

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования “Национальный исследовательский университет
ИТМО”**

Факультет информационных технологий и программирования

Направление “Прикладная математика и информатика”

Отчет к лабораторной работе №3

Методы решения систем линейных уравнений

Выполнили студенты группы М3237

Ярошевский Илья
Аникина Вероника
Крюков Александр

1 Цели работы

1. Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU -разложения
2. Провести исследование метода на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания
3. Провести исследование метода на матрицы Гильберта различной размерности
4. Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента для плотных матриц

2 Ход работы

Исходный код: <https://github.com/iliayar/MethOpt>

Матрицы с диагональным преобладанием строились так:

$$a_{ii} = \begin{cases} -\sum_{i \neq j} a_{ij} & i > 1 \\ -\sum_{i \neq j} a_{ij} + 10^{-k} & i = 1 \end{cases}$$

, где $a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3, -4\} : i \neq j$ выбиралось случайным образом. Также задавалось максимальное расстояние от главной диагонали, дальше которого все элементы были нулевыми. Это позволяет использовать меньше памяти, за счёт хранения матрицы, в которой ненулевые элементы расположены близко к главной диагонали, в профильном формате.

Матрицы Гильберта строились по формуле: $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = \overline{1, n}$. Для таких плотных матриц несущественно, в какой форме их хранить, так как в любом случае потребуется $O(n^2)$ памяти

2.1 Прямой метод

2.1.1 Оценка количества операций

Оценим количество операций умножения и деления для матрицы размера n

- Сложность LU -разложения:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} (2 \cdot \sum_{k=1}^{j-1} 1) + \sum_{k=1}^{i-1} 1 \right) &= \\ \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} (2 \cdot j) + i \right) &= \\ \sum_{i=2}^n ((i-1) \cdot i + i) &= \\ \sum_{i=2}^n (i^2) &= \\ \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - 1 \end{aligned}$$

- Сложность "прямого" хода метода Гаусса (упрощенный алгоритм, работающий только для нижнетреугольных матриц):

$$\sum_{i=1}^n \left(1 + \sum_{j=i+1}^n 2 \right) = n^2$$

- Сложность обратного хода метода Гаусса:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} 2 \right) &= \\ \sum_{i=1}^n (2 \cdot i + 1) &= \end{aligned}$$

$$n^2 + 2 \cdot n$$

Если при этом учитывать, что на главной диагонали в матрице U стоят единичные элементы, сложность составит

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (1 + \sum_{j=1}^{i-1} 1) &= \\ \sum_{i=1}^n (i + 1) &= \\ \frac{n^2}{2} + 3 \cdot \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Так как в методе каждый из вышеперечисленных алгоритмов выполняется ровно по одному разу, итоговое количество операций составит:

