Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский университет ИТМО“

Факультет информационных технологий и программирования

Направление “Прикладная математика и информатика“

Отчет к лабораторной работе №3

Методы решения систем линейных уравнений

Выполнили студенты группы M3237

Ярошевский Илья
Аникина Вероника
Крюков Александр

Санкт-Петербург 2021

1 Цели работы

1. Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения
2. Провести исследование метода на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания
3. Провести исследование метода на матрицых Гильберта различной размерности
4. Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента для плотных матриц

2 Ход работы

Матрицы с диагональным преобладанием строились так:

$$a_{ii} = \begin{cases} -\sum\limits_{i \neq j} a_{ij} & i > 1 \\ -\sum\limits_{i \neq j} a_{ij} + 10^{-k} & i = 1 \end{cases}$$

, где $a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3, -4\} : i \neq j$ выбиралось случайным образом. Так-же задавлось максимальное расстояние от главной диагонали, дальше которого все элементы были нулевыми. Это позволяет тратить меньше памяти, за счет храние матрицы, в которой ненулевые элементы сосредоточены около главной диагонали, в профильном формате. Аналогично генерировались матрицы с обратным знаком внедиагональных элементов для тестирования метода Сопряженных градиентов. Единственным отличием стал выбор — $a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4\} : i \neq j$.

Матрицы Гильберта строились по формуле: $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = \overline{1, n}$. Для таких плотных матриц не существенно в какой форме их хранить, так как в любом случае потребуется $O(n^2)$ памяти

2.1 Прямой метод

2.1.1 Тестирование на матрицах с диагональным преобладание

n	k	$\|x^* - x_k\|$	$\frac{\|x^* - x_k\|}{\|x^*\|}$
10	0	$5.46103 \cdot 10^{-14}$	$2.7832 \cdot 10^{-15}$
10	1	$1.43296 \cdot 10^{-13}$	$7.30302 \cdot 10^{-15}$
10	2	$3.46274 \cdot 10^{-12}$	$1.76478 \cdot 10^{-13}$
10	3	$1.29306 \cdot 10^{-11}$	$6.59007 \cdot 10^{-13}$
10	4	$3.44677 \cdot 10^{-10}$	$1.75664 \cdot 10^{-11}$
10	5	$1.29248 \cdot 10^{-9}$	$6.5871 \cdot 10^{-11}$
10	6	$3.30301 \cdot 10^{-8}$	$1.68337 \cdot 10^{-9}$
10	7	$5.74436 \cdot 10^{-7}$	$2.92759 \cdot 10^{-8}$
10	8	$8.32931 \cdot 10^{-6}$	$4.24501 \cdot 10^{-7}$
10	9	$1.43609 \cdot 10^{-6}$	$7.31898 \cdot 10^{-8}$
50	0	$1.14086 \cdot 10^{-12}$	$5.50651 \cdot 10^{-15}$
50	1	$4.26714 \cdot 10^{-13}$	$2.0596 \cdot 10^{-15}$
50	2	$2.93195 \cdot 10^{-10}$	$1.41515 \cdot 10^{-12}$
50	3	$2.0648 \cdot 10^{-9}$	$9.96604 \cdot 10^{-12}$
50	4	$6.88083 \cdot 10^{-9}$	$3.32113 \cdot 10^{-11}$
50	5	$1.4312 \cdot 10^{-7}$	$6.90788 \cdot 10^{-10}$
50	6	$1.83487 \cdot 10^{-8}$	$8.85625 \cdot 10^{-11}$
50	7	$2.38532 \cdot 10^{-5}$	$1.15131 \cdot 10^{-7}$
50	8	0.000193578	$9.34332 \cdot 10^{-7}$
50	9	0.00413754	$1.99704 \cdot 10^{-5}$
100	0	$9.65618 \cdot 10^{-12}$	$1.66005 \cdot 10^{-14}$
100	1	$1.06903 \cdot 10^{-10}$	$1.83783 \cdot 10^{-13}$
100	2	$6.80943 \cdot 10^{-10}$	$1.17065 \cdot 10^{-12}$
100	3	$9.96402 \cdot 10^{-9}$	$1.71298 \cdot 10^{-11}$
100	4	$4.38007 \cdot 10^{-8}$	$7.53005 \cdot 10^{-11}$
100	5	$1.54526 \cdot 10^{-6}$	$2.65656 \cdot 10^{-9}$
100	6	$1.16246 \cdot 10^{-6}$	$1.99846 \cdot 10^{-9}$
100	7	$6.24677 \cdot 10^{-5}$	$1.07392 \cdot 10^{-7}$

