ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ Ι ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

3^{η} ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με χρήση αναλογικού υπολογιστή

Μέρος Α (Διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης) και Μέρος Β (Διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης)

Ονοματεπώνυμα: Κωνσταντίνος Παπαθανασίου ΑΜ: 2008
Ηλίας Σταθάκος ΑΜ: 2017
Φίλιππος Τσότσιος ΑΜ: 1751

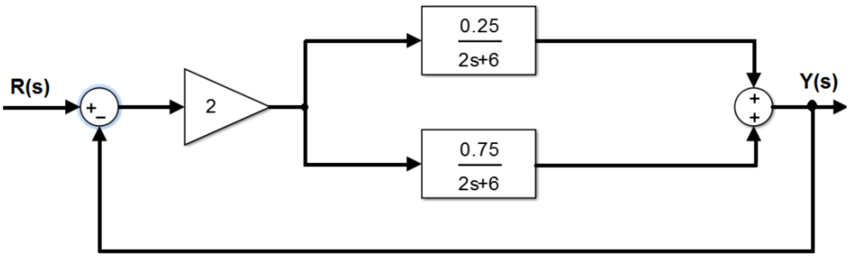
Τμήμα: Δευτέρα 11:00-13:00

2023-2024

1. Ερωτήσεις θεωρίας

Ερώτηση 1.1: α) Να βρεθεί η χρονική απόκριση του συστήματος, όταν $r(t) = 10u(t)$.

β) Να γίνει προσομοίωση του συστήματος στον αναλογικό υπολογιστή.



Υπόδειξη: Βρείτε την διαφορική εξίσωση του συστήματος και δημιουργήστε το κατάλληλο ηλεκτρικό σύστημα που θα λύσει την δ.ε.

Απάντηση:
α)

Ισχύει ότι: $r(t) = 10 \cdot u(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} R(s) = \dfrac{10}{s}$

Θεωρώ: $G_1(s) = \dfrac{0.25}{2 \cdot s + 6} + \dfrac{0.75}{2 \cdot s + 6} = \dfrac{1}{2 \cdot s + 6}$

Επίσης: $G_2(s) = 2 \cdot G_1(s) = \dfrac{2}{2 \cdot s + 6} = \dfrac{1}{s+3}$

Οπότε έχουμε:

$$Y(s) = G_2(s) \cdot [R(s) - Y(s)] = G_2(s) \cdot R(s) - G_2(s) \cdot Y(s) \Leftrightarrow Y(s) \cdot (1 + G_2(s)) = G_2(s) \cdot R(s) \Leftrightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{s+3} \cdot R(s)}{1 + \frac{1}{s+3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{R(s)}{s+4} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{10}{s \cdot (s+4)}$$

- $\dfrac{10}{s \cdot (s+4)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+4} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \dfrac{2.5}{s} - \dfrac{2.5}{s+4}$

Άρα:

$$Y(s) = \frac{2.5}{s} - \frac{2.5}{s+4}$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο Μ/Σ Laplace παίρνουμε: $y(t) = 2.5 - 2.5 \cdot e^{-4 \cdot t}$

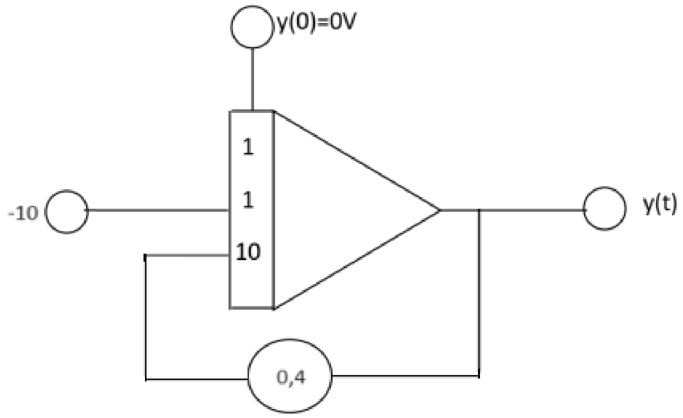
β)

Από την εξίσωση:

