ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

$1^{η}$ Εργαστηριακή Αναφορά

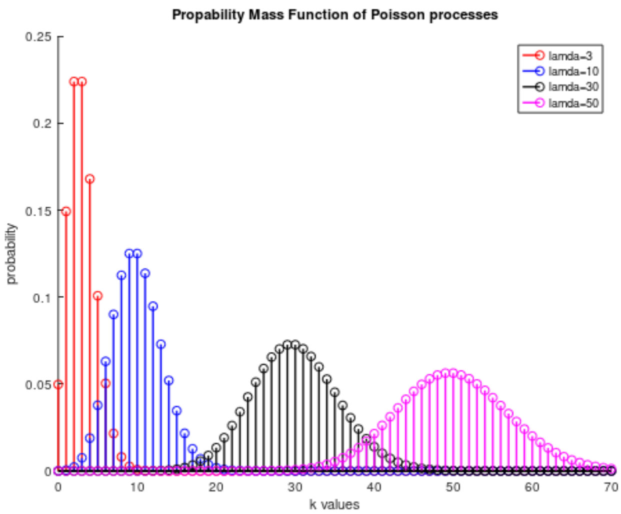
Ντόντορος Ηλίας

el19206

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ερώτημα $1^{ο}$

Όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα όσο μεγαλώνει το λ το ύψος της συνάρτησης μικραίνει ενώ το πλάτος αυξάνεται. Αυτό συμβαίνει διότι πρέπει να συνεχίζει το άθροισμα να είναι ίσο με 1 ενώ επειδή στην κατανομή Poisson ισχύει $E_{(x)}= λ$ η μέση τιμή της κάθε συνάρτησης βρίσκεται στο λ.




```
#Task 1

k= 0:1:70
lamda= [3,10,30,50];

for i=1:columns(lamda)
  poisson(i,:)= poisspdf(k,lamda(i));
endfor

colors= "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i= 1:columns(lamda)
  stem(k,poisson(i,:),colors(i), "linewidth",1.2);
endfor
hold off;

title ('Propability Mass Function of Poisson processes');
xlabel('k values');
ylabel('probability');
legend('lamda=3','lamda=10','lamda=30','lamda=50');
```

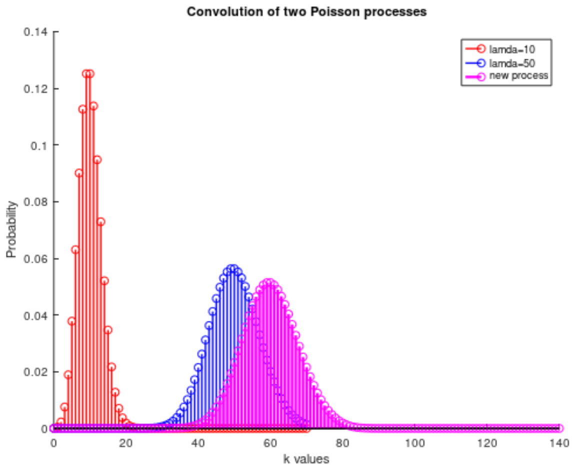
Ερώτημα 2^o

Αν μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ το αποδεικνύεται ότι για την μέση τιμή ισχύει : $\mu = E_{[X]} = \lambda$. Επίσης αποδεικνύεται για την διακύμανση $\sigma^2 = Var_{[X]} = \lambda$. Οι υπολογιστικές τιμές το επιβεβαιώνουν αυτό αφού για λ = 30 έχουμε από το Octave τα εξής αποτελέσματα :

```
Mean value of Poisson with lamda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lamda 30 is
variance = 30.000
```

Ερώτημα 3^o

Η συνάρτηση conv() χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε την κατανομή που προκύπτει από την συνέλιξη των δυο κατανομών Poisson με $\lambda_1=10$ και $\lambda_2=50$ και όπως αποδεικνύεται η κατανομή που προκύπτει είναι και αυτή Poisson με παράμετρο $\lambda_1+\lambda_2=60$. Αυτό φαίνεται και στη παρακάτω εικόνα:



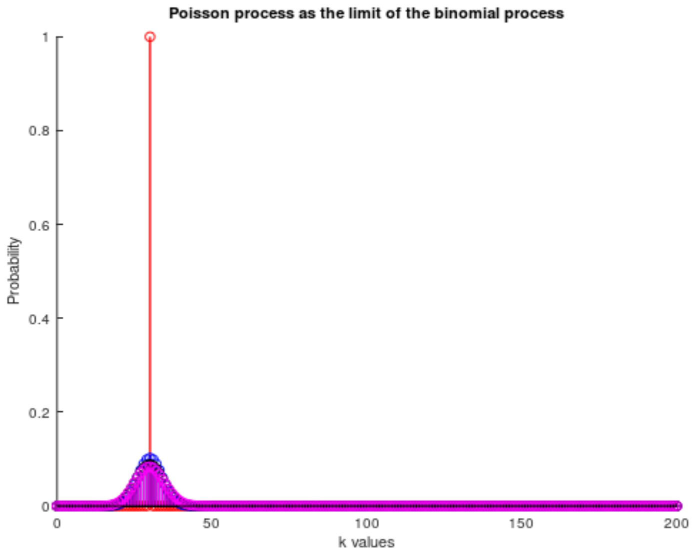

```
# Task 3

first = find(lamda==10);
second = find(lamda==50);
poisson_first = poisson(first,:);
poisson_second = poisson(second,:);

composed = conv(poisson_first,poisson_second);
new_k = 0:1:(2*70);

figure(2);
hold on;
stem(k,poisson_first(:),colors(1),"linewidth",1.2);
stem(k,poisson_second(:),colors(2),"linewidth",1.2);
stem(new_k,composed,"mo","linewidth",2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lamda=10","lamda=50","new process");
```

Ερώτημα 4ο

Διωνυμική κατανομή : $P(k) = \binom{N}{K} p^k (1-p)^{N-k}$

Κατανομή Poisson : $P(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\kappa}}{\kappa!}$

Παρατηρούμε ότι αν n → ∞, p → 0, np = λ τότε η Διωνυμική κατανομή προσεγγίζει την κατανομή Poisson. Όπως φαίνεται και από την διπλανή εικόνα του Octave

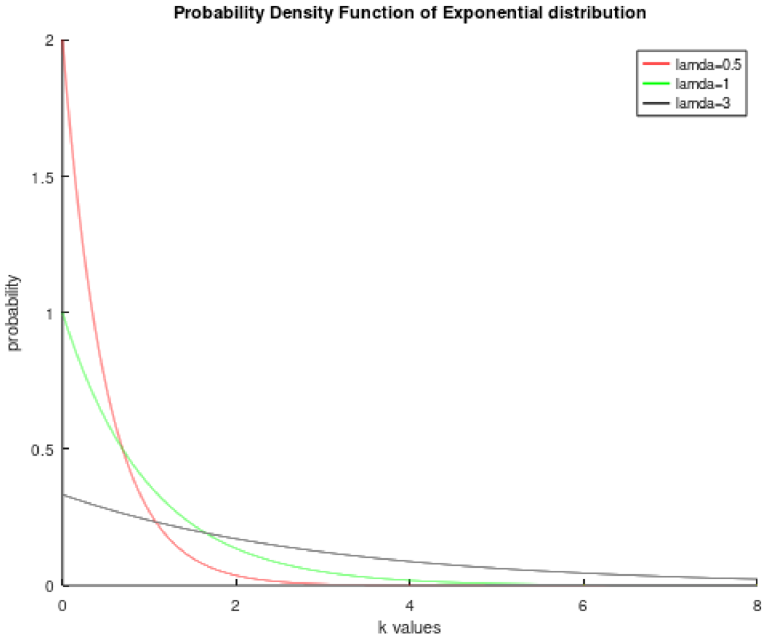



```
# Task 4

k = 0:1:200;
lamda = 30;
i = 1:1:5;
n = lamda.*i;
p = lamda./n;

figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
for i=1:4
  binomial = binopdf(k,n(i),p(i));
  stem(k,binomial,colors(i),'linewidth',1.2);
endfor
hold off;
```

