# Глава 2

## 1. Постановка задачи

### 1.1. Математическая модель циркуляции жидкости в водоеме

Математическая модель циркуляции жидкости в водоеме основана на системе полных нелинейных уравнений гидротермодинамики [1], записанных в традиционных приближениях, и включает уравнения движения





статики



неразрывности несжимаемой жидкости



переноса тепла



а также уравнение состояния

.

Уравнения - рассматриваются в трехмерной области

,

где  – двумерная область, расположенная в плоскости  (зеркало водоема); функция  описывает рельеф дна. Данные уравнения дополняются следующими граничными







и начальными условиями



В модели - приняты следующие обозначения:  – компоненты вектора скорости течений, соответствующие осям ;  – температура воды;  – давление;  – давление на невозмущенной поверхности , включающее атмосферное давление и давление, вызванное перепадами уровня; ,  – плотность и ее среднее значение соответственно;  – параметр Кориолиса;  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости и теплопроводности, соответственно;  – ускорение свободного падения;  – компоненты касательного напряжения трения ветра;  – компоненты, описывающие трение о дно;  – вектор внешней нормали к границе области ;  – известные функции;



– оператор адвекции скалярной величины ;



– оператор Лапласа по горизонтальным переменным ; 

Общепринятый метод вычисления скоростей течений в моделях гидродинамики использует представление вектора горизонтальной скорости в виде суммы баротропной  и бароклинной  составляющих (см. [1]):

,

где

.

В граничном условии и в *U* и *V* – интегральные скорости, которые определяются формулами:

.

В принимается следующий вариант параметризации придонного трения [2]:



где  – интегральные скорости, которые определяются формулами ;  – параметр, характеризующий трение о дно.

### 1.2. Переход к безразмерным величинам в общей модели

Для оценки порядка величинслагаемых в соотношениях общей модели целесообразно перейти к безразмерным величинам. Рассмотрим уравнения , , нашей системы, и определим характерные для озера Иссык-Куль масштабы, считая их независимыми [1, 3]:



Введём безразмерные переменные: , связав их с исходными размерными по формулам:



Приведем уравнения , , к безразмерному виду, считая масштабы  зависимыми:







Оценим сформированные параметры подобия, используя :

Число Россби (Кибеля):

;

Числа Экмана для горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости:



Таким образом, перед диффузионными и адвективными слагаемыми в уравнениях стоят малые, по сравнению с единицей (коэффициент при членах Кориолиса, , ) коэффициенты. Пренебречь можно слагаемыми, определяющими адвекцию и горизонтальный турбулентный обмен. Однако, не смотря на то, что коэффициент  тоже достаточно мал, необходимо в уравнениях сохранить учёт вертикального турбулентного обмена, так как только при этом условии возможна корректная математическая постановка задачи (учёт краевых условий на поверхности и дне водоёма). Предполагая одинаковый порядок малости оставшихся параметров подобия, определим величины зависимых масштабов:



Таким образом, мы приходим к следующей системе уравнений движения, записанной в безразмерных переменных:



Возврат к размерным переменным осуществляется затем по формулам с учетом

Краевые условия на верхней границе преобразуются следующим образом:



Выразим компоненты касательного напряжения трения ветра  и  через компоненты вектора скорости ветра на поверхности водоема. Известно, что



где  – вектор скорости ветра на поверхности водоема,  [1]. Переходя к безразмерным переменным  по формулам



где  [1], граничные условия перепишем в следующем виде:



С учетом представлений и краевые условия перепишутся в безразмерных координатах следующим образом:



где , .

Краевое условие



в безразмерных координатах имеет вид



Итак, примем следующие упрощающие предположения:

* плотность – постоянная величина: ;
* в уравнениях движения пренебрегаем адвективным переносом и горизонтальной диффузией.

