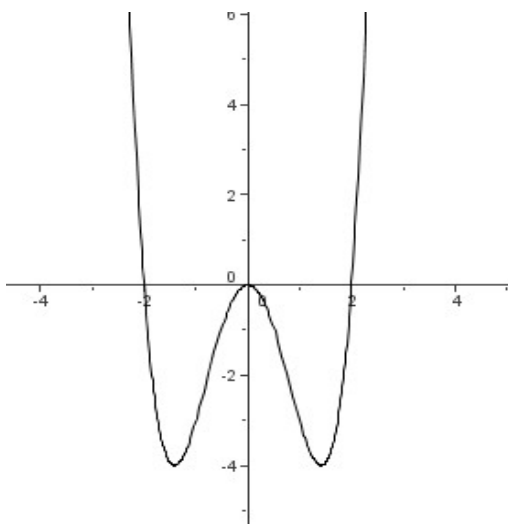
Il punto A è quindi un punto di max, mentre il punto B è un punto di minimo della funzione e l'andamento della funzione è quello indicato dalle frecce.

### Esercizi

1. Data la curva delle pendenze  $y'$  in figura disegna in modo approssimato la funzione  $y$ , aiutandoti con lo schema precedente. Il punto -3 è un punto di max o di minimo di  $y$ ? E il punto 0 è un flesso ascendente o discendente di  $y$ ?



2. Data la curva delle pendenze  $y'$  in figura disegna in modo approssimato la funzione  $y$ , aiutandoti con lo schema precedente. Determina inoltre eventuali punti di max, minimo o flesso.

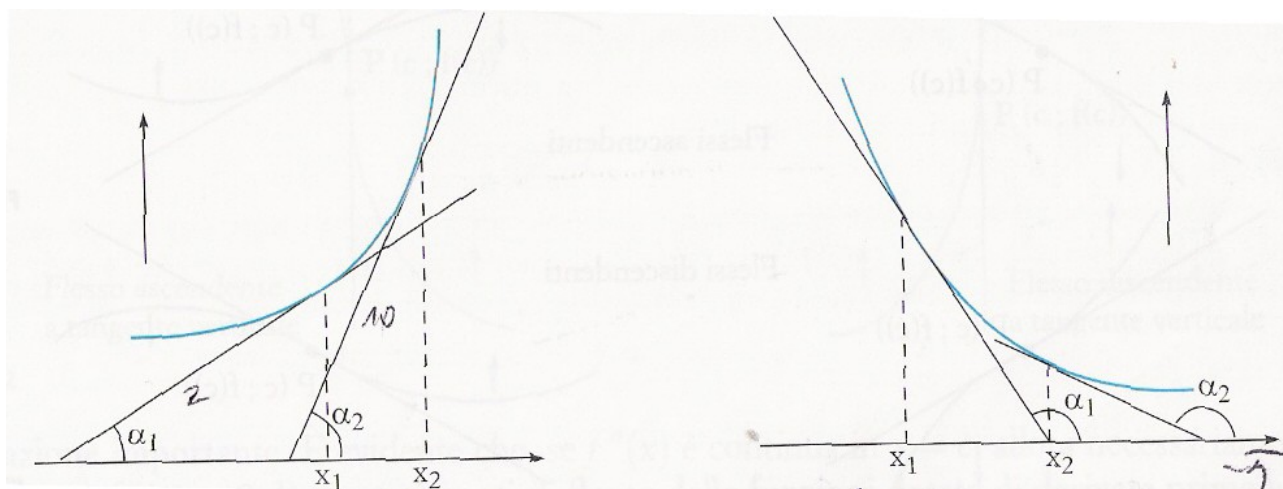


## Studio del segno della derivata $y''$

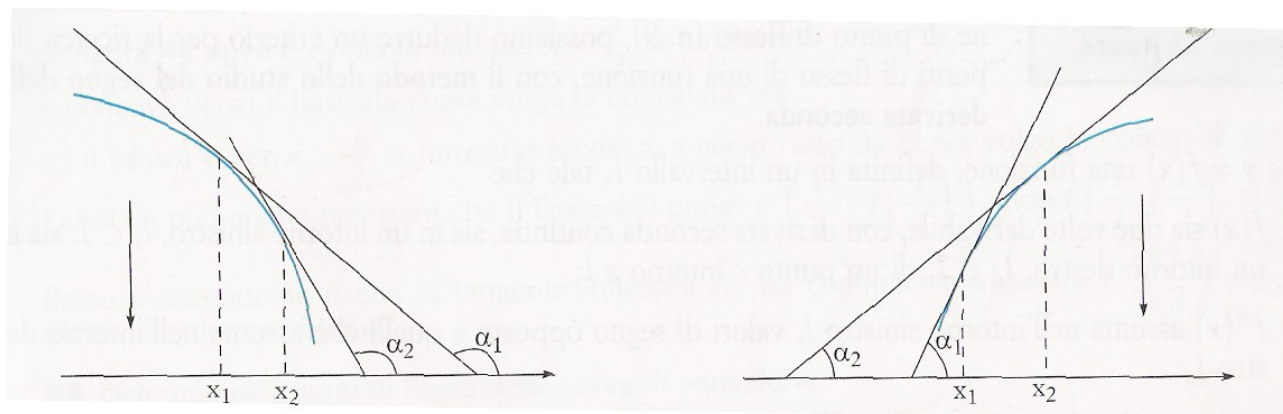
Cerchiamo ora di scoprire quali informazioni ci può fornire la curva della pendenza della pendenza ovvero  $y''$ .

Sappiamo che, se una funzione  $y$  ha la derivata  $y'$  positiva (o negativa) in tutti i punti interni a un intervallo, essa è crescente (o decrescente) in tale intervallo. Applicando questa considerazione possiamo affermare che se la derivata seconda  $y''$  è positiva, allora  $y'$  è crescente e, se  $y''$  è negativa,  $y'$  è decrescente.

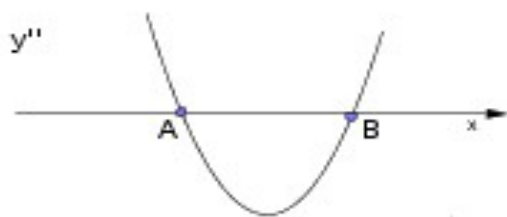
Siccome la derivata  $y'$  s'interpreta come la pendenza della retta tangente alla curva  $y$ , possiamo dire che, se  $y'' > 0$ , allora  $y'$  cresce, cioè cresce la pendenza della tangente, quando si procede nel senso positivo dell'asse delle  $x$ . Ciò si verifica quando la concavità della curva è rivolta verso l'alto.



Per contrapposto, se  $y''$  è negativa, allora  $y'$  decresce e perciò decresce la pendenza della tangente, il che si verifica quando la concavità della curva è rivolta verso il basso.

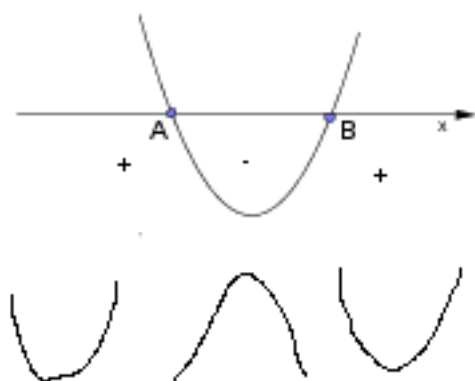


Consideriamo ora il seguente grafico che rappresenta la derivata seconda  $y''$  di una funzione.



Per determinare la concavità, basta studiare il segno della funzione  $y''$ .

Negli intervalli in cui la funzione  $y''$  è positiva la concavità è rivolta verso l'alto, dove la funzione è negativa la concavità è rivolta verso il basso.



I punti A e B sono 2 punti di flesso in quanto cambia la concavità.

# Studio di funzioni polinomiali

## Funzioni quadratiche

Le funzioni lineari  $y = mx + q$  sono già state trattate all'inizio di questa dispensa.

Analizziamo quindi le funzioni quadratiche  $y = ax^2 + bx + c$  partendo subito da un'esempio

$$y = x^2 + 3x + 2$$

### 1) Intersezione con asse x:

Si pone  $y = 0$  e si risolve l'equazione

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad x_2 = -2 \quad x_3 = -1$$

La curva interseca l'asse x nei punti A(-2;0) e B(-1;0)

### 2) Intersezione asse y:

Si pone  $x = 0$  e si trova  $y = 2$

La curva interseca l'asse y nel punto C(0;2)

### 3) Calcolo della derivata e studio del segno per determinare massimi e minimi

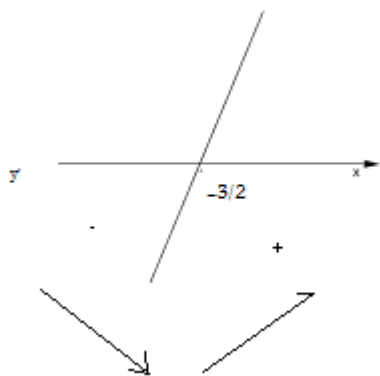
$$y' = 2x + 3$$

Si pone  $y' = 0$  per cercare i punti della funzione in cui la pendenza è nulla

$$\text{e si risolve } 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Poi si procede allo studio del segno della derivata

$$y' = 2x + 3 \text{ è una retta crescente } m > 0$$





Dallo studio del segno si comprende che

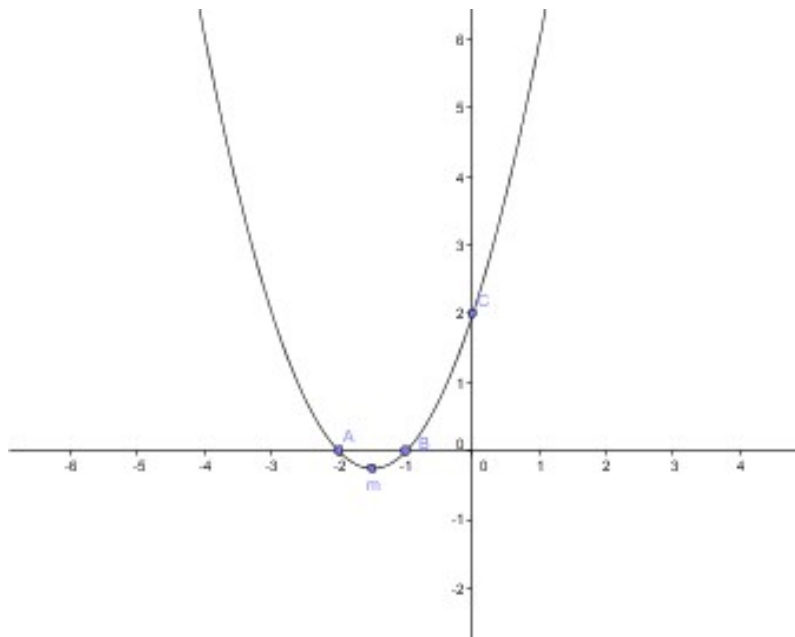
$-\frac{3}{2}$  è un punto di minimo.

Sostituendo il valori trovati nella funzione ,  $y=x^2+3x+2$  utilizzando una calcolatrice scientifica trovo  $m(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$

#### 4)Calcolo della derivata seconda e studio del segno per determinate eventuali punti di flesso

$$y''=2>0$$

Dato che la derivata seconda è sempre positiva, possiamo affermare che la concavità è rivolta verso l'alto e che non ci sono punti di flesso.



Sia  $y=ax^2+bx+c$

se  $a>0$  la concavità è rivolta verso l'alto e abbiamo solo un punto di minimo.

se  $a<0$  la concavità è rivolta verso il basso e abbiamo solo un punto di max..



## Funzioni di terzo grado

Partiamo subito da un esempio

$$y = 4x^3 - x^2 - 14x$$

### 1) Intersezione con asse x:

Si pone  $y=0$  e si risolve l'equazione

$$4x^3 - x^2 - 14x = 0$$

$$x(4x^2 - x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+224}}{8} = \frac{1 \pm 15}{8} \quad x_2 = 2 \quad x_3 = \frac{-7}{4}$$

La curva interseca l'asse x nei punti  $O(0;0)$ ,  $A(-7/4;0)$  e  $B(2;0)$

### 2) Intersezione asse y:

Si pone  $x=0$  e si trova  $y=0$ .

La curva interseca l'asse y nell'origine l'origine degli assi  $O(0;0)$ .

### 3) Calcolo della derivata e studio del segno per determinare massimi e minimi o flessi a tangente orizzontale

$$y' = 12x^2 - 2x - 14$$

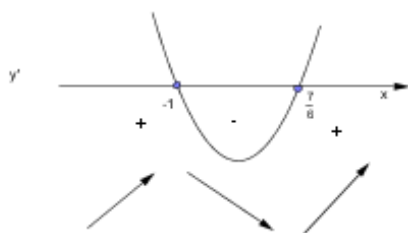
Si pone  $y'=0$  per cercare i punti della funzione in cui la pendenza è nulla

$$\text{e si risolve } 12x^2 - 2x - 14 = 0 \rightarrow 6x^2 - x - 7 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{12} = \frac{1 \pm 13}{12} \quad x_1 = \frac{7}{6} \quad x_2 = -1$$

Poi si procede allo studio del segno della derivata

$$y' = 12x^2 - 2x - 14 \text{ è una parabola con concavità rivolta verso l'alto, dato che } a = 2 > 0$$



Dallo studio del segno si comprende in quali intervalli la funzione è crescente o decrescente e la presenza di eventuali punti di massimo, minimo o flesso a tangente orizzontale.

Nel nostro caso per  $x = -1$  abbiamo un massimo e per  $x = \frac{7}{6}$  un minimo.

Sostituendo i valori trovati nella funzione  $y = 4x^3 - x^2 - 14x$ , utilizzando una calcolatrice scientifica trovo.

$$M(-1;9) \text{ e } m(7/6; -1225/108) \quad \frac{-1225}{108} \simeq -11,34$$

#### 4) Calcolo della derivata seconda e studio del segno per determinare eventuali punti di flesso

$$y' = 24x - 2$$

Si pone  $y' = 0$

$$\text{e si risolve } 24x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{12}$$

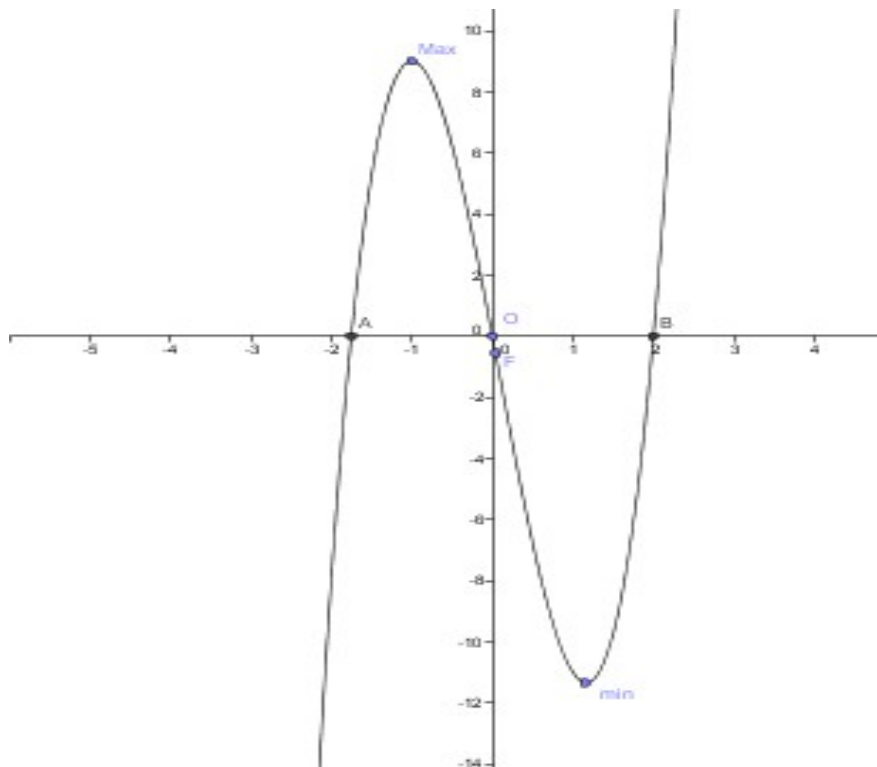
Poi si procede allo studio del segno della derivata

$$y' = 24x - 2 \text{ è una retta crescente dato che } m = 24 > 0$$

la concavità della curva cambia nel punto di flesso  $x = \frac{1}{12}$ .

Sostituendo i valori trovati nella funzione  $y = 4x^3 - x^2 - 14x$ , utilizzando una calcolatrice scientifica trovo.  $F\left(\frac{1}{12}; \frac{253}{216}\right) \quad \frac{253}{216} \simeq 1,17$

#### 5) Disegnare il grafico



## Funzioni di quarto grado

Partiamo da un esempio

$$y = x^4 - 2x^2 - 8$$

### 1) Intersezione con asse x:

Si pone  $y=0$  e si risolve l'equazione

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$t = x^2$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -2$$

$$x^2 = 4 \quad x_{1/2} = \pm 2 \quad x^2 = -2 \quad \text{nessuna soluzione}$$

La curva interseca l'asse x nei punti A(-2;0) e B(2;0)

## 2) Intersezione asse y:

Si pone  $x=0$  e si trova  $y=-8$ .

La curva interseca l'asse y nel punto C(0;-8).

## 3) Calcolo della derivata e studio del segno per determinare massimi e minimi o flessi a tangente orizzontale

$$y' = 4x^3 - 4x$$

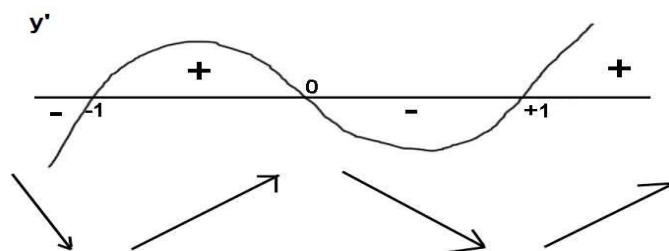
Si pone  $y'=0$  per cercare i punti della funzione in cui la pendenza è nulla

e si risolve  $4x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(4x^2 - 4) = 0$

$$x=0 \quad 4x^2 - 4 = 0 \quad x^2 = 1 \quad x = \pm 1$$

Poi si procede allo studio del segno della derivata

$y' = 4x^3 - 4x$  è una funzione della seguente forma, dato che  $a > 0$



Dallo studio del segno si comprende in quali intervalli la funzione è crescente o decrescente e la presenza di eventuali punti di massimo, minimo o flesso a tangente orizzontale.

Nel nostro caso per  $x=-1$  e per  $x=1$  abbiamo un minimo e per  $x=0$  un massimo. Sostituendo i valori trovati nella funzione,  $y=x^4 - 2x^2 - 8$  trovo:

$$m_1(-1; -9) \text{ e } m_2(1; -9) \text{ e } M(0; -8)$$

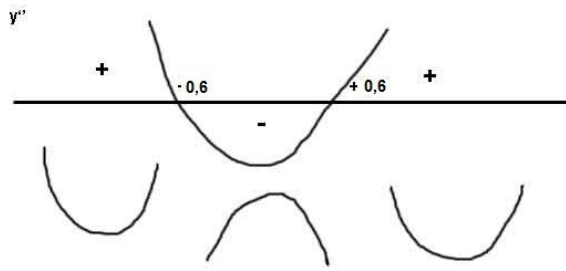
## 4) Calcolo della derivata seconda e studio del segno per determinare eventuali punti di flesso

$$y' = 12x^2 - 4 \quad \text{Si pone } y'=0$$

e si risolve  $12x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0,6$

Poi si procede allo studio del segno della derivata

$y' = 12x^2 - 4$  è una parabola con concavità rivolta verso l'alto  $a = 12 > 0$

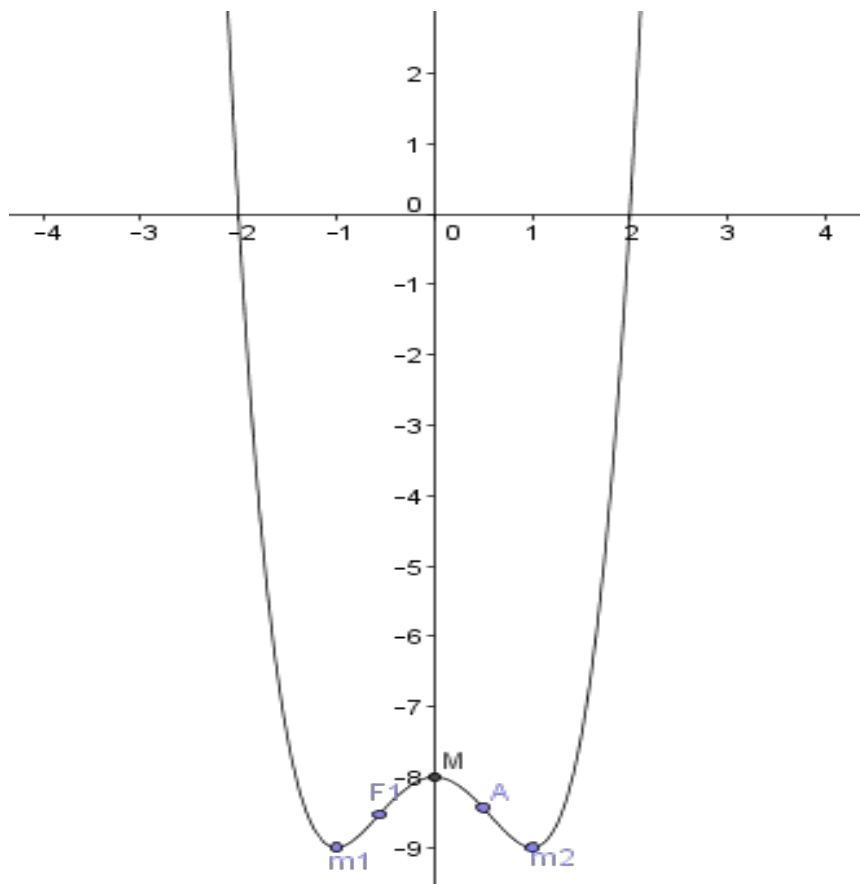


la concavità della curva cambia nei punti di flesso  $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0,6$ .