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ερώτημα 1ο

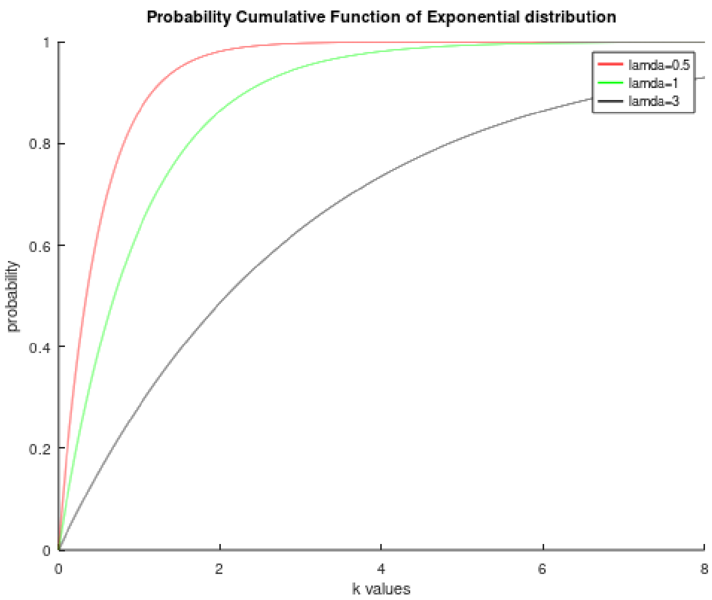
Η γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για 1/λ= 0.5, 1, 3 φαίνεται στην παρακάτω εικόνα :




```
# Task 1

k = 0:0.0001:8;
lamda = [0.5,1,3];

for i=1:columns(lamda)
  exp(i,:) = exppdf(k,lamda(i));
endfor

colors="rgk";
figure(1);
hold on;
for i=1:columns(lamda)
  plot(k,exp(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor

hold off;

title("Probability Density Function of Exponential distribution");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lamda=0.5","lamda=1","lamda=3");
```

Ερώτημα 2ο

Για την συνάρτηση κατανομής γνωρίζουμε ότι $F(x) = 0$ για $x < 0$ και $F(x) = 1 - e^{-x/\theta}$ για $x \geq 0$. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται και η γραφική αναπαράσταση για τους μέσους ορούς του προηγούμενου ερωτήματος




```
# Task 2

k = 0:0.0001:8;
lamda = [0.5,1,3];

for i=1:columns(lamda)
  exp(i,:) = expcdf(k,lamda(i));
endfor

colors="rgk";
figure(2);
hold on;
for i=1:columns(lamda)
  plot(k,exp(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor

hold off;

title("Probability Cumulative Function of Exponential distribution");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lamda=0.5","lamda=1","lamda=3");
```

Ερώτημα 3ο

Συμφωνα με την ιδιότητα έλλειψης μνήμης για κάθε α,b > 0 ισχυει:

Pr(X ≥ a + b | X ≥ a) = P r(X ≥ b),

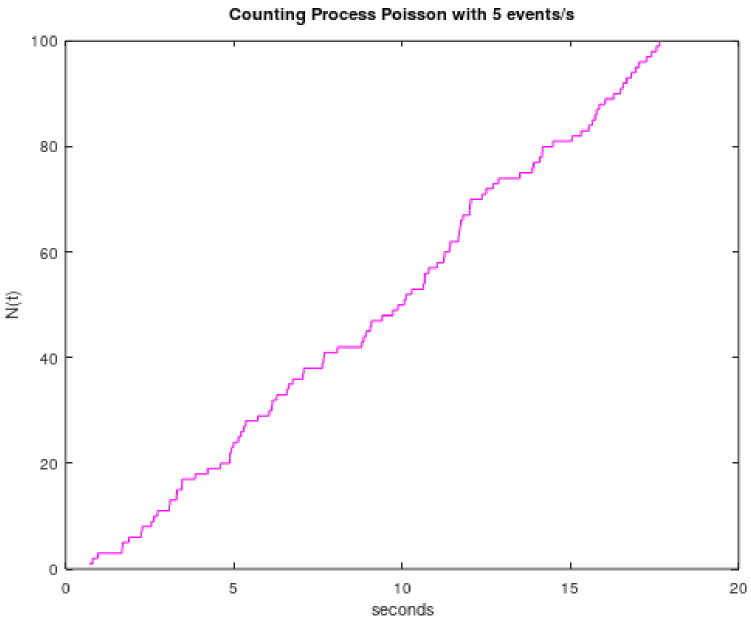
δηλαδή η πιθανότητα Pr(X ≥ a + b | X ≥ b) είναι ανεξάρτητη του α. Αυτό αποδεικνύεται και από τον υπολογισμό στο Octave όπως φαίνεται και παρακάτω:

```
# P(X>30000)=
p1 = 0.8869
# P(X>50000|X>20000)=
p2 = 0.8869
```

