Édouard Oudet
Professeur des universités
Edouard.Oudet@imag.fr
Téléphone: 04 76 51 46 17

DESTINATAIRE

Rapport sur la thèse de Ilias Ftouhi en vue de l'obtention du titre de docteur en mathématiques appliquées

Grenoble, le 4 janvier 2021

La thèse de doctorat de Ilias Ftouhi porte sur l'étude qualitative et numérique des diagrammes de Blashke-Santaló. Ces derniers décrivent les valeurs pouvant être atteintes par $(J_1(\Omega), \ldots, J_l(\Omega))$ pour Ω appartenant à un ensemble de formes fixé et des fonctionnelles de forme $(J_i)_{1\leq i\leq l}$ prescrites. Le premier chapitre apporte un résumé très complet et précis des problématiques abordées dans cette thèse, des difficultés qui leurs sont associées ainsi que les contributions nouvelles de ce manuscrit. Les chapitre 2, 3, 4 et 6 correspondent à des articles soumis pour publication et le chapitre 5 à un article en préparation.

- La première partie, qui contient une grande part des contributions d'Ilias Ftouhi, s'intéresse à l'étude qualitative des diagrammes de Blashke-Santaló associés respectivement au volume, périmètre et constante de Cheeger dans le second chapitre puis au volume, périmètre et premier mode propre de Dirichlet $\lambda_1(\Omega)$ dans le troisième chapitre. Une grande part des résultats obtenus concernent ces diagrammes pour des formes convexes. Dans le quatrième chapitre, on démontre en premier lieu une nouvelle inégalité reliant inradius, mesure et constante de Cheeger $h(\Omega)$ pour dans un deuxième temps se concentrer sur l'analyse de l'existence d'un convexe optimal $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ minimisant la fonctionnelle $\frac{\lambda_1(\Omega)}{h(\Omega)^2}$ en lien avec une inégalité dûe à E. Parini. Le cinquième chapitre porte sur l'approximation numérique des diagrammes de Blashke-Santaló pour des profils plans convexes.
- Dans une seconde partie, Ilias donne la démonstration d'un résultat de placement d'obstacle optimal pour le premier mode non trivial de Steklov dans le cas d'une géométrie et d'un obstacle sphérique. Un résultat de même nature pour une condition au bord mixte Dirichlet-Steklov est aussi proposé.

Le travail présenté ici contient de nombreuses contributions. Je tente ci-dessous un résumé de celles que j'ai trouvées les plus marquantes par leurs portées ou par les nouvelles techniques de preuves qui ont été proposées.

Le second chapitre est consacré aux diagrammes de Blashke-Santaló associés au volume, périmètre et constante de Cheeger parmi les ensembles simplement connexes, convexes et polygones convexes. Après avoir caractérisé le diagramme dans le cas plus simple des domaines simplement connexes (en supposant connu le diagramme des ensembles plans convexes), on détaille l'approche pour le cas convexe. Le point de départ est l'ensemble des travaux antérieurs de [Kawohl, Lachand-Robert] caractérisant les ensembles de Cheeger plans de convexes. Ilias généralise ici à des convexes quelconques du plan une inégalité connue pour des polygones Cheeger réguliers. Ceci lui permet de définir les courbes inférieures et supérieures bordant le diagramme de Blashke-Santaló pour les convexes. L'étude des formes extrémales (explicites) appartenant à ces courbes ainsi qu'une astucieuse analyse des sommes de Minkowski associées permet à Ilias de démontrer par un argument d'indice que tous les points intermédiaires à ces deux courbes appartiennent bien au diagramme. Pour finir, Ilias s'intéresse aux diagrammes pour des polygones à nombre de côtés majorés. Il obtient une caractérisation complète dans le cas des triangle et d'un nombre pair de côtés. Dans le cas d'un nombre impaire de côtés, seule l'explicitation de la courbe supérieure n'a pu être obtenue. Une brève étude numérique illustre et complète ces résultats à la fin du chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des diagrammes de Blashke-Santaló associés au volume, périmètre et premier mode propre de Dirichlet $\lambda_1(\Omega)$ parmi les ensembles ouverts réguliers et parmi les convexes du plan. Le diagramme associé aux ouverts réguliers en dimension quelconque est complètement identifié par un très bel argument d'homogénéisation. En ce qui concerne le diagramme sous contrainte de convexité la situation est plus complexe étant donné que les formes extrémales du diagramme ne peuvent être explicitées en toute généralité. On trouvera cependant des informations qualitatives très précises sur le diagramme : il est situé entre deux courbes limites continues, strictement croissantes et toutes les valeurs intermédiaires sont atteintes. De plus, le comportement asymptotique de ces deux fonctions à l'origine $x_0 = P(B)$ est étudié. Il est tout à fait surprenant et remarquable qu'une description qualitative aussi précise puisse être obtenue. Parmi les nombreux arguments proposés je retiendrai en particulier le lemme relatif aux extrema locaux sous contrainte de convexité de λ_1 et du périmètre ainsi que l'adaptation de l'argument de remplissage par somme de Minkowski dans ce contexte plus subtil.