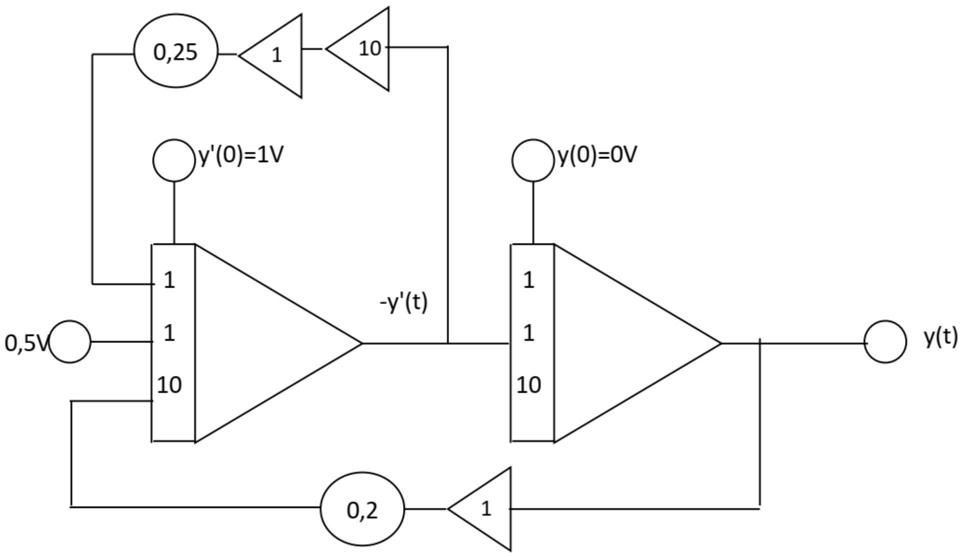
$$Y(s) = \frac{10}{s \cdot (s+4)} \Leftrightarrow Y(s) \cdot (s+4) = \frac{10}{s} \Leftrightarrow s \cdot Y(s) + 4 \cdot Y(s) = \frac{10}{s} \overset{y(0)=0}{\Leftrightarrow} s \cdot Y(s) - y(0) + 4 \cdot Y(s) = \frac{10}{s}$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο Μ/Τ Laplace παίρνουμε: $y'(t) + 4 \cdot y(t) = 10 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y'(t) = 10 - 4 \cdot y(t) \Leftrightarrow y'(t) = 10 + 0.4 \cdot 10 \cdot (-y(t))$$



Ερώτηση 1.2: Να βρεθεί και να λυθεί η διαφορική εξίσωση του συστήματος.



Απάντηση:

$$y''(t) = [y(t)\cdot(-1)\cdot 0.2\cdot 10 + (-y'(t))\cdot(-10)\cdot(-1)\cdot 0.25 + 0.5] \Leftrightarrow y''(t) = -2\cdot y(t) - 2.5\cdot y'(t) + 0.5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y''(t) + 2.5\cdot y'(t) + 2\cdot y(t) = 0.5 \quad ,\text{με} \quad y'(0)=1 \ , \ y(0)=0$$

<u>Ομογενής λύση:</u> $y''(t) + 2.5\cdot y'(t) + 2\cdot y(t) = 0$

<u>Χαρακτηριστική Εξίσωση:</u> $r^2 + 2.5\cdot r + 2 = 0$, $\Delta = 6.25 - 8 = -1.75$

$$r_{1,2} = \frac{2.5 \pm i\cdot 1.323}{2} \Leftrightarrow \begin{array}{l} r_1 = 1.25 + 0.662\cdot i \\ r_2 = 1.25 - 0.662\cdot i \end{array}$$

<u>Έχουμε:</u> $y_h(t) = e^{1.25\cdot t}[A\cdot\cos(0.662\cdot t) + B\cdot\sin(0.662\cdot t)]$

<u>Για t=0:</u> $y_h(0) = A \Leftrightarrow A = 0$

$$y_h'(t) = 1.25\cdot B\cdot e^{1.25\cdot t}\cdot\sin(0.662\cdot t) + 0.662\cdot B\cdot e^{1.25\cdot t}\cdot\cos(0.662\cdot t)$$

<u>Για t=0:</u> $y_h'(0) = 0.662\cdot B \Leftrightarrow B = \dfrac{1}{0.662} \Leftrightarrow B = 1.511$

<u>Οπότε:</u> $y_h(t) = e^{1.25\cdot t}\cdot 1.511\cdot\sin(0.662\cdot t)$

<u>Μερική λύση:</u> Θεωρώ μερική λύση της μορφής $y_p(t) = A\cdot t^2 + B\cdot t + C$, $y_p'(t) = 2\cdot A\cdot t + B$, $y_p''(t) = 2\cdot A$

<u>Αντικατάσταση στην Δ.Ε:</u> $2\cdot A + 5\cdot A\cdot t + 2.5\cdot B + 2\cdot A\cdot t^2 + 2\cdot B\cdot t + 2\cdot C = 0.5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t^2\cdot A + t\cdot(5\cdot A + 2\cdot B) + 2\cdot A + 2.5\cdot B + 2\cdot C = 0.5 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\cdot A = 0 \\ 5\cdot A + 2\cdot B = 0 \\ 2\cdot A + 2.5\cdot B + 2\cdot C = 0.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0.25 \end{cases}$$

<u>Οπότε:</u> $y_p(t) = 0.25$

<u>Άρα:</u> $y(t) = e^{1.25\cdot t}\cdot 1.511\cdot\sin(0.662\cdot t) + 0.25$

1.2.Πρακτικό

Πείραμα 3.1: Ομογενής γραμμική δ.ε. $1^{ης}$ τάξης με αρχικές συνθήκες διάφορες του μηδενός.