$$\frac{n^3}{3} + 2 \cdot n^2 + 5 \cdot \frac{n}{3} - 1$$

2.1.2 Тестирование на матрицах с диагональным преобладание

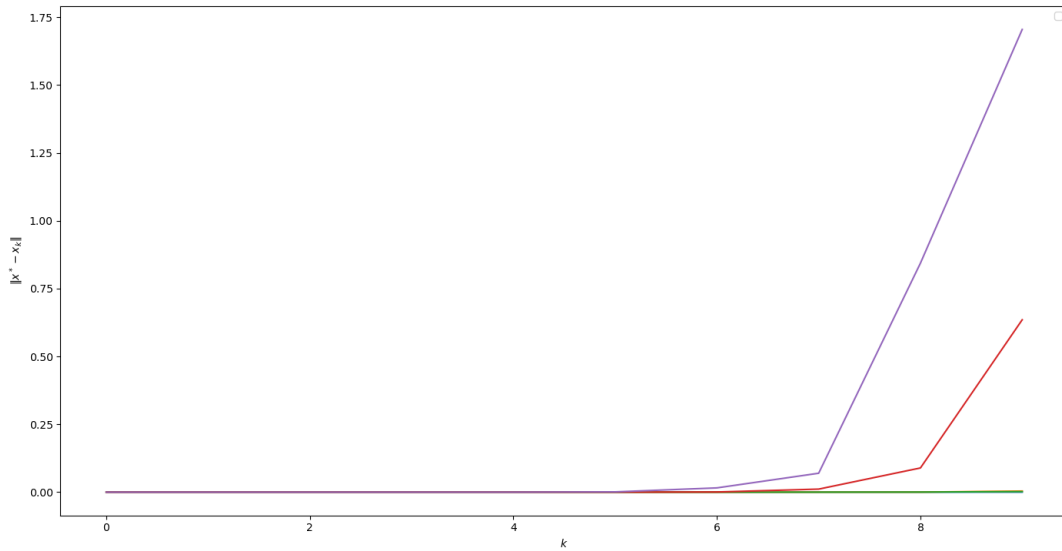


Рис. 1: Зависимость точности решения от числа k

n	k	$\ x^* - x_k\ $	$\frac{\ x^* - x_k\ }{\ x^*\ }$	Количество операций
10	0	$5.46103 \cdot 10^{-14}$	$2.7832 \cdot 10^{-15}$	549
10	1	$1.43296 \cdot 10^{-13}$	$7.30302 \cdot 10^{-15}$	
10	2	$3.46274 \cdot 10^{-12}$	$1.76478 \cdot 10^{-13}$	
10	3	$1.29306 \cdot 10^{-11}$	$6.59007 \cdot 10^{-13}$	
10	4	$3.44677 \cdot 10^{-10}$	$1.75664 \cdot 10^{-11}$	
10	5	$1.29248 \cdot 10^{-9}$	$6.5871 \cdot 10^{-11}$	
10	6	$3.30301 \cdot 10^{-8}$	$1.68337 \cdot 10^{-9}$	
10	7	$5.74436 \cdot 10^{-7}$	$2.92759 \cdot 10^{-8}$	
10	8	$8.32931 \cdot 10^{-6}$	$4.24501 \cdot 10^{-7}$	
10	9	$1.43609 \cdot 10^{-6}$	$7.31898 \cdot 10^{-8}$	
50	0	$1.14086 \cdot 10^{-12}$	$5.50651 \cdot 10^{-15}$	$4.6749 \cdot 10^4$
50	1	$4.26714 \cdot 10^{-13}$	$2.0596 \cdot 10^{-15}$	
50	2	$2.93195 \cdot 10^{-10}$	$1.41515 \cdot 10^{-12}$	
50	3	$2.0648 \cdot 10^{-9}$	$9.96604 \cdot 10^{-12}$	
50	4	$6.88083 \cdot 10^{-9}$	$3.32113 \cdot 10^{-11}$	

50	5	$1.4312 \cdot 10^{-7}$	$6.90788 \cdot 10^{-10}$	
50	6	$1.83487 \cdot 10^{-8}$	$8.85625 \cdot 10^{-11}$	
50	7	$2.38532 \cdot 10^{-5}$	$1.15131 \cdot 10^{-7}$	
50	8	0.000193578	$9.34332 \cdot 10^{-7}$	
50	9	0.00413754	$1.99704 \cdot 10^{-5}$	
100	0	$9.65618 \cdot 10^{-12}$	$1.66005 \cdot 10^{-14}$	$3.53499 \cdot 10^6$
100	1	$1.06903 \cdot 10^{-10}$	$1.83783 \cdot 10^{-13}$	
100	2	$6.80943 \cdot 10^{-10}$	$1.17065 \cdot 10^{-12}$	
100	3	$9.96402 \cdot 10^{-9}$	$1.71298 \cdot 10^{-11}$	
100	4	$4.38007 \cdot 10^{-8}$	$7.53005 \cdot 10^{-11}$	
100	5	$1.54526 \cdot 10^{-6}$	$2.65656 \cdot 10^{-9}$	
100	6	$1.16246 \cdot 10^{-6}$	$1.99846 \cdot 10^{-9}$	
100	7	$6.24677 \cdot 10^{-5}$	$1.07392 \cdot 10^{-7}$	
100	8	0.0003323	$5.71277 \cdot 10^{-7}$	
100	9	0.00224864	$3.86579 \cdot 10^{-6}$	
500	0	$1.59548 \cdot 10^{-11}$	$2.46801 \cdot 10^{-15}$	$4.2167499 \cdot 10^7$
500	1	$3.26512 \cdot 10^{-9}$	$5.05073 \cdot 10^{-13}$	
500	2	$1.2449 \cdot 10^{-7}$	$1.9257 \cdot 10^{-11}$	
500	3	$5.4828 \cdot 10^{-8}$	$8.4812 \cdot 10^{-12}$	
500	4	$1.14655 \cdot 10^{-5}$	$1.77358 \cdot 10^{-9}$	
500	5	$6.59951 \cdot 10^{-5}$	$1.02086 \cdot 10^{-8}$	
500	6	0.000661574	$1.02337 \cdot 10^{-7}$	
500	7	0.0112052	$1.73331 \cdot 10^{-6}$	
500	8	0.0891671	$1.3793 \cdot 10^{-5}$	
500	9	0.635155	$9.82504 \cdot 10^{-5}$	
1000	0	$2.48326 \cdot 10^{-8}$	$1.35912 \cdot 10^{-12}$	$3.35334999 \cdot 10^8$
1000	1	$1.55912 \cdot 10^{-8}$	$8.53328 \cdot 10^{-13}$	
1000	2	$3.0785 \cdot 10^{-7}$	$1.6849 \cdot 10^{-11}$	
1000	3	$1.72248 \cdot 10^{-5}$	$9.42737 \cdot 10^{-10}$	
1000	4	$2.15435 \cdot 10^{-5}$	$1.1791 \cdot 10^{-9}$	
1000	5	0.00109214	$5.97744 \cdot 10^{-8}$	
1000	6	0.0157364	$8.6127 \cdot 10^{-7}$	
1000	7	0.0697018	$3.81486 \cdot 10^{-6}$	
1000	8	0.843813	$4.61829 \cdot 10^{-5}$	
1000	9	1.70491	$9.33118 \cdot 10^{-5}$	

