ΕΡΓΑΣΙΑ 1

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ

Στο παρακάτω πρόβλημα χρησιμοποιήστε αριθμητική κινητής υποδιαστολής διπλής ακρίβειας.

i. Οι αριθμοί Fibonacci ορίζονται ως:

$$a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = a_k + a_{k-1}, k = 1,2,\dots \qquad (1)$$

Μία μικρή διαταραχή αυτών, οι αριθμοί p_k ορίζονται ως:

$$p_0 = p_1 = 1, p_{k+1} = c\ \cdot p_k + p_{k-1}, k = 1,2,\dots \qquad (2)$$

όπου $c = 1 + \frac{\sqrt{3}}{100}$.

a. Να κάνετε μία SEMILOGY γραφική παράσταση των αριθμών a_n και p_n ως συνάρτηση του *n*. Στο γράφημα, μαρκάρετε το 1/e_{mach} για την απλή και διπλή ακρίβεια. Αυτό μπορεί να σας είναι χρήσιμο για να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις.
b. Για διάφορες τιμές του *n*, υπολογίστε τους αριθμούς a_k, $k = 2,3,\dots$,n χρησιμοποιώντας την (1). Ακολούθως ξαναγράψτε την (1) ώστε να εκφράζει το a_{k-1} συναρτήσει των a_k και a_{k+1}. Χρησιμοποιήστε τα a_n και a_{n-1} που υπολογίσατε, ώστε να υπολογίσετε εκ νέου τα a_k για $k = n-2, n-3, \dots, 0$. Να κάνετε ένα γράφημα για τη διαφορά μεταξύ των αρχικών $a_0 = 1$ και των επανα-υπολογισμένων a_0 ως συνάρτηση του *n*. Ποιες τιμές του n οδηγούν σε μη ακριβή επανα-υπολογισμό του a_0;
c. Επαναλάβετε το ερώτημα (b) για τους αριθμούς p_i. Σχολιάστε την εντυπωσιακή διαφορά στον τρόπο με τον οποίο χάνεται η ακρίβεια στις δύο περιπτώσεις. Ποια είναι πιο τυπική; Προβλέψτε την τάξη του μεγέθους του σφάλματος στον επανα-υπολογισμό του p_0 κάνοντας χρήση του ό,τι γνωρίζετε σχετικά με τους επαναληπτικούς τύπους και με ό,τι γνωρίζετε σχετικά με την αριθμητική κινητής υποδιαστολής.)

ii. Οι διωνυμικοί συντελεστές $a_{n,k}$, οι οποίοι εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα συνδυαστικής και πιθανοτήτων, ορίζονται ως:

$$a_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (3)$$

Υπολογίστε τα $a_{n,k}$ για δοσμένο *n*, ξεκινώντας με $a_{n,0} = 1$ και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την επαναληπτική σχέση $a_{n,k+1} = \frac{n-k}{k+1} a_{n,k}$.

a. Για σταθερό n υπολογίστε τα $a_{n,k}$ με αυτό τον τρόπο, σημειώνοντας το μέγιστο $a_{n,k}$ και την ακρίβεια με την οποία υπολογίζεται το $a_{n,n} = 1$. Αυτό να υλοποιηθεί με απλή και με διπλή ακρίβεια. Γιατί τα σφάλματα στρογγύλευσης δεν είναι πρόβλημα εδώ όπως στο πρόβλημα (i);

b. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο του ερωτήματος (a) για τον υπολογισμό του:

$$E(n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} k\, a_{n,k} = \frac{n}{2} \qquad (4)$$

θεωρώντας το *k* ως τυχαία μεταβλητή, το πλήθος των “κεφαλών” σε *n* ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος και *E(n*) ως την αναμενόμενη τιμή της *k*.
Γράψτε ένα πρόγραμμα χωρίς ελέγχους για υπερχείλιση ή για διαιρέσεις με 0 (αυτή τη φορά). Δείξτε ότι και στην απλή και στη διπλή ακρίβεια, η υπολογιζόμενη απάντηση έχει υψηλή ακρίβεια όσο τα ενδιάμεσα αποτελέσματα βρίσκονται στο εύρος των αριθμών κινητής υποδιαστολής. Όπως και στο ερώτημα (a) εξηγήστε πώς ο υπολογιστής δίνει μια ακριβή, μικρή, απάντηση όταν οι ενδιάμεσοι αριθμοί έχουν ένα τέτοιο ευρύ εύρος τιμών. Γιατί η καταστροφική διαγραφή σημαντικών ψηφίων δεν είναι πρόβλημα; Παρατηρήστε το πλεονέκτημα ενός ευρύτερου εύρους τιμών: μπορούμε να υπολογίσουμε το *E(n)* για αρκετά μεγαλύτερα n σε αριθμητική διπλής ακρίβειας. Τυπώστε τα *E(n)* που υπολογίσατε μέσω της (4) και τα $M_n = max_k a_{n,k}$. Για μεγάλα *n* (μεγαλύτερα του *1000*), το ένα πρέπει να είναι inf και το άλλο NaN. Γιατί;

c. Για (σχετικά μεγάλο) n=40, να κάνετε το γράφημα των $a_{n,k}$ ως συνάρτηση του $k = 1,2,\dots,n$, για να εξηγήσετε την ενδιαφέρουσα με σχήμα “καμπάνας” συμπεριφορά των $a_{n,k}$ κοντά στο μέγιστο.

d. *Βρείτε ένα τρόπο να υπολογίσετε το

$$S(k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k sin\big(2\pi sin(k/n)\big)\, a_{n,k}$$

με καλή σχετικά ακρίβεια για μεγάλα *n*.)