Sostituendo  $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$  nella funzione,  $y = x^4 - 2x^2 - 8$  utilizzando una calcolatrice scientifica

trovo.  $F_1(-\sqrt{\frac{1}{3}}; -\frac{77}{9})$   $F_2(\sqrt{\frac{1}{3}}; -\frac{77}{9})$   $\frac{77}{9} \sim 8,6$

### 5) Disegnare il grafico



## Esercizi su funzioni polinomiali

### Funzioni di secondo grado

1) Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, trovando massimi o minimi.

$$y=8x^2+10x-7 \quad y=9x^2-4x \quad y=(x-1)(x+2) \quad y=-x^2-2x+8$$

$$y=x^2-x+1 \quad y=x^2-9 \quad y=-x^2+4$$

2) Determina l'equazione della retta tangente alla funzione  $y=9x^2-4x$ , passante per il punto P della funzione di ordinata  $x=1$ .

Determina l'equazioni della rette tangente alla funzione  $y=x^2-9$ , passanti per i punti P e Q della funzione di ordinata  $y=-5$ .

Determina l'equazione della retta tangente alla funzione  $y=x^2-4x$ , passante per il punto P della funzione di ascissa  $x=1$ .

### Funzioni di terzo grado

1) Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, trovando massimi, minimi e flessi.

$$y=3x^3-2x^2 \quad y=9x^3-4x \quad y=(x+1)(x+2)(x-3) \quad y=x^3-3x^2-9x+11$$

$$y=\frac{1}{2}x^3-x^2-2x+4 \quad y=x^3-5x^2+7x-2 \quad y=x(x-1)^2$$

2) Determina l'equazione della retta tangente alla funzione  $y=3x^3-2x^2$  passante per il punto P della funzione di ascissa  $x=-1$ .

### Funzioni di quarto grado

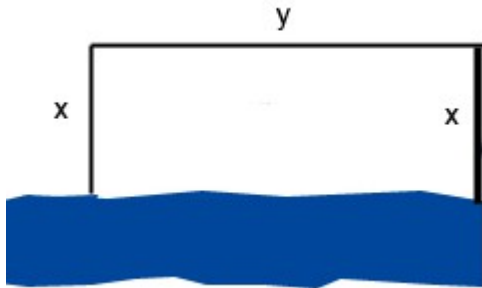
1) Rappresenta graficamente le seguenti funzioni di quarto grado, trovando massimi, minimi e flessi.

$$y=x^4-5x^2+4 \quad y=x^4-2x^2 \quad y=x(x-2)^3 \quad y=\frac{1}{4}x^4-2x^3+1 \text{ (senza intersezioni asse } x \text{)}$$

2) Determina l'equazione della retta tangente alla funzione  $y=x^4-2x^2-8$  passante per il punto P della funzione di ascissa  $x=2$ .

## Problemi di max e minimo

Un lato di un campo da rettangolo è limitato da un ruscello e se si devono recintare gli altri 3 lati con una rete metallica lunga 100m. Determina la funzione  $A(x)$ , cioè la funzione che rappresenta l'area del recinto in funzione di  $x$ . Trova per quali valori di  $x$  l'area è massima.



### 1. Scrivere l'area in funzione di $x$ e $y$

$$A(x, y) = x \cdot y$$

### 2. Scrivere la condizione

$$2x + y = 100 \rightarrow y = (100 - 2x)$$

### 3. Sostituire la condizione nell'equazione dell'area

$$A(x) = x \cdot (100 - 2x) = -2x^2 + 100x$$

### 4. Disegnare la funzione che rappresenta l'area del campo in funzione di $x$ .

$$A(x) = -2x^2 + 100x$$

### Intersezione asse $y$

$$C(0,0)$$

### Intersezioni con l'asse $x$

$$-2x^2 + 100x = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 50$$

### Derivata per determinare il vertice

$$A' = -4x + 100$$

### Determinare per quale valore di $x$ si annulla la derivata

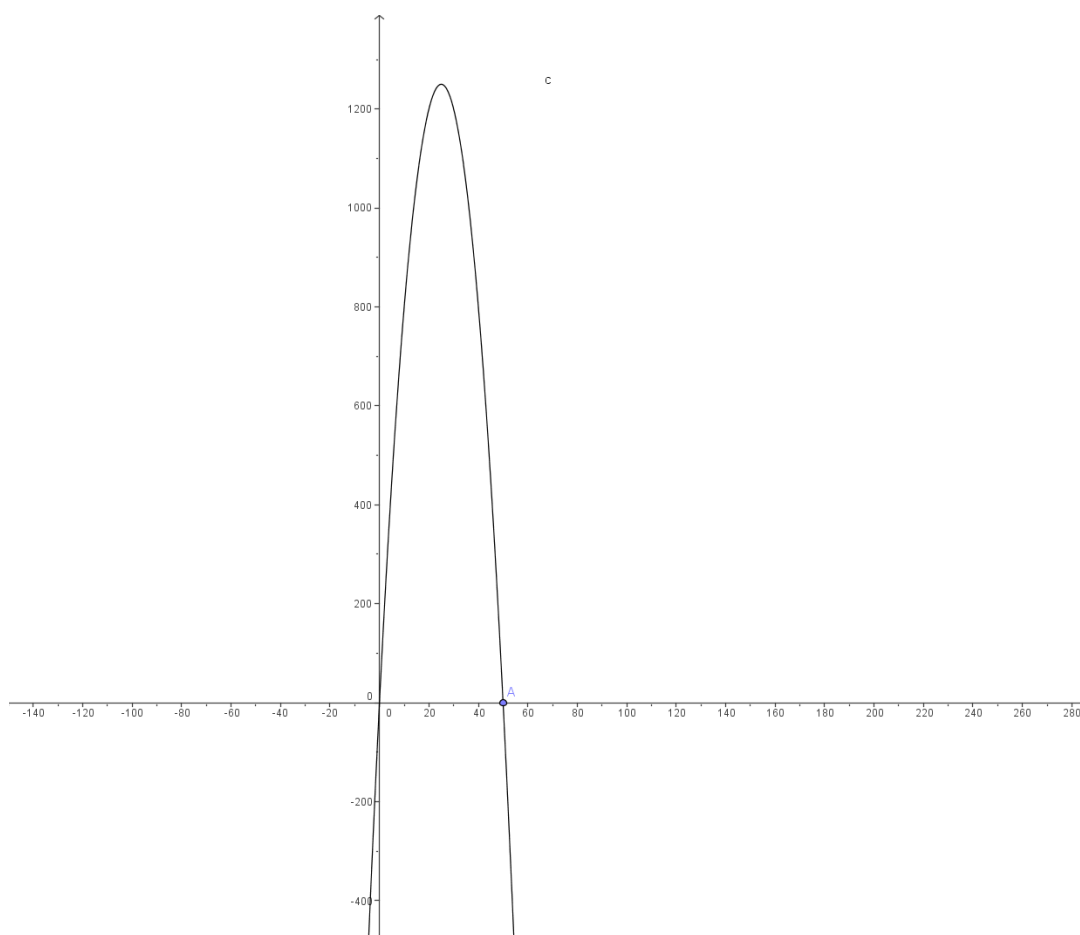
$$A' = 0 \rightarrow -4x + 100 = 0$$

$$x_v = 25 \rightarrow A_v = -2(25)^2 + 100 \cdot 25 = 1250$$

$$V(25, 1250)$$

### Fare il grafico





### Interpretare i risultati

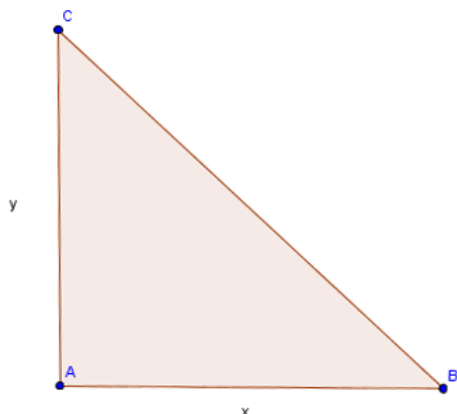
Se il lato del recinto  $x$  è uguale a 0m o a 50m l'area del recinto è nulla, mentre se il lato è 25m l'area del recinto è massima ovvero  $1250\text{m}^2$ .

Al contadino conviene sfruttare 50m di ruscello ed utilizzare il recinto di 100 m in modo tale che  $x=25\text{m}$  e  $y=50\text{m}$ .

### Fare la applet con Geogebra

## Problemi di massimo e minimo di secondo grado

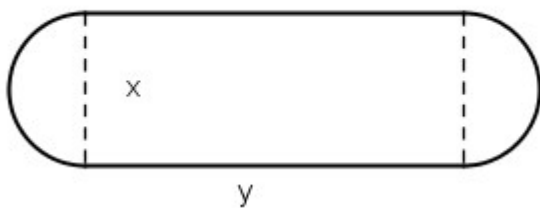
-Calcola l'area  $A$  di un triangolo rettangolo avente la somma dei cateti uguale a 6 . Calcola per quale valore di  $x$  (base) l'area  $A$  del triangolo è massima.



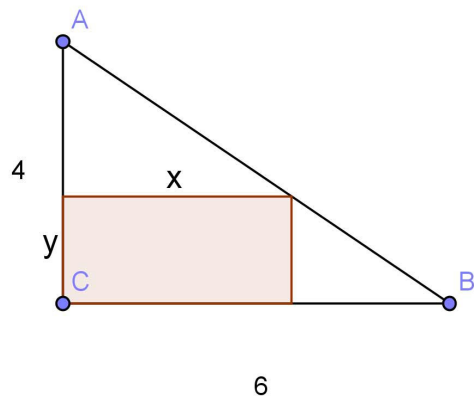
-Si deve costruire una piscina rettangolare di perimetro uguale a 32m.Determina la funzione  $A(x)$ , cioè la funzione che rappresenta l'area della piscina in funzione della base  $x$ . Trova per quali valori di  $x$  l'area è massima.

-Il numero 10 deve essere diviso in 2 termini , in modo tale che la somma tra i loro quadrati sia minima.

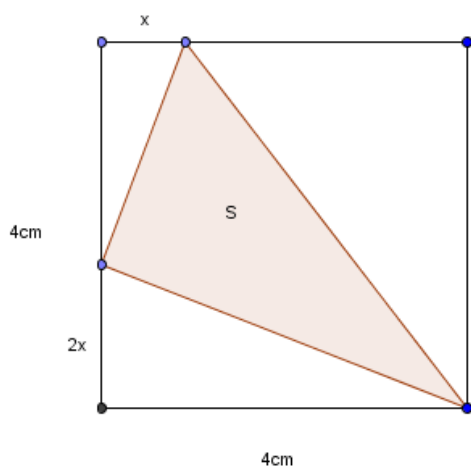
-Si deve costruire un campo da gioco avente la forma di un rettangolo più un'area semicircolare a ciascun estremo. Il perimetro del campo deve essere lungo 400 m. Trovare le dimensioni del campo se la parte rettangolare deve avere area massima possibile.



-Si vuole ricavare da un cartoncino a forma di triangolo rettangolo di base 6 e altezza 4 un rettangolo di area massima. (intera 2)

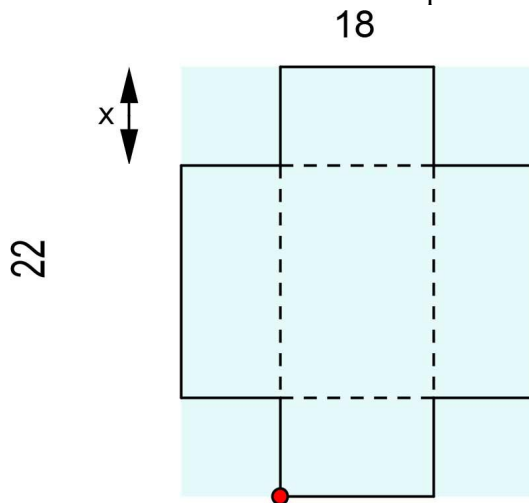


-Determina la funzione  $S(x)$ , cioè la funzione che rappresenta l'area del triangolo S (S non un triangolo rettangolo). Calcola per quale valore di x (base) l'area S del triangolo è massima. Calcola inoltre per quale valore di x l'area misura  $5 \text{ cm}^2$

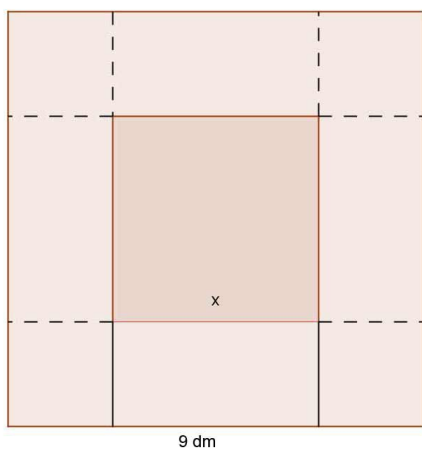


## Problemi di massimo e minimo di terzo grado

-Da un foglio rettangolare 22x18 si vuole ricavare, ritagliando e ripiegando opportunamente i lembi e una scatola di cartone di capacità massima.



-Da un quadrato di cartone di lato 9dm si vuole ricavare, ritagliando e ripiegando opportunamente i lembi, una scatola aperta, a base quadrata, di capacità massima.



## Funzione integrale.

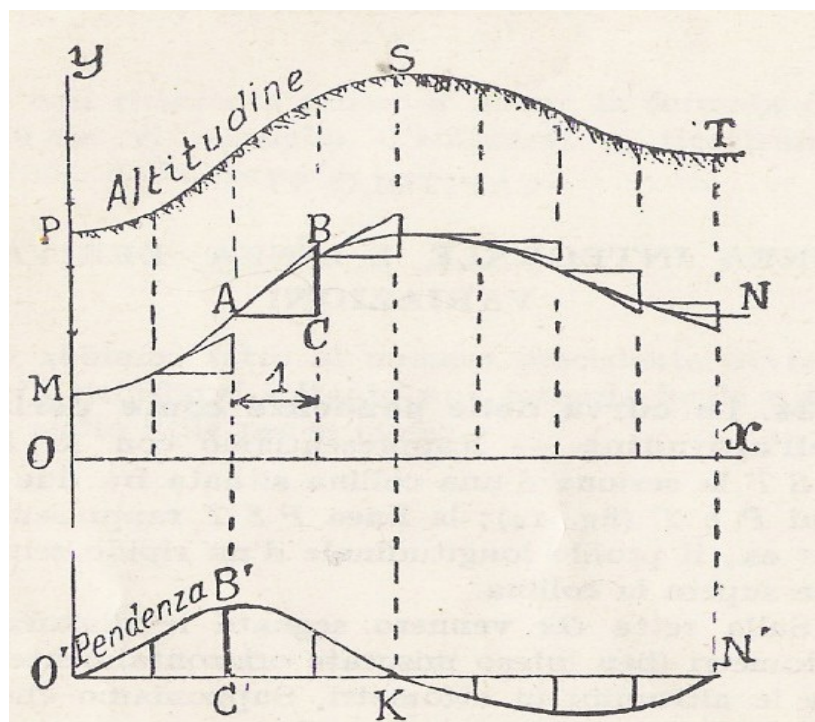
Abbiamo imparato come si ricava, graficamente e algebricamente la curva delle pendenze ovvero la derivata di una certa funzione.

Ora proviamo ad affrontare il problema inverso: data la derivata di una funzione  $y'$  bisogna trovare la funzione di partenza  $y$ , la **funzione integrale**.

Forse con un esempio risulta tutto più chiaro.

Conoscendo la curva d'altitudine, il dedurne la curva della pendenza o curva derivata è ciò che si chiama fare una derivazione grafica. Abbiamo già imparato questa operazione precedentemente.

Inversamente, conoscendo la curva delle pendenze si può ricostruire la curva del profilo: è ciò che si chiama integrazione grafica.



Se dunque, partendo dalla curva delle pendenze, possiamo ricavare il profilo della montagna, non sappiamo esattamente dove esso comincia, se il  $M$  o in  $P$  o più in alto o più in basso.

Tracciandolo a partire da un punto qualunque, esso darà le altitudini dei punti del terreno, esatte **a meno di una costante**.

Parimenti le funzioni  $x^2+1$ ,  $x^2-3$ ,  $x^2+10$  hanno tutte la stessa derivata  $2x$ ; è dunque chiaro che  $2x$  avrà per funzione integrale sia  $x^2+1$ ,  $x^2-3$ ,  $x^2+10$ , sia qualunque altra funzione della forma  $x^2+c$ .

L'operazione di risalire da  $2x$  a  $x^2+C$  si chiama integrazione e si scrive.

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

Il segno  $\int$ , che si legge integrale significa somma e il suo significato, assieme a quello di  $dx$  verranno chiariti inseguito.

## Dagli incrementi regolari alla funzione integrale

Chiamiamo  $y$  il volume dell'acqua contenuta in un serbatoio inizialmente vuoto e  $x$  il tempo misurato in ore, a partire dall'istante in cui il serbatoio è vuoto.

Dei rubinetti regolabili ci permettono di variare la portata dell'acqua.

Versiamo acqua nel serbatoio in ragione di 2 litri al minuto per 3 minuti.

L'accrescimento di  $y$  in litri al minuto è 2; è una derivata:  $y'=2$ ;  
l'incremento del tempo lo chiameremo  $\Delta x$ .

Il volume è aumentato di  $y' \Delta x = 2 \cdot 3 = 6 \text{ litri}$

Versiamo ora 4 litri al minuto per 2 minuti.

$y'=4$

Il volume aumenta di  $y' \Delta x = 4 \cdot 2 = 8 \text{ litri}$

Versiamo ora 1 litro al minuto per 1,5 minuti.

$y'=1$

Il volume aumenta di  $y' \Delta x = 1 \cdot 1,5 = 1,5 \text{ litri}$

Infine svuotiamo il serbatoio in ragione di 2 litri al minuto per 1,5 minuti.

$y'=-2$

Il volume diminuisce di  $y' \Delta x = -2 \cdot 1,5 = 3 \text{ litri}$

Riassumiamo:

1)  $y' \Delta x = 6 \text{ litri}$

2)  $y' \Delta x = 8 \text{ litri}$

3)  $y' \Delta x = 1,5 \text{ litri}$

4)  $y' \Delta x = -3 \text{ litri}$

5)

Totale  $\sum y' \Delta x = 6 + 8 + 1,5 - 3 = 12,5 \text{ litri}$

La somma di tutti i prodotti  $y' \Delta x$  è uguale al volume d'acqua contenuto nel serbatoio, che abbiamo chiamato  $y$ .