100	8	0.0003323	$5.71277 \cdot 10^{-7}$
100	9	0.00224864	$3.86579 \cdot 10^{-6}$
500	0	$1.59548 \cdot 10^{-11}$	$2.46801 \cdot 10^{-15}$
500	1	$3.26512 \cdot 10^{-9}$	$5.05073 \cdot 10^{-13}$
500	2	$1.2449 \cdot 10^{-7}$	$1.9257 \cdot 10^{-11}$
500	3	$5.4828 \cdot 10^{-8}$	$8.4812 \cdot 10^{-12}$
500	4	$1.14655 \cdot 10^{-5}$	$1.77358 \cdot 10^{-9}$
500	5	$6.59951 \cdot 10^{-5}$	$1.02086 \cdot 10^{-8}$
500	6	0.000661574	$1.02337 \cdot 10^{-7}$
500	7	0.0112052	$1.73331 \cdot 10^{-6}$
500	8	0.0891671	$1.3793 \cdot 10^{-5}$
500	9	0.635155	$9.82504 \cdot 10^{-5}$
1000	0	$2.48326 \cdot 10^{-8}$	$1.35912 \cdot 10^{-12}$
1000	1	$1.55912 \cdot 10^{-8}$	$8.53328 \cdot 10^{-13}$
1000	2	$3.0785 \cdot 10^{-7}$	$1.6849 \cdot 10^{-11}$
1000	3	$1.72248 \cdot 10^{-5}$	$9.42737 \cdot 10^{-10}$
1000	4	$2.15435 \cdot 10^{-5}$	$1.1791 \cdot 10^{-9}$
1000	5	0.00109214	$5.97744 \cdot 10^{-8}$
1000	6	0.0157364	$8.6127 \cdot 10^{-7}$
1000	7	0.0697018	$3.81486 \cdot 10^{-6}$
1000	8	0.843813	$4.61829 \cdot 10^{-5}$
1000	9	1.70491	$9.33118 \cdot 10^{-5}$

Можно заметить, что точность значительно уменьшается при увеличении как размерности пространства, так и числа k. Накопление погрешности происходит из-за слагаемого 10^{-k}, при уменьшении которого, теряется точность вычислений. Стоит заметить что при больших размерностях точность теряется быстрее, из-за прибавление 10^{-k} к большому числу, которое растет с увеличением размерности матрицы.

2.1.2 Тестирование на матрицах Гильберта

n	$\|x^* - x_k\|$	$\frac{\|x^*-x_k\|}{\|x^*\|}$
10	$8.25036 \cdot 10^{-9}$	$4.20477 \cdot 10^{-10}$
50	$7.52844 \cdot 10^{-7}$	$3.63371 \cdot 10^{-9}$
100	$3.95193 \cdot 10^{-6}$	$6.79401 \cdot 10^{-9}$
500	0.000432803	$6.69491 \cdot 10^{-8}$
1000	0.00435918	$2.38583 \cdot 10^{-7}$

Тестирование на матрицах Гильберта также показывает уменьшении точности решения с увеличением размерности, из-за того что деление на большие числа приводит к уменьшению точности вычисляемого элемента.

