ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

ΝΤΟΝΤΟΡΟΣ ΗΛΙΑΣ

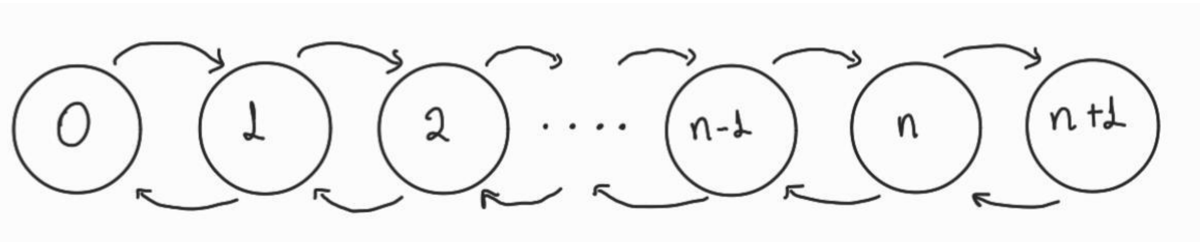
el19206

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Ερώτημα 1ο

Για να είναι μια ουρά M/M/1 εργοδική πρέπει η ένταση κυκλοφορίας του συστήματος ρ=λ/μ να είναι μικρότερη της μονάδας. Η ένταση κυκλοφορίας ονομάζεται επίσης και βαθμός χρησιμοποίησης του εξυπηρετητή καθώς εκφράζει την πιθανότητα να μην είναι άδειο το σύστημα. Επομένως πρέπει να η ισχύει η παρακάτω συνθήκη (συνθήκη Erlang) :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$



Γενικά πρέπει να ισχύουν και οι εξισώσεις ισορροπίας για ένα μοντέλο αναμονής γεννήσεων-θανάτων :

$(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, k > 1$

$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$

$P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1$

Έτσι χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε :

$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \rho P_0$

$(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \Rightarrow P_2 = \rho^2 P_0 \Rightarrow P_k = \rho^k P_0$

Αλλά εφόσον έχουμε εργοδική ουρά ισχύει 0<ρ<1 άρα η σειρά που προκύπτει συγκλίνει στο $\frac{1}{1-\rho}$ άρα καταλήγουμε :

$$P_0 \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow P_0 = 1 - \rho \Rightarrow P_k = (1-\rho)\rho^k, k > 0 \text{ και } P(n(t) > 0) = 1 - P_0 = \rho$$

Δηλαδή έχουμε γεωμετρική κατανομή.

Ερώτημα 2ο

Σύμφωνα με τον τύπο του Little, ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα θα είναι:

$$T = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

Επίσης χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα είναι το άθροισμα του χρόνου αναμονής και του χρόνου εξυπηρέτησης. Άρα ο μέσος χρόνος αναμονής θα είναι:

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$$

Ερώτημα 3ο

Γνωρίζουμε ότι ισχύει $P_k = (1-\rho)\rho^k$ άρα για $\kappa = 57$ και για $0 < \rho < 1$ η P_k είναι θετική άρα το σύστημα μπορεί να βρεθεί με 57 πελάτες ωστόσο ό η πιθανότητα εξαρτάται από το ρ ($\mu\iota\kappa\rho\acute{o}\,\rho \rightarrow \alpha\mu\varepsilon\lambda\eta\tau\acute{\varepsilon}\alpha\,\pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha$).

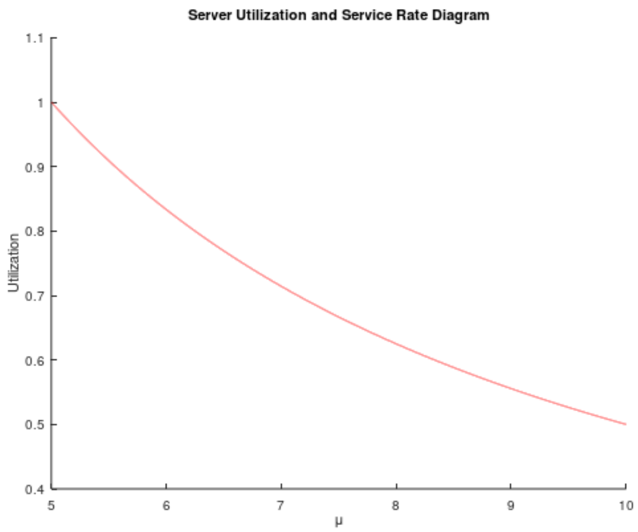
ΑΣΚΗΣΗ 2η

Ερώτημα 1ο

Για να είναι το σύστημα εργοδικό θα πρέπει να ισχύει $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ άρα για $\lambda = 5$ πρέπει $\mu > 5\,\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma/\lambda\varepsilon\pi\tau\acute{o}$

