

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ Ι ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

1^η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Φίλτρα ακουστικών συχνοτήτων
Μέρος Α (κύκλωμα RC) και Μέρος Β (κύκλωμα CR)

Ονοματεπώνυμο: Σταθάκος Ηλίας 2017
Πασχαλέρης Θωμάς 1417
Σανίδα Μαρίνα 1386

Τμήμα: Δευτέρα 9:00-11:00



1. Ερωτήσεις θεωρίας

Ερώτηση 1.1.1: Τι ονομάζουμε σταθερά χρόνου;

Απάντηση:

Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το σύστημα στο 63.2% της τελικής του τιμής (για σταθερή τιμή εισόδου).

Ερώτηση 1.1.2: Αναφέρεται εφαρμογές των φίλτρων RC και CR.

Απάντηση:

Τα φίλτρα RC(βαθυπερατό) και CR(υψηλοπερατό) εφαρμόζονται συνήθως σε τεχνολογίες ήχου, όπως στα σύνθετα ηχοσυστήματα στα οποία χρειάζεται διαχωρισμός συχνοτήτων(πχ woofer και ηχεία) και στις τηλεπικοινωνίες για να αποκόψουν (όπου δεν χρειάζονται) τις υψηλές και χαμηλές συχνότητες αντίστοιχα, και για την απόσβεση των θορύβων.

Ερώτηση 1.1.3: Να γραφούν η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος RC και οι τύποι υπολογισμού για το μέτρο και την φάση.

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας την μέθοδο του διαιρέτη τάσης στο κύκλωμα παίρνουμε την εξής σχέση

$$u_0(t) = \frac{X_c}{R + X_c} \cdot u_i(t) \quad (1), \text{ επίσης γνωρίζουμε ότι } X_c = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \quad (2)$$

Από την 1 και την 2 προκύπτει:

$$u_0(t) = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \cdot u_i(t) = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{\frac{j \cdot \omega \cdot C \cdot R + 1}{j \cdot \omega \cdot C}} \cdot u_i(t) = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C \cdot R + 1} \cdot u_i(t)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace: $U_0(s) = \frac{1}{s \cdot C \cdot R + 1} \cdot U_i(s)$

Οπότε η συνάρτηση μεταφοράς είναι η εξής: $G(s) = \frac{U_0(s)}{U_i(s)} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s \cdot C \cdot R + 1}$

Το μέτρο προκύπτει εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην συνάρτηση

$$\text{μεταφοράς: } G(s) = \frac{1}{s \cdot C \cdot R + 1} = \frac{\frac{1}{s \cdot C}}{\frac{s \cdot R \cdot C + 1}{s \cdot C}} = \frac{\frac{1}{s \cdot C}}{R + \frac{1}{s \cdot C}} \xRightarrow{L^{-1}} L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s \cdot C}}{R + \frac{1}{s \cdot C}}\right\} \Rightarrow$$



$$g(t) = \frac{1}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{j}{j^2 \cdot \omega \cdot C} = \frac{-j}{\omega \cdot C} = \frac{-j \cdot |X_c|}{R - j \cdot |X_c|} = \frac{-j \cdot |X_c| \cdot (R + j \cdot |X_c|)}{(R - j \cdot |X_c|) \cdot (R + j \cdot |X_c|)} = \frac{-j \cdot |X_c| \cdot (R + j \cdot |X_c|)}{R^2 - j^2 \cdot X_c^2} =$$

$$= \frac{|X_c|^2}{R^2 + X_c^2} - j \cdot \frac{|X_c| \cdot R}{R^2 + X_c^2}$$

Μέτρο:

$$|g(t)| = \sqrt{\left(\frac{|X_c|^2}{R^2 + X_c^2}\right)^2 + \left(-\frac{|X_c| \cdot R}{R^2 + X_c^2}\right)^2} \Rightarrow \dots \Rightarrow |g(t)| = \frac{|X_c|}{\sqrt{R^2 + X_c^2}}$$

Φάση:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{\frac{|X_c| \cdot R}{R^2 + X_c^2}}{\frac{|X_c|^2}{R^2 + X_c^2}}\right) = \arctan\left(-\frac{|X_c| \cdot R}{|X_c|^2}\right) = \arctan\left(-\frac{R}{|X_c|}\right) = \arctan\left(-\frac{R}{\frac{1}{\omega \cdot C}}\right) = -\arctan(2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C)$$

Ερώτηση 1.1.4: Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος CR και οι τύποι για τον υπολογισμό του μέτρου και της φάσης του κυκλώματος.

