<u>1:</u>

$x(t) = (1 + \cos(\pi\cdot t))\cdot\Pi_k(t-m) = \Pi_k(t-m) + \Pi_k(t-m)\cdot\cos(\pi\cdot t) = x_1(t) + x_2(t)$

<u>$x_1(t)$:</u>

- $\Pi_k(t) = 1, -k\le t\le k$
  0 , αλλού

Μετασχηματισμός $\Pi_k(t) \longleftrightarrow \frac{2\cdot sin(\omega\cdot k)}{\omega}$

Ο μετασχηματισμός του $\Pi_k(t-m)$ εκφράζεται ως ο μετασχηματισμός του $\Pi_k(t)$ με ολίσθηση τον χρόνο.

Άρα $\Pi_k(t-m) \longleftrightarrow \frac{2\cdot sin(\omega\cdot k)}{\omega} e^{-j\cdot m\cdot\omega}$

- $\Pi_k(t-m) = 1, -k+m\le t\le k+m$
  0 , αλλού

<u>$x_2(t)$:</u>

- $\cos(\pi\cdot t) \xleftrightarrow{Euler} \frac{(e^{j\cdot\pi\cdot t}+e^{-j\cdot\pi\cdot t})}{2}$

$x_2(t) = \Pi_k(t-m)\cdot\frac{(e^{j\cdot\pi\cdot t}+e^{-j\cdot\pi\cdot t})}{2} = \frac{\Pi k(t-m)\cdot e^{j\cdot\pi\cdot t}}{2} + \frac{\Pi k(t-m)\cdot e^{-j\cdot\pi\cdot t}}{2} = x_{21}(t) + x_{22}(t)$

<u>$x_{21}(t)$:</u>

- Ο μετασχηματισμός του $x_{21}(t)$ εκφράζεται ως ο μετασχηματισμός του $\Pi_k(t-m)$ με ολίσθηση στην συχνότητα

Άρα $\frac{\Pi k(t-m)\cdot e^{j\cdot\pi\cdot t}}{2} \longleftrightarrow \frac{2\cdot sin(k\cdot(\omega-\pi))}{2(\omega-\pi)} e^{-j\cdot m\cdot(\omega-\pi)}$

<u>$x_{22}(t)$:</u>

- Ο μετασχηματισμός του $x_{22}(t)$ εκφράζεται ως ο μετασχηματισμός του $\Pi_k(t-m)$ με ολίσθηση στην συχνότητα

Άρα $\frac{\Pi k(t-m)\cdot e^{-j\cdot\pi\cdot t}}{2} \longleftrightarrow \frac{2\cdot sin(k\cdot(\omega+\pi))}{2(\omega+\pi)} e^{-j\cdot m\cdot(\omega+\pi)}$

<u>$x_2(t)$:</u>

Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε

$X_2(\omega) = X_{21}(\omega) + X_{22}(\omega) \Leftrightarrow$

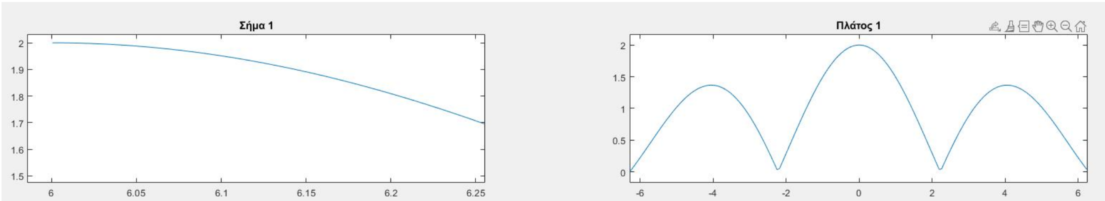
$$X_2(\omega) = \frac{\sin(k\cdot(\omega-\pi))}{(\omega-\pi)} e^{-j\cdot m\cdot(\omega-\pi)} + \frac{\sin(k\cdot(\omega+\pi))}{(\omega+\pi)} e^{-j\cdot m\cdot(\omega+\pi)}$$

<u>x(t):</u>

Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε

$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) \Leftrightarrow$

$$X(\omega)= \frac{2\cdot \sin(\omega\cdot k)}{\omega} e^{-j\cdot m\cdot \omega} + \frac{\sin(k\cdot(\omega-\pi))}{(\omega-\pi)} e^{-j\cdot m\cdot(\omega-\pi)} + \frac{\sin(k\cdot(\omega+\pi))}{(\omega+\pi)} e^{-j\cdot m\cdot(\omega+\pi)}$$



2:

- Μετασχηματισμός x(t) <---> X(ω)