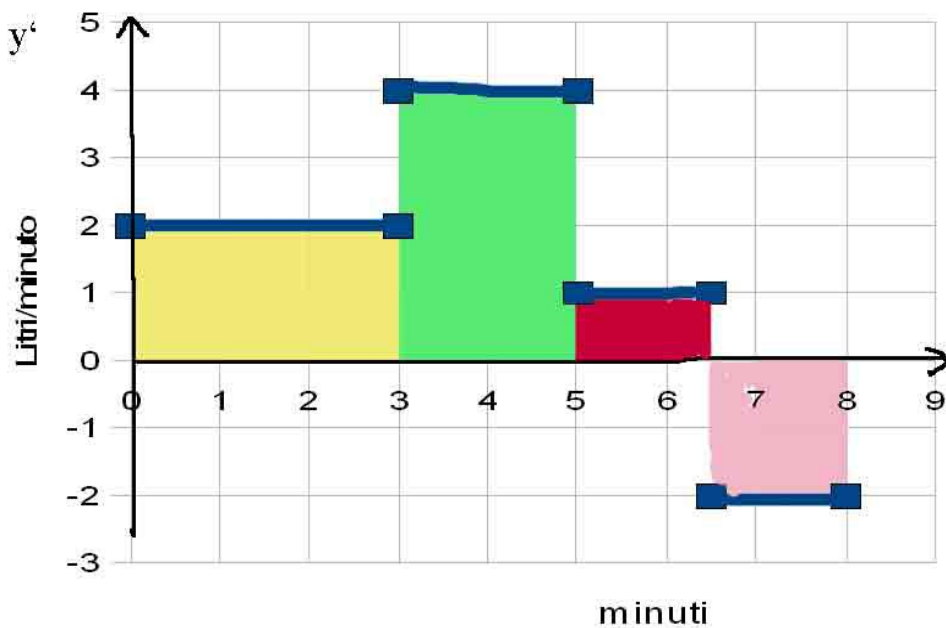
Ora ciascun prodotto  $y' \Delta x$  è un incremento della funzione. Così la somma degli incrementi riproduce la funzione; cioè si scrive:

$$y = \sum y' \Delta x.$$

Invece di variare 4 volte la portata, avremmo potuto farla variare di minuto in minuto o di secondo in secondo o anche per intervalli di tempo piccolissimi  $dx$ ; l'integrazione, cioè la somma di tutti gli

$y' \Delta x$ , avrebbe dato sempre la funzione  $y$ , cioè:  $y = \int y' dx$ .

Rappresentiamo ora graficamente le 4 derivate.



Calcola le aree dei 4 rettangoli.

A1=

A2=

A3=

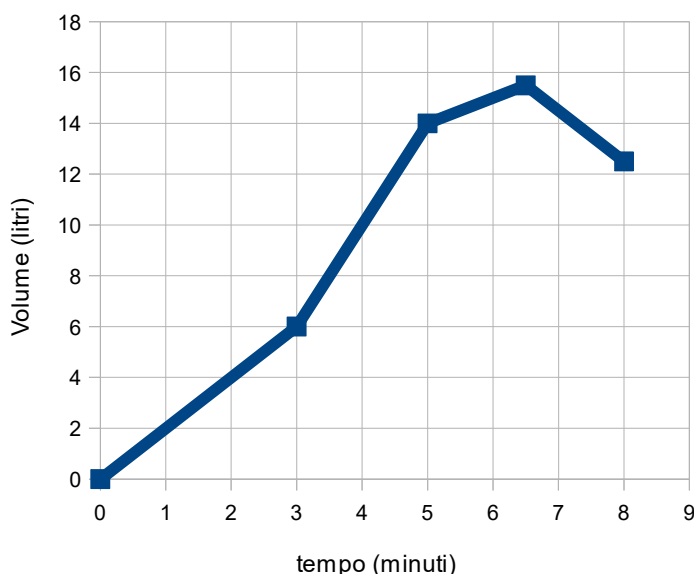
A4=

Si può facilmente intuire che le 4 aree rappresentano i volumi entrati nel serbatoio durante i diversi intervalli di tempo.

Ci rimane ora da rappresentare graficamente la funzione primitiva, che rappresenta il volume  $y$  di acqua in funzione della variabile tempo, costruendo prima la tabella e poi un grafico.

Tempo (minuti)	Volume (litri)
0	0
3	6
5	$14=6+8$
6,5	$15,5=14+1,5$
8	$12,5=15,5-3$

## Funzione primitiva



### Esercizi

1) Un'automobile viaggia a 20km/h per 1,5h, a 30km/h per 2,5 h e poi torna indietro alla velocità di 25km/h per 2 h.

Rappresenta il grafico di questa funzione, disegna la sua primitiva (parti da 0) .

2) Il capitale di un'azienda incrementa di 2milioni/anno per 3 anni , di 1,5 milioni/anno per 2 anni e poi subisce una perdita di 2 milioni/anno per 2 anni.

Rappresenta il grafico di questa funzione, disegna la sua primitiva (il capitale iniziale è 3 milioni) .

3) Il seguente esercizio è importante, in quanto aiuta a comprendere i solidi di rotazione.

Una galleria ha una sezione di 10m<sup>2</sup> per 3 km , una sezione di 5m<sup>2</sup> per 1km e una sezione di 15m<sup>2</sup> per altri 2 km.

Rappresenta graficamente la funzione volume(m<sup>3</sup>).

Che cosa rappresenta la sua primitiva?

Rappresenta il grafico della primitiva.

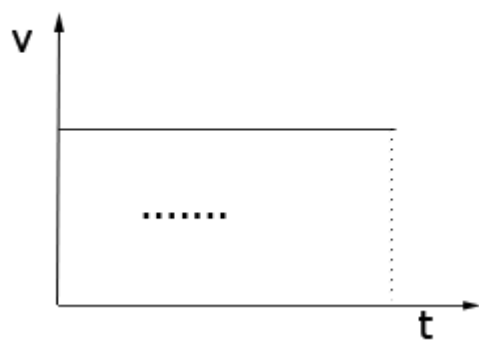
4) Un oggetto accelera di 0,5m/s<sup>2</sup> per 4 secondi e poi decellera di 1m/s<sup>2</sup> per 2 secondi. Rappresenta il grafico di questa funzione, disegna la sua primitiva (parti da una velocità di 3m/s) .

Trova inoltre e rappresenta graficamente la primitiva della primitiva.

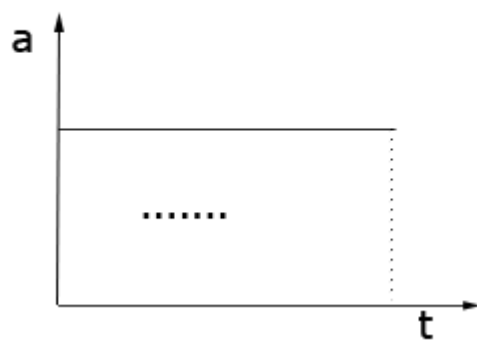
5) Scrivi al posto dei puntini che cosa rappresenta l'area di ciascun rettangolo e riporta le unità di misura delle varie grandezze.



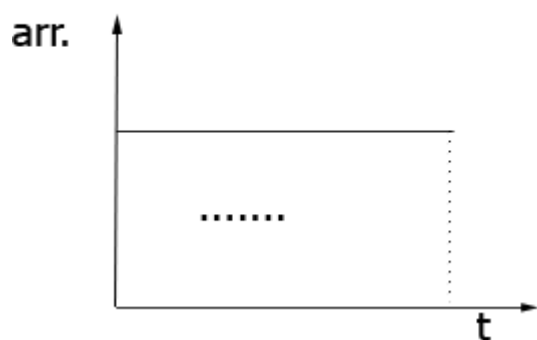
tempo-velocità



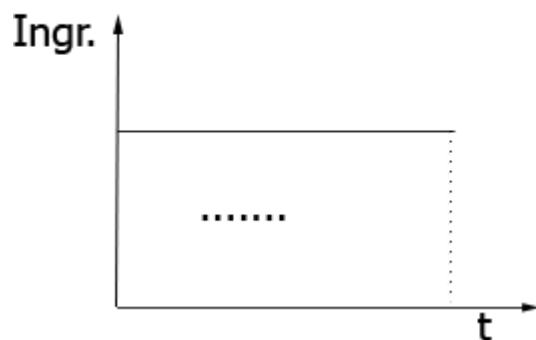
tempo-accelerazione



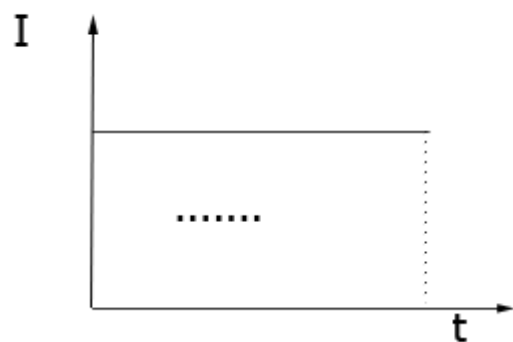
tempo-arricchimento



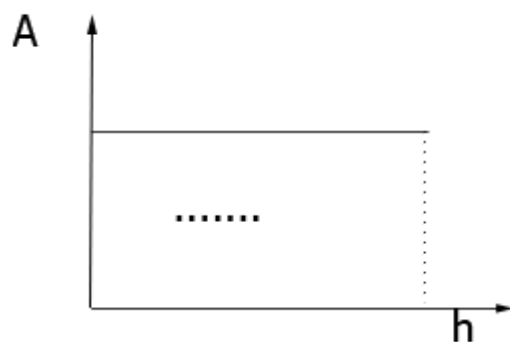
tempo-ingrassamento



tempo-intensità di corrente



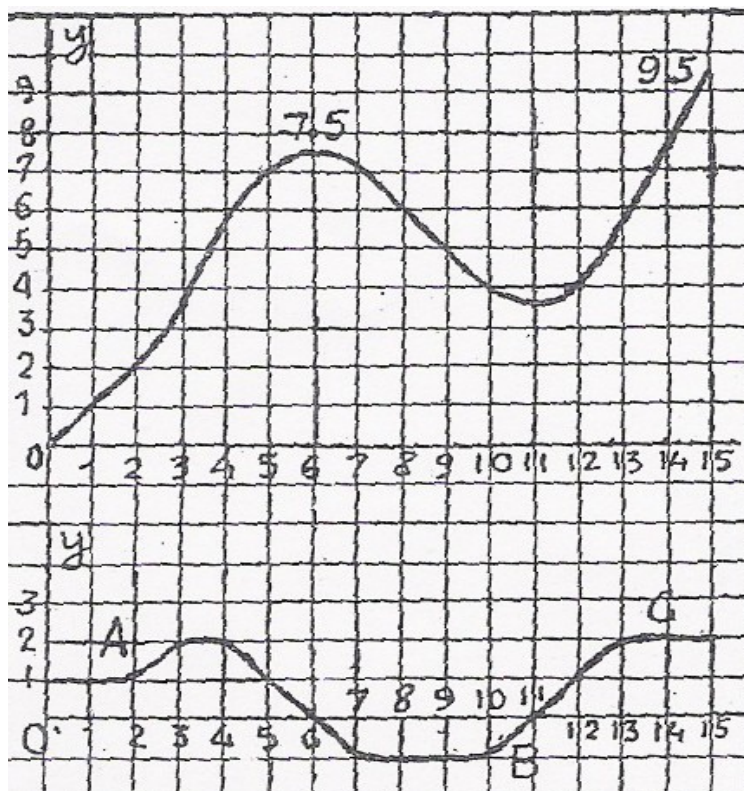
Area -altezza



## Dai quadretti alla funzione

Dagli esercizi precedenti è emerso che, per incrementi regolari, è possibile determinare il grafico della funzione primitiva calcolando l'area compresa tra la curva  $y'$  e l'asse delle  $x$  e tenendo conto che se  $y'$  è positivo la funzione cresce mentre se  $y'$  è negativo la funzione decresce.

Questo discorso è valido anche per incrementi non regolari come possiamo notare dal seguente esempio.



La funzione  $y'$  (parte bassa del grafico) rappresenta la derivata della funzione peso ovvero la funzione ingrassamento  $y'$ .

Notiamo che nel primo giorno l'ingrassamento è di 1kg/giorno, nel secondo di 1 kg/ giorno, nel terzo di 1,5 kg /giorno, al quarto 2kg / giorno, ..... , etc.

Soffermiamoci ora su questo grafico e misuriamo la superficie sottesa alla curva, contando i quadretti.

Dopo un giorno l'area  $S$  è 1, dopo due giorni 2, dopo 3 giorni 3,5, ....., dopo sei giorni 7,5, ....., dopo 11 giorni 3,5, dopo 12 giorni 4, ....., dopo 15 giorni 9,5.

Attraverso questi punti è possibile ricavare **con una certa approssimazione** il grafico della curva  $y$  che rappresenta il peso dell'agnello in funzione del tempo, a meno di una costante.

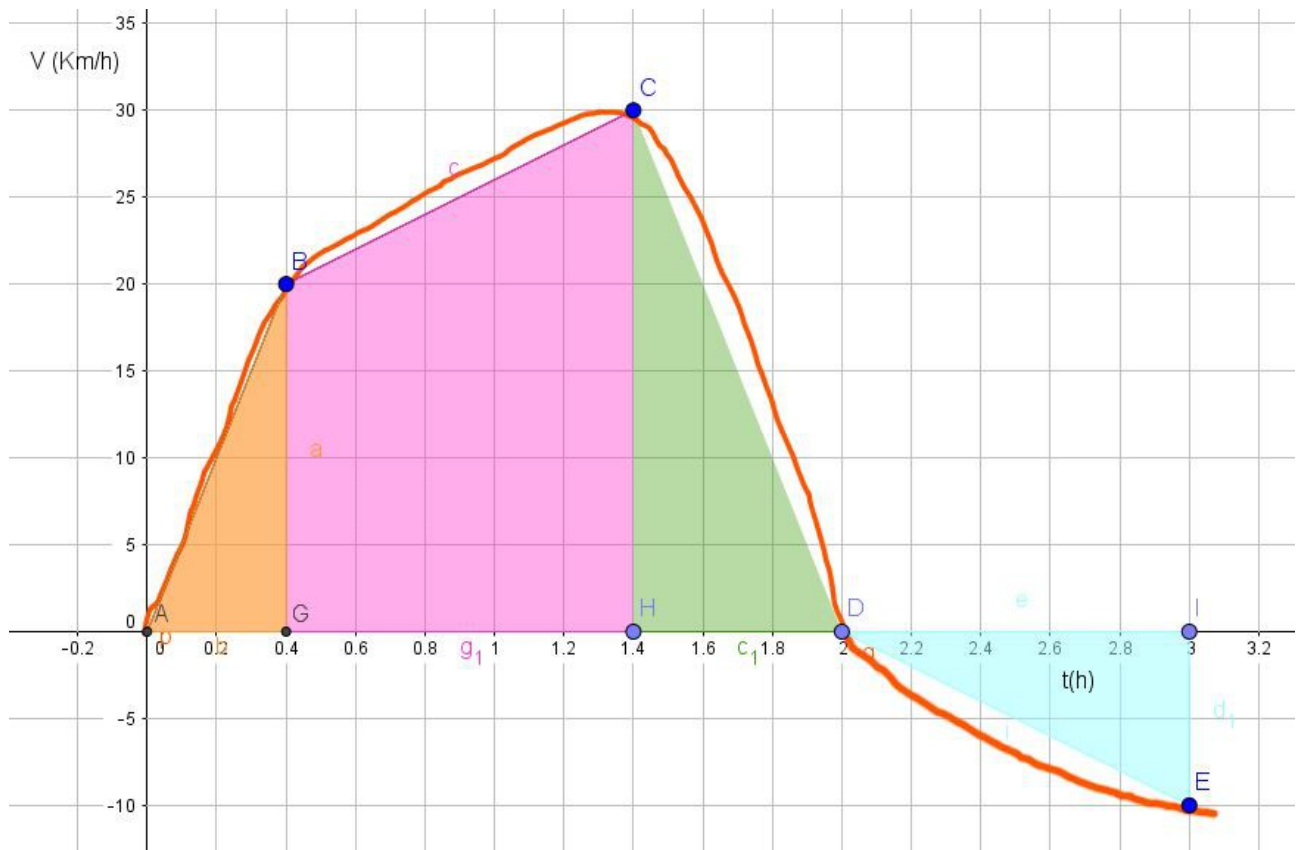
Ipotizzando che il peso iniziale sia di 0kg otterremmo il grafico in alto.

### Esercizio

la curva arancione rappresenta la velocità di un oggetto in funzione del tempo.

Approssimando l'area sottesa dalla curva con triangoli e trapezi determina approssimativamente lo spazio percorso dopo 0h, 1h, 1,4h, 2h, 3 h .

Infine disegna la funzione integrale approssimata che in questo esempio rappresenta lo spazio percorso dall'oggetto in funzione del tempo. Parti dall'origine degli assi.



Esercizio su carica e scarica di un condensatore. ([file excel circuito di carica 2-3-4 volt](#) )

## Integrale indefinito di funzioni polinomiali.

Trovare la funzione primitiva di una funzione polinomiale è relativamente semplice. Per fare questa operazione proviamo a utilizzare un po' di intuito.

La primitiva di  $y' = x^3$  è  $y = \dots\dots\dots + C$ , quindi  $\int x^3 dx = \dots\dots\dots + C$

La primitiva di  $y' = 2$  è  $y = \dots\dots\dots + C$ , quindi  $\int 2 dx = \dots\dots\dots + C$

La primitiva di  $y' = -2x^2$  è  $y = \dots\dots\dots + C$ , quindi  $\int -2x^2 dx = \dots\dots\dots + C$

La primitiva di  $y' = \frac{2}{3}x^2$  è  $y = \dots\dots\dots + C$ , quindi  $\int \frac{2}{3}x^2 dx = \dots\dots\dots + C$

La primitiva di  $y' = -2x - 3 + x^2$  è  $y = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + C$ ,

quindi  $\int (-2x - 3 + x^2) dx = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + C$

Se l'intuito non è il vostro forte potete sempre ricorrere alla seguente formula:

$$\int kx^n dx = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + C, \text{ infatti}$$

$$\text{se } y = \frac{k}{n+1} x^{n+1}, \quad y' = \frac{k}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = k \cdot x^n$$

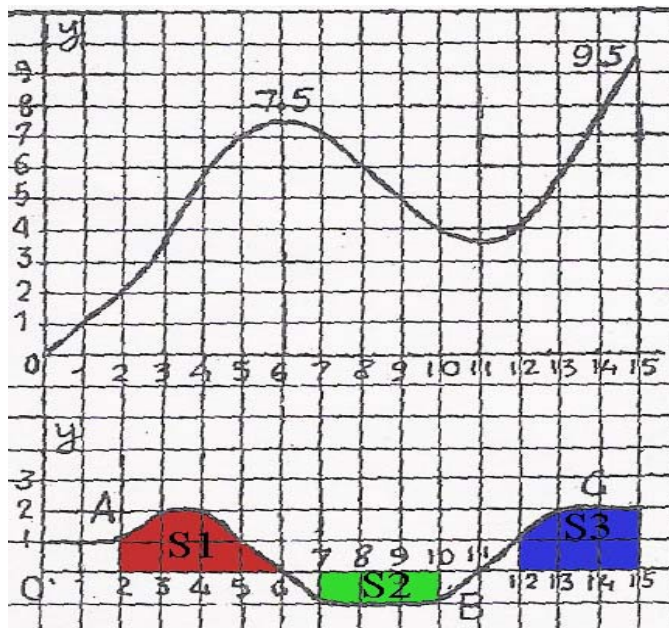
Prova tu

$$\int (-2x^3 - 3x + 2x^2 + 1) dx$$

$$\int \left( \frac{1}{3}x^4 - \frac{3}{5}x - 4x^2 + 7 + x \right) dx \quad \int \left( \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{2}t^3 - t^2 + 7 + t \right) dt$$

## Calcolo di aree e integrale definito

Precedentemente abbiamo visto che dall'area compresa tra la curva  $y'$  e l'asse delle  $x$  potevamo risalire alla primitiva  $y$ .



Ora ci occupiamo di calcolare l'area compresa tra la curva  $y'$  e l'asse delle  $x$ , utilizzando la funzione primitiva.

1) L'area  $S_1$  rappresenta l'incremento di peso dal giorno 2 al giorno 6 che è 5,5 kg (5,5 quadretti). Potevamo ottenere lo stesso risultato utilizzando la funzione  $y$  che rappresenta il peso dell'agnello in funzione del tempo, semplicemente calcolando  $y(6)-y(2)=7,5-2=5,5$

2) L'area  $S_2$  rappresenta l'incremento di peso dal giorno 7 al giorno 10 che è -3 kg (3 quadretti sotto l'asse  $x$ ). Potevamo ottenere lo stesso risultato utilizzando la funzione  $y$ , semplicemente calcolando  $y(10)-y(7)=4-7=-3$

3) L'area  $S_3$  rappresenta l'incremento di peso dal giorno 12 al giorno 15 che è 5,5 kg (5,5 quadretti). Potevamo ottenere lo stesso risultato utilizzando la funzione  $y$  che rappresenta il peso dell'agnello in funzione del tempo, semplicemente calcolando  $y(15)-y(12)=9,5-4=5,5$

Possiamo riassumere questi risultati nel seguente modo:

$$1) S_1 = \int_2^6 y' dx = y(6) - y(2) = 5,5$$

$$2) S_2 = \int_7^{10} y' dx = y(10) - y(7) = -3$$

$$3) S_3 = \int_{12}^{15} y' dx = y(15) - y(12) = 5,5$$

dove  $y'$  indica l'ingrassamento e  $dx$  un tempo piuttosto piccolo, prossimo a zero.