Απάντηση:

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία και έχοντας ως αρχικές εξισώσεις την

$$u_0(t) = \frac{R}{R + X_c} \cdot u_i(t) \text{ και την } X_c = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \text{ καταλήγουμε στην εξής εξίσωση}$$

$$\text{laplace: } U_0(s) = \frac{s \cdot R \cdot C}{s \cdot R \cdot C + 1} \cdot U_i(s)$$

$$\text{Άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι η } G(s) = \frac{s \cdot R \cdot C}{s \cdot R \cdot C + 1}$$

Όμοια για το μέτρο και την φάση έχουμε:

$$g(t) = \frac{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C + 1} = \frac{j \cdot \omega \cdot R \cdot C \cdot (j \cdot \omega \cdot R \cdot C - 1)}{(j \cdot \omega \cdot R \cdot C + 1) \cdot (j \cdot \omega \cdot R \cdot C - 1)} = \frac{-\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2 - j \cdot \omega \cdot R \cdot C}{-\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2 - 1} =$$

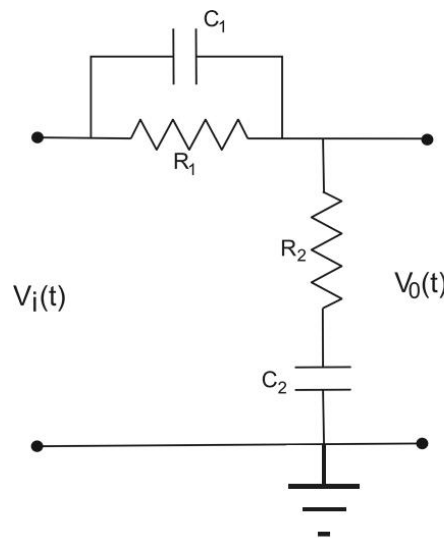
$$= \frac{\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}{\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2 + 1} + j \frac{\omega \cdot R \cdot C}{\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2 + 1}$$



$$\text{Μέτρο: } |g(t)| = \sqrt{\frac{(\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2)^2}{(\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2 + 1)^2} + \frac{(\omega \cdot R \cdot C)^2}{(\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2 + 1)^2}} \Rightarrow \dots \Rightarrow |g(t)| = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C}{\sqrt{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot R^2 \cdot C^2 + 1}}$$

$$\text{Φάση: } \phi = \arctan\left(\frac{\frac{\omega \cdot R \cdot C}{\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2 + 1}}{\frac{\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}{\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2 + 1}}\right) = \arctan\left(\frac{\omega \cdot R \cdot C}{\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C}\right)$$

Ερώτηση 1.1.5: Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω κυκλώματος.



Απάντηση:

Εφαρμόζοντας την μέθοδο του διαιρέτη τάσης στο κύκλωμα παίρνουμε την εξής σχέση

$$u_0(t) = \frac{R_2 \parallel X_{C2}}{R_1 \parallel X_{C1} + R_2 \parallel X_{C2}} \cdot u_i(t) \quad (1), \text{ επίσης γνωρίζουμε ότι } X_c = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow u_0(t) = \frac{\frac{R_2 \cdot X_{C2}}{R_2 + X_{C2}}}{\frac{R_1 \cdot X_{C1}}{R_1 + X_{C1}} + \frac{R_2 \cdot X_{C2}}{R_2 + X_{C2}}} \cdot u_i(t) = \frac{R_2 \cdot X_{C2} \cdot (R_1 + X_{C1})}{R_1 \cdot X_{C1} \cdot (R_2 + X_{C2}) + R_2 \cdot X_{C2} \cdot (R_1 + X_{C1})} \cdot u_i(t)$$

Με εφαρμογή απλοποιήσεων και κάνοντας χρήση της σχέσης (2) έχουμε:

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} u_0(t) = \frac{R_2 \cdot j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot (R_1 + j \cdot \omega \cdot C_1)}{R_1 \cdot j \cdot \omega \cdot C_1 \cdot (R_2 + j \cdot \omega \cdot C_2) + R_2 \cdot j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot (R_1 + j \cdot \omega \cdot C_1)} \cdot u_i(t)$$

Με εφαρμογή μετασχηματισμού Laplace έχουμε:



$$U_0(s) = \frac{s \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot (R_1 + s \cdot C_1)}{s \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot (R_2 + s \cdot C_2) + s \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot (R_1 + s \cdot C_1)} \cdot U_i(s) = \frac{R_2 \cdot C_2 \cdot (R_1 + s \cdot C_1)}{R_1 \cdot C_1 \cdot (R_2 + s \cdot C_2) + R_2 \cdot C_2 \cdot (R_1 + s \cdot C_1)} \cdot U_i(s)$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι :

$$G(s) = \frac{R_2 \cdot C_2 \cdot (R_1 + s \cdot C_1)}{R_1 \cdot C_1 \cdot (R_2 + s \cdot C_2) + R_2 \cdot C_2 \cdot (R_1 + s \cdot C_1)}$$

1.2.Πρακτικό

Πείραμα 1.1 : Κύκλωμα RC

Ερώτηση 1.2.1: Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με βάση τις μετρήσεις που πήρατε στο εργαστήριο και τις θεωρητικές τιμές. ($V_i(t) = 10V_{pp}$, $R = 1k\Omega$, $C = 0.1\mu F$)