2.2 Метод Гаусса с выбором ведущего элемента

2.2.1 Тестирование на матрицах с диагональным преобладание

n	k	$\|x^* - x_k\|$	$\frac{\|x^*-x_k\|}{\|x^*\|}$
10	0	$6.32562 \cdot 10^{-14}$	$3.22384 \cdot 10^{-15}$
10	1	$1.60765 \cdot 10^{-13}$	$8.19336 \cdot 10^{-15}$
10	2	$2.30718 \cdot 10^{-12}$	$1.17585 \cdot 10^{-13}$
10	3	$1.2928 \cdot 10^{-11}$	$6.58874 \cdot 10^{-13}$
10	4	$7.32431 \cdot 10^{-10}$	$3.73281 \cdot 10^{-11}$
10	5	$4.16467 \cdot 10^{-9}$	$2.12251 \cdot 10^{-10}$
10	6	$7.18045 \cdot 10^{-9}$	$3.6595 \cdot 10^{-10}$
10	7	$1.43609 \cdot 10^{-7}$	$7.31899 \cdot 10^{-9}$
10	8	$5.45714 \cdot 10^{-6}$	$2.78121 \cdot 10^{-7}$

10	9	$1.00526 \cdot 10^{-5}$	$5.12329 \cdot 10^{-7}$
50	0	$3.39627 \cdot 10^{-12}$	$1.63926 \cdot 10^{-14}$
50	1	$7.07182 \cdot 10^{-11}$	$3.41331 \cdot 10^{-13}$
50	2	$6.73371 \cdot 10^{-10}$	$3.25012 \cdot 10^{-12}$
50	3	$1.86195 \cdot 10^{-8}$	$8.98695 \cdot 10^{-11}$
50	4	$5.47724 \cdot 10^{-8}$	$2.64366 \cdot 10^{-10}$
50	5	$9.17442 \cdot 10^{-9}$	$4.42816 \cdot 10^{-11}$
50	6	$4.27524 \cdot 10^{-6}$	$2.0635 \cdot 10^{-8}$
50	7	$3.20184 \cdot 10^{-5}$	$1.54541 \cdot 10^{-7}$
50	8	0.0010422	$5.03031 \cdot 10^{-6}$
50	9	0.00196329	$9.4761 \cdot 10^{-6}$
100	0	$9.19552 \cdot 10^{-12}$	$1.58086 \cdot 10^{-14}$
100	1	$1.67913 \cdot 10^{-10}$	$2.8867 \cdot 10^{-13}$
100	2	$5.97625 \cdot 10^{-11}$	$1.02741 \cdot 10^{-13}$
100	3	$3.8314 \cdot 10^{-9}$	$6.5868 \cdot 10^{-12}$
100	4	$5.50153 \cdot 10^{-8}$	$9.45803 \cdot 10^{-11}$
100	5	$2.62084 \cdot 10^{-6}$	$4.50565 \cdot 10^{-9}$
100	6	$9.08835 \cdot 10^{-6}$	$1.56243 \cdot 10^{-8}$
100	7	0.000175778	$3.02191 \cdot 10^{-7}$
100	8	0.000469095	$8.06451 \cdot 10^{-7}$
100	9	0.00579465	$9.96195 \cdot 10^{-6}$
500	0	$4.74104 \cdot 10^{-9}$	$7.33379 \cdot 10^{-13}$
500	1	$5.09336 \cdot 10^{-8}$	$7.87879 \cdot 10^{-12}$
500	2	$2.70421 \cdot 10^{-7}$	$4.18307 \cdot 10^{-11}$
500	3	$4.62975 \cdot 10^{-6}$	$7.16164 \cdot 10^{-10}$
500	4	$3.53666 \cdot 10^{-5}$	$5.47076 \cdot 10^{-9}$
500	5	0.000144481	$2.23495 \cdot 10^{-8}$
500	6	0.000741575	$1.14712 \cdot 10^{-7}$
500	7	0.0285386	$4.41456 \cdot 10^{-6}$
500	8	0.414411	$6.41041 \cdot 10^{-5}$
500	9	5.06399	0.000783335
1000	0	$5.03021 \cdot 10^{-8}$	$2.75309 \cdot 10^{-12}$
1000	1	$2.34771 \cdot 10^{-8}$	$1.28493 \cdot 10^{-12}$
1000	2	$1.75109 \cdot 10^{-6}$	$9.58395 \cdot 10^{-11}$
1000	3	$4.60324 \cdot 10^{-5}$	$2.51941 \cdot 10^{-9}$
1000	4	0.000152474	$8.34511 \cdot 10^{-9}$
1000	5	0.000391032	$2.14016 \cdot 10^{-8}$
1000	6	0.116013	$6.34951 \cdot 10^{-6}$
1000	7	0.216661	$1.18581 \cdot 10^{-5}$
1000	8	2.49188	0.000136384
1000	9	33.2835	0.00182164

Здесь также можно наблюдать потерю точности при увеличении размерности и числа k. Метод гаусса работает с плотными матрицами, и требует большего числа операций, что приводит к меньшей точности результата по сравнению с прямым методом. Для больших размерностей рещультирующая погрешность полуачается достаточно большой.