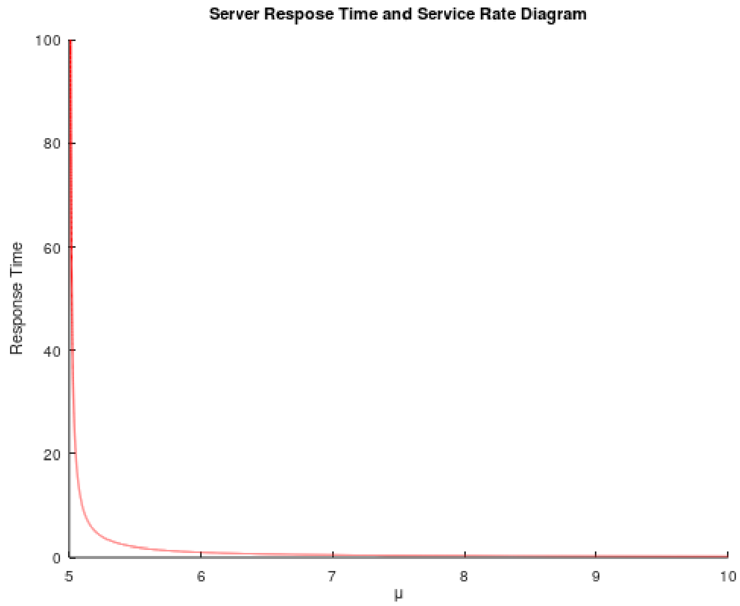
Ερώτημα 2ο

1. Βαθμός χρησιμοποίησης (utilization) ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.



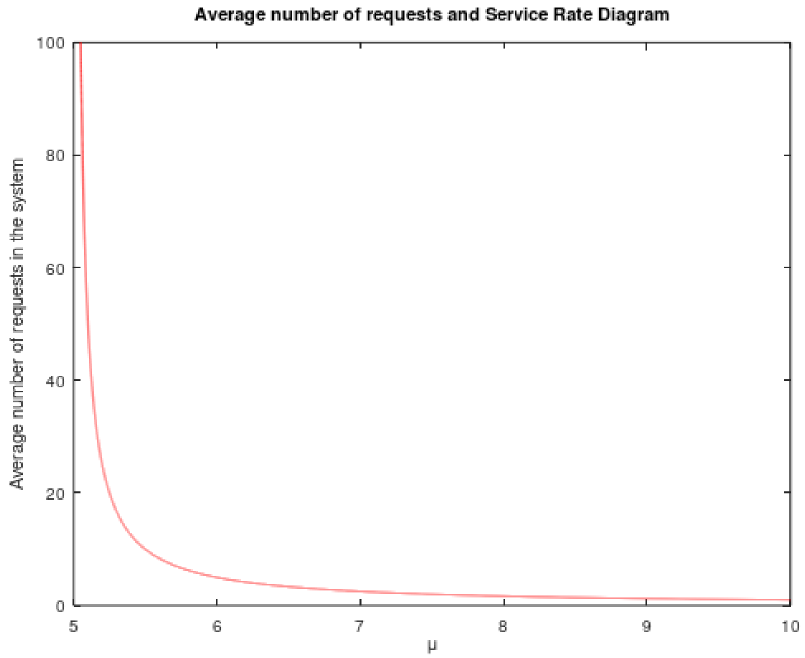
```
pkg load queueing;

lamda = 5;
mu = 5.0001 : 0.0001 : 10;

[U, R, Q, X, p0] = qsmm1 (lamda, mu);
# Task 1
figure(1);
hold on;
plot(mu,U,"r","linewidth",1.2);
hold off;
title("Server Utilization and Service Rate Diagram");
xlabel("\\mu");
ylabel("Utilization");
```

2. Μέσος χρόνος καθυστέρησης του συστήματος E(T) ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.