С учетом указанных выше упрощений гидродинамическую модель - можно переписать в следующем виде (все величины считаем безразмерными, черточки над ними для простоты опущены):











## 2. Анализ упрощенной модели

### 2.1. Доказательство единственности решения упрощенной модели

Докажем единственность решения задачи -. Для этого воспользуемся методом от противного. Предположим, что задача - имеет два решения:  и . Для разности данных решений     задача - принимает вид:











Проинтегрируем уравнения по  от  до  с учетом краевых условий и :



Продифференцируем первое уравнение из по , а второе – по . Затем из полученного второго уравнения вычтем первое. Таким образом, мы исключим давление на невозмущенной поверхности . К полученному уравнению добавим третье уравнение из , граничное условие и начальные условия . В итоге получим следующую задачу для баротропной компоненты:



Умножим первое уравнение на функцию , такую что

 при 



и полученное уравнение проинтегрируем по области , в том числе и по частям. В результате получим следующее интегральное тождество:



Введем обозначение

,

тогда из получим:



Так как в начальный момент времени , а значит , то из следует, что



Из последнего соотношения получаем

,

а эти соотношения означают единственность баротропной компоненты.

Учитывая, что , для давления на невозмущенной поверхности  получаем следующие соотношения:



Выпишем задачу для бароклинной компоненты для разности решений. Она получается из задачи - с учетом того, что , и имеют место соотношения :



краевые условия:



начальные условия:



Первое уравнение умножим на функцию , а второе – на функцию , и, сложив получившиеся уравнения, получим:



Интегрируя уравнение по переменной  от  до , в том числе и по частям, и учитывая краевые условия , получим:

.

Так как второе слагаемое в является неотрицательным, то для первого слагаемого можем записать:

где .

Из условия получаем . Так как функция  является убывающей (ее производная неположительная), неотрицательной и в начальный момент времени , то мы получаем, что . Последнее соотношения означает единственность бароклинной компоненты.

Задача для вертикальной компоненты имеет вид:

.

Данная задача имеет только тривиальное решение. Следовательно, вертикальная компонента определяется единственным образом.

Таким образом, доказана единственность решения для компонент скорости .

### 2.2. Построение некоторых классов аналитических решений задачи -

При дополнительных упрощениях задача - может быть решена аналитически. Предположим, что:

* в качестве основной области принимается бассейн прямоугольной формы, глубина которого постоянна и равна : ;
* для параметра Кориолиса принимается линейная зависимость: ;
* компоненты напряжения трения ветра  и  задаются при помощи аналитических формул, позволяющих моделировать различные типы ветров над акваторией бассейна; мы, в частности, будем рассматривать вариант:



где  – параметры, определяющие силу ветра.

Аналитические решения системы уравнений - будем искать в виде с учетом , и . Сначала определим баротропные компоненты горизонтального вектора скорости, затем найдем бароклинные компоненты и, наконец, определим вертикальную компоненту вектора скорости.

#### 2.2.1. Определение баротропной компоненты скорости

Проинтегрировав систему от  до , получим:



Продифференцируем первое уравнение по переменной , а второе – по , и вычтем из первого уравнения второе. Добавив к полученному уравнению третье уравнение из , граничные условия и начальные условия , получим следующую задачу для баротропной компоненты вектора скорости:



граничные условия:



начальные условия:



Введем функцию тока  следующим образом:



Для функции  второе уравнение в будет выполнено автоматически. Подставив в -, получим задачу для определения функции тока:



Решения задачи будем искать в виде:

,

где  – решение стационарной задачи:



а  – решение нестационарной задачи:



где .

Рассмотрим решение задачи . Подставив формулы для функций  и  в первое уравнение задачи , получим:



Введем обозначения:

,

где  Подставив эти обозначения в уравнение , получим:



Решение уравнения будем искать в виде суммы:

,

где  – общее решение однородного уравнения , а  – частное решение неоднородного уравнения . Опустим описание определения постоянных величин  и сразу выпишем их:







С учетом данных выражений, решение задачи запишется в следующем виде:

.