2.2.2 Тестирование на матрицах Гильберта

n	$\|x^* - x_k\|$	$\frac{\|x^*-x_k\|}{\|x^*\|}$
10	$4.53743 \cdot 10^{-8}$	$2.31249 \cdot 10^{-9}$
50	$6.4107 \cdot 10^{-7}$	$3.09422 \cdot 10^{-9}$
100	$2.98603 \cdot 10^{-6}$	$5.13347 \cdot 10^{-9}$
500	0.000384986	$5.95524 \cdot 10^{-8}$
1000	0.00281381	$1.54003 \cdot 10^{-7}$

На плотных матрицах Гильберта метод Гаусса с выбором главного элемента показывает меньшую погрешность нежели прямой метод. Точность увеличивается ≈ 2 раза.

2.3 Метод сопряженных градиентов

2.3.1 Тестирование на матрицах с диагональным преобладание

n	Количество итераций	$\|x^* - x\|$	$\frac{\|x^*-x\|}{\|x^*\|}$	cond(A)
10	10	$6.47869 \cdot 10^{-13}$	$3.30185 \cdot 10^{-14}$	$4.15594 \cdot 10^{-15}$
50	43	$1.16201 \cdot 10^{-6}$	$5.60862 \cdot 10^{-9}$	$2.0595 \cdot 10^{-10}$
100	47	$4.81286 \cdot 10^{-6}$	$8.27408 \cdot 10^{-9}$	$1.69574 \cdot 10^{-10}$
1000	85	$5.06468 \cdot 10^{-5}$	$2.77196 \cdot 10^{-9}$	$1.46827 \cdot 10^{-11}$
10000	229	0.000450509	$7.80245 \cdot 10^{-10}$	$2.08225 \cdot 10^{-12}$
100000	887	0.0422235	$2.31266 \cdot 10^{-9}$	$3.11651 \cdot 10^{-12}$

2.3.2 Тестирование на матрицах с диагональным преобладание с обратным знаком недиагональных элементов

n	Количество итераций	$\|x^* - x\|$	$\frac{\|x^*-x\|}{\|x^*\|}$	cond(A)
10	10	$1.4083 \cdot 10^{-11}$	$7.17736 \cdot 10^{-13}$	$5.69149 \cdot 10^{-14}$
50	40	$9.14106 \cdot 10^{-7}$	$4.41206 \cdot 10^{-9}$	$1.63318 \cdot 10^{-10}$
100	47	$3.66297 \cdot 10^{-6}$	$6.29725 \cdot 10^{-9}$	$1.2934 \cdot 10^{-10}$
500	74	$1.5901 \cdot 10^{-5}$	$2.45969 \cdot 10^{-9}$	$2.55407 \cdot 10^{-11}$
1000	90	$5.6557 \cdot 10^{-5}$	$3.09543 \cdot 10^{-9}$	$1.64661 \cdot 10^{-11}$
10000	229	0.000560261	$9.70328 \cdot 10^{-10}$	$2.60014 \cdot 10^{-12}$
100000	891	0.638516	$3.49727 \cdot 10^{-8}$	$4.71617 \cdot 10^{-11}$

2.3.3 Тестирование на матрицах Гильберта

n	Количество итераций	$\|x^* - x\|$	$\frac{\|x^*-x\|}{\|x^*\|}$	cond(A)
10	5	0.311773	0.0158894	0.0113449
50	11	1.48018	0.00714428	0.00436366
100	14	4.02852	0.00692568	0.00412935
500	18	53.2963	0.00824426	0.00480495
1000	21	144.311	0.0078983	0.0045872

3 Выводы