Να λυθεί η παρακάτω δ.ε. θεωρητικά (να σχεδιαστεί και η γραφική παράσταση) και στην συνέχεια να γίνει προσομοίωση στον Α/Υ (καταγραφή από παλμογράφο) και να συγκριθούν οι χρονικές αποκρίσεις.

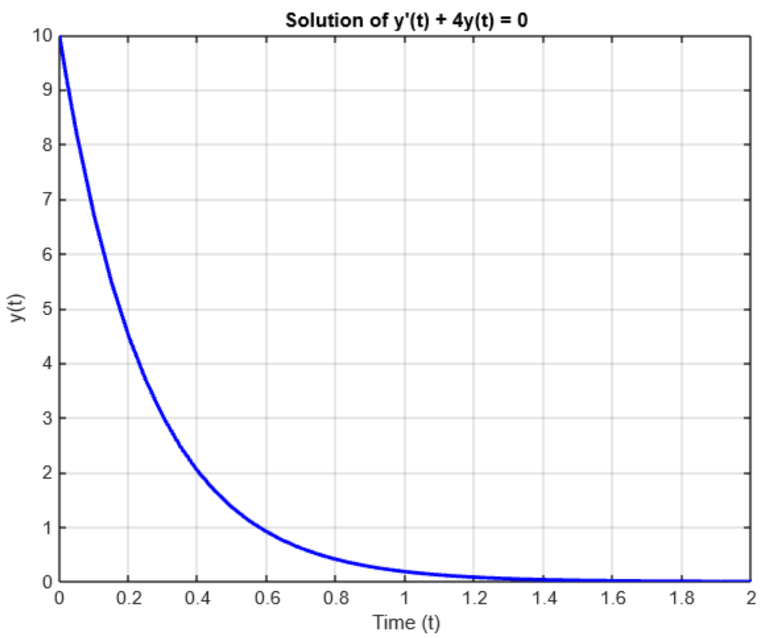
$$y'(t) + 4y(t) = 0,\ y(0) = 10$$

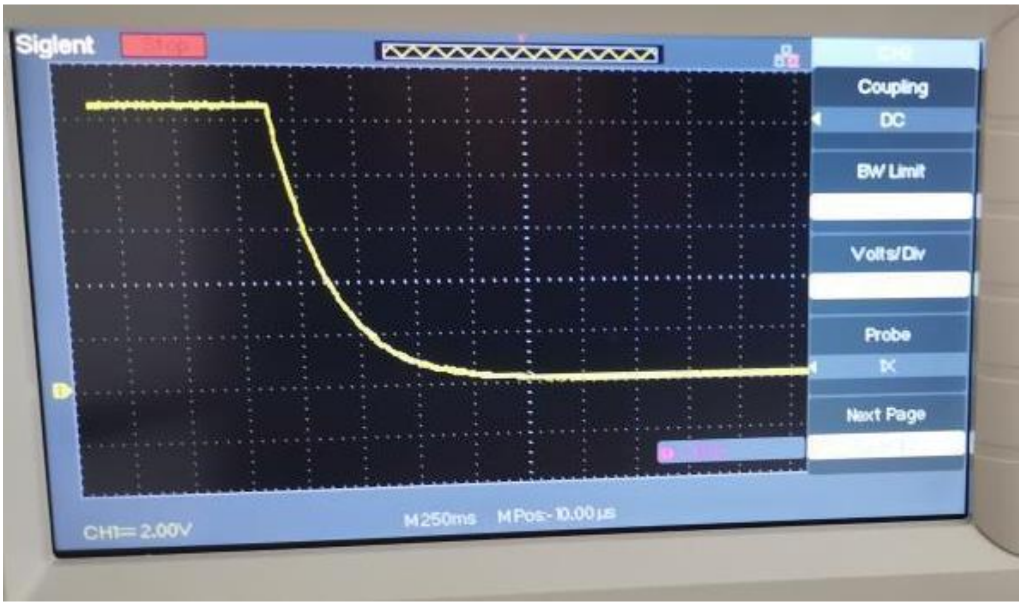
Απάντηση:

$$y'(t) + 4y(t) = 0 \xrightarrow{Laplace} L\{y'(t)\} + 4L\{y(t)\} = 0$$
$$\rightarrow sY(s) - y(0) + 4Y(s) = 0 \rightarrow sY(s) - 10 + 4Y(s) = 0$$
$$\rightarrow Y(s) = 10\frac{1}{s+4}$$
$$\rightarrow y(t) = L^{-1}\left\{10\frac{1}{s+4}\right\} = 10e^{-4t}$$

Για να βρούμε την γραφική παράσταση δίνουμε ακραίες τιμές στην μεταβλητή t.