Теперь найдем решение задачи . Введем обозначения:



Для нахождения функции  подставим в первое уравнение системы и разделим переменные:



Из получаем следующую задачу для :



Выпишем решение данной задачи:



Теперь определим функцию . Из получаем следующую систему уравнений для ее определения:



Решение системы будем искать в виде:



Подставляя в и проводя некоторые преобразования, получим:



Пологая в , получаем:



Пусть , тогда из получим уравнение для :



Решение будем искать в виде:

,

где  – корни уравнения

.

Тогда получим:



Удовлетворим краевым условиям в при :



Для  получим:



где ,  – произвольные постоянные. Отсюда можно перейти к системе уравнений



Система представляет собой однородную систему с ненулевым решением, у которой определитель равен



Из последнего уравнения получаем:

,

или

.

Из уравнения получаем

.

Тогда из и можем получить



Из систем и получим:



где  – четное; заменяем в .

Так как и  не равны нулю одновременно, то из получаем:



Из уравнения следует, что , а из получим:





Тогда из получим:



Введем следующие обозначения:



Окончательно из , с учетом и , получим выражение для  из :



где 

В итоге решение задачи согласно имеет вид:



Из последнего равенства, согласно , можем записать функции интегральных скоростей в виде:





#### 2.2.2. Определение бароклинной компоненты скорости

Выпишем задачу для бароклинной компоненты. Для этого в систему подставим представления с учетом соотношений . Получим следующую систему уравнений:



Краевые и начальные условия получим из соотношений , и , соответственно:







Запишем задачу - в комплексной форме. Для этого положим:



Тогда задачу - можно переписать в следующем виде:









В силу для правой части условия можем записать:



Выражение  представим в виде:

,

где ,  и  определяются следующими формулами:







где , . Окончательно, для  можем записать:



где ,  и  определяются формулами , и , соответственно; .

Продифференцируем уравнение по переменной  и введем замену . В итоге получим следующую задачу:







Нетрудно проверить, что функция



является решением уравнения при произвольных комплексных значениях . Решение задачи - будем искать в виде



где  получаются из при различных значениях .

Найдем  для  из условий



Из данных краевых условий и функции получаем следующее уравнение для определения значения параметра :



откуда следует, что . Значения  и  определим как решения системы уравнений:



Решая данную систему уравнений, получим:



Для  значения постоянных  найдем из условий



Для определения параметра  имеем следующее уравнение:

,

откуда получаем

,

где . Значения  найдем из системы уравнений:



Откуда получаем

.

Краевые условия для  имеют вид



Сразу выпишем искомые значения:





Окончательно, выпишем :



Разделив на  и проинтегрировав по , получим :



где  – функция, подлежащая определению. Очевидно, что функция удовлетворяет краевым условиям , .

Определим . Для этого подставим функцию в . Получим уравнение для определения :



Интегрируя уравнение , найдем :



где  – некоторая произвольная постоянная, которую необходимо считать равной нулю, в силу условия:

,

выполненного для бароклинных компонент горизонтальной скорости.

Окончательно, можем записать



В этом случае:



#### 2.2.3. Определение вертикальной компоненты скорости

Для определения вертикальной компоненты скорости  продифференцируем по z последнее уравнение в (уравнение неразрывности), добавим к результату краевые условия и для , в итоге получим задачу:



Производные  и  определим из следующим образом:

.

Тогда решение задачи можно записать в виде



где  и определяются из граничных условий .

Определение вертикальной компоненты  является достаточно громоздкой задачей, поэтому ограничимся следующими упрощениями:

.

При данных упрощениях получаем:











.

Выпишем производную бароклинной компоненты скорости с учетом указанных упрощений:



Для полученной функции находим:



где











































Определим постоянные величины  и  из граничных условий  :



Окончательно, с учетом и решение упрощенной задачи запишем в виде:



## 3. Построение разностных схем для упрощенной модели -

### 3.1 Построение разностной схемы для баротропной компоненты скорости

Разностную схему для баротропной компоненты скорости построим в два этапа. На первом этапе выполним аппроксимацию решаемой задачи по времени. В результате, получим систему дифференциальных уравнений, которую нужно решать на каждом шаге по времени. На втором этапе полученную систему уравнений аппроксимируем по пространственным переменным. В итоге, получим разностную схему, которую можно использовать для численного определения баротропной компоненты скорости.