Απάντηση:

f(Hz)	100	200	500	1000	1500	2000	3000	5000	10000	20000
Μετρήσεις εργαστηρίου										
$V_o(V_{pp})$	10	9.8	9.3	8.4	7.2	6	4.4	3.2	1.5	0.8
Κέρδος ac	1	0.98	0.84	0.84	0.72	0.6	0.44	0.322	0.156	0.833
$\sin^{-1}(a/b)$	4.6	6.9	16.92	28.43	42	53.13	60.46	69	77	85.5
Θεωρητικές τιμές										
$V_o(V_{pp})$	10	9.9	9.54	8.46	7.27	6.23	4.68	3.03	1.57	0.79
φ	-3.6	-7.16	-17.4	-32.1	-43.3	-51.5	-62	-72.3	-81.6	-85.4

Ερώτηση 1.2.2: Υπάρχει σφάλμα μεταξύ των θεωρητικών τιμών και των μετρήσεων του εργαστηρίου?

Απάντηση:

Παρατηρούμε πως υπάρχει κάποιο μικρό σφάλμα, το οποίο όμως είναι σχεδόν αμελητέο. Το σφάλμα αυτό είναι αναμενόμενο, διότι οι μετρήσεις των τιμών στο εργαστήριο δεν έγιναν με μεγάλη ακρίβεια και επειδή το μαθηματικό μοντέλο πιθανόν να μην συμπεριλαμβάνει κάποια φυσικά φαινόμενα τα οποία παίζουν μικρό ρόλο στην διαμόρφωση των τιμών.

Ερώτηση 1.2.3: Με βάση τις θεωρητικές και τις μετρούμενες τιμές το κύκλωμα RC τι φίλτρο είναι?

Απάντηση:



Με βάση τόσο τις θεωρητικές όσο και τις μετρούμενες τιμές, το κύκλωμα RC είναι χαμηλοπερατό φίλτρο.

Ερώτηση 1.2.4: Ποια είναι η οριακή συχνότητα του κυκλώματος RC που υλοποιήθηκε?

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι η οριακή συχνότητα είναι η συχνότητα στην οποία το πλάτος του σήματος εξόδου είναι ίσο με το 70,7% του αρχικού. Παρατηρούμε ότι αυτή η συνθήκη ισχύει για $f=1500(\text{Hz})$. Άρα η οριακή συχνότητα είναι η $f_c = 1500(\text{Hz})$.

Πείραμα 1.2 : Κύκλωμα CR

Ερώτηση 1.2.5: Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με βάση τις μετρήσεις που πήρατε στο εργαστήριο και τις θεωρητικές τιμές. ($V_i(t) = 10V_{pp}$, $R = 1k\Omega$, $C = 0.1\mu F$)

Απάντηση:

f(Hz)	100	200	500	1000	1500	2000	3000	5000	10000	20000
Μετρήσεις εργαστηρίου										
$V_o(V_{pp})$	0.64	1.25	3.2	5.2	6.4	7.6	8.5	9.2	9.6	9.8
Κέρδος ac	0.064	0.125	0.32	0.53	0.666	0.792	0.833	0.917	0.97	1
$\sin^{-1}(a/b)$	85.5	80	75	58.2	45.9	41.29	28.16	16.67	6.7	4.6
Θεωρητικές τιμές										
$V_o(V_{pp})$	0.627	1.247	3	5.32	6.8	7.8	8.833	9.53	9.87	9.97
φ	86.4	82.8	72.56	57.85	46.7	38.5	27.94	17.65	9	4.55

Ερώτηση 1.2.6: Υπάρχει σφάλμα μεταξύ των θεωρητικών τιμών και των μετρήσεων του εργαστηρίου?

Απάντηση:

Όπως και στο προηγούμενο πείραμα, έτσι και εδώ παρατηρούμε ένα μικρό σφάλμα, το οποίο οφείλεται στους λόγους που εξηγήσαμε παραπάνω

Ερώτηση 1.2.7: Με βάση τις θεωρητικές και τις μετρούμενες τιμές το κύκλωμα CR τι φίλτρο είναι?

Απάντηση:

Με βάση τόσο τις θεωρητικές όσο και τις μετρούμενες τιμές, το κύκλωμα CR είναι υπερπερατό φίλτρο



Βιβλιογραφία

Εφαρμογές Φίλτρων : Διπλωματική Εργασία του Πέτρου Ν.Πέτρος, ΕΜΠ, Σχεδίαση Ολοκληρωμένου RC Φίλτρου 90nm Με Ενισχυτή Χαμηλής Κατανάλωσης και Αυτόματη Ρύθμιση του Συντελεστή Ποιότητας, Κεφάλαιο 1.3 και 1.4