Possiamo concludere che se una funzione  $y' = f(x)$  è continua e positiva in un intervallo  $[a;b]$ , l'area compresa tra la curva e l'asse delle  $x$  è uguale a :

$$\int_a^b y' dx = y(b) - y(a) \quad , \text{dove } y \text{ è una sua primitiva.}$$

Allo stesso modo possiamo concludere che se una funzione  $y' = f(x)$  è continua e negativa in un intervallo  $[a;b]$ , l'area compresa tra la curva e l'asse delle  $x$  è uguale a

$$-\int_a^b y' dx = y(a) - y(b) \quad \text{dove } y \text{ è una sua primitiva.}$$

## Proprietà dell'integrale

Le seguenti proprietà non verranno dimostrate, ma hanno un evidente giustificazione geometrica.

$$\int_a^b [f' + g'] dx = \int_a^b f' dx + \int_a^b g' dx \quad \int_a^b kf' dx = k \int_a^b f' dx$$

$$\int_a^b [kf' + hg'] dx = k \int_a^b f' dx + h \int_a^b g' dx$$

$$\int_a^b f' dx = \int_a^c f' dx + \int_c^b f' dx \quad \text{dove } c \text{ è un punto interno ad } [a,b]$$

### Esercizi

Calcola l'area formata dalla curva  $y = x^2$  con l'asse delle  $x$ , nell'intervallo  $[1;2]$ , ricorrendo ad un disegno esplicativo.

Calcola l'area formata dalla curva  $y = -x^2$  con l'asse delle  $x$ , nell'intervallo  $[1;2]$ , ricorrendo ad un disegno esplicativo.

Determinare l'area della parte di piano delimitata dalla curva  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$  con l'asse delle  $x$ .

Calcola la misura dell'area compresa tra l'asse  $x$  e la curva di equazione  $y = x^3 + 2x^2 + x$  nell'intervallo  $[-1,1]$

Calcola la misura dell'area compresa tra l'asse  $x$  e la curva di equazione  $y = x^3 - x$  nell'intervallo  $[-2,2]$

Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla funzione  $y = x^2 - x$  e l'asse  $x$

Ripeti la stessa operazione per le seguenti funzioni.

$$y = 9x^2 - 4x \quad y = (x-1)(x+2) \quad y = -x^2 - 2x + 8$$

$$y = x^2 - x + 1 \quad y = x^2 - 9 \quad y = -x^2 + 4$$

$$y = 3x^3 - 2x^2 \quad y = 9x^3 - 4x \quad y = (x+1)(x+2)(x-3) \quad y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$$

$$y = (x+1)(2x-3)(3-x)$$

## Esercizi sulle applicazioni del concetto di integrale alla fisica

Un punto si muove su una retta e la sua velocità in funzione del tempo è  $v = t^2 - 3t + 2$ .  
Calcola la legge oraria del movimento, sapendo che l'oggetto parte dalla posizione 0.  
Utilizzando la legge oraria, calcola la distanza dai 4 ai 10 secondi.

Un oggetto ha un'accelerazione di  $2 \text{ m/s}^2$ , calcola la sua velocità in funzione del tempo, sapendo che la velocità iniziale è di 20m/s.  
Calcola infine la legge oraria del movimento, sapendo che l'oggetto parte dalla posizione 0, e attraverso questa funzione determina la distanza percorsa dai 3 ai 7 secondi.

L'intensità della corrente in un circuito varia nel seguente modo.

$$I = 3 + 0,1 t$$

Calcola la quantità di carica che passa attraverso il circuito in funzione del tempo.  
Attraverso questa funzione calcola la quantità di carica che passa nel circuito dopo 15 secondi.

La sezione di una galleria A misurata in  $\text{m}^2$ , varia per i primi 20 km, nel seguente modo.

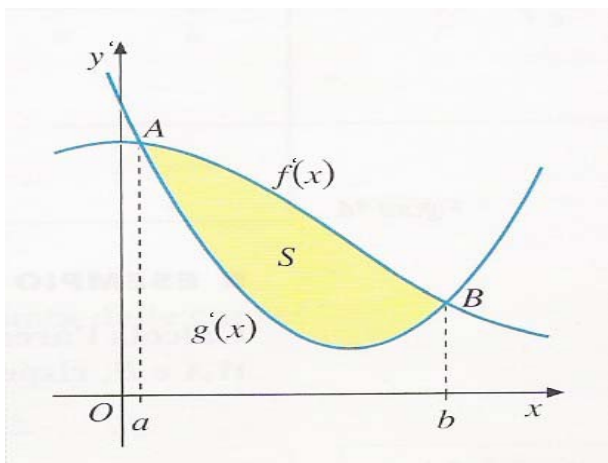
$$A = 10 - \frac{1}{10}x + \frac{1}{160}x^2, \quad 0 \leq x \leq 20.$$

Calcola il volume totale della galleria

## Area compresa tra 2 curve

L'area della superficie compresa tra le funzioni  $y=f(x)$  e  $y=g(x)$ , con  $f(x) \geq g(x)$  in  $[a,b]$  è:

$$S = \int_a^b (f' - g') dx$$



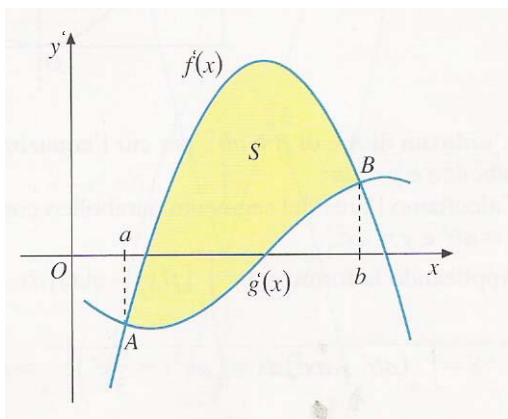
Dimostrazione

$$S = \int_a^b f' dx - \int_a^b g' dx \quad \text{e per la proprietà degli integrali definiti:}$$

$$S = \int_a^b (f' - g') dx$$

Questa proprietà vale anche se le 2 funzioni non sono entrambe positive in  $[a,b]$

Consideriamo infatti:



Se eseguiamo un'opportuna traslazione esse risulteranno entrambe positive e l'area tra esse non cambia, come si può vedere nella figura seguente.

Le 2 nuove funzioni saranno:

$y=f(x)+k$  e  $y=g(x)+k$  per cui, applicando la formula precedente si ha:

$$S = \int_a^b [(f' + k) - (g' + k)] dx = \int_a^b (f' - g') dx \quad \text{come nel caso precedente.}$$



## Esercizi

Calcola l'area compresa dalle 2 curve.

$$y=x^2-2x+2 \quad \text{e} \quad y=3x+2$$

$$y=x^2-2x+2 \quad \text{e} \quad y=-x^2+6$$

$$y=2x^2-1 \quad \text{e} \quad y=x^2+3$$

$$y=x^2-2x+2 \quad \text{e} \quad y=3x+2$$

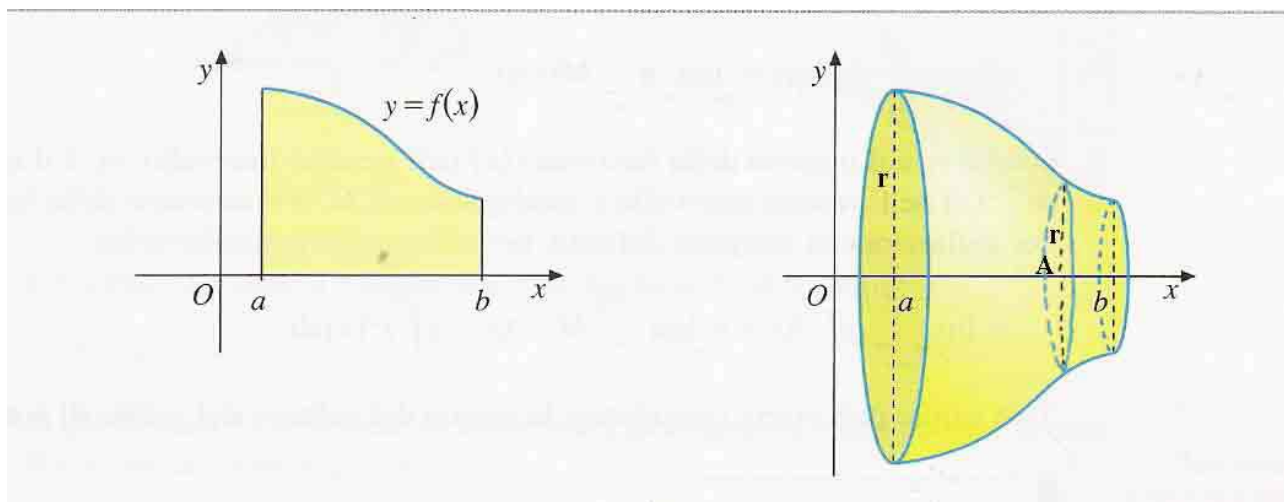
$$y=x^3-2 \quad \text{e} \quad y=x^3+2 \quad \text{da } -1 \text{ a } 2.$$

## Solido di rotazione

Un solido di rotazione è una figura ottenuta dalla rotazione di una figura piana attorno ad una retta, detta asse di rotazione.

Consideriamo il solido di rotazione ottenuto dalla rotazione completa ( $360^\circ$ ), attorno all'asse  $x$ , della parte di piano compresa dalla curva  $y=f(x)$ , continua e positiva nell'intervallo  $[a;b]$  e l'asse delle  $x$ .

Il nostro scopo è di calcolare il volume  $V$  di tale solido.

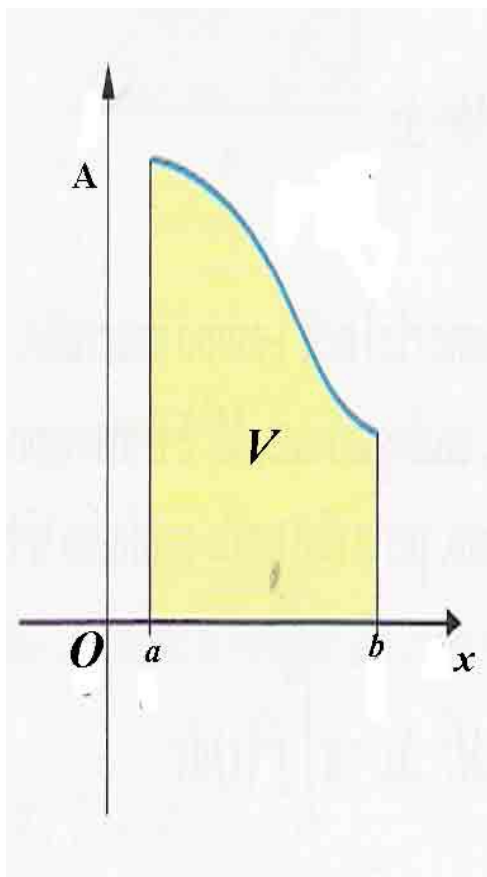


Tagliando il nostro solido di rotazione con un piano perpendicolare all'asse  $x$  e passante per un punto compreso tra  $a$  e  $b$ , otteniamo un cerchio  $A$  di raggio  $r$ . La funzione  $y$  rappresenta il raggio di tale cerchio in funzione di  $x$ .

$$y=f(x) \quad \text{è equivalente a} \quad r=f(x) \quad \text{per lo scopo che ci siamo prefissati.}$$

Determiniamo ora la funzione che esprime la relazione tra l'area  $A$  del cerchio e la variabile  $x$ .

Dato che  $A = \pi r^2$ , la nostra funzione sarà  $A = \pi f(x)^2$ .



Che cosa rappresenta l'area compresa dalla nostra nuova curva e l'asse delle  $x$ ?

Ovviamente il volume del solido, quindi:

$$V = \int_a^b A dx = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

### Esercizi

Rappresenta graficamente la funzione  $y = 3x$  nell'intervallo  $[0,1]$  e determina il volume del solido ottenuto dalla sua rotazione attorno all'asse  $x$ .

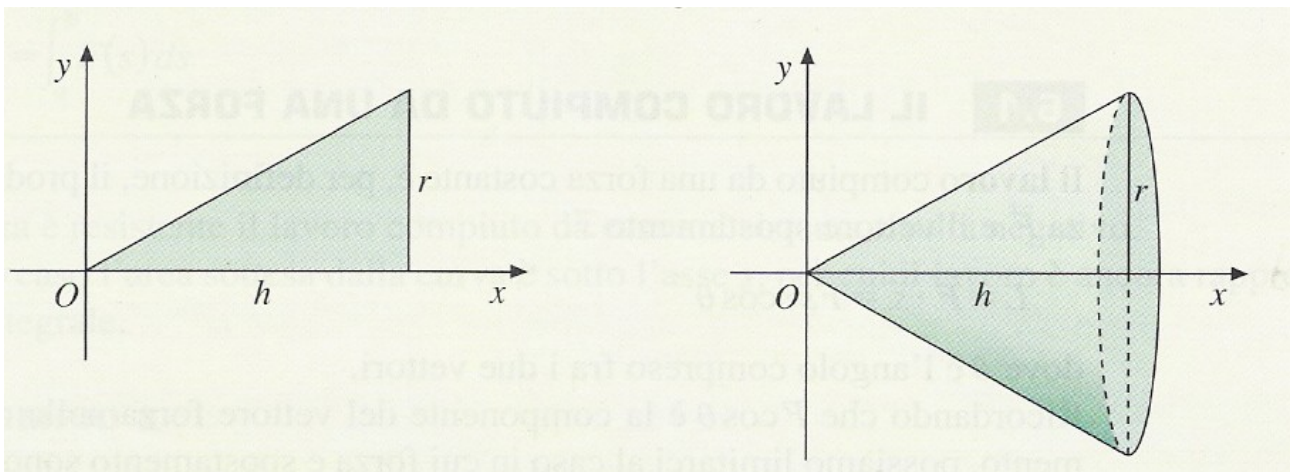
Rappresenta graficamente la funzione  $y = -2x + 1$  nell'intervallo  $[-2,0]$  e determina il volume del solido ottenuto dalla sua rotazione attorno all'asse  $x$ .

Rappresenta l'area compresa dalla funzione  $y = -x^2 + 4x - 1$  nell'intervallo  $[1,2]$  e determina il volume del solido ottenuto dalla sua rotazione completa attorno all'asse  $x$ .

Disegna la curva  $y = x^2 - x^3$  e determina la misura dell'area  $S$  compresa tra la curva e l'asse  $x$  e il volume del solido generato dalla rotazione di  $S$  attorno all'asse  $x$ .

Disegna la parabola  $y = x^2 + 1$  e la retta  $y = -x + 3$  individuiamo la regione compresa tra le 2 curve e troviamo il solido ottenuto dalla rotazione della figura con l'asse  $x$ .

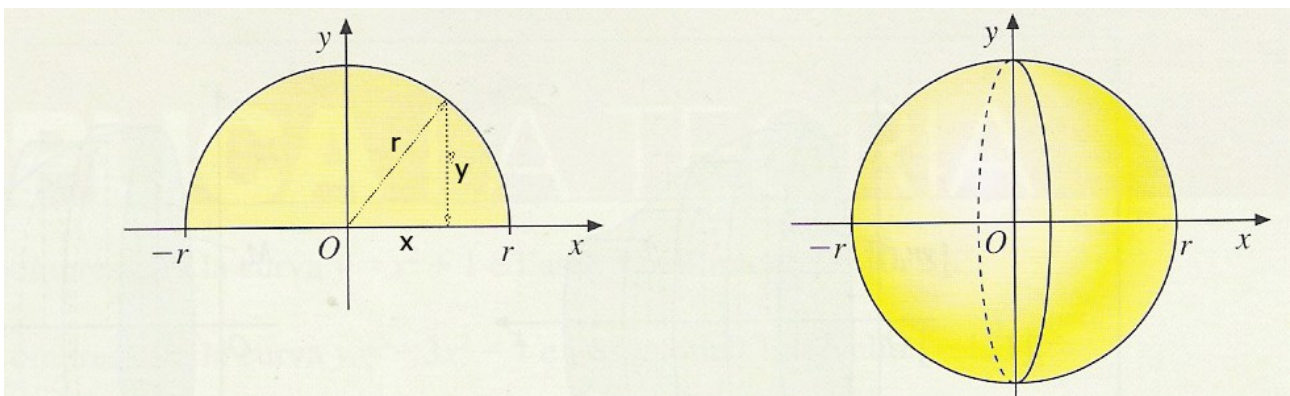
## Volume di un cono



La pendenza della retta è  $m = \frac{r}{h}$  e la sua equazione quindi è:  $y = \frac{r}{h}x$

$$V = \pi \int_0^h f(x)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx =$$

## Volume di una sfera

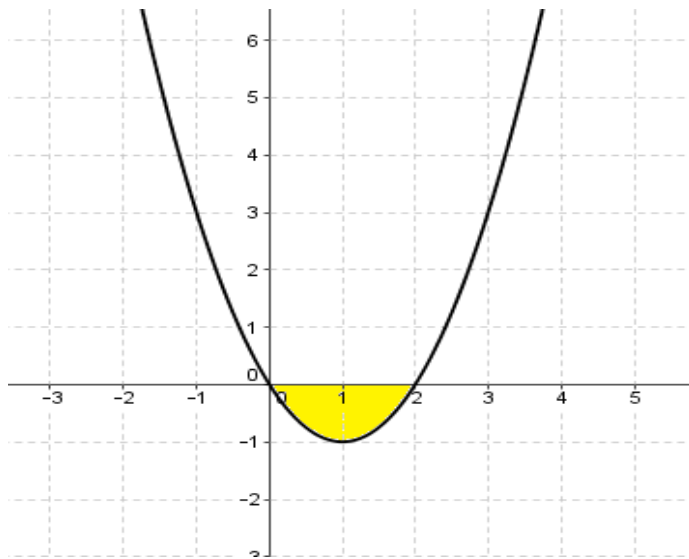


Trova una relazione tra x, y e r.

$$y^2 = r^2 - x^2$$

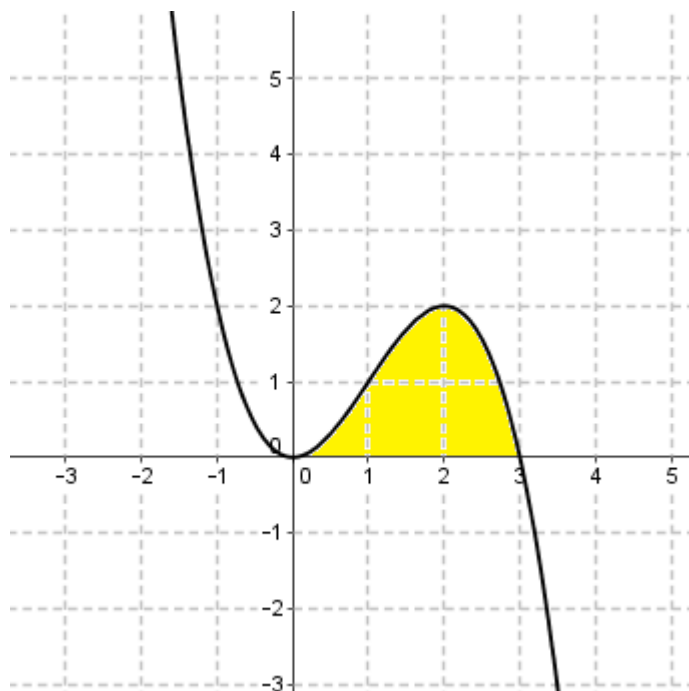
$$V = \pi \int_{-r}^r f(x)^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx =$$

## Esercizi



1) Trova dal grafico la funzione di secondo grado e poi determina l'area indicata.

[Soluzione:  $y = x^2 - 2x$ ]

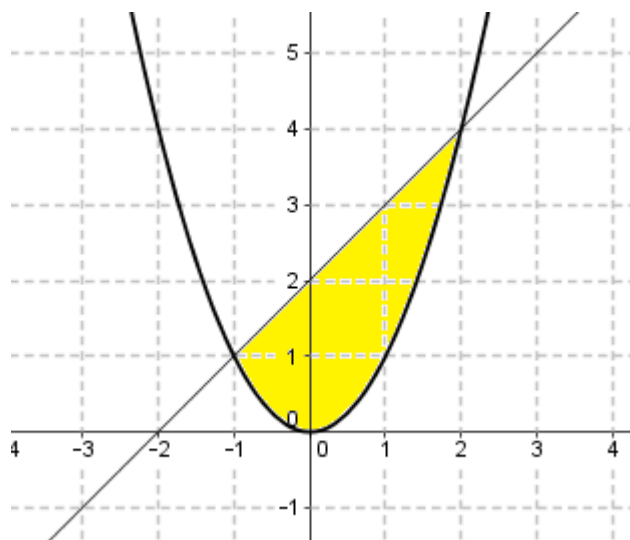


2) Trova la seguente funzione di terzo grado e calcola l'area compresa tra la curva e l'asse delle x nell'intervallo  $[0;3]$

[soluzione:  $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ ]

Determina inoltre la primitiva della funzione, sapendo che essa passa per il punto  $(0;2)$ .