Можно заметить, что точность значительно уменьшается при увеличении как размерности пространства, так и числа k . Накопление погрешности происходит из-за слагаемого 10^{-k} , при уменьшении которого теряется точность вычислений. Стоит заметить, что при больших размерностях точность теряется быстрее, из-за прибавления 10^{-k} к большому числу, которое растет с увеличением размерности матрицы.

2.1.3 Тестирование на матрицах Гильберта

n	$\ x^* - x_k\ $	$\frac{\ x^* - x_k\ }{\ x^*\ }$
10	$8.25036 \cdot 10^{-9}$	$4.20477 \cdot 10^{-10}$
50	$7.52844 \cdot 10^{-7}$	$3.63371 \cdot 10^{-9}$
100	$3.95193 \cdot 10^{-6}$	$6.79401 \cdot 10^{-9}$
500	0.000432803	$6.69491 \cdot 10^{-8}$
1000	0.00435918	$2.38583 \cdot 10^{-7}$

Тестирование на матрицах Гильберта также показывает уменьшение точности решения с увеличением размерности, из-за того что деление на большие числа приводит к уменьшению точности вычисляемого элемента.

2.2 Метод Гаусса с выбором ведущего элемента

2.2.1 Оценка количества операций

Для матрицы размера n количество операций при решении уравнения методом Гаусса с выбором ведущего элемента будет равно:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (2 + \sum_{k=i+1}^n 1) + n^2 + 2 \cdot n = \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (2 + n - i) + n^2 + 2 \cdot n = \\
 & \sum_{i=1}^n (n - i) \cdot (2 + n - i) + n^2 + 2 \cdot n = \\
 & \frac{n \cdot (2 \cdot n^2 + \frac{n^2}{2} + 7 \cdot \frac{n}{6})}{6} + n^2 + 2 \cdot n = \\
 & \frac{n^3}{3} + 3 \cdot \frac{n^2}{2} + 7 \cdot \frac{n}{6}
 \end{aligned}$$