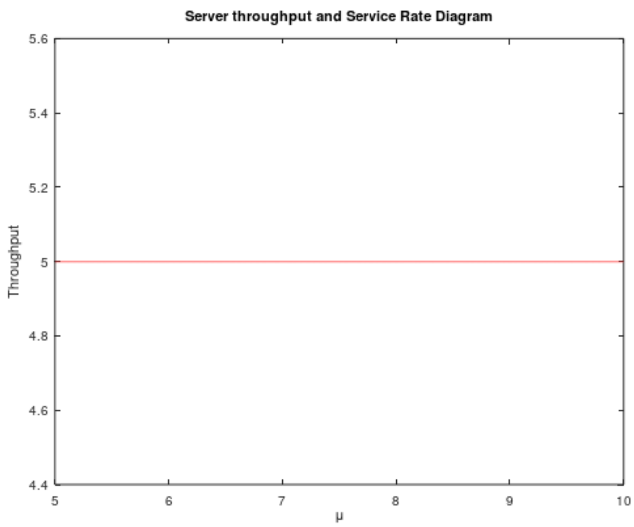

```
# Task 2
figure(2);
hold on;
plot(mu,R,"r","linewidth",1.2);
axis([5 10 0 100]);
hold off;
title("Server Respose Time and Service Rate Diagram");
xlabel("\\mu");
ylabel("Response Time");
```

3. Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.




```
# Task 3
figure(3);
plot(mu,Q,"r","linewidth",1.2);
axis([5 10 0 100]);
title("Average number of requests and Service Rate Diagram");
xlabel("\\mu");
ylabel("Average number of requests in the system");
```

4. Ρυθμαπόδοση (throughput) πελατών ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης



```
# Task 4
figure(4);
plot(mu,X,"r","linewidth",1.2);
title("Server throughput and Service Rate Diagram");
xlabel("\\mu");
ylabel("Throughput");
```

Ερώτημα 3ο

Από το διάγραμμα του μέσου χρόνου καθυστέρησης παρατηρούμε ότι ο χρόνος καθυστέρησης είναι αντιστρόφως ανάλογος από τον ρυθμό εξυπηρέτησης και ότι από ένα σημείο και μετά η διάρκεια του χρόνου καθυστέρησης είναι αρκετά μικρή σχεδόν σταθερή. Οπότε η καλύτερη επιλογή θα ήταν περίπου στο $\mu = 7$ ώστε να έχουμε γρήγορο χρόνο εξυπηρέτησης χωρίς το κόστος που θα δαπανούσαμε αν επιλέγαμε $\mu = 10$.

Ερώτημα 4ο

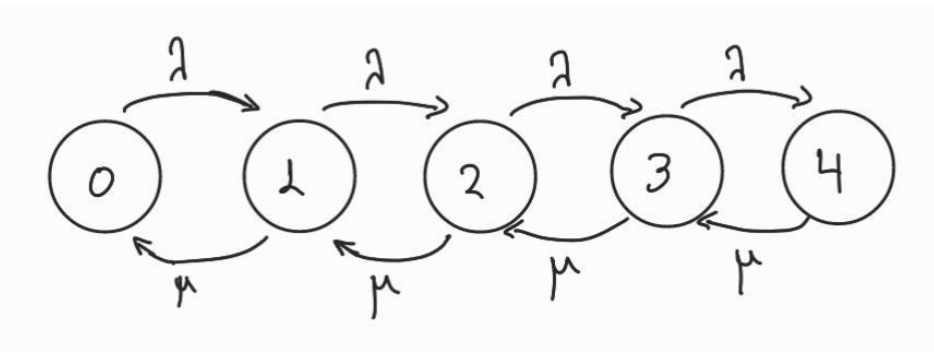
Στο συγκεκριμένο σύστημα M/M/1 υπάρχει άπειρη χωρητικότητα πελατών επόμενος η πιθανότητα να απορριφθεί κάποιος πελάτης είναι 0. Άρα $P(blocking) = 0$ επομένως από τον τύπο της ρυθμαπόδοσης :

$\gamma \ = \lambda(1 - P(blocking))$ εχουμε ότι $\gamma = \lambda = 5$, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Ερώτημα 1ο

Το διάγραμμα γεννήσεων-θανάτων του συστήματος M/M/1/4 μπορεί να αναπαρασταθεί από τη παρακάτω εικόνα :