Le quatrième chapitre porte à la fois sur l'amélioration de l'inégalité pour les convexes du plan $\frac{\lambda_1(\Omega)}{h(\Omega)^2} \geq \frac{\pi^2}{6}$ dûe à E. Parini ainsi qu'à l'étude de l'existence d'un minimum pour ce ratio en dimension quelconque. L'amélioration de la constante $\frac{\pi^2}{6}$, repose sur une nouvelle inégalité liant $h(\Omega)$, l'inradius et l'aire du domaine. L'étude de l'existence d'un minimum pour ce problème en dimension N parmi les convexes est reliée à la stricte monotonie des infima relativement à la dimension car c'est elle qui permet ou non d'obtenir des suites minimisantes à diamètres bornés.

Le cinquième chapitre se propose d'étudier numériquement des diagrammes de Blashke-Santaló pour des convexes du plan. On trouvera ici plusieurs paramétrisations classiques des convexes du plan ainsi que les quantités classiques comme le périmètre, l'aire, le diamètre explicitées en fonction des paramètres quand cela est possible. Plusieurs expériences et illustrations numériques sont proposées. Les résultats obtenus semblent satisfaisants, bien que ne pouvant être certifiés. Les expériences conduites permettent de mettre en évidence des discontinuités de formes sur une courbe extrémale. On regrettera peut-être l'absence ici de comparaison précises entre les approches au delà de l'observation que certaines paramétrisations seraient plus pertinentes pour approcher telle ou telle forme optimale. On aurait pu en particulier s'intéresser aux densités des points obtenus pour un diagramme relativement à la paramétrisation choisie.

Le sixième chapitre caractérise la position optimale d'un trou sphérique dans une boule pour le problème de Steklov en exhibant l'existence de fonctions test pertinentes. Un approche similaire est aussi appliquée au problème analogue sous condition mixte Dirichlet-Steklov.

L'ensemble des résultats contenus dans ces six chapitres constitue un ensemble de travaux cohérent et passionnant. Il ne fait aucun doute pour moi que ces travaux ne manqueront pas d'inspirer de nouveaux développements, ce qui illustre leur part de nouveauté et d'ingéniosité. Je n'ai pu qu'apprécier l'usage qui a été fait ici de l'expérimentation numérique pour guider l'intuition et l'analyse. On aurait pu imaginer d'autres développements apportés par le calcul numérique (dimension 3, quantification des tirages aléatoires, etc.) mais nul ne peut tout faire et l'ensemble des compétences dont Ilias a fait preuve est déjà tout à fait remarquable.

En conséquence, je ne peux que recommander avec enthousiasme la soutenance de la thèse de Ilias Ftouhi.