2.2.2 Тестирование на матрицах с диагональным преобладание

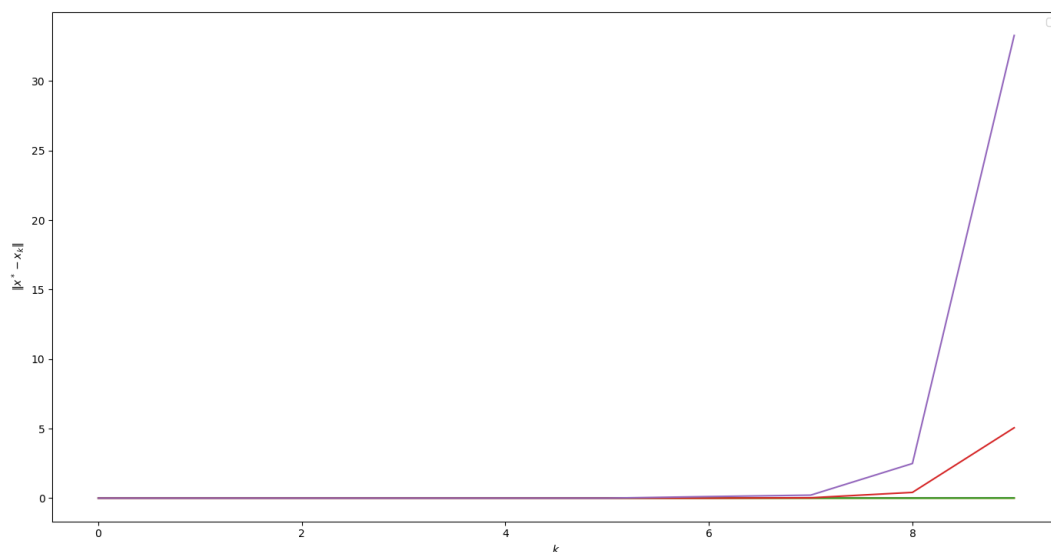


Рис. 2: Зависимость точности решения от числа k

n	k	$\ x^* - x_k\ $	$\frac{\ x^* - x_k\ }{\ x^*\ }$	Количество операций
10	0	$6.32562 \cdot 10^{-14}$	$3.22384 \cdot 10^{-15}$	195
10	1	$1.60765 \cdot 10^{-13}$	$8.19336 \cdot 10^{-15}$	
10	2	$2.30718 \cdot 10^{-12}$	$1.17585 \cdot 10^{-13}$	
10	3	$1.2928 \cdot 10^{-11}$	$6.58874 \cdot 10^{-13}$	
10	4	$7.32431 \cdot 10^{-10}$	$3.73281 \cdot 10^{-11}$	
10	5	$4.16467 \cdot 10^{-9}$	$2.12251 \cdot 10^{-10}$	
10	6	$7.18045 \cdot 10^{-9}$	$3.6595 \cdot 10^{-10}$	
10	7	$1.43609 \cdot 10^{-7}$	$7.31899 \cdot 10^{-9}$	
10	8	$5.45714 \cdot 10^{-6}$	$2.78121 \cdot 10^{-7}$	
10	9	$1.00526 \cdot 10^{-5}$	$5.12329 \cdot 10^{-7}$	