[Soluzione:  $y = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 2$ ]



3) Trova le seguenti funzioni e determina l'area compresa tra di esse.

[3,5]

4) Trova la funzione di terzo grado che interseca l'asse x nei punti -2 e 1 e che ha un punto di minimo in  $m(0;-1)$ .  

$$\left[ y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 1 \right]$$

5) Trova la funzione di terzo grado che ha un punto di minimo in  $m(0;2)$  e un punto di massimo in  $M(2;3)$   

$$\left[ y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 2 \right]$$

6) Trovare una funzione di terzo grado che ha come minimo  $m(3;y)$  flesso  $F(1;2/3)$  e la tangente nel punto di flesso una retta che ha pendenza -2.

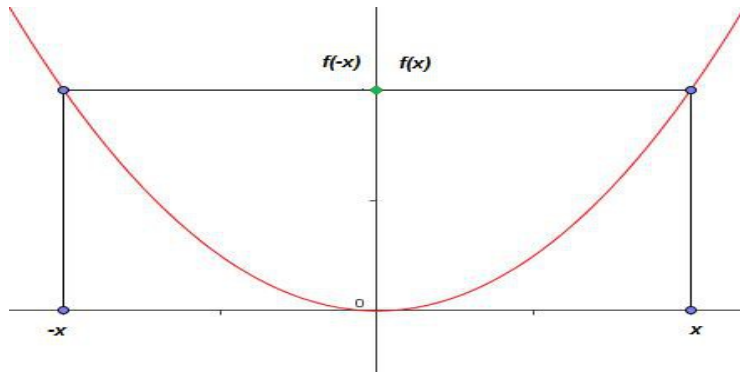
7) Trovare la funzione di terzo grado che interseca l'asse x nei punti 0 e -3 e minimo  $m(3;-6)$

8) Trova la funzione di terzo grado che ha max  $M(1;1)$ , flesso  $(3;y)$  e passa per  $C(0;0)$

## Funzioni pari

Una funzione è pari se  $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

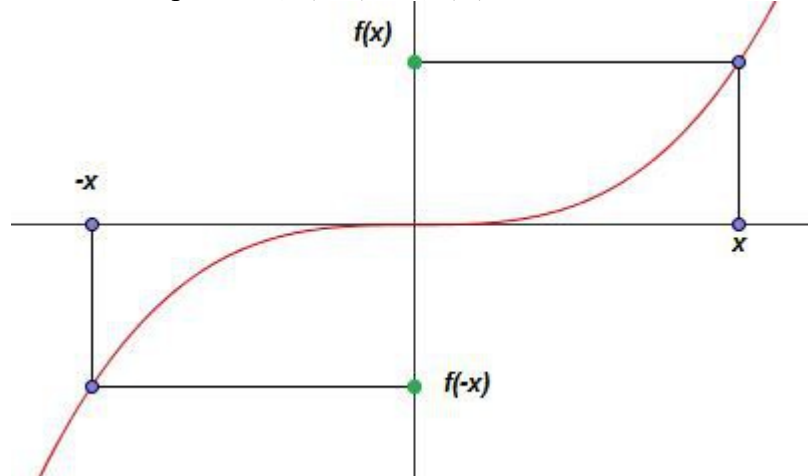
Se un punto  $A(x;y)$  appartiene al grafico di una funzione pari il suo simmetrico rispetto all'asse delle  $y$   $A'(-x;y)$  appartiene anche al grafico.



L'area  $S$  compresa tra la funzione e l'asse  $x$  è:  $S = \left| \int_{-x}^x f(x) dx \right|$  o  $S = 2 \left| \int_0^x f(x) dx \right|$

## Funzioni pari

Una funzione polinomiale è dispari se  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .



$S = \int_{-x}^x f(x) dx = 0$  mentre l'area  $S$  compresa tra la funzione e l'asse  $x$  è:  $S = 2 \left| \int_0^x f(x) dx \right|$

Se un punto  $A(x;y)$  appartiene al grafico di una funzione dispari il suo simmetrico rispetto all'origine  $A'(-x;-y)$  appartiene anche al grafico.

Basta sostituire nella funzione al posto della variabile  $x$  il valore  $-x$  e si possono verificare le tre seguenti situazioni:

- la funzione ottenuta è identica a quella di partenza  $\Rightarrow$  funzione pari;
- la funzione ottenuta è opposta a quella di partenza  $\Rightarrow$  funzione dispari;
- la funzione ottenuta non è né identica, né opposta a quella di partenza  $\Rightarrow$  funzione né pari né dispari.

Verifica che le seguenti funzioni sono pari  $y = x^4 - 2x^2 + 3$   $y = -x^6 - 2x^2 - 2$

Verifica che le seguenti funzioni sono dispari  $y = x^3 - 2x$   $y = -x^5 + 3x$

Verifica che la seguente funzione non è né pari né dispari  $y = x^3 - 2x + 3$   $y = x^4 + 3x^2$

## Funzione esponenziale

Ogni processo di accrescimento può essere **lineare o esponenziale**. Si dice che una grandezza cresce linearmente quando ad intervalli di tempo uguali corrispondono incrementi uguali: così, ad esempio, è lineare l'incremento dei risparmi di un bambino a cui la mamma, ogni anno, mette da parte mille euro: dopo un anno il bambino si troverà con mille euro di risparmi, dopo due anni con 2 mila euro, dopo tre anni tremila euro e così via.

Si dice invece che una grandezza cresce **esponenzialmente** allorché ad intervalli di tempo uguali corrispondono **incrementi pari ad una frazione costante del totale**.

Se un'altra mamma meno generosa ma più concreta, invece che mettere ogni anno mille euro e nel salvadanaio del figlio ne avesse messo mille in banca al tasso di interesse ad esempio del 7% annuo, alla fine dell'anno il bambino avrebbe 1000 euro + 70 euro.

L'anno successivo, l'interesse del 7% verrebbe calcolato su 1.070 euro e produrrebbe altre 75 euro circa di interesse che si andrebbero ad aggiungere alla somma già posseduta.

L'anno ancora successivo l'interesse verrebbe quindi calcolato su una cifra nuovamente più alta.

Ora è facile comprendere che quanto maggiore è la somma depositata sul conto tanto più denaro verrà aggiunto ogni anno come interesse; ma quanto più se ne aggiunge tanto più ve ne sarà nel conto l'anno successivo e quindi ancora più se ne aggiungerà come interesse. La caratteristica delle crescite esponenziali è proprio questa: più è grande la quantità di cui si dispone, più essa si accresce. Se la quantità è piccola aumenta poco, se è media aumenta moderatamente, se è grande aumenta molto.

I processi di crescita esponenziale sono assai comuni in campo finanziario, in biologia e in tanti altri settori del sapere, dove a volte possono produrre conseguenze sorprendenti.

Un modo per illustrare l'estrema rapidità con la quale una crescita esponenziale porta ad approssimarsi ad un valore prefissato è quella di fare ricorso ad un indovinello per bambini.

L'indovinello è il seguente. Immaginiamo di avere un laghetto al centro del quale cresce una ninfea che ogni giorno raddoppia le proprie dimensioni: se la pianta potesse svilupparsi liberamente, dopo 30 giorni coprirebbe completamente il lago soffocando tutte le altre forme di vita. Ora, se si decidesse di tagliare la ninfea quando le sue foglie hanno coperto metà del lago in modo da salvarlo da morte sicura in quale giorno si dovrebbe intervenire? La risposta è al 29° giorno, cioè vi sarebbe un solo giorno di tempo per rimediare ad una situazione che il giorno dopo diventerebbe irreparabile. Il risultato è sorprendente soprattutto se si riflette sul fatto che il 25° giorno era coperto appena poco più del 3% del lago: nelle crescite di tipo esponenziale all'inizio le cose vanno piano poi accelerano in modo impressionante.

La crescita esponenziale viene spesso espressa efficacemente attraverso il cosiddetto "tempo di raddoppiamento", che è il tempo necessario affinché una grandezza raddoppi il proprio valore (incremento del 100%). Nel caso della ninfea che abbiamo appena esaminato il tempo di raddoppiamento è di un giorno; per la somma di denaro depositata in banca all'interesse del 7% annuo il tempo di raddoppiamento è pari a 10 anni circa.

### Esercizi

1) Calcola al 25 giorno quale è la percentuale esatta del lago ricoperto da ninfee.  
(soluzione: 3,125%)

2) Che percentuale del lago è occupata da una ninfea il primo giorno?  
(da fare con foglio elettronico, soluzione 0,0000001862645%)

3) Sapendo che il primo giorno la superficie occupata dalle ninfee è di soli 20 cm<sup>2</sup>, calcola la superficie del lago. (soluzione circa 1073741 m<sup>2</sup>)

## Crescita dei batteri

I batteri sono organismi viventi fra i più semplici e i più piccoli che si conoscano. Sono formati da una sola cellula della grandezza del millesimo di millimetro e il loro peso è dell'ordine del miliardesimo di milligrammo, ossia ce ne vorrebbero mille miliardi per fare un grammo. I batteri si riproducono con estrema rapidità per semplice scissione, cioè si dividono a metà e poi ciascun individuo si accresce e, raggiunta la dimensione adulta, subisce una nuova scissione. Ora, se le condizioni ambientali sono favorevoli, si possono avere anche tre generazioni in un'ora.

Immaginiamo quindi di voler calcolare la crescita di una popolazione di batteri partendo da un singolo esemplare: dopo venti minuti ne avremmo già 2, dopo quaranta minuti 4 e dopo un'ora ossia dopo tre generazioni 8, dopo 2 ore, cioè dopo 6 generazioni  $64(2^6)$ , dopo 5 ore  $32.768 (2^{15})$  e così via secondo le potenze del 2.

Il numero dei batteri aumenta secondo le potenze del 2 perché la cellula si divide in due ad ogni generazione, se la cellula si dividesse simultaneamente in tre il numero aumenterebbe secondo le potenze del 3 e se si dividesse in 10, secondo le potenze del 10. Il numero dei batteri che si riproduce per semplice scissione può essere quindi rappresentato attraverso la seguente funzione esponenziale:

$$y = 2^x$$

in cui  $y$  è il numero dei batteri e  $x$  il numero delle generazioni.

Applicando l'equazione scritta sopra, è facile calcolare il numero teorico di batteri presenti dopo un certo numero di generazioni partendo da un singolo batterio. Per esempio si calcola che dopo 72 generazioni, cioè, nel nostro esempio, dopo un giorno, i batteri sarebbero diventati  $2^{72}$  che fa circa quattromila settecento miliardi di miliardi ( $4,7 \cdot 10^{21}$ ), un numero di batteri che, nonostante il peso irrisorio di un singolo esemplare, corrisponde a un peso complessivo di 4.700 tonnellate. Ci vorrebbe un migliaio di camion carichi fino all'orlo per portarli via tutti. Naturalmente non si arriva mai a questi eccessi perché l'ambiente naturale non è illimitato e immutabile e quindi molto prima di avere una densità massima di circa un miliardo di individui per  $\text{cm}^3$  il numero tende a restare stazionario. Tuttavia, sperimentalmente, si possono realizzare le condizioni desiderate mettendo a disposizione dell'organismo un terreno di coltura molto ampio e stabile, nel quale può essere studiato il fenomeno dell'accrescimento teorico dei batteri o di altri esseri viventi.

Se ora volessimo rappresentare con un'immagine geometrica la crescita dei batteri, dovremmo, come già sappiamo, tracciare su un foglio di carta due rette perpendicolari che si incontrano in un punto detto origine degli assi e quindi, scelte opportunamente le unità di misura, segnare su ciascuna retta una serie di punti che corrisponde a determinati valori delle grandezze in gioco. Ponendo, ad esempio, sull'asse orizzontale del piano i tempi e sull'asse verticale il numero dei batteri ci renderemmo subito conto che per quanto piccola fosse stata l'unità di misura scelta, già dopo una decina di generazioni il foglio di carta non sarebbe più sufficiente a contenere il diagramma.

A questo punto ci verrebbero tuttavia in soccorso i logaritmi. (vedi paragrafi successivi)

Se sull'asse delle ordinate (quello verticale) invece che segnare il numero delle cellule si riportasse il logaritmo di tale numero in base 2 il diagramma diventerebbe più contenuto e di più facile lettura. In verità facendo ricorso ai logaritmi il disegno, oltre a cambiare dimensioni, cambierebbe anche forma divenendo una retta e quindi non rispecchierebbe più la realtà rappresentata da una curva a J. Tuttavia lo schema apparirebbe molto più chiaro e lo scopo che ci si era prefissati sarebbe stato raggiunto.

Partire da un singolo batterio per sapere quanti ve ne saranno dopo un certo tempo è un caso del tutto teorico. Normalmente quello che interessa sapere è quanti diventeranno i batteri (o qualsiasi



altra cosa che si accresca in modo esponenziale), dopo un certo numero di generazioni, se si parte da un determinato numero iniziale. L'equazione utile per dare risposta a questo tipo di quesito è la seguente:

$$N = N_0 \cdot 2^x$$

in cui N è il numero di batteri che sarà presente dopo un certo numero di generazioni,  $N_0$  è il numero iniziale di batteri e x è il numero delle generazioni che si vuole considerare. Si noti che per ottenere il numero dei batteri finali bisogna moltiplicare  $2^x$  per il numero iniziale di essi. La conseguenza di questa operazione è che il numero finale dei batteri dipende sensibilmente anche dal numero iniziale e non solo dal valore della x. La logica dell'accrescimento esponenziale, come abbiamo accennato all'inizio, è proprio questa: più si è e più si diventa.

Spesso non interessa tanto sapere quanti batteri (o più in generale quanti elementi di un insieme che si accresce) si avranno dopo un certo numero di generazioni, ma piuttosto quanti saranno diventati dopo un certo tempo (ad esempio dopo un giorno). In questo caso basta moltiplicare il numero delle generazioni (k), comprese nell'unità di tempo, per il tempo (t) di durata del processo e porre il prodotto di queste due grandezze ad esponente del numero che rappresenta i frammenti in cui si divide ogni singolo oggetto di partenza (due nel nostro esempio).

Sostituendo quindi kt a x, l'equazione relativa ai batteri, scritta sopra, diventa:

$$N = N_0 \cdot 2^{kt}$$

In questo caso (base della potenza uguale a 2), il reciproco di k, cioè  $1/k$ , rappresenta il tempo necessario per raddoppiare il numero degli elementi presenti. Se ad esempio fosse  $k = 3$ , cioè tre divisioni all'ora, come nell'esempio dei batteri proposto in precedenza, un terzo di ora (ossia venti minuti), sarebbe il tempo necessario affinché il numero degli elementi, presenti in un dato istante, raddoppiasse in seguito alle divisioni successive.

### *Esercizi*

1) Rappresenta graficamente la funzione  $y=2^x$  per  $x=-2,-1,0,1,2,3$

2) Rappresenta la funzione esponenziale  $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$  per  $x=-3,-2,-1,0,1,2$ ,

3) Una popolazione di batteri si riproduce 4 volte in un'ora, calcola il numero di batteri dopo 5 ore sapendo che la popolazione iniziale è composta da 50 batteri.

4) Una popolazione di batteri si riproduce ogni 2 ore, calcola il numero di batteri dopo 6 ore sapendo che la popolazione iniziale è composta da 30 batteri.

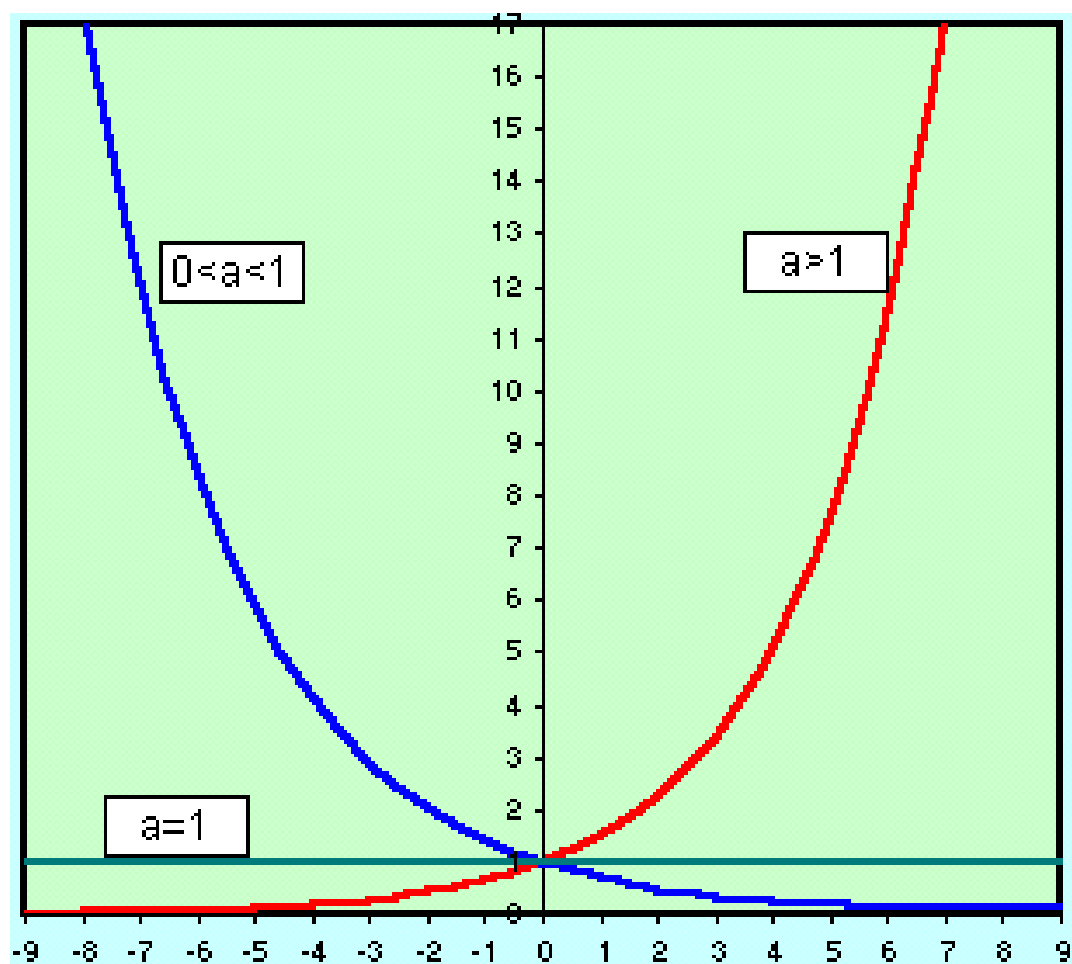
5) Secondo la leggenda, un cortigiano si presentò al re di Persia con una bella scacchiera. Il re chiese che cosa gli sarebbe piaciuto in cambio del suo regalo e il cortigiano sorprese il re chiedendo un chicco di riso sulla prima casella, due chicchi sulla seconda, quattro chicchi sulla terza, ecc. Il re acconsentì prontamente e chiese che fosse portato il riso, ma poi se ne pentì.

Calcola quanti chicchi di riso ha dovuto portare il re.

(soluzione: circa  $9,2233 \cdot 10^{18}$  di chicchi)

## La funzione esponenziale

In generale una funzione esponenziale della forma  $y=a^x$  assume la seguente forma:



## Capitalizzazione

Supponiamo di avere in banca 1 euro al tasso d'interesse annuale del 10%.

Al termine del primo anno accumuliamo un capitale di 1 euro + 10% di un euro cioè  $1+0,1=1,1$  euro.

Al termine del secondo anno accumuliamo un capitale di 1,1 euro + 10% di 1,1 euro cioè  $1,1+0,11=1,21$  euro.

Al termine del terzo o anno accumuliamo un capitale di 1,21 euro + 10% di 1,21 euro cioè  $1,21+0,121=1,331$  euro.

Al termine del quarto anno accumuliamo un capitale di 1,331 euro + 10% di 1,331 euro cioè  $1,331+0,1331=1,4641$  euro.

Rappresentiamo ora i dati in una tabella.

Anno	Montante (capitale accumulato)	Potenza
0	1	$1,1^0$
1	<b>1,1</b>	$1,1^1$
2	1,21	$1,1^2$
3	1,33	$1,1^3$
4	1,46	$1,1^4$

Dalla colonna di destra possiamo notare che i valori trovati si possono ottenere semplicemente calcolando le potenze intere di 1,1.(capitale dopo 1 anno)

Partendo quindi da un capitale iniziale di 1 euro , al tasso d'interesse del 10% (0,1) dopo n anni avremo accumulato un capitale  $C=(1+0,1)^n=1,1^n$

Nel nostro esempio siamo partiti da un capitale iniziale unitario.