#### 3.1.1. Аппроксимация по времени

Введем комплексную скорость по формуле

.

Это позволит нам заменить первые два уравнения системы уравнений движения одним уравнением следующего вида:



где



Проинтегрируем уравнение по *z* от 0 до *H*, результат разделим на *H*, после этого, в соответствии с обозначением , краевыми условиями , и представлением , получим уравнение для баротропной составляющей комплексной скорости :



Умножим уравнение на некоторую тестовую функцию  и проинтегрируем в пределах временного слоя , в том числе и по частям, в результате получим:



Тестовую функцию  выберем как решение задачи



она легко находится, подставляя ее в , приходим к соотношению:



В приняты следующие обозначения:

;

;

.

Учет первого слагаемого в правой части будет неявным, для второго – примем однопараметрический вариант аппроксимации по времени



где , , . В итоге получим:



Возвращаясь к баротропным компонентам , перепишем уравнение в виде системы уравнений:



где





Используя стандартную процедуру перекрестного дифференцирования, исключаем давление  на невозмущенной поверхности из уравнений , затем, добавляя уравнение неразрывности для интегральных скоростей, приходим к задаче:



#### 3.1.2. Аппроксимация по пространственным переменным

Рассмотрим задачу



где  и  – компоненты баротропной составляющей; , , , ,  и  – известные достаточно гладкие функции; ,  – координаты единичного вектора внешней нормали к границе  области . Данная задача является общим случаем задачи . Для нее выполним аппроксимацию по пространственным переменным, используя проекционный вариант интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ), подробно изложенный в работах [4, 5].

В области  рассмотрим прямоугольную, вообще говоря, неравномерную сетку с узлами , для шагов сетки будем использовать следующие обозначения: . Пусть  – произвольная сеточная ячейка: . Умножим первое уравнение системы на некоторую, пока произвольную функцию , второе уравнение – на произвольную функцию , результаты сложим и проинтегрируем по ячейке , в том числе и по частям. В итоге приходим к интегральному тождеству:



Тестовые функции  будем выбирать так, чтобы они в  удовлетворяли системе уравнений



с постоянными коэффициентами , аппроксимирующими в  функции , соответственно. Рассмотрим два варианта выбора функций . Пусть  - некоторая, достаточно гладкая и пока произвольная функция. Положим:



тогда первое уравнение в будет выполнено для любой функции . Удовлетворяя второму уравнению в , получим условие для выбора :



Второй вариант выбора тестовых функций основан на представлении:



В этом случае второе уравнение в будет выполнено автоматически. Первому уравнению в функции будут удовлетворять при выполнении условия .

Перейдем к построению функций , удовлетворяющих условию , и обращающихся в единицу в одной из вершин ячейки  и в ноль – во всех остальных. Для этого каждому горизонтальному ребру сетки  поставим в соответствие пару функций , являющихся решением задачи:



Пусть вертикальным ребрам  отвечают решения  задачи:



Здесь приняты обозначения:



и аналогичные для *a* и *b*.

Теперь на прямоугольнике  определим четыре функции:



Очевидно, что  является решением (в ) уравнения



и удовлетворяет условиям:



 для .

Введем несколько дополнительных обозначений:





Далее подставим функции  в формулы , определим четыре пары тестовых функций . Подставим эти тестовые функции в тождество , при этом мы автоматически избавимся от главного интегрального слагаемого в левой его части. Интеграл, стоящий в правой части , проинтегрируем по частям, чтобы производные с функций *f* и *g* перебросить на функции . Таким образом, нам не нужно будет производить численное дифференцирование функций *f* и *g*. В итоге, получим следующую систему разностных соотношений:









Величины  в формулах - являются погрешностями аппроксимации, возникающими при подстановке тестовых функций  и  в интеграл по ячейке , стоящий в левой части тождества .