Για $\mu = 10\,πελατες/sec$ και $\lambda\kappa = \lambda/(\kappa + 1)$ από τις εξισώσεις ισορροπίας και την συνθήκη κανονικοποίησης μπορούμε να υπολογίσουμε τις εργοδικές πιθανότητες ως εξής :

$$P_0\left[1 + \frac{\lambda_0}{\mu} + \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu^2} + \frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu^3} + \frac{\lambda_3\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu^3}\right] = 1 \rightarrow P_0 = 0.607$$

$$P_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu}\right) P_0 = 0.304$$

$$P_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right) P_1 = 0.0759$$

$$P_3 = \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right) P_2 = 0.0126$$

$$P_4 = \left(\frac{\lambda_3}{\mu}\right) P_3 = 0.00158$$

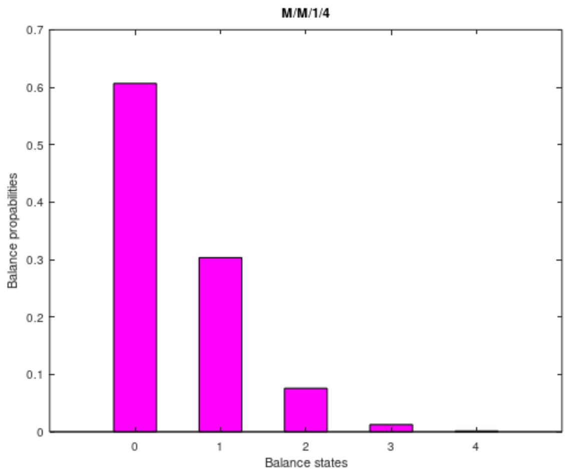
Επίσης η τελευταία πιθανότητα είναι ίση με την πιθανότητα απόρριψης πελάτη καθώς όταν το σύστημα βρίσκεται σε αυτή την κατάσταση δεν μπορεί να δεχτεί επιπλέων πελάτες άρα $P(blocking) = 0.00158$.

Ερώτημα 2ο

1. Μήτρα ρυθμού μεταβάσεων :

```
1.     -5.0000    5.0000         0         0         0
2.     10.0000  -12.5000    2.5000         0         0
3.           0   10.0000  -11.6667    1.6667         0
4.           0         0   10.0000  -11.2500    1.2500
5.           0         0         0   10.0000  -10.0000
```

2. Υπολογισμός εργοδικών πιθανοτήτων μέσω Octave :




```
1.  0.6066
2.  0.3033
3.  0.075829
4.  0.012638
5.  1.5798e-03
```

3. Μέσος αριθμός πελατών στην κατάσταση ισορροπίας :

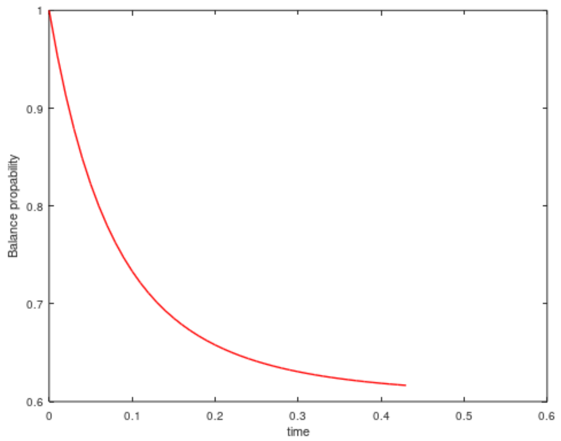
```
1.  mean_clients = 0.4992
```

4. Πιθανότητα απόρριψης πελάτη στην κατάσταση ισορροπίας :

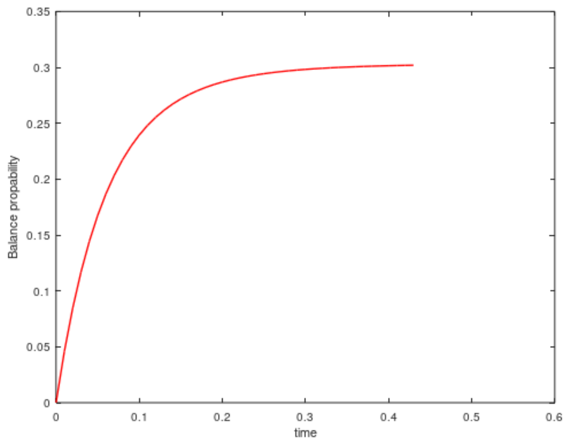
```
Blocking probability =
1.5798e-03
```

5. Διαγράμματα των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος σαν συναρτήσεις του χρόνου από την αρχική κατάσταση.