- $t = 0: y(0) = 10e^{0} = 10$
- $t = +\infty: y(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} 10e^{-4t} = 0$
- Είναι εκθετική συνάρτηση





Σε ότι αφορά τις χρονικές αποκρίσεις, με βάση το σχήμα του αναλογικού υπολογιστή παρατηρούμε ότι το πλάτος είναι περίπου 10V, ενώ με βάση το σχήμα της θεωρητικής προσέγγισης είναι 10V. Οπότε η διαφορά απόκλισης είναι μηδενική.

Πείραμα 3.2: Μη ομογενής γραμμική δ.ε. 1ης τάξης με αρχικές συνθήκες διάφορες του μηδενός.

Να λυθεί η παρακάτω δ.ε. θεωρητικά (να σχεδιαστεί και η γραφική παράσταση) και στην συνέχεια να γίνει προσομοίωση στον Α/Υ (καταγραφή από παλμογράφο) και να συγκριθούν οι χρονικές αποκρίσεις.

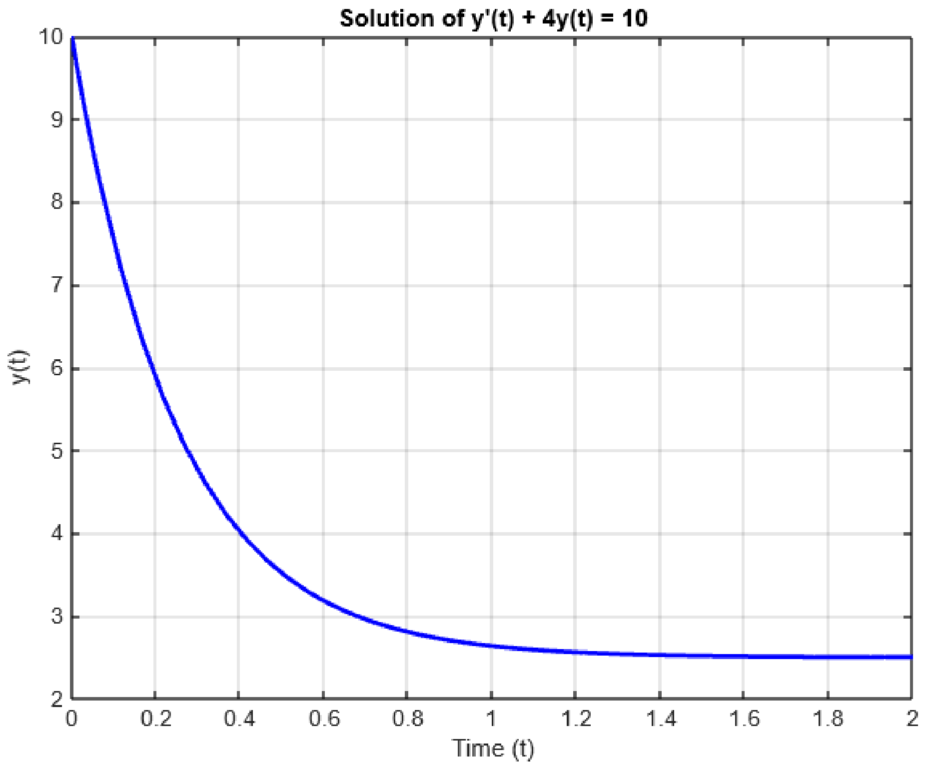
$$y'(t) + 4y(t) = 10,\ y(0) = 10$$

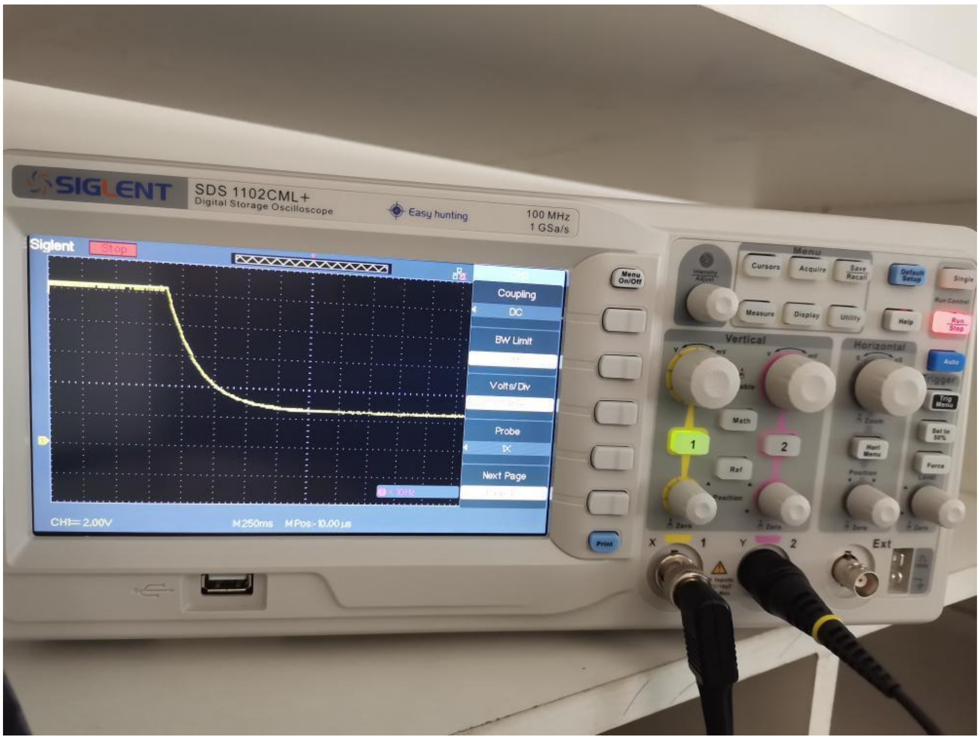
Απάντηση:

$$y'(t) + 4y(t) = 10 \xrightarrow{Laplace} L\{y'(t)\} + 4L\{y(t)\} = L\{10\}$$
$$\rightarrow sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{10}{s} \rightarrow (s+4)Y(s) = 10 + \frac{10}{s}$$
$$\rightarrow Y(s) = \frac{10 + 10s}{s(s+4)} = 10\frac{1+s}{s(s+4)}$$
$$\rightarrow y(t) = L^{-1}\left\{10\frac{1+s}{s(s+4)}\right\} = 2.5 + 7.5e^{-4t}$$

Για να βρούμε την γραφική παράσταση δίνουμε ακραίες τιμές στην μεταβλητή t.