Следующий этап дискретизации задачи состоит в аппроксимации интегралов, входящих в уравнения -. Для этого воспользуемся формулой трапеций:



Аппроксимируем интегралы в - с использованием формулы трапеций и отбросим погрешности. Обозначим приближенное решение  и . Также введем следующие обозначения:



В итоге получим следующую систему разностных соотношений:









С использованием уравнений - можно исключить функцию  и получить систему относительно неизвестных . Складывая уравнения и , заменив в индекс на , приходим к соотношениям:



где . В случае, когда  таково, что мы выходим на левую вертикальную границу, уравнение будет использоваться как разностное уравнение в узлах левой вертикальной границы для определения функции , которая там не задана. Отметим, что правые части в в этом случае определены в силу граничных условий на .

Складывая уравнения и , заменив в  и  на  и , соответственно, а в  на , получим следующие соотношения:



В случае выхода на правую вертикальную границу уравнение используется как граничное уравнение для определения величин , при этом значения  на вертикальных границах известны из краевых условий.

Уравнения для определения  во внутренних точках области получаются после сложения и , при этом значения  окончательно исключаются:



где .

В итоге, для определения  получаем систему из уравнений – во внутренних точках области, и – на вертикальных границах (при соответствующих значениях ), а также сюда добавляются граничные значения  на горизонтальных границах, которые известны, в силу третьего уравнения системы уравнений .

Выполняя аналогичные выкладки для функций , определяемых соотношениями , можно получить систему разностных уравнений для определения . Опуская технические детали, сразу выпишем итоговую систему уравнений для определения :







Уравнения и при соответствующих значениях  используются для определения значений  на нижней и верхней горизонтальных границах, соответственно. Правые части в данных уравнениях определены в силу граничных условий на . Уравнения используются для определения значений  во внутренних точках области. Также к этим уравнениям добавляются краевые значения для  на боковых (вертикальных) границах, которые задаются третьим уравнением системы уравнений .

Окончательно, для численного решения задачи получаем разностную схему - с граничными значениями  и , определяемыми третьим уравнением системы уравнений .

### 3.2 Построение разностной схемы для бароклинной компоненты скорости

Для построения разностной схемы для бароклинной компоненты скорости рассмотрим уравнение . Для удобства выпишем его еще раз:



Дополним его условиями , и в комплексной форме.







где , , .

#### 3.2.1 Разностная схема для задачи -

Для построения разностной схемы используем проекционный вариант интегро-интерполяционного метода [4], что позволит естественным образом учитывать краевые условия Неймана , и добиться высокой точности численного решения в поверхностном и придонном слоях трения Экмана [6]. C этой целью рассмотрим, вообще говоря, неравномерную сетку  с шагами  и числом узлов , зависящим от фиксированной горизонтальной координаты  как от параметра. Умножим уравнение на произвольную функцию , результат проинтегрируем по сеточной ячейке , в том числе и по частям, в итоге получим:



Выберем тестовую функцию  так чтобы обратить в ноль первый интеграл в правой части , т.е. как решение уравнения (зависимость от *x*, *y* рассматриваем как параметрическую и внимания на ней не акцентируем):

.

Решая данное уравнение, получаем:



Рассмотрим две различные тестовые функции  и , удовлетворяющие условиям:



Такие функции легко отыскать:



Подставим в функцию ; с целью аппроксимации оставшихся интегралов, значения функций  и  в сеточной ячейке заменим их значениями на левой границе; введем обозначение . В итоге получим:



Аналогично, подставляя в  и заменяя значения функций  и  в сеточной ячейке их значениями на правой границе, получим:



Для аппроксимации уравнений и по времени проинтегрируем их по  от  до ; интеграл по этому интервалу в левой части полученных соотношений вычислим при помощи однопараметрической формулы прямоугольников, учет  будем считать неявным, в итоге получим:





Здесь:  – оператор разностного дифференцирования;  – оператор осреднения с параметром .