La formula generale per esprimere il montante accumulato dopo n anni, avendo a disposizione un capitale iniziale  $C_0$ , al tasso d'interesse  $i$  è:

$$C=C_0(1+i)^n$$

Cerchiamo ora di essere ancora più rigorosi nel dimostrare la formula

Indichiamo con  $C_i$  il capitale dopo i anni,  $C_0$  il capitale iniziale e con  $i$  il tasso d'interesse espresso in numero decimale.

$$C_1=C_0+iC_0=C_0(1+i)$$

$$C_2=C_1+iC_1=C_1(1+i)=C_0(1+i)(1+i)=C_0(1+i)^2$$

$$C_3=C_2+iC_2=C_2(1+i)=C_0(1+i)^2(1+i)=C_0(1+i)^3$$

.....

$$C_n=C_{n-1}+iC_{n-1}=C_{n-1}(1+i)=C_0(1+i)^n$$

### **Esercizi**

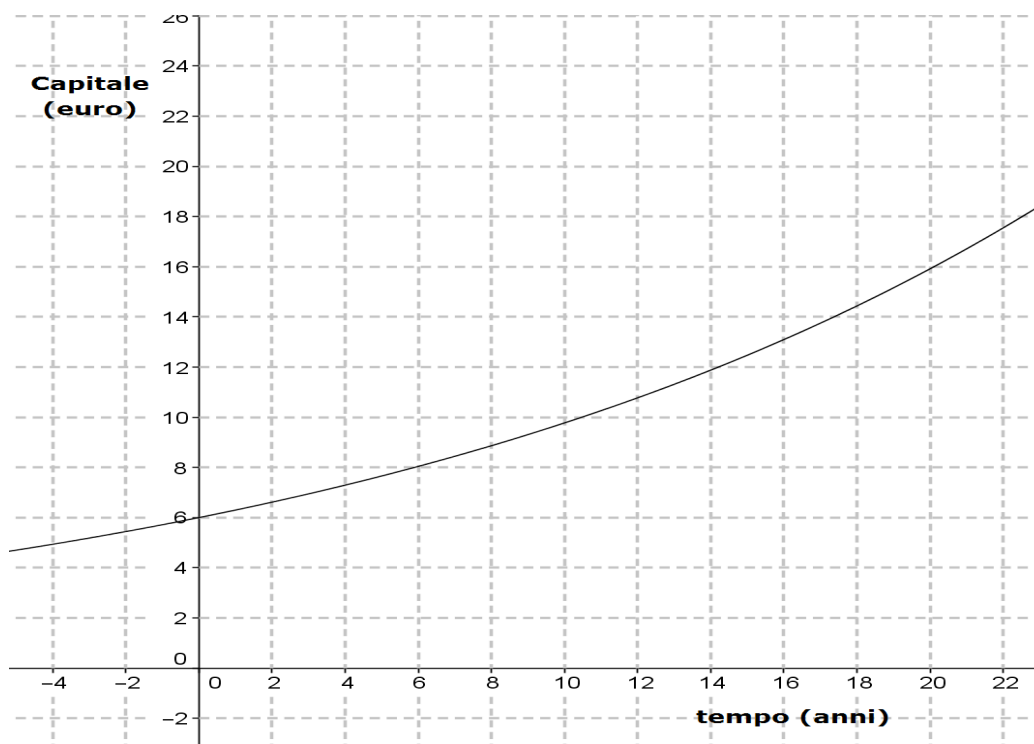
La formula  $C = C_0(1 \pm i)^n$  puo' essere applicata in svariati ambiti. Cercheremo di scoprirlo risolvendo i seguenti esercizi.

- 1) Un tizio deposita in banca 5000 € al tasso d'interesse annuo nominale del 6%. Calcola il capitale accumulato dopo 8 anni. (soluzione: 7969,24 €)
- 2) Un tizio deposita in un fondo 30000 € al tasso d'interesse annuo nominale utopistico del 100%. Calcola il capitale accumulato dopo 5 anni. (soluzione: 960000 €)
- 3) Un maiale pesa 100Kg e ogni anno incrementa il peso del 15% circa. Calcola il suo peso dopo 6 anni. (soluzione: 231,3 kg)
- 4) Un paese conta 1500 abitanti incrementa ogni anno del 6%. Calcola dopo 15 anni il numero totale degli abitanti. (soluzione: circa 3595 abitanti )
- 5) Un paese conta 1500 abitanti diminuisce ogni anno del 2%. Calcola dopo 10 anni il numero totale degli abitanti. (soluzione: circa 1226 abitanti )
- 6) Una palla di neve che rotola da un pendio innevato di 400m ha un volume iniziale di  $0,2 \text{ m}^3$ , e ogni 10m incrementa il suo volume del 10%. Calcola la dimensione alla fine del pendio. Calcola il raggio della palla alla fine del pendio. (soluzione: circa  $9,05 \text{ m}^3$  e raggio circa 1,29 m )
- 7) Un tizio deposita in un fondo 10000 € al tasso d'interesse annuo nominale del 12%. Calcola il capitale accumulato dopo 5 anni, sapendo che la capitalizzazione è mensile.  
**Soluzione**  
Innanzitutto si calcola il tasso d'interesse mensile  $I_m = 12/12\% = 1\% = 0,01$  e poi usa la formula con n uguale al numero di mesi .  
Dopo 60 mesi il capitale accumulato è  $10000(1+0,01)^{60} = 18166,96699\text{€}$
- 8) Un tizio deposita in un fondo 500€ al tasso d'interesse annuo nominale )del 6%. Calcola il capitale accumulato dopo 5 anni, sapendo che la capitalizzazione è semestrale. (soluzione: 672 € )
- 9) Un tizio deposita in un fondo 1€ al tasso d'interesse annuo nominale del 2%. Calcola il capitale accumulato dopo 5 anni, sapendo che la capitalizzazione è giornaliera. (soluzione: 1,105167 € )
- 10) Un maiale pesa 70Kg e ogni mese incrementa il peso del 1% Calcola il suo peso dopo 4anni. (soluzione: circa 113 kg )
- 11) Un tizio deposita in un fondo 700 € al tasso d'interesse annuo nominale del 12% . Calcola il capitale accumulato dopo 5 anni, sapendo che la capitalizzazione è quadrimestrale. (soluzione: circa 1261 euro)
- 12) Una mucca di 300kg dimagrisce ogni mese del 1%, calcola il peso dopo 4 anni. (soluzione: 185 kg)
- 13) Oggi chiedo un prestito di 5000 euro che devo restituire fra 2 anni e sei mesi al tasso annuo del 5% annuo (soluzione: 5648,63 euro )

### Trova e rappresenta graficamente le seguenti funzioni esponenziali

1) Un tizio decide di depositare in banca 6 milioni di euro al tasso d'interesse annuale del 5%.

Trova e rappresenta graficamente la funzione che permette di determinare il capitale accumulato in funzione degli anni trascorsi.



[soluzione:  $y = 6 \cdot 1,05^x$  e grafico qui sopra]

2) Una popolazione di 6 batteri si riproduce 1 volta in un'ora.

Trova e rappresenta graficamente la funzione che permette di determinare il numero di batteri in funzione delle ore trascorse.

3) Un tizio ogni anno perde circa il 2% dei capelli, sapendo che ha circa 150000 capelli. Trova e rappresenta graficamente la funzione che permette di determinare il numero di capelli in funzione degli anni.

4) Un tizio decide di depositare in banca 1000 euro al tasso d'interesse annuale del 4%.

Trova e rappresenta graficamente la funzione che permette di determinare il capitale accumulato in funzione degli anni trascorsi, sapendo che la capitalizzazione è trimestrale.

### Confronto tra funzioni esponenziali e funzioni lineari

5) Un tizio vuole investire 2000 euro. E' indeciso se comperare 1 obbligazione che rende il 5% del capitale iniziale ogni anno (interesse semplice cioè senza capitalizzazione) o investire in un conto deposito che offre il 4% di interesse annuo (la capitalizzazione avviene annualmente). Trova e rappresenta graficamente le funzioni e stabilisci dopo quanti anni conviene il conto deposito. (soluzione: circa 12 anni)

6) Un maiale A pesa 70 kg e ogni anno aumenta in modo uniforme del 10% del suo peso iniziale. Un maiale B invece pesa 60 kg e ingrassa ogni anno del 10% del suo peso.

Trova e rappresenta graficamente le funzioni e stabilisci approssimativamente dopo quanti anni il maiale B supera di peso il maiale A. [soluzione : 7,5 anni]

## Modelli esponenziali

La funzione esponenziale nella forma  $y = a \cdot b^x$  rappresenta un modello matematico applicabile a svariate situazioni reali.

Immaginiamo per esempio di voler trovare una funzione che rappresenti la crescita esponenziale di una città che ha una popolazione iniziale di 20 mila abitanti e dopo 8 anni diventa raggiunge i 40 mila abitanti.

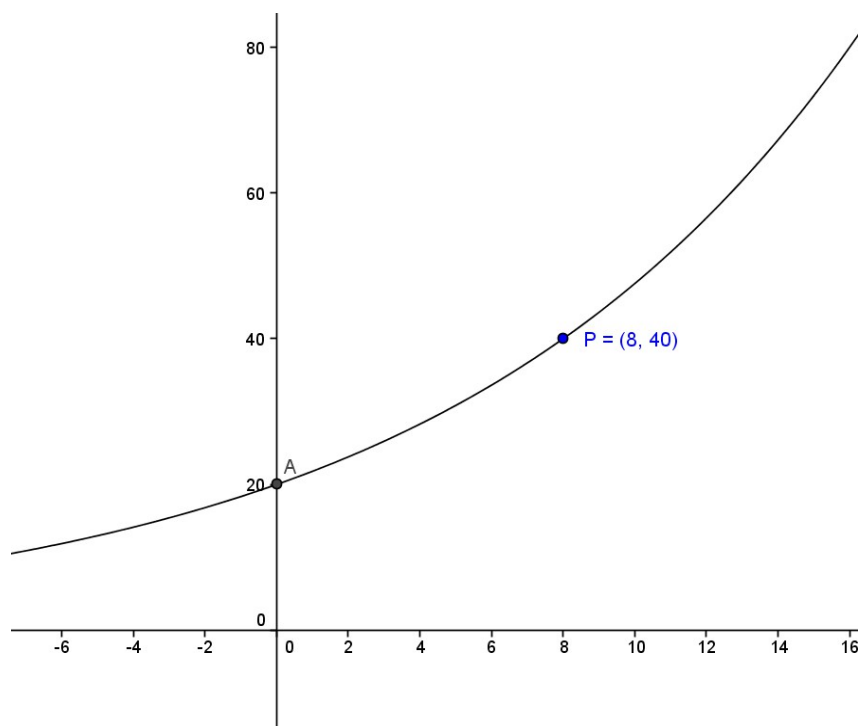
$a=20$  rappresenta la popolazione iniziale.

La nostra funzione sarà della forma:

$$y = 20 \cdot b^8 \quad \text{Ora per trovare } b, \text{ risolviamo la seguente equazione. } 40 = 20 \cdot b^8 \rightarrow 2 = b^8$$

$$b = \sqrt[8]{2} = 1,0900507733$$

La funzione sarà quindi:



$$y = 20 \cdot 1,0900507733^t$$

### Esercizi

1) Una popolazione di 500 insetti cresce esponenzialmente. Sapendo che dopo 20 giorni gli insetti sono 3000, determina la funzione che rappresenta la crescita della specie.

Attraverso tale funzione calcola dopo 30 giorni il numero di insetti. [soluzione:  $y = 500 \cdot 1,0937^x$ ]

2) Una popolazione di 1200 individui cresce esponenzialmente. Sapendo che dopo 11 giorni gli individui sono 3500, determina la funzione che rappresenta la crescita della popolazione.

Attraverso tale funzione calcola dopo 16 giorni il numero di individui.

[soluzione:  $y = 1200 \cdot 1,1022^x$ ]

## Tasso d'interesse nominale (T.A.N.) e tasso d'interesse effettivo.

L'interesse è il compenso che un debitore riconosce a chi gli presta del denaro. Nei prestiti erogati alle famiglie per l'acquisto di beni e servizi è d'obbligo rendere pubblico sia il tasso di interesse annuo nominale  $j$  (T.A.N.) sia il tasso annuo effettivo globale (TAEG), che comprende anche le spese.

Dato il tasso d'interesse nominale annuo, per calcolare il tasso d'interesse effettivo  $i_p$ , relativo ad una frazione  $\frac{1}{p}$  dell'anno, si effettua il seguente calcolo.

$$i_p = \frac{j}{p}, \text{ dove } j \text{ rappresenta il tasso annuo nominale (T.A.N.).}$$

$$i_{12} = i_{mensile} = \frac{j}{12} \quad i_{365} = i_{giornaliero} = \frac{j}{365} \quad i_3 = i_{quadrimestrale} = \frac{j}{3} \quad i_2 = i_{semestrale} = \frac{j}{2}$$

In questi casi il tasso di interesse annuo nominale (T.A.N.)  $j$ , riferito su base annua, non rispecchia più il reale costo del denaro che il debitore sostiene: pertanto, si deve distinguere fra questo ed il tasso che esprime realmente gli importi guadagnati o dovuti per l'investimento (tasso di interesse effettivo o reale). A sua volta, il tasso di interesse effettivo può essere distinto in tasso di interesse effettivo annuale ( $i$ ) e tasso di interesse effettivo per periodo ( $i_p$ ): il primo esprime gli interessi effettivamente maturati nell'arco di un anno di investimento, mentre il secondo gli interessi effettivamente maturati nel singolo periodo di interesse.

Cerchiamo di chiarire il tutto con un esempio.

Capitale versato o preso in prestito = 1000 euro, T.A.N.  $i_n = 12\%$  e  $n = 10$  anni.

Se la capitalizzazione è annuale  $i = 12\%$  e quindi il montante  $M$  accumulato o da versare dopo 10 anni sarà:

$$M = 1000(1,12)^{10} \simeq 3106$$

Se la capitalizzazione è mensile il tasso effettivo mensile sarà  $i_{12} = 12/12\% = 1\% = 0,01$  e quindi il montante  $M$  accumulato o da versare dopo 10 anni sarà:

$$M = 1000(1,01)^{120} \simeq 3300 \text{ poiché le rate sono 120.}$$

Il montante con capitalizzazione mensile è maggiore di quello con capitalizzazione annuale e quindi ci possiamo chiedere quale è il tasso d'interesse  $i$  effettivo annuale che produce un capitale dopo 10 anni uguale a quello che avremmo avuto con capitalizzazione mensile? Tale tasso d'interesse è quello che esprime realmente gli importi guadagnati o dovuti per l'investimento. Per trovare il tasso d'interesse effettivo annuo  $i$  devo risolvere la seguente equazione.

$$1000(1+i)^{10} = 1000(1,01)^{120} \text{ cioè, dividendo per 1000}$$

$$(1+i)^{10} = (1,12)^{120} \rightarrow \sqrt[10]{(1+i)^{10}} = \sqrt[10]{(1,12)^{120}} \rightarrow 1+i = (1,12)^{12} \text{ cioè}$$

$$i = (1,12)^{12} - 1 \text{ cioè } i \simeq 0,1268 \text{ cioè } 12,68\%.$$

La formula generale per il calcolo del tasso d'interesse effettivo annuo conoscendo è

$$i = (1+i_p)^p - 1$$

Viceversa se vogliamo determinare il tasso d'interesse effettivo nel periodo conoscendo il tasso effettivo annuo  $i$  basterà utilizzare la seguente formula.  $i_p = \sqrt[p]{1+i} - 1$

### Esercizi

1) Confronta il tasso d'interesse nominale e quello effettivo annuo se il tasso mensile è  $i = 0,5\%$ .  
[soluzione: tasso nominale  $6\%$  ; tasso effettivo annuo  $6,167\%$ ]

2) Confronta il tasso annuo nominale e quello effettivo con tasso trimestrale  $i_4 = 0,2\%$ .

3) Calcola la rata di un mutuo da pagare mensilmente sapendo che il capitale richiesto  $C = 100000$  euro, la durata del mutuo è 20 anni e il T.A.N è  $J = 9\%$ .

La formula per calcolare la rata è  $R = \frac{Ci_p(1+i_p)^n}{(1+i_p)^n - 1}$   $n$  è il numero di periodi e  $i$  è il tasso d'interesse relativo al periodo. [soluzione: 899,73 euro]

4) calcola la rata del mutuo precedente nell'ipotesi che sia un tasso effettivo annuo sia  $9\%$ .  
[soluzione:  $i = 0,72\%$  ; rata 876,70 euro]

5) Calcolare il tasso effettivo equivalente al tasso nominale annuo  $j = 10\%$  nel caso di capitalizzazione degli interessi a) Mensile b) Semestrale c) Biennale

[soluzione: a)  $10.47\%$  b)  $10.25\%$  c)  $r = 9.54\%$ ]

6) La somma di € 3700 viene impiegata per 6 anni ad interesse composto (esponenziale) al tasso annuo del  $7.75\%$ . Quale tasso annuo dovrebbe essere applicato per avere lo stesso montante qualora l'investimento fosse fatto ad interesse semplice (lineare)?  
[soluzione.  $I = 9.42\%$ ]

7) Una banca paga interessi a un tasso nominale annuo  $r_1 = 8.2\%$  con capitalizzazione mensile. Un'altra paga interessi a un tasso nominale annuo  $r_2 = 8.6\%$  con capitalizzazione semestrale. Dove vi conviene depositare i vostri soldi se li volete tenere investiti per due anni?  
[soluzione scelgo alternativa con  $r_2$ ]



## Esercizi risolvibili con il logaritmo

Per risolvere alcuni esercizi relativi alle funzioni esponenziali, occorre conoscere elementari nozioni sui logaritmi.

**Dati 2 numeri a e b ( $a \neq 1$ ), si chiama logaritmo in base a del numero b (detto argomento) l'esponente da attribuire alla base a per ottenere b.**

**In simboli:**  $\log_a(b)=x$  se e solo se  $a^x=b$

Esempio

$$\log_2(8)=3 \quad \text{perchè} \quad 2^3=8$$

$$\log_3(81)=4 \quad \text{perchè} \quad 3^4=81$$

La scrittura  $\text{Log } x$  è equivalente a  $\log_{10}(x)$

Esempio

$$\log(1000)=3 \quad \text{perchè} \quad 10^3=1000 \quad \log(0,01)=-2 \quad \text{perchè} \quad 10^{-2}=0,01$$

Quando invece si scrive  $\ln$  s'intende il logaritmo naturale ovvero in base e.

Esempio

$$\ln(10)=2,3025... \quad \text{perchè} \quad e^{2,3025...}=10 \quad \ln(160)=5,075... \quad \text{perchè} \quad e^{5,075...}=160$$

### Esercizi senza calcolatrice

$$\log_2(16)=..... \quad \log_5(125)=..... \quad \log_2\left(\frac{1}{16}\right)=..... \quad \log(10000)=.....$$
$$\log(0,000001)=.....$$

### Esercizi con la calcolatrice

$$\log_2(17)=..... \quad \log_5(100)=..... \quad \log_2(0,125)=..... \quad \log_{1,2}(2,985984)=.....$$
$$\log_{1,01}(1,04060401)=..... \quad \log(140)=..... \quad \ln(3000)=.....$$

---

1 Ricordo che e  $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$  che  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$

## Proprietà del logaritmo

$$\log_a(1)=0 \quad \text{infatti} \quad a^0=1$$

$$\log_a(a)=1 \quad \text{infatti} \quad a^1=a$$

**Il logaritmo del prodotto di 2 o più numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori:**

$$\log_a(bc)=\log_a(b)+\log_a(c)$$

**Il logaritmo del quoziente di 2 numeri positivi è uguale alla differenza fra il logaritmo del numeratore e quello del denominatore:**

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a(b)-\log_a(c)$$

**Il logaritmo della potenza di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base della potenza:**

$$\log_a(b^m)=m \cdot \log_a(b)$$

**Il logaritmo della radice di un numero positivo è uguale al prodotto del reciproco dell'indice per il logaritmo del radicando:**

$$\log_a(\sqrt[n]{b})=\frac{1}{n} \cdot \log_a(b)$$

### **Esercizi sulle funzioni esponenziali risolubili con il logaritmo e la calcolatrice**

Una popolazione di 40 batteri si riproduce 1 volta in un'ora, calcola dopo quante ore diventano 163840.