- $t = 0: y(0) = 2.5 + 7.5e^{0} = 10$
- $t = +\infty: y(+\infty) = \lim_{t\rightarrow+\infty}(2.5 + 7.5e^{-4t}) = 2.5$
- Είναι εκθετική συνάρτηση





Σε ότι αφορά τις χρονικές αποκρίσεις, με βάση το σχήμα του αναλογικού υπολογιστή παρατηρούμε ότι το πλάτος είναι περίπου 8V, ενώ με βάση το σχήμα της θεωρητικής προσέγγισης είναι 7.5V. Οπότε η διαφορά απόκλισης είναι 0.5V.

Πείραμα 3.3: Μη ομογενής γραμμική δ.ε. 1ης τάξης με αρχικές συνθήκες μηδέν.

Να λυθεί η παρακάτω δ.ε. θεωρητικά (να σχεδιαστεί και η γραφική παράσταση) και στην συνέχεια να γίνει προσομοίωση στον Α/Υ (καταγραφή από παλμογράφο) και να συγκριθούν οι χρονικές αποκρίσεις.

$$y'(t) + 4y(t) = 10,\ y(0) = 0$$

Απάντηση:

$$y'(t) + 4y(t) = 10 \xrightarrow{Laplace} L\{y'(t)\} + 4L\{y(t)\} = L\{y(t)\}$$

$$\to sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{10}{s} \to sY(s) - 10 + 4Y(s) = \frac{10}{s}$$

$$Y(s) = \frac{10}{(s+4)s}$$

$$\to Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} \qquad A = \frac{5}{2} \quad B = -\frac{5}{2}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{2}}{s} - \frac{\frac{5}{2}}{s+4}\right\} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\ e^{-4t}$$