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ερώτημα 1ο

Γνωρίζουμε ότι η κατανομή που ακολουθούν οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson είναι εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ. Αρχικά με την εντολή expprnd() δημιουργούμε έναν πίνακα με 100 διαδοχικά τυχαία γεγονότα, τα οποία ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ=1/5=0.2 και στην συνέχεια θα αποθηκεύσουμε στον πίνακα x το άθροισμα N(t) αυτών των τυχαίων γεγονότων χρησιμοποιώντας την συνάρτηση stairs() από την οποία προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα:

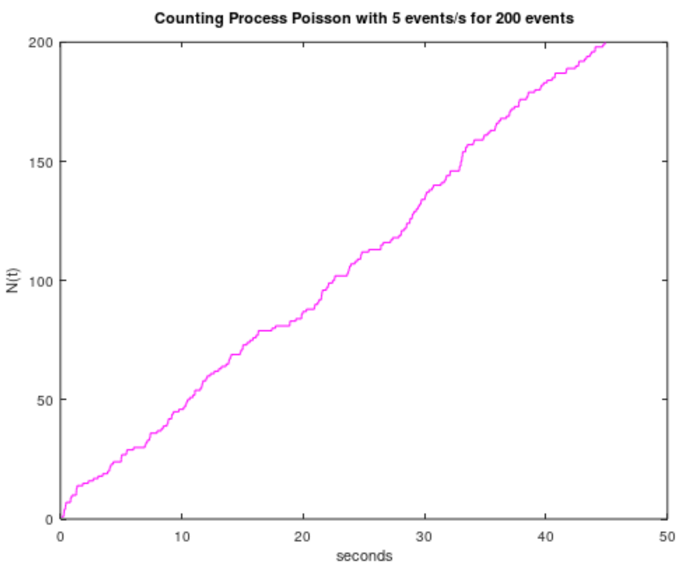


```
# Task 1

x = exprnd(0.2,1,100);
y = ones(100,1);
for i=1:99
  x(i+1)=x(i+1)+x(i);
  y(i+1)=y(i+1)+y(i);
 endfor

figure(1);
stairs(x,y, color=    'm');
title("Counting Process Poisson with 5 events/s");
xlabel("seconds");
ylabel("N(t)");

```

Ερώτημα 2ο

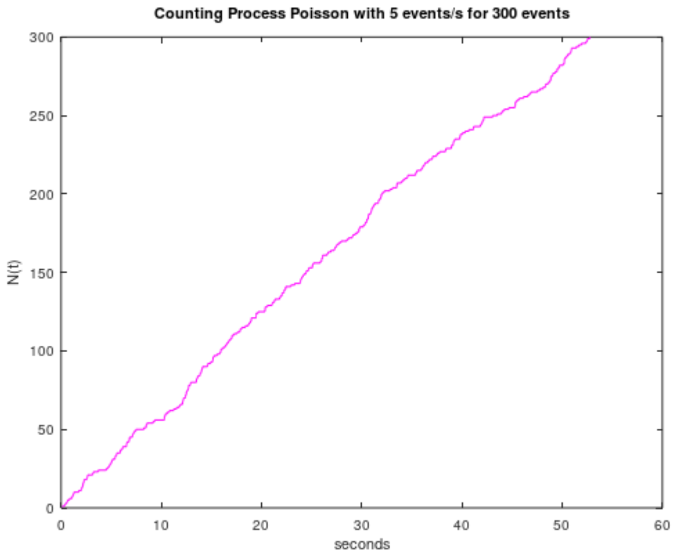
Σε ένα χρονικό παράθυρο ΔΤ = $t_1 - t_2$ ο αριθμός των γεγονότων ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο αριθμό γεγονότων λ · ΔΤ. Το λ ορίζεται ως ο μέσος ρυθμός εμφανίσεων γεγονότων ανά μονάδα του χρόνου. Μπορούμε να το προσεγγίσουμε ως το πηλίκο του πλήθους των γεγονότων ως προς το συνολικό διάστημα που καταγράφηκαν αυτά. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι όσο περισσότερα γεγονότα έχουμε τόσο η προσέγγιση του λ είναι ακριβέστερη. Αυτό φαίνεται και από τα παρακάτω διαγράμματα του Octave :