Soluzione

$$40 \cdot 2^x = 163840 \rightarrow 2^x = 4096 \rightarrow x = \log_2(4096) = 12$$

Una popolazione di 20 batteri si riproduce 3 volta in un'ora, calcola dopo quante ore diventano 655360. [soluzione: 5h]

Un tizio deposita in banca 2000 euro al tasso d'interesse del 4%. Calcola dopo quanti anni raddoppia il capitale. [soluzione: 17,7 anni]

Un tizio deposita in banca un capitale C al tasso d'interesse del 4%. Calcola dopo quanti anni raddoppia il capitale. [soluzione: 17,7 anni]

Un tizio deposita in banca 25000 euro al tasso d'interesse del 10%. Calcola dopo quanti anni riesce ad accumulare un capitale di 65000. [soluzione: circa 10 anni]

Un tizio deposita in banca 1500 euro al tasso d'interesse annuale nominale del 12%. Calcola dopo quanti mesi raddoppia il capitale, sapendo che la capitalizzazione è trimestrale. [soluzione: 70 mesi , ]

Un maiale pesa 60Kg e ogni mese incrementa il peso del 5% circa. Calcola dopo quanti mesi diventa 100kg. [soluzione: 10,5 mesi]

Una città subisce ogni anno una diminuzione della popolazione del 0,5%. Calcola dopo quanti anni si dimezza. [soluzione: 138 anni]

## La funzione $y=e^x$

Partiamo da un semplice esercizio ci permetterà di arrivare al famoso numero di Nepero.

Un tizio deposita in un fondo 1€ al tasso d'interesse nominale annuo del 100%.

Calcola il capitale accumulato dopo 1 anno, sapendo che la capitalizzazione è annuale.

Calcola il capitale accumulato dopo 1 anno, sapendo che la capitalizzazione è mensile.

Calcola il capitale accumulato dopo 1 anno, sapendo che la capitalizzazione è giornaliera.

Calcola il capitale accumulato dopo 1 anno, sapendo che la capitalizzazione avviene ogni ora

Usando la solita formula  $C = C_0(1+i)^n$

$$C = (1+1)^1 = 2 \quad \text{con capitalizzazione annuale}$$

$$C = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2,6130.. \quad \text{con capitalizzazione mensile}$$

$$C = \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2,7145.. \quad \text{con capitalizzazione .....}$$

$$C = \left(1 + \frac{1}{\dots\dots\dots}\right)^{\dots\dots\dots} = 2,7181.. \quad \text{con capitalizzazione oraria.}$$

Se invece la capitalizzazione avviene in modo istantaneo otteniamo il numero di Nepero che è infatti definito come:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = 2,718281....$$

Riassumendo, con capitalizzazione istantanea, partendo da un tasso annuo  $i=100\%$ , con un capitale iniziale di 1 euro, dopo 1 anno ottengo  $e$  euro (2,7182 €). Dopo 2 anni otterrò  $e^2$  euro (7,3890 €), dopo 3 anni otterrò  $e^3$  euro (20,0855 €), in generale dopo  $n$  anni otterrò  $e^n$  euro.

Ma cosa succede se al posto di un tasso d'interesse del 100% ho un tasso d'interesse annuo del 200% o del 300% o più in generale se ho un interesse  $i$ ?

Per determinare quanto accumulo dopo 1 anno, con  $i=200\%$ , devo risolvere il seguente limite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{N}\right)^N. \quad \text{Provando con } N=1000000, \text{ trovo il seguente risultato } 7,389041 \text{ cioè } e^2$$

Mentre per determinare quanto accumulo dopo 1 anno, con  $i=300\%$ , devo risolvere il seguente limite.

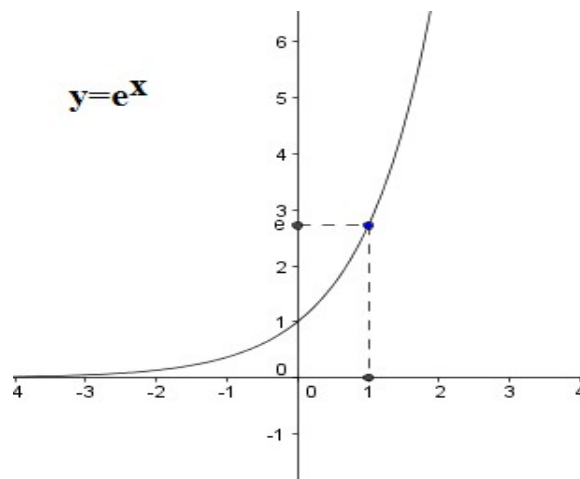
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{N}\right)^N. \quad \text{Provando con } N=1000000, \text{ trovo il seguente risultato } 20,08544654 \text{ cioè } e^3$$

$$\text{Possiamo quindi intuire che } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{N}\right)^N = e^i$$

Riassumendo, partendo da un tasso annuo  $i$ , con un capitale iniziale di 1 euro, dopo 1 anno, con capitalizzazione istantanea, ottengo  $e^i$ , dopo 2 anni  $e^{i^2}$ , dopo 3 anni  $e^{i^3}$ , in generale dopo  $n$  anni  $e^{in}$ .

### Formula generale

Con capitalizzazione continua, tasso d'interesse annuo  $i$ , e con capitale iniziale  $C$ , dopo  $n$  anni accumuliamo un capitale  $M = Ce^{in}$



### Esercizi

Calcola il capitale che si ottiene dopo 10 anni, con capitalizzazione continua, tasso  $i=6\%$ , capitale iniziale di 1000Euro.

Depositando 20000 euro ad un tasso d'interesse del 6%, con capitalizzazione continua si ottengono dopo  $n$  anni 30000 euro, calcola  $n$ .

## Ricavare una funzione esponenziale da una tabella di dati

Data una tabella contenenti dati  $x$  e  $y$ , vogliamo trovare, se esiste, la funzione esponenziale della forma  $y = a \cdot b^x$  che eventualmente mette in relazione le 2 grandezze

Data la funzione  $y = 3 \cdot 2^x$  è semplice ricavare la tabella seguente.

$x$	$y$
0	3
1	6
2	12
3	24
4	48
5	96
6	192
7	384
8	768
9	1536
10	3072

Immaginiamo ora di conoscere solo i dati in tabella, come facciamo a trovare l'equazione  $y = 3 \cdot 2^x$  ?

### Metodo 1

Come prima operazione, basterà eseguire il rapporto tra  $y_2/y_1, y_3/y_2, \dots, y_n/y_{n-1}$  e vedere se sono costanti.

Nel nostro caso  $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \dots = \frac{3072}{1536} = 2$ , come si nota dai valori della terza colonna.

$x$	$y$	$y_n/y_{n-1}$
0	3	
1	6	2
2	12	2
3	24	2
4	48	2
5	96	2
6	192	2
7	384	2
8	768	2
9	1536	2
10	3072	2

2 è la base della nostra funzione esponenziale della forma  $y = a \cdot 2^x$ . Per determinare  $a$  basterà sostituire una coppia di valori  $(x, y)$  a scelta e risolvere l'equazione. Per esempio sostituendo la coppia  $(0; 3)$  si ottiene  $3 = a \cdot 2^0$  cioè  $3 = a$ .

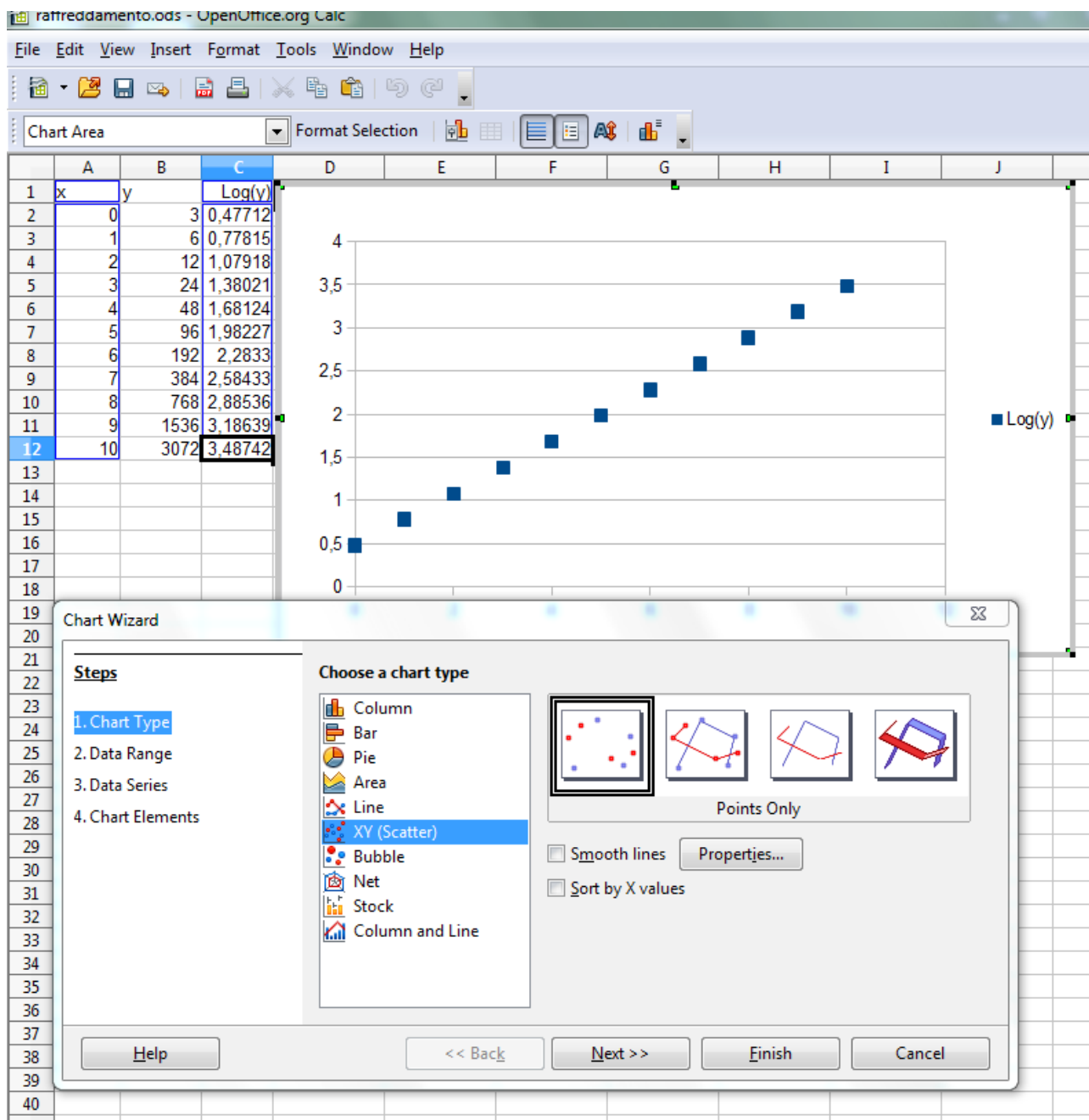
La nostra funzione sarà quindi  $y = 3 \cdot 2^x$ .

## Metodo 2

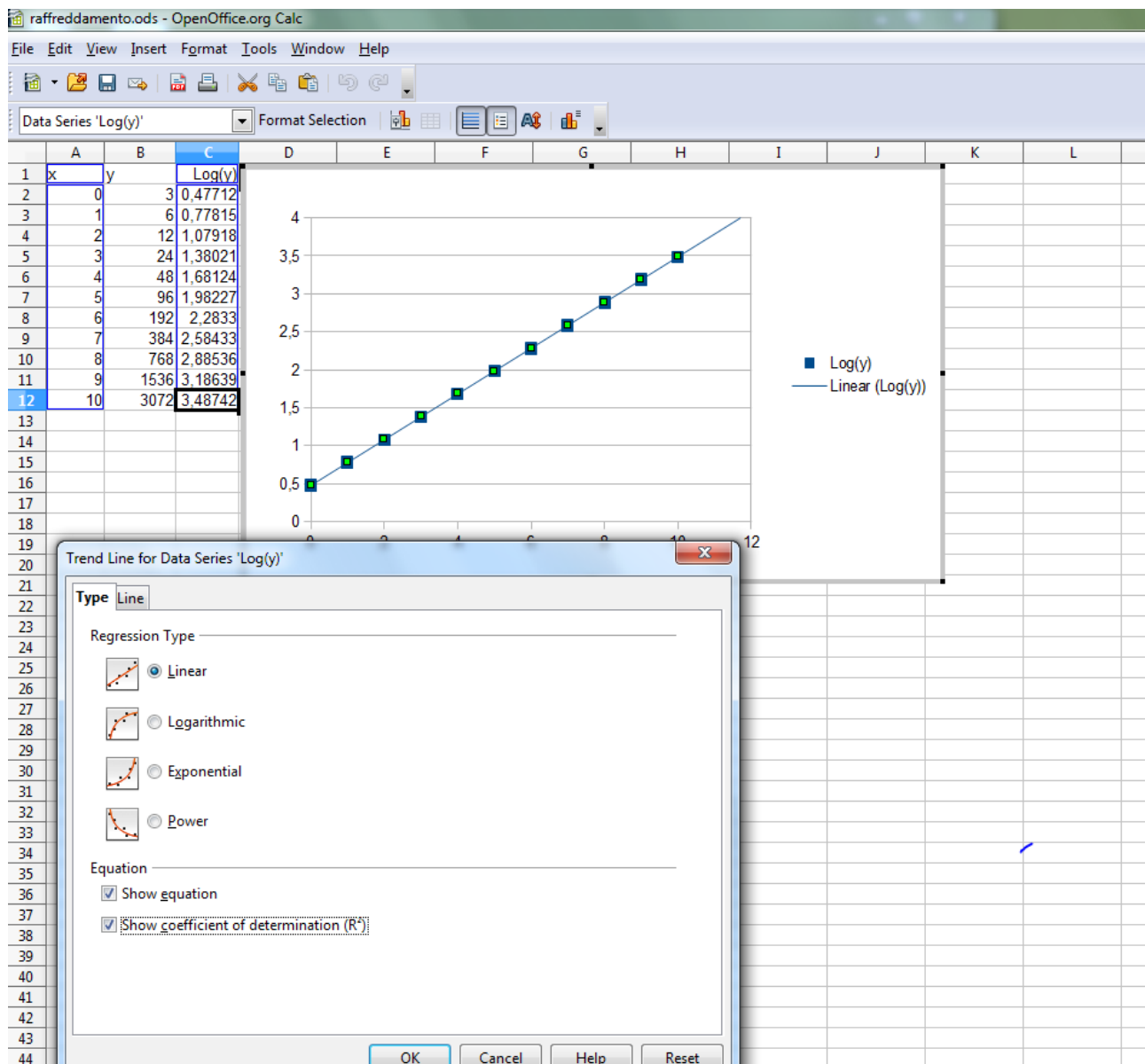
Il secondo metodo è altrettanto importante ed è molto utilizzato in ambito scientifico, come vedremo in seguito e necessita, per comodità, del foglio elettronico.

Inseriamo i dati della tabella nel nostro foglio elettronico e aggiungiamo una tabella nella quale calcoliamo il log (y) (base 10 ovviamente).

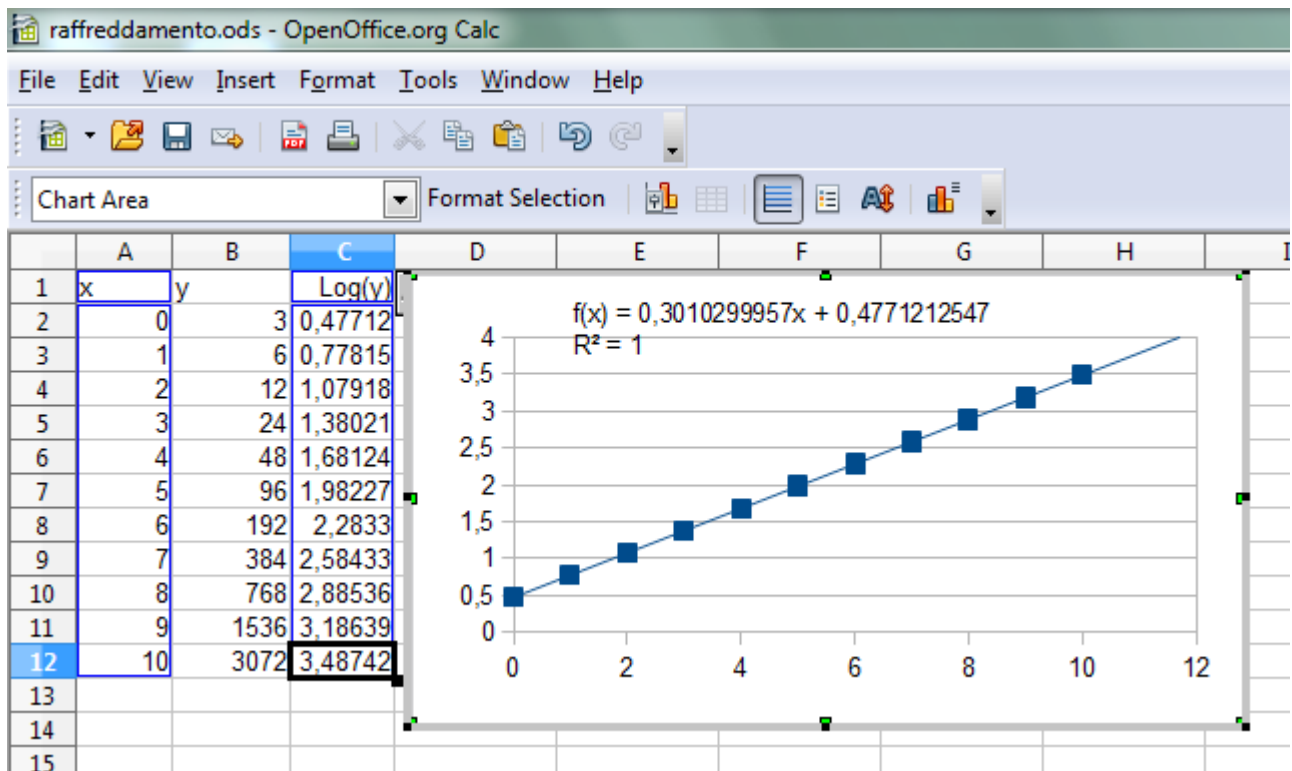
In seguito creiamo un grafico XY che come vediamo in figura è una retta perfetta.



Dopo aver creato il grafico, clicchiamo prima con il tasto sinistro del mouse e poi con il tasto destro sulla retta e clicchiamo su “Insert trend line”, spuntando le caselle “Show equation” e “Show coefficient of determination”







Come si puo' notare il programma trova automaticamente l'equazione della retta, facendoci risparmiare un bel po' di fatica.

Possiamo quindi concludere che:

$\log(y) = (0,3010299957x + 0,4771212547)$  e che quindi

$$y = 10^{(0,3010299957x + 0,4771212547)}$$

cioè

$$y = 10^{(0,3010299957x + 0,4771212547)} = 10^{0,3010299957x} \cdot 10^{0,4771212547} = (10^{0,3010299957})^x \cdot 3 = 2^x \cdot 3 = 3 \cdot 2^x$$

### Esercizio

- Ripeti lo stesso esercizio utilizzando il logaritmo naturale ( $\ln(y)$ ) al posto del log.
- Trova la funzione corrispondente ai dati in tabella, utilizzando entrambi i metodi.

x	y
0	0,5
1	1,5
2	4,5
3	13,5
4	40,5
5	121,5
6	364,5
7	1093,5
8	3280,5
9	9841,5
10	29524,5

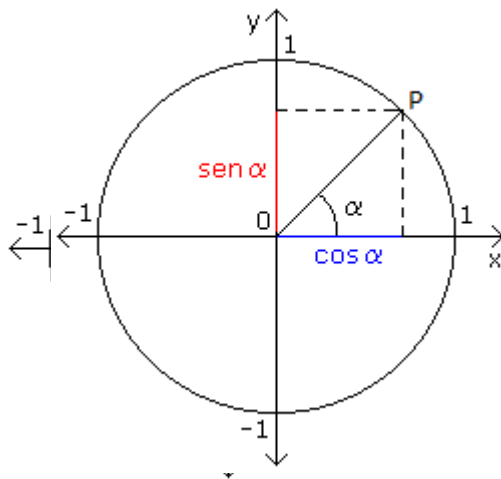
- $\log(y) = 2x + 3$ . Disegna la funzione  $x$ ,  $\log(x)$  e la funzione esponenziale corrispondente.
- $\ln(y) = -4x + 10$ . Disegna la funzione  $x$ ,  $\ln(y)$  e la funzione esponenziale corrispondente.

- Studia il raffreddamento della carta stagnola scaldata con il phon. (vedi esercizio foglio elettr.)