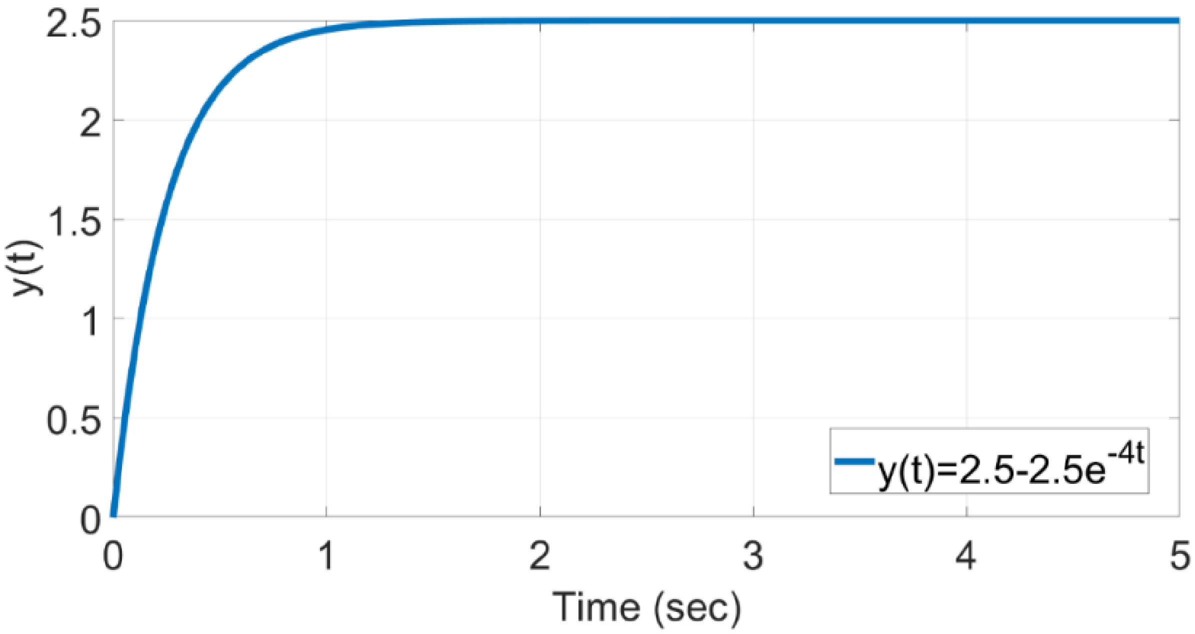
Για να βρούμε την γραφική παράσταση δίνουμε ακραίες τιμές στην μεταβλητή t.

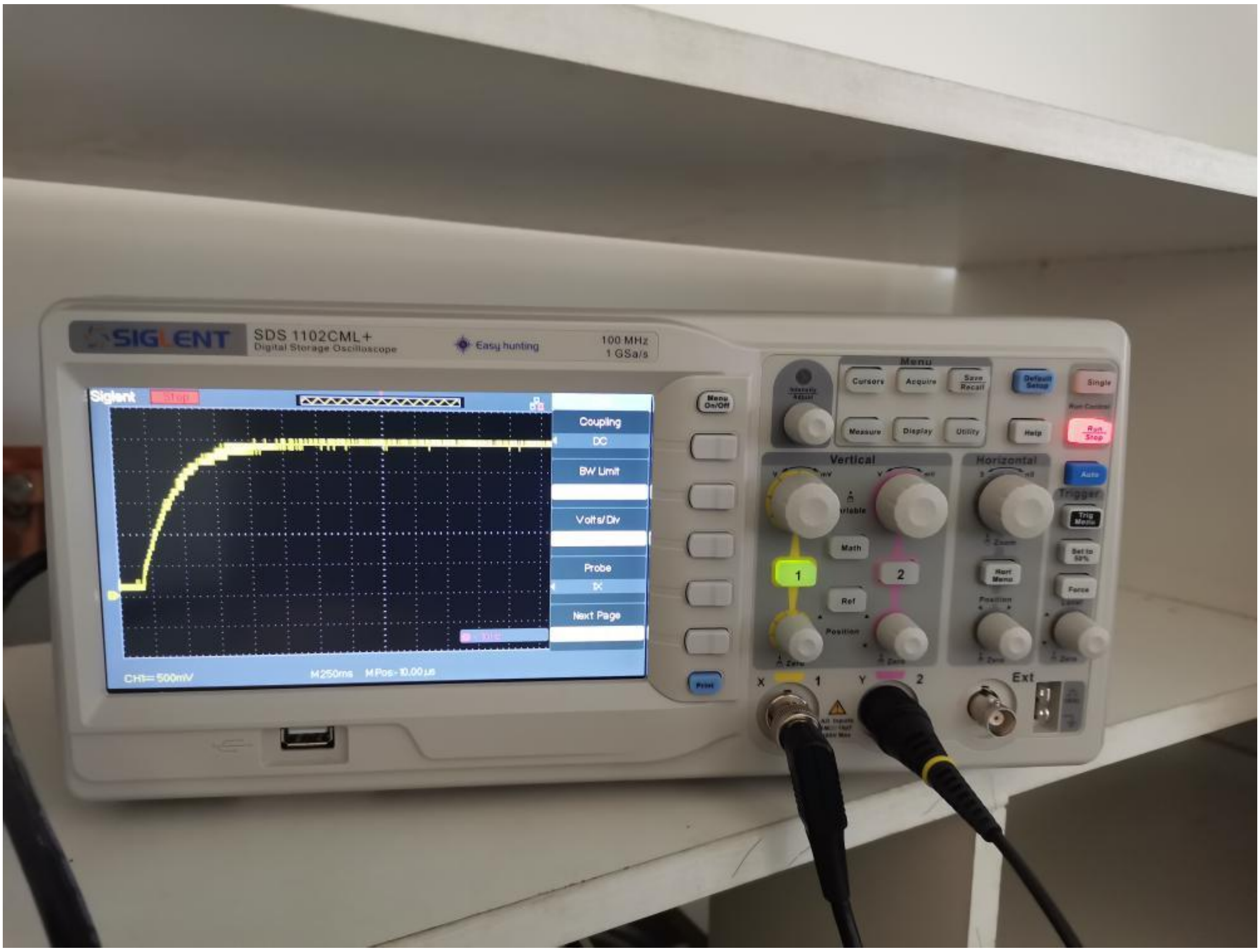
- $t = 0: y(0) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\ e^{-4t} = 0$
- $t = +\infty: y(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\ e^{-4t} = \frac{5}{2}$
- Είναι εκθετική συνάρτηση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ





2023-2024

Σε ότι αφορά τις χρονικές αποκρίσεις, με βάση το σχήμα του αναλογικού υπολογιστή παρατηρούμε ότι το πλάτος είναι περίπου 2.5V, ενώ με βάση το σχήμα της θεωρητικής προσέγγισης είναι 2.5V. Οπότε η διαφορά απόκλισης είναι μηδενική.

Πείραμα 4: Ομογενής γραμμική δ.ε. 2ης τάξης με αρχικές συνθήκες διάφορες του μηδενός.

Να λυθεί η παρακάτω δ.ε. θεωρητικά (να σχεδιαστεί και η γραφική παράσταση) και στην συνέχεια να γίνει προσομοίωση στον Α/Υ (καταγραφή από παλμογράφο) και να συγκριθούν οι χρονικές αποκρίσεις.

$$y''(t) + 25y(t) = 0,\ y'(0) = 2, y(0) = 0$$

<u>Βιβλιογραφία</u>

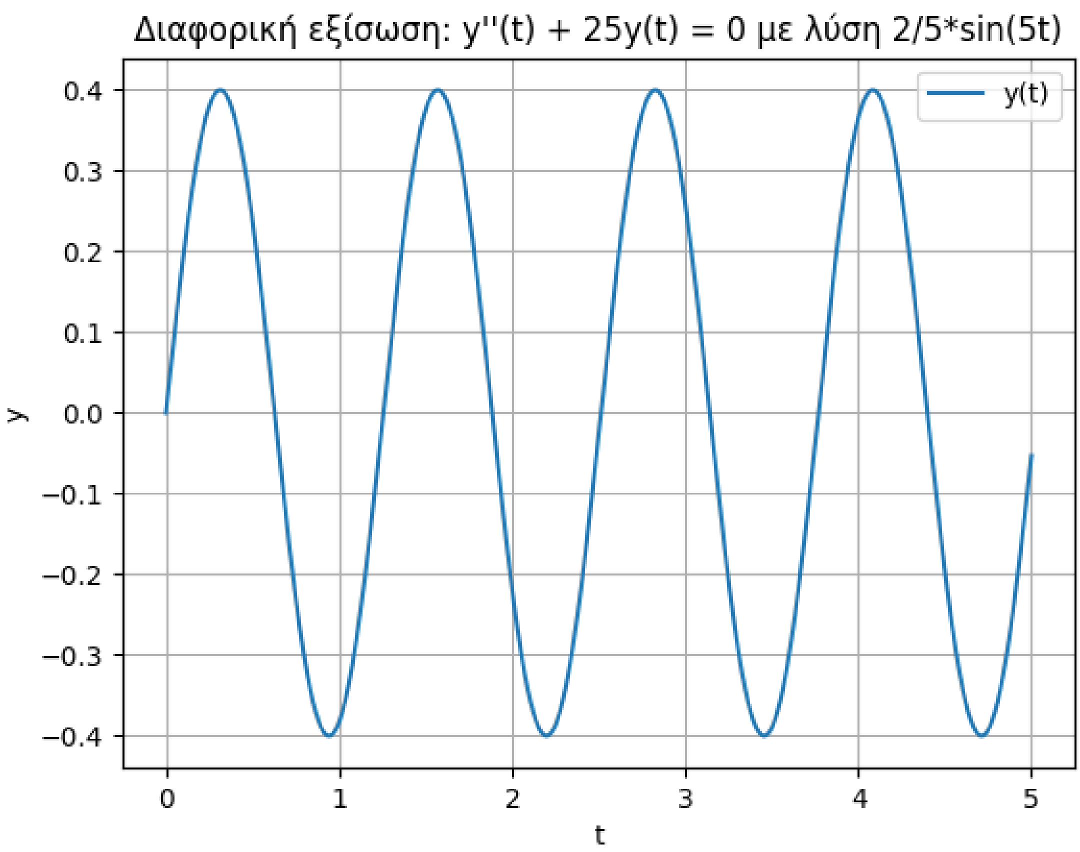
$$y''(t) + 25y(t) = 0 \xrightarrow{Laplace} L\{y''(t)\} + 25L\{y(t)\} = L\{0\}$$
$$\rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 25Y(s) = 0 \rightarrow (s^2 + 25)Y(s) = 2$$
$$Y(s) = \frac{2}{(s^2 + 25)}$$
$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2 + 25)}\right\} = \frac{2}{5}\sin(5t)$$