- $\cos(k\cdot t)$ <---Euler---> $\dfrac{\left(e^{j\cdot k\cdot\pi\cdot t} + e^{-j\cdot k\cdot\pi\cdot t}\right)}{2}$

- $\sin(m\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{3})$ <---Euler---> $\dfrac{\left(e^{j(m\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{3})} - e^{-j(m\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{3})}\right)}{2\cdot j}$

$$x_m(t) = x(t)\cdot\cos(k\cdot t)\cdot\sin(m\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{3}) =$$

$$= x(t)\cdot \frac{\left(e^{j\cdot k\cdot\pi\cdot t} + e^{-j\cdot k\cdot\pi\cdot t}\right)}{2}\cdot\frac{\left(e^{j(m\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{3})} - e^{-j(m\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{3})}\right)}{2\cdot j} =$$

$$= \frac{1}{4\cdot j}\cdot[x(t)\cdot e^{j\cdot k\cdot\pi\cdot t}\cdot e^{j(m\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{3})} - x(t)\cdot e^{j\cdot k\cdot\pi\cdot t}\cdot e^{-j(m\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{3})} +$$
$$x(t)\cdot e^{-j\cdot k\cdot\pi\cdot t}\cdot e^{j(m\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{3})} - x(t)\cdot e^{-j\cdot k\cdot\pi\cdot t}\cdot e^{-j(m\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{3})}] =$$

$$= \frac{1}{4\cdot j}\cdot[x(t)\cdot e^{j\cdot\pi\cdot t\cdot(k+m)}\cdot e^{j\frac{\pi}{3}} - x(t)\cdot e^{j\cdot\pi\cdot t\cdot(k-m)}\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} + x(t)\cdot e^{j\cdot\pi\cdot t\cdot(m-k)}\cdot e^{j\frac{\pi}{3}} -$$
$$x(t)\cdot e^{-j\cdot\pi\cdot t\cdot(k+m)}\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}]$$

Ο μετασχηματισμός του κάθε κομματιού είναι ο μετασχηματισμός του x με ολίσθηση στην συχνότητα όπου $\omega_1 = \pi \cdot (k+m)$, $\omega_2 = \pi \cdot (k-m)$,$\omega_3 = \pi \cdot (m-k)$, $\omega_4 = -\pi \cdot (k+m)$, αντίστοιχα

Τα $e^{j\frac{\pi}{3}}$, $e^{-j\frac{\pi}{3}}$ και $\frac{1}{4\cdot j}$, είναι σταθεροί όροι.

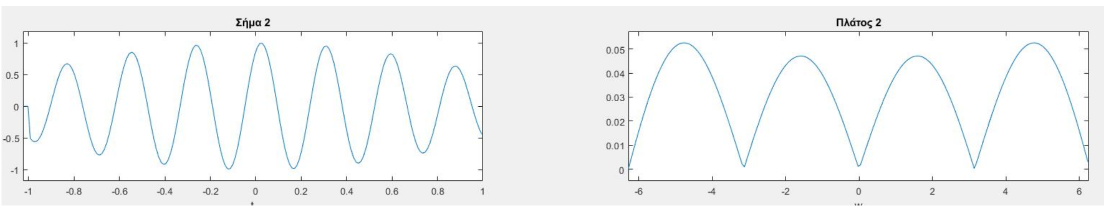
Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε

$$X_m(\omega) = \frac{1}{4\cdot j} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot X(\omega - \pi\cdot(k+m)) - \frac{1}{4\cdot j} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot X(\omega - \pi\cdot(k-m)) + \frac{1}{4\cdot j} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot X(\omega - \pi\cdot(m-k)) - \frac{1}{4\cdot j} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot X(\omega + \pi\cdot(k+m)) \iff$$

$$X_m(\omega) = \frac{1}{4\cdot j} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot [X(\omega - \pi\cdot(k+m)) + X(\omega - \pi\cdot(m-k))] - \frac{1}{4\cdot j} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot [X(\omega - \pi\cdot(k-m)) + X(\omega + \pi\cdot(k+m))]$$

Για να κάνω γράφημα στην matlab, θεωρώ $x(t) = \Pi_k(t)$, το οποίο έχει μετασχηματισμό $X(\omega) = \frac{2\cdot sin(k\cdot\omega)}{\omega}$

Άρα $$X_m(\omega) = \frac{1}{4\cdot j} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot [\frac{2\cdot sin(k\cdot(\omega - \pi\cdot(k+m)))}{\omega-\pi\cdot(k+m)} + \frac{2\cdot sin(k\cdot(\omega - \pi\cdot(m-k)))}{\omega - \pi\cdot(m-k)}] - \frac{1}{4\cdot j} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot [\frac{2\cdot sin(k\cdot(\omega - \pi\cdot(k-m))}{\omega - \pi\cdot(k-m} + \frac{2\cdot sin(k\cdot(\omega + \pi\cdot(k+m)))}{\omega + \pi\cdot(k+m)}]$$