50	0	$3.39627 \cdot 10^{-12}$	$1.63926 \cdot 10^{-14}$	$3.7975 \cdot 10^4$
50	1	$7.07182 \cdot 10^{-11}$	$3.41331 \cdot 10^{-13}$	
50	2	$6.73371 \cdot 10^{-10}$	$3.25012 \cdot 10^{-12}$	
50	3	$1.86195 \cdot 10^{-8}$	$8.98695 \cdot 10^{-11}$	
50	4	$5.47724 \cdot 10^{-8}$	$2.64366 \cdot 10^{-10}$	
50	5	$9.17442 \cdot 10^{-9}$	$4.42816 \cdot 10^{-11}$	
50	6	$4.27524 \cdot 10^{-6}$	$2.0635 \cdot 10^{-8}$	
50	7	$3.20184 \cdot 10^{-5}$	$1.54541 \cdot 10^{-7}$	
50	8	0.0010422	$5.03031 \cdot 10^{-6}$	
50	9	0.00196329	$9.4761 \cdot 10^{-6}$	
100	0	$9.19552 \cdot 10^{-12}$	$1.58086 \cdot 10^{-14}$	$3.1845 \cdot 10^5$
100	1	$1.67913 \cdot 10^{-10}$	$2.8867 \cdot 10^{-13}$	
100	2	$5.97625 \cdot 10^{-11}$	$1.02741 \cdot 10^{-13}$	
100	3	$3.8314 \cdot 10^{-9}$	$6.5868 \cdot 10^{-12}$	
100	4	$5.50153 \cdot 10^{-8}$	$9.45803 \cdot 10^{-11}$	
100	5	$2.62084 \cdot 10^{-6}$	$4.50565 \cdot 10^{-9}$	
100	6	$9.08835 \cdot 10^{-6}$	$1.56243 \cdot 10^{-8}$	
100	7	0.000175778	$3.02191 \cdot 10^{-7}$	
100	8	0.000469095	$8.06451 \cdot 10^{-7}$	
100	9	0.00579465	$9.96195 \cdot 10^{-6}$	
500	0	$4.74104 \cdot 10^{-9}$	$7.33379 \cdot 10^{-13}$	$4.129225 \cdot 10^7$
500	1	$5.09336 \cdot 10^{-8}$	$7.87879 \cdot 10^{-12}$	
500	2	$2.70421 \cdot 10^{-7}$	$4.18307 \cdot 10^{-11}$	
500	3	$4.62975 \cdot 10^{-6}$	$7.16164 \cdot 10^{-10}$	
500	4	$3.53666 \cdot 10^{-5}$	$5.47076 \cdot 10^{-9}$	
500	5	0.000144481	$2.23495 \cdot 10^{-8}$	
500	6	0.000741575	$1.14712 \cdot 10^{-7}$	
500	7	0.0285386	$4.41456 \cdot 10^{-6}$	
500	8	0.414411	$6.41041 \cdot 10^{-5}$	
500	9	5.06399	0.000783335	
1000	0	$5.03021 \cdot 10^{-8}$	$2.75309 \cdot 10^{-12}$	$3.318345 \cdot 10^8$
1000	1	$2.34771 \cdot 10^{-8}$	$1.28493 \cdot 10^{-12}$	
1000	2	$1.75109 \cdot 10^{-6}$	$9.58395 \cdot 10^{-11}$	
1000	3	$4.60324 \cdot 10^{-5}$	$2.51941 \cdot 10^{-9}$	
1000	4	0.000152474	$8.34511 \cdot 10^{-9}$	
1000	5	0.000391032	$2.14016 \cdot 10^{-8}$	
1000	6	0.116013	$6.34951 \cdot 10^{-6}$	
1000	7	0.216661	$1.18581 \cdot 10^{-5}$	
1000	8	2.49188	0.000136384	
1000	9	33.2835	0.00182164	

Здесь так же можно наблюдать потерю точности при увеличении размерности и числа k . Метод Гаусса работает с плотными матрицами, и требует большего числа операций, что приводит к меньшей точности результата по сравнению с прямым методом. Для больших размерностей результирующая погрешность получается достаточно существенной.

2.2.3 Замечание про накопление погрешности

При использовании метода Гаусса (как прямого, так и его модификации) при фиксированном значении k будет наблюдаться скачкообразный рост накопления погрешности при росте n . Это связано с тем, что в методах используется $O(n^3)$ операций умножения и деления над числами с плавающей точкой, которые и являются основной причиной большой погрешности этих методов.

2.2.4 Тестирование на матрицах Гильберта

n	$\ x^* - x_k\ $	$\frac{\ x^* - x_k\ }{\ x^*\ }$
-----	-----------------	---------------------------------

10	$4.53743 \cdot 10^{-8}$	$2.31249 \cdot 10^{-9}$
50	$6.4107 \cdot 10^{-7}$	$3.09422 \cdot 10^{-9}$
100	$2.98603 \cdot 10^{-6}$	$5.13347 \cdot 10^{-9}$
500	0.000384986	$5.95524 \cdot 10^{-8}$
1000	0.00281381	$1.54003 \cdot 10^{-7}$

На плотных матрицах Гильберта метод Гаусса с выбором главного элемента показывает меньшую погрешность, чем прямой метод. Точность увеличивается в ≈ 2 раза.

2.3 Метод сопряженных градиентов

Для тестирования метода сопряженных градиентов применялся следующий метод генерирования матриц с диагональным преобладанием:

$$a_{ii} = \begin{cases} \sum_{i \neq j} a_{ij} & i > 1 \\ \sum_{i \neq j} a_{ij} + 1 & i = 1 \end{cases}$$

, где a_{ij} и расстояние от главной диагонали выбирались так же, как и для методов Гаусса. Аналогичным образом генерировались матрицы с обратным знаком внедиагональных элементов для тестирования метода Сопряженных градиентов.