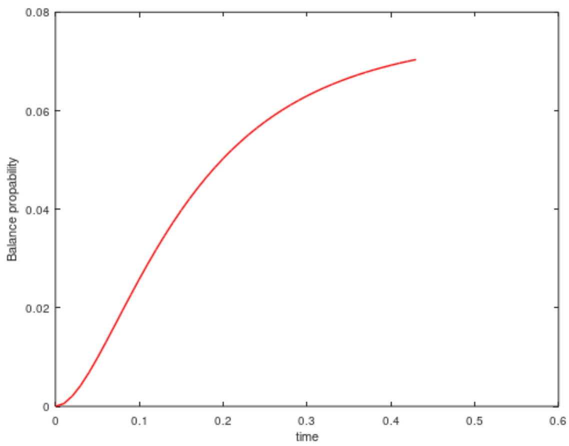
State 0:



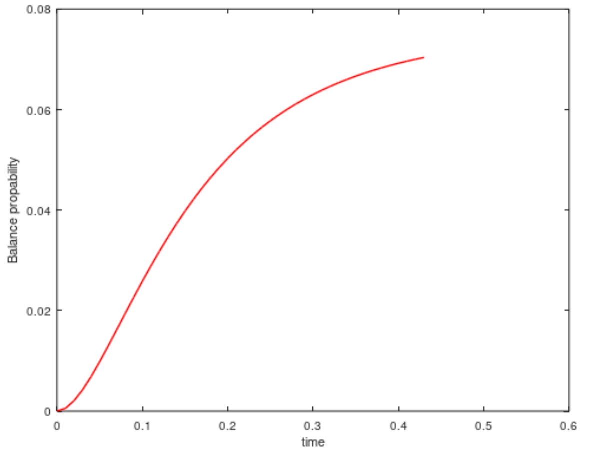
State 1:



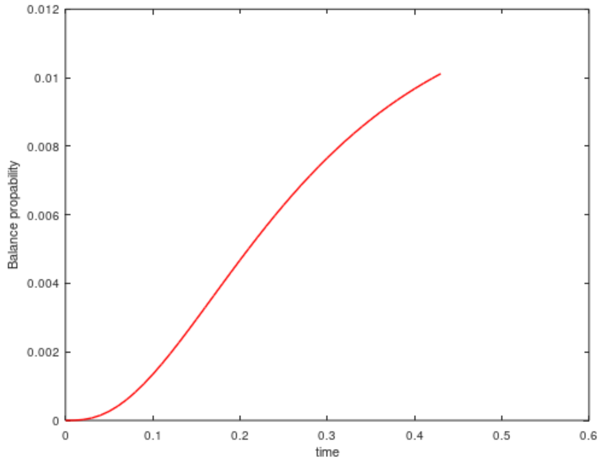
State 2 :



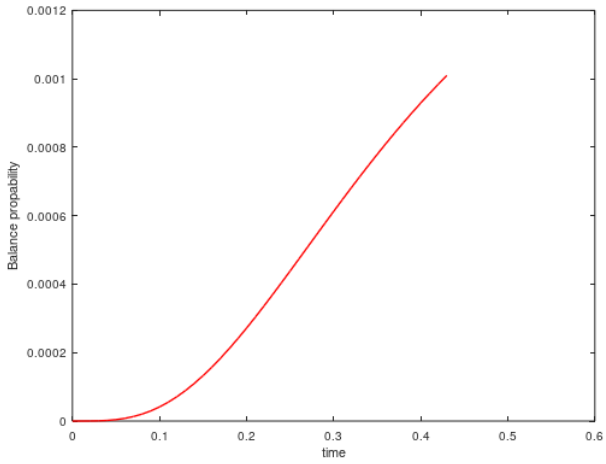
State 3 :



State 4 :



State 5 :




```
clc;
clear all;
close all;

pkg load queueing;
# Task 2.1
lamda = 5;
mu = 10;
states = [0, 1, 2, 3, 4];
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];
```

```
births_B = [lamda, lamda/2, lamda/3, lamda/4];
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];

transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
display(transition_matrix);

# Task 2.2
P = ctmc(transition_matrix);
for i=1:5
 display(P(i));
endfor
figure(1);
bar(states, P, "m", 0.5);
title("M/M/1/4");
xlabel("Balance states");
ylabel("Balance propabilities");

# Task 2.3
mean_clients = 0;
for i = 1 : 1 : 5
  mean_clients = mean_clients + P(i)*(i-1);
endfor
display(mean_clients);

# Task 2.4
display("Blocking probability = ");
display(P(5));

# Task 2.5
for j = 1:1:5
  index = 0;
  for T = 0 : 0.01 : 50
    index = index + 1;
    P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
    Prob0(index) = P0(j);
    if P0 - P < 0.01
      break;
    endif
  endfor

  t = 0 : 0.01 : T;
  figure(j+1);
  plot(t, Prob0, "r", "linewidth", 1.2);
  xlabel("time");
  ylabel("Balance propability");
Endfor
```