Сложим уравнения и , предварительно заменив в индекс *j* на , тем самым, исключая поток , в результате получим разностные уравнения во внутренних узлах сетки ():



Полагая в  и используя краевое условие для вычисления потока , получим разностное соотношение:



Аналогично, полагая в  и используя краевое условие , получим следующее разностное уравнение:



Построенная разностная схема - не может быть использована для расчета компонент  и  вектора скорости «напрямую», так как правая часть содержит неизвестные градиенты давления . Однако данную разностную схему можно использовать для расчета бароклинной компоненты скорости.

#### 3.2.2 Методика расчета бароклинной составляющей движения

Используем разностную схему - для расчета бароклинной компоненты скорости. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию , которая является решением задачи, отличающейся от -, только отсутствием величин  в правых частях уравнений. Докажем, что бароклинная составляющая функции  совпадает с бароклинной составляющей функции , т.е.

.

В свою очередь, зная величины , бароклинные составляющие этой функции можно найти по формуле:



Для доказательства рассмотрим функцию , очевидно, что эта функция является решением системы уравнений -, с



Рассмотрим вспомогательную сеточную функцию , которая является решением задачи:



Решение этой задачи, очевидно, существует, единственно и не зависит от вертикальной координаты (т.е. от ), поскольку величины  и от  не зависят. Более того, легко проверить, что функция  также является решением задачи -, , . При условии, что решение задачи -, , единственно, получаем: . Теперь следует из равенства . Для завершения рассуждений достаточно доказать единственность решения задачи -, , . К условиям добавим условие , докажем, что решение также будет нулевым. Для простоты сетку будем считать равномерной, т.е. . Уравнения - в этом случае можно записать в виде следующей системы:



где:

.

Простые преобразования и , позволяют доказать неравенство:

,

в котором  – норма Чебышёва, остается показать, что . Это неравенство следует из представления



правая часть которого больше нуля для любых положительных значений шагов сетки  и , а также .

### 3.3 Построение разностной схемы для вертикальной компоненты скорости

Для вычисления вертикальной компоненты скорости  рассмотрим следующую задачу, которая получается после дифференцирования третьего уравнения системы по переменной  и учета краевых условий и для :



Задача зависит от горизонтальной координаты  как от параметра.

Рассмотрим произвольную неравномерную сетку  на отрезке  с шагами  и числом узлов , зависящим от фиксированной горизонтальной координаты  как от параметра. Для аппроксимации задачи используем следующую разностную схему:



где . Для решения задачи необходимо знать значения производных  и  во внутренних узлах сетки. Конечно-разностная аппроксимация этих значений приводит к значительным ошибкам. Поэтому мы предлагаем определять значения производных  и  из соотношений и . Обозначим , умножим данные соотношения на , в итоге получим:





Вычтем уравнение из уравнения , предварительно заменив в индекс на . В результате, получим формулы, которые можно использовать для вычисления значений  во внутренних узлах сетки :



После этого определяем необходимые для решения задачи величины:



Заметим, что в формулах нет необходимости использовать значения полных горизонтальных скоростей : в силу доказанной формулы , вместо этих значений можно использовать значения  вспомогательной функции, которая является решением задачи -, без величин  в правых частях уравнений. Эта вспомогательная функция вычисляется на этапе определения бароклинных составляющих горизонтальных компонент скорости, в соответствии с алгоритмом, предложенным в главе 3.2.2.

**Литература**

1. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. – Москва: Наука, 1988. – 302 с.
2. Кочергин В.П. Теория и методы расчета океанических течений. – Москва: Наука, 1978. – 128 с.
3. Фельзенбаум А.И. Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений. Изд-во АНСССР. – Москва, – 1960.
4. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: «ЭКОСИ-Гидрофизика», 2002. – 238 с.
5. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. I. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача // Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1988. – № 4. – С. 10-23; II. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача // Там же, – 1989. – № I. – С. 3-10. III. Самосопряженное уравнение // Там же, – 1989. – № 4. – С. 3-11.
6. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. – Москва: Мир, 1984. – Т.1. – 398 с.