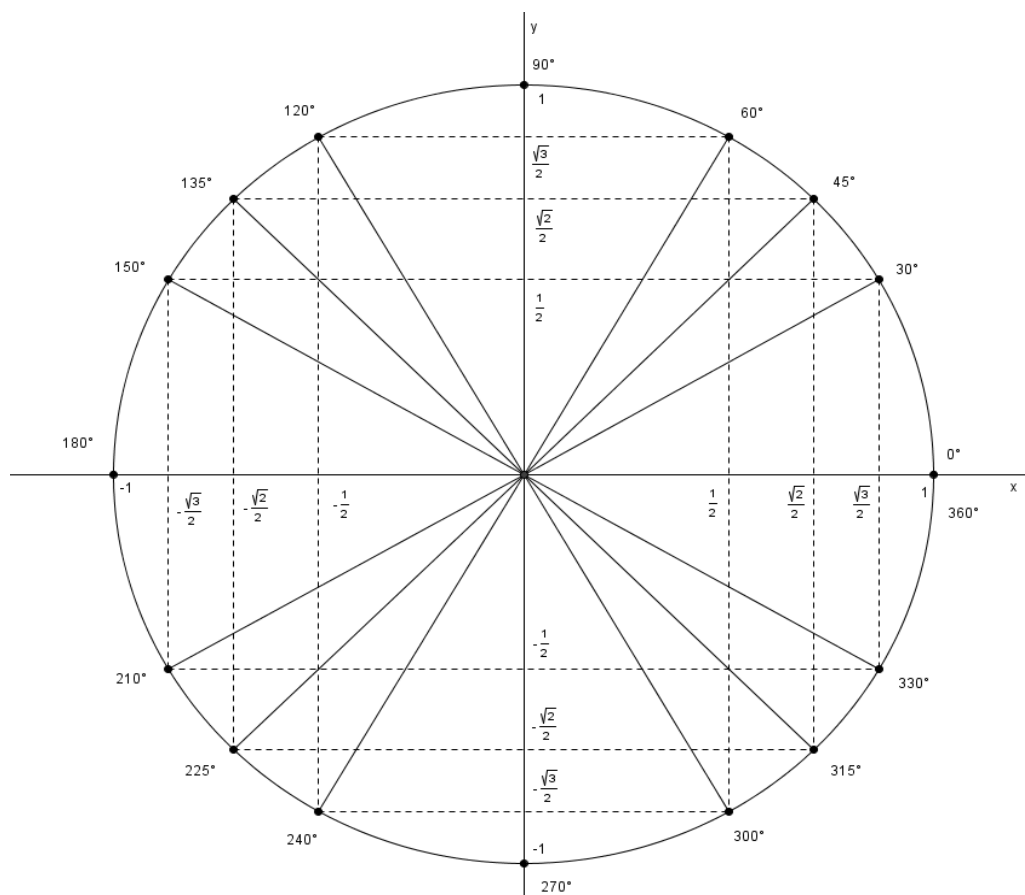
# Funzioni goniometriche

## Definizione algebrica di seno e coseno

Dato un punto P in una circonferenza di raggio 1 e centro O(0;0), si definisce **cos  $\alpha$**  l'ascissa del punto P e **sin  $\alpha$**  l'ordinata del punto P.



Si definisce inoltre **tg  $\alpha$**  la pendenza della retta passante per O e P cioè  $\text{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$



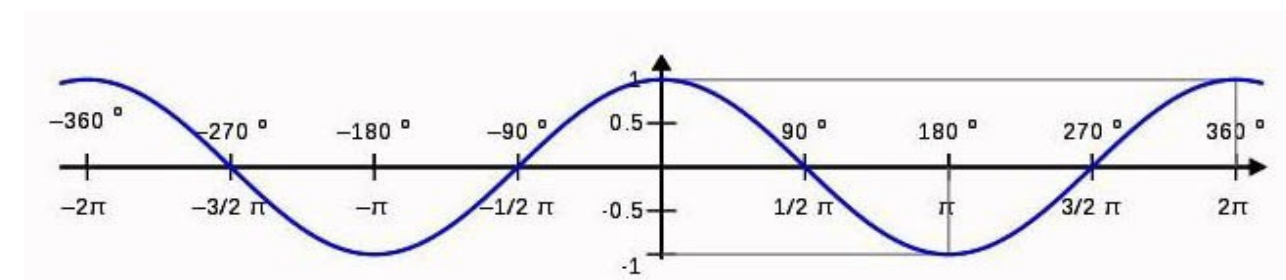
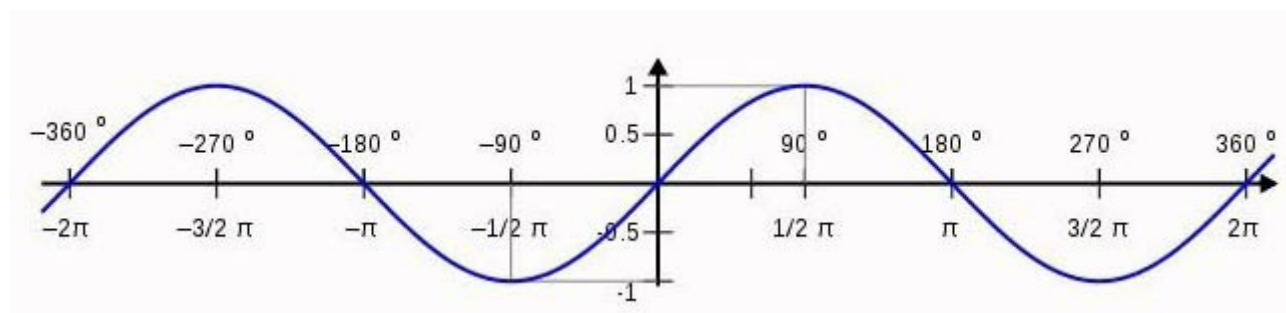
In base alla definizione e attraverso la figura precedente, compila la seguente tabella

<b><math>\alpha</math></b>	<b><math>0^\circ</math></b>	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	<b><math>90^\circ</math></b>	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	<b><math>180^\circ</math></b>
<b><math>\cos \alpha</math></b>									
<b><math>\sin \alpha</math></b>									
<b><math>\operatorname{tg} \alpha</math></b>									

<b><math>\alpha</math></b>	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	<b><math>270^\circ</math></b>	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	<b><math>360^\circ</math></b>	
<b><math>\cos \alpha</math></b>									
<b><math>\sin \alpha</math></b>									
<b><math>\operatorname{tg} \alpha</math></b>									

Prendendo i dati dell'esercizio precedente, in particolare i dati evidenziati in grassetto, ricava il grafico della funzione  $y=\sin(x)$ , della funzione  $y=\cos(x)$  in un diagramma x-y. (x espresso in gradi).

### Funzioni seno, coseno



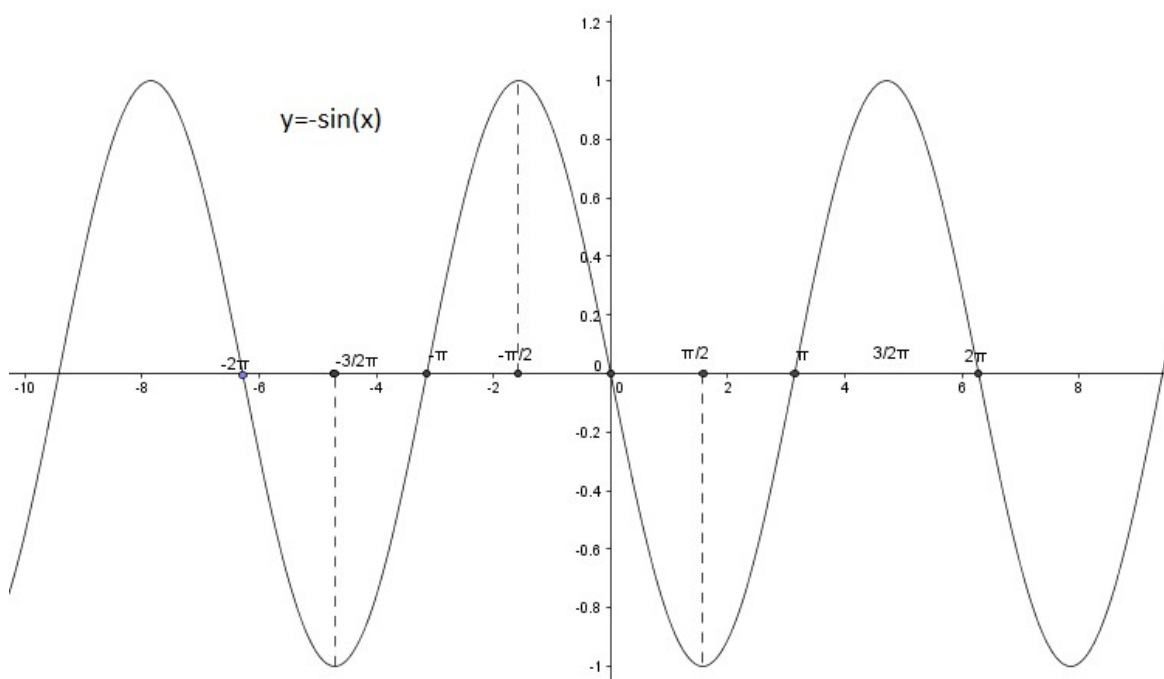
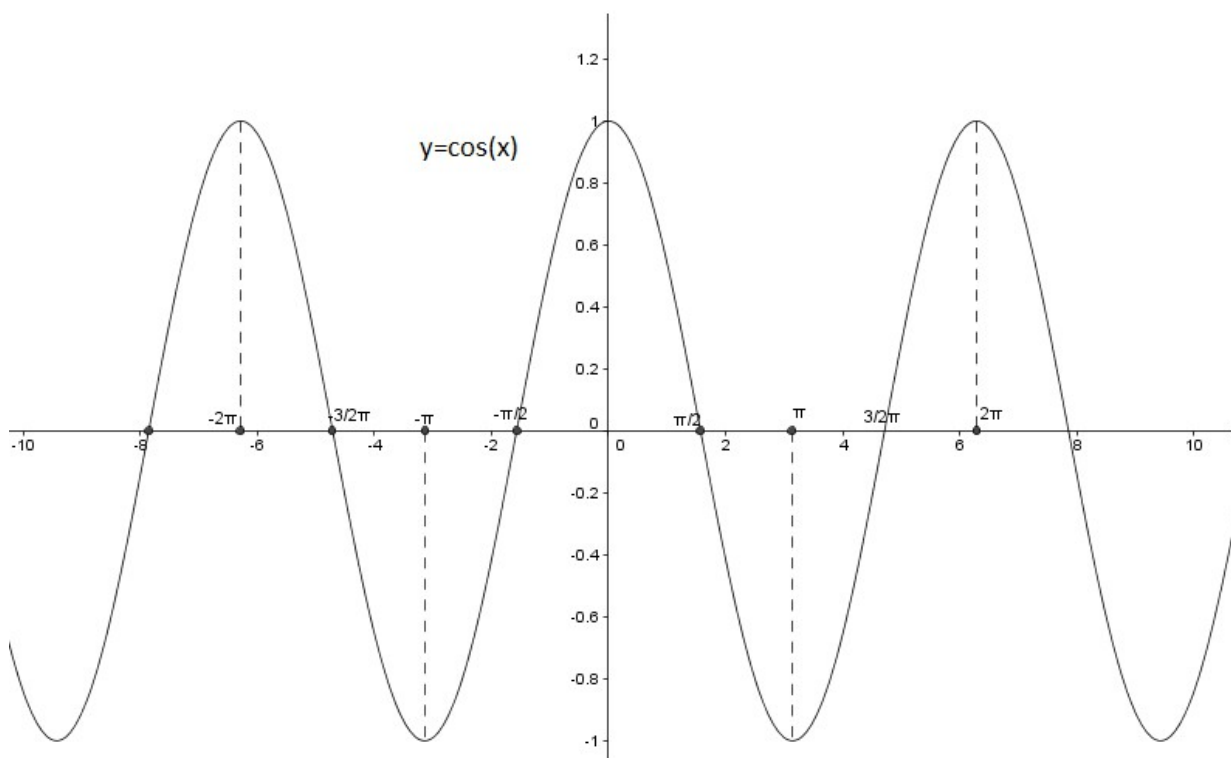
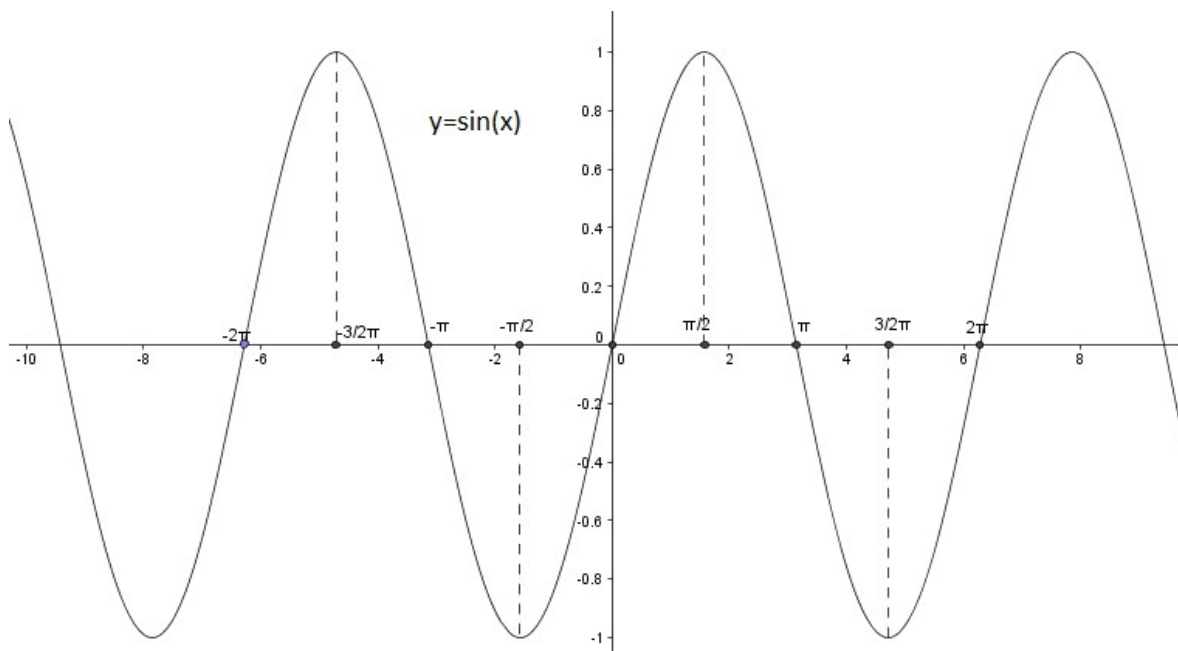
Prova a rappresentare con geogebra  $y=\sin x$  e determina la pendenza della retta tangente alla funzione in un punto A qualsiasi. Muovi il punto A per vedere come varia la pendenza e aiutandoti con i dati ottenuti fai il grafico della derivata nel tuo quaderno.

Ripeti la stessa operazione con  $y=\cos x$ .

Si avrà che:

$$y=\sin(x) \rightarrow y'=\cos(x)$$

$$y=\cos(x) \rightarrow y'=-\sin(x) \quad \text{cioè le funzioni riportate nella pagina seguente}$$



Derivata delle funzione seno e coseno.

Nel caso in cui si debba calcolare la derivata di una funzione goniometrica composta la formula, che non dimostreremo, è la seguente

$$y = \sin(f(x)) \rightarrow y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$y = \cos(f(x)) \rightarrow y' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esempi

$$y(x) = \sin(x^2 + 2x + 3) \rightarrow y' = \cos(x^2 + 2x + 3) \cdot (2x + 2) = (2x + 2) \cos(x^2 + 2x + 3)$$

$$y(t) = \cos(t^3 + 2t^2 + 3) \rightarrow y' = -\sin(t^3 + 2t^2 + 3) \cdot (3t^2 + 4t) = -(3t^2 + 4t) \sin(t^3 + 2t^2 + 3)$$

$$y(t) = 6\sin(2\pi t + \pi t^2) \rightarrow y' = 6\cos(2\pi t + \pi t^2) \cdot (2\pi + 2\pi t) = (12\pi + 12\pi t) \cos(2\pi t + \pi t^2)$$

Esercizi

$$y(t) = 3\sin(2\pi t^2 + 3\pi t + 5) \rightarrow y' =$$

$$y(t) = 10\sin(2\pi t^2 + 3\pi t + 5) \rightarrow y' =$$

Dimostra che la funzione seno è una funzione dispari e che la funzione coseno è pari.

## Modelli di moto armonico

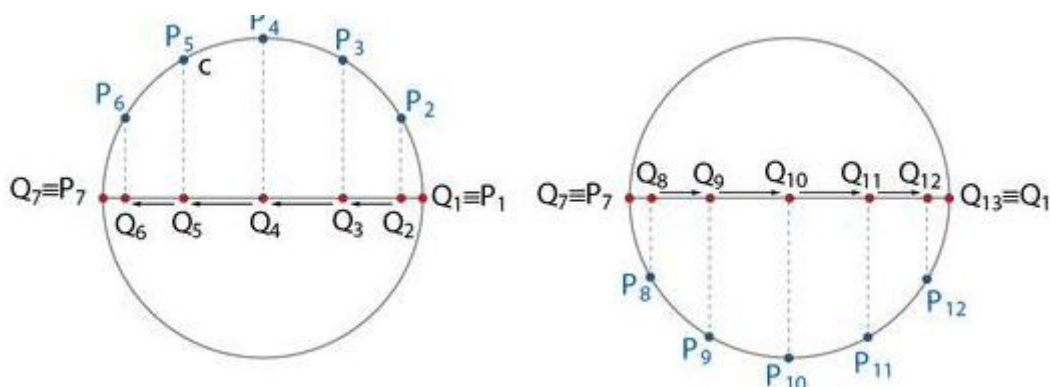
Le funzioni  $y = \sin x$  e  $y = \cos x$  sono sfasate di  $\pi/2$ , hanno un periodo di  $2\pi$  e un'ampiezza 1.

Tali funzioni, opportunamente modificate, servono per rappresentare modelli di moto armonico. Il moto di un pendolo, quello di un'altalena, quello di una particella investita da un'onda longitudinale o trasversale, sono moti *oscillatori*, in cui la traiettoria del moto è ripetuta diverse volte in versi opposti. Il modello più semplice di moto oscillatorio, in cui si trascurano gli effetti degli attriti che smorzano l'oscillazione, è quello del **moto armonico**.

Si chiama **moto armonico** il movimento che si ottiene proiettando su un diametro le posizioni di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme.

Di conseguenza, la traiettoria del moto armonico è un diametro del moto circolare uniforme che lo genera. Questo diametro divide la traiettoria del moto circolare uniforme in due semicirconferenze.

Come è mostrato nella figura *Q* che si muove di moto armonico oscilla in un verso (per esempio quello negativo) mentre il punto *P* si muove su una delle semicirconferenze (per esempio quella superiore) e nel verso opposto quando *P* percorre l'altra semicirconferenza.



Nella figura il punto  $P$  è disegnato a intervalli di tempo uguali, durante i quali esso percorre archi uguali. Invece si nota che, negli stessi intervalli di tempo, il punto  $Q$  che segue il moto armonico non percorre distanze uguali; per la precisione:

nelle zone centrali il moto armonico è più rapido e percorre distanze maggiori in tempi uguali; agli estremi il moto armonico è più lento e percorre distanze minori negli stessi tempi. Nei punti di inversione del moto la velocità istantanea del punto è nulla.

## Formula generale

La formula generale per rappresentare il moto armonico è :

$$y = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right) \quad , \text{dove } T \text{ è il periodo} \quad , \quad a \text{ l'ampiezza dell'oscillazione e } x \text{ il tempo.}$$

In alternativa si possono usare le seguenti formule equivalenti.

$$y = a \cdot \sin(2\pi f x) \quad \text{poiché la frequenza } f = \frac{1}{T} \quad \text{o}$$

$$y = a \cdot \sin(\omega x) \quad \text{poiché } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Possiamo anche usare la formula  $y = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$  o  $y = a \cdot \cos(2\pi f x)$  o  $y = a \cdot \cos(\omega x)$  se l'onda è sfasata di  $\pi/2$

1) Una particella d'aria è investita da un'onda sonora di 30 Hz, e di ampiezza 2 cm. Determina la legge oraria di tale particella e determinare velocità e accelerazione in funzione del tempo. Determina inoltre la velocità max e min della particella.

[soluzione:  $y(t) = 2 \sin(60\pi t)$   $y'(t) = 120\pi \cos(60\pi t)$   $y''(t) = -7200\pi^2 \sin(60\pi t)$  ]

2) Un punto si muove di moto armonico su un asse  $x$ . Si assuma come origine  $O$  sull'asse  $x$  la posizione del punto, da fermo, corrispondente al tempo  $t=0$ ; sapendo che, dopo un quarto di periodo, il punto mobile si trova a distanza di 2 m dal punto di partenza e che la frequenza è di 120 oscillazioni al minuto, scrivere la legge oraria del moto ( $t$  espresso in secondi) e determina velocità e accelerazione.

3) Ad una molla è applicato una massa  $m$  che si muove di moto armonico. Sapendo che in 30 secondi compie 6 oscillazioni e che l'oscillazione massima è 5 cm, determina la legge oraria della molla e determina velocità e accelerazione.