2.3.1 Тестирование на матрицах с диагональным преобладанием

n	Количество итераций	$\ x^* - x\ $	$\frac{\ x^* - x\ }{\ x^*\ }$	$\text{cond}(A)$
10	10	$6.52282 \cdot 10^{-13}$	$3.32434 \cdot 10^{-14}$	0.0638468
50	41	$8.95982 \cdot 10^{-7}$	$4.32458 \cdot 10^{-9}$	0.142443
100	44	$6.25949 \cdot 10^{-6}$	$1.07611 \cdot 10^{-8}$	0.153971
500	85	$2.94728 \cdot 10^{-5}$	$4.55907 \cdot 10^{-9}$	0.0545894
1000	82	$7.59348 \cdot 10^{-5}$	$4.156 \cdot 10^{-9}$	0.0502845
10000	238	0.000528598	$9.15489 \cdot 10^{-10}$	0.0134006
100000	909	0.00839306	$4.59704 \cdot 10^{-10}$	0.00494516

Погрешность данного метода решения СЛАУ, так же, как и в предыдущих методах, увеличивается с ростом размерности, причем точность решения сопоставима с точностью предыдущих методов. Главное преимущество данного метода в том, что он в целом работает быстрее.

2.3.2 Тестирование на матрицах с диагональным преобладанием с обратным знаком внедиагональных элементов

n	Количество итераций	$\ x^* - x\ $	$\frac{\ x^* - x\ }{\ x^*\ }$	$\text{cond}(A)$
10	10	$5.11907 \cdot 10^{-12}$	$2.60892 \cdot 10^{-13}$	0.866552
50	28	$7.79714 \cdot 10^{-5}$	$3.7634 \cdot 10^{-7}$	4.77355
100	29	0.000204195	$3.51045 \cdot 10^{-7}$	3.81639
500	28	0.00174227	$2.69507 \cdot 10^{-7}$	4.77378
1000	32	0.0122171	$6.68658 \cdot 10^{-7}$	7.86291
10000	38	0.235374	$4.07649 \cdot 10^{-7}$	6.09502
100000	47	7.31364	$4.00582 \cdot 10^{-7}$	5.48494

Для матриц с неотрицательными внедиагональными элементами можно наблюдать большую погрешность, но в целом меньшее количество итераций.

2.3.3 Тестирование на матрицах Гильберта

n	Количество итераций	$\ x^* - x\ $	$\frac{\ x^* - x\ }{\ x^*\ }$	$\text{cond}(A)$
10	5	0.311773	0.0158894	165700
50	11	1.48018	0.00714428	$1.02527 \cdot 10^6$
100	14	4.02852	0.00692568	804373
500	18	53.2963	0.00824426	440191
1000	21	144.311	0.0078983	421074

На плотных матрицах метод сопряженных градиентов даёт очень большую погрешность, причем она довольно быстро растет с увеличением размерности матрицы. Стоит отметить, что даже на больших размерностях метод показывает достаточно малое число итераций, а следовательно, сравнительно высокую скорость работы.

3 Выводы

Самую высокую точность решения на матрицах с диагональным преобладанием показывает прямой метод Гаусса на основе LU-разложения, немного менее точен метод Гаусса с выбором главного элемента. Метод сопряженных градиентов выдает абсолютную погрешность на три порядка хуже, чем два других метода. На произвольных плотных матрицах метод Гаусса с выбором главного элемента работает с меньшей погрешностью.

По требуемому количеству памяти на разреженных матрицах лучше всего показывает себя прямой метод Гаусса, так как ему достаточно матрицы в профильной форме. На разреженных симметричных матрицах метод сопряженных градиентов так же требует малое количество памяти.

По количеству действий метод сопряженных градиентов на больших размерностях показывает лучшие результаты. Построение матрицы в разреженном формате выполняется за $O(n^2)$, на каждой итерации выполняется два матрично-векторных произведения за $O(n^2)$, с учетом того что количество итераций почти всегда намного меньше размерности матрицы, общая асимптотика метода будет $O(n^2)$, тогда как другие методы имеют асимптотику $O(n^3)$.