



**Санкт-Петербургский национальный
исследовательский Академический
университет имени Ж.И. Алфёрова
Российской академии наук**

Свиридов Фёдор, Александр Слободнюк, Владимир Попов

Рабочий протокол и отчёт по лабораторной работе № 5

Цель работы. Вычислить момент инерции маятника Обербека

Задачи, решаемые при выполнении работы.

- Измерить массы грузов
- Измерить диаметр шкива
- Измерить высоту, с которой опускаются грузы
- Измерить время, за которое опускаются грузы с различной массой (маятник без грузов)
- Найти зависимость $\varepsilon(m)$ и с помощью экстраполяции определить m_0
- Вычислить момент инерции маятника без грузов
- Вычислить момент инерции маятника с грузами при различных расстояниях r
- Сделать выводы

Объект исследования. Аддитивность момента инерции I

Метод экспериментального исследования. Измерение момента инерции

Рабочие формулы и исходные данные.

$$I = \frac{gD^2}{8x}(m - m_0)t^2 \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{4x}{Dt^2} \quad (2)$$

$$\Delta\varepsilon = \sqrt{\frac{16}{D^2t^4}\Delta x^2 + \frac{16x^2}{D^4t^4}\Delta D^2 + \frac{64x^2}{D^2t^6}\Delta t^2} \quad (3)$$

$$M_{\text{сопр.}} = \frac{m_0 g D}{2} \quad (4)$$

$$I = \tilde{I} + 4\overline{m}_1 r^2 \quad (5)$$

где \tilde{I} - момент инерции барабана; D - диаметр шкива; x - высота, с которой спускается груз; t - время спуска груза; m - масса спускаемого груза; m_0 - масса груза, которая компенсирует момент силы трения (определяется косвенно)

Таблица 1: **Измерительные приборы**

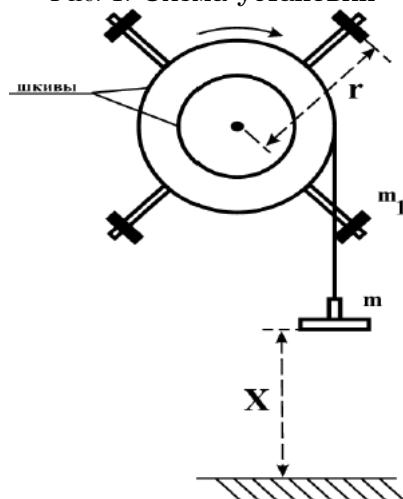
Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
Линейка	Аналоговый	5 – 60 см	0,1 см
Штангенциркуль	Цифровой	50 – 70 мм	0,02 мм
Электронные весы	Цифровой	1 – 150 г	0,01 г

Результаты прямых измерений и их обработки.

- $D = 63,37$ мм
- $x = 45,5$ см
- Средняя масса грузов, которые крепятся на стержнях:
 $\overline{m}_1 = 115,16$ г
- Маятник без грузов на стержнях

m , г	t , с
46,45	5,356
95,75	3,847
145,05	3,140
194,35	2,785

Рис. 1: Схема установки



- Маятник с грузами \overline{m}_1 на стержнях, расположенные на расстояние r от оси вращения:

r , см	m , г	t , с
27	95,75	6,941
22	95,75	6,142
17	95,75	5,063

Погрешности измерений.

- $\Delta m = 0,01$ г
- $\Delta t = 0,001$ с
- $\Delta x = 1$ см
- $\Delta D = 0,02$ мм
- $\Delta r = 1$ см

Расчет результатов косвенных измерений.

- Вычисление m_0

– Пользуясь [формулой \(2\)](#), находим ε :

$$\varepsilon_1 = \frac{4 \cdot 0,455}{63,37 \cdot 10^{-3} \cdot (5,356)^2} \approx 1 \text{ (с}^{-2}\text{)}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{4 \cdot 0,455}{63,37 \cdot 10^{-3} \cdot (3,847)^2} \approx 1,94 \text{ (с}^{-2}\text{)}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{4 \cdot 0,455}{63,37 \cdot 10^{-3} \cdot (3,140)^2} \approx 2,91 \text{ (с}^{-2}\text{)}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{4 \cdot 0,455}{63,37 \cdot 10^{-3} \cdot (2,785)^2} \approx 3,7 \text{ (с}^{-2}\text{)}$$

– Пользуясь [формулой \(3\)](#), находим погрешность $\Delta\varepsilon$:

№	$\Delta\varepsilon, \text{ с}^{-2}$
1	0,02
2	0,04
3	0,06
4	0,08

– В итоге:

№	$m, \text{ г}$	$\varepsilon, \text{ с}^{-2}$
1	$46,45 \pm 0,01$	$1,00 \pm 0,02$
2	$95,75 \pm 0,01$	$1,94 \pm 0,04$
3	$145,05 \pm 0,01$	$2,91 \pm 0,06$
4	$194,35 \pm 0,01$	$3,70 \pm 0,08$

– С помощью метода наименьших квадратов находим m_0 :

$$f(k, b) = (\varepsilon_1 - (km_1 + b))^2 + (\varepsilon_2 - (km_2 + b))^2 + (\varepsilon_3 - (km_3 + b))^2 + (\varepsilon_4 - (km_4 + b))^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial k} = -2m_1(\varepsilon_1 - km_1 - b) - 2m_2(\varepsilon_2 - km_2 - b) - 2m_3(\varepsilon_3 - km_3 - b) - 2m_4(\varepsilon_4 - km_4 - b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b} = -2(\varepsilon_1 - km_1 - b) - 2(\varepsilon_2 - km_2 - b) - 2(\varepsilon_3 - km_3 - b) - 2(\varepsilon_4 - km_4 - b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + m_3\varepsilon_3 + m_4\varepsilon_4) - 2k(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) - 2b(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = 0 \\ 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) - 2k(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) - 8b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2,75 \pm 0,03) - (0,140274 \pm 0,000019)k - (0,96320 \pm 0,00008)b = 