3:

$g(t) = t\cdot e^{-m\cdot t}\cdot u(t)\cdot cos(k\cdot t)$

- $\cos(k\cdot t)$ <---Euler---> $\frac{(e^{j\cdot k\cdot t}+e^{-j\cdot k\cdot t})}{2}$

- Μετασχηματισμός $t\cdot e^{-m\cdot t}\cdot u(t)$ <---> $\frac{1}{(j\cdot\omega+m)^2}$

$g(t) = t\cdot e^{-m\cdot t}\cdot u(t)\cdot \frac{(e^{j\cdot k\cdot t}+e^{-j\cdot k\cdot t})}{2} =$

$= t\cdot e^{-m\cdot t}\cdot u(t)\cdot\frac{e^{j\cdot k\cdot t}}{2} + t\cdot e^{-m\cdot t}\cdot u(t)\cdot\frac{e^{-j\cdot k\cdot t}}{2} = g_1(t) + g_2(t)$

<u>$g_1(t)$:</u>

- Ο μετασχηματισμός του $g_1(t)$ είναι ο μετασχηματισμός του $t\cdot e^{-m\cdot t}\cdot u(t)$ με ολίσθηση στην συχνότητα

Άρα $t\cdot e^{-m\cdot t}\cdot u(t)\cdot\frac{e^{j\cdot k\cdot t}}{2}$ <---> $\frac{1}{2(j\cdot(\omega-k)+m)^2}$

<u>$g_2(t)$:</u>

- Ο μετασχηματισμός του $g_2(t)$ είναι ο μετασχηματισμός του $t\cdot e^{-m\cdot t}\cdot u(t)$ με ολίσθηση στην συχνότητα

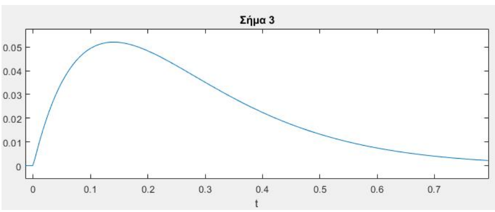
Άρα $t\cdot e^{-m\cdot t}\cdot u(t)\cdot\frac{e^{-j\cdot k\cdot t}}{2}$ <---> $\frac{1}{2(j\cdot(\omega+k)+m)^2}$

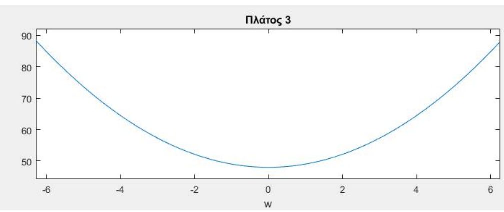
<u>$g(t)$:</u>

Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε

$G(\omega) = G_1(\omega) + G_2(\omega)$ <=>

$G(\omega) = \frac{1}{2(j\cdot(\omega-k)+m)^2} + \frac{1}{2(j\cdot(\omega+k)+m)^2}$





<u>4:</u>

- $\cos(k \cdot t)$ <---Euler---> $\frac{(e^{j \cdot k \cdot t} + e^{-j \cdot k \cdot t})}{2}$
- Μετασχηματισμός $x(t)$ <---> $X(\omega)$

$y(t) = \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot x(t) = \frac{(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})}{2} \cdot x(t) =$

$= \frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \cdot x(t) + \frac{e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \cdot x(t) = y_1(t) + y_2(t)$

<u>$y_1(t)$:</u>

- Ο μετασχηματισμός του $y_1(t)$ είναι ο μετασχηματισμός του $x(t)$ με ολίσθηση στην συχνότητα

Άρα $\frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \cdot x(t)$ <---> $\frac{1}{2} \cdot X(\omega - \omega_0)$

<u>$y_2(t)$:</u>

- Ο μετασχηματισμός του $y_2(t)$ είναι ο μετασχηματισμός του $x(t)$ με ολίσθηση στην συχνότητα

Άρα $\frac{e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \cdot x(t)$ <---> $\frac{1}{2} \cdot X(\omega + \omega_0)$

<u>$y(t)$:</u>

Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε

$Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega)$ <=>

$Y(\omega) = \frac{1}{2} \cdot X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot X(\omega + \omega_0)$ <=>

$Y(\omega) = \frac{1}{2} \cdot [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$