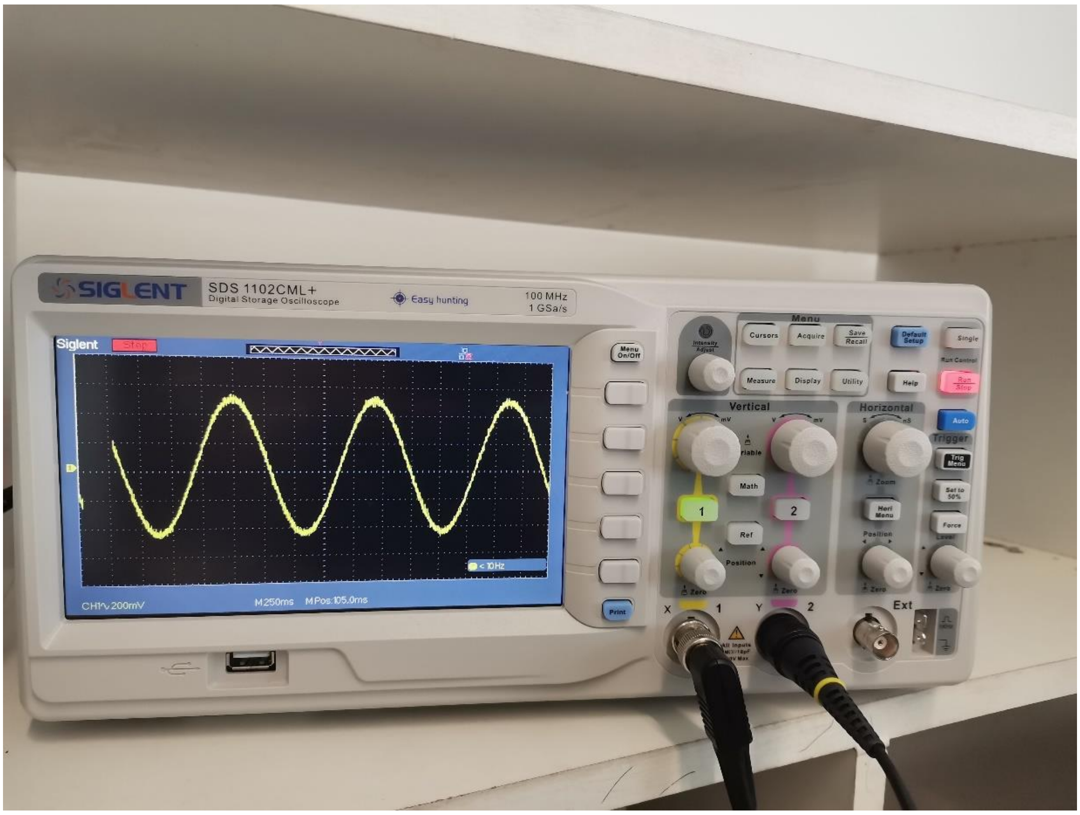
Για να βρούμε την γραφική παράσταση δίνουμε ακραίες τιμές στην μεταβλητή t.

- $t = 0: y(0) = \frac{2}{5}\sin(5t) = 0$
- Είναι ημιτονοειδές συνάρτηση
- Είναι ημιτονοειδές συνάρτηση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ





2023-2024

Σε ότι αφορά τις χρονικές αποκρίσεις, με βάση το σχήμα του αναλογικού υπολογιστή παρατηρούμε ότι το πλάτος είναι περίπου 0.5V, ενώ με βάση το σχήμα της θεωρητικής προσέγγισης είναι 0.4V. Οπότε η διαφορά απόκλισης είναι 0.1V.