1. Για 200 γεγονότα



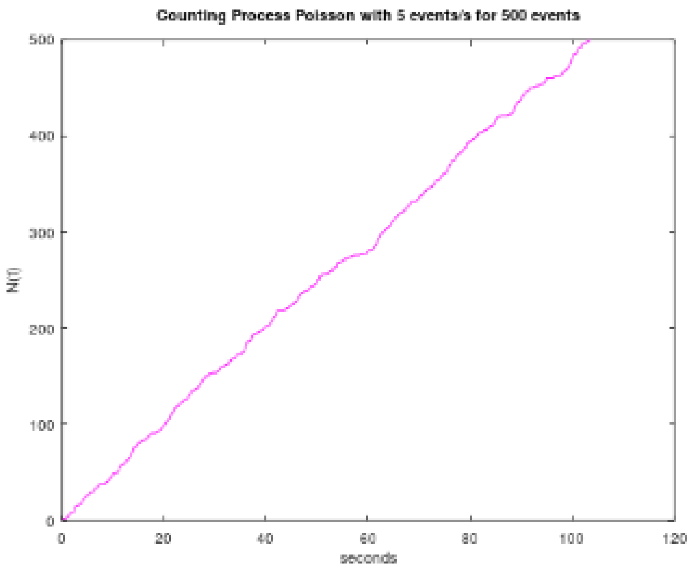

```
200/x(200)=
5.1573
```

2. Για 300 γεγονότα :



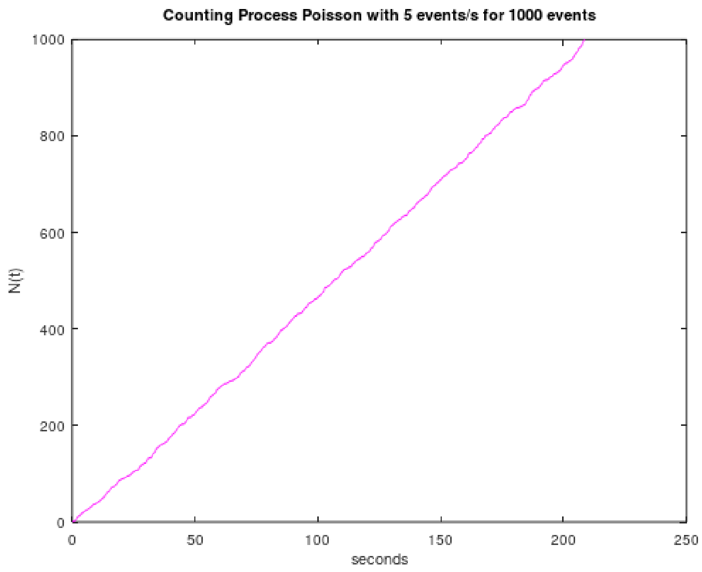

```
1. 300/x(300)=
2. 5.2890
```

3. Για 500 γεγονότα :



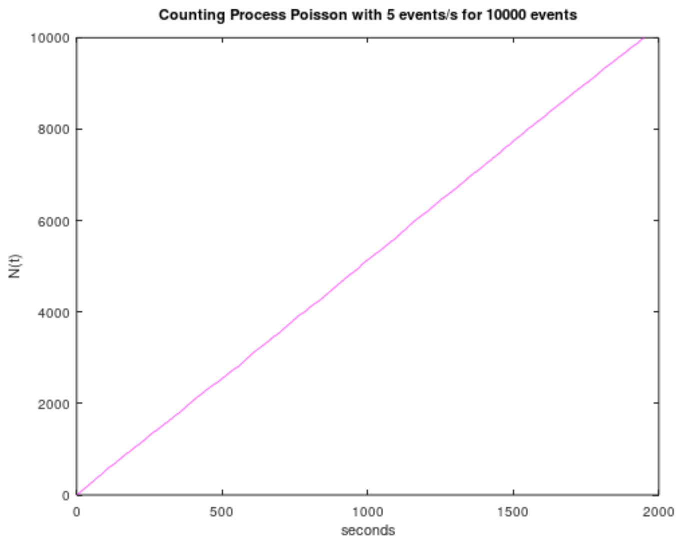

```
1. 500/x(500)=
2. 4.9099
```

4. Για 1000 γεγονότα :




```
1.  1000/x(1000)=
2.  5.1653
```

5. Για 10000 γεγονότα :




```
1.  10000/x(10000)=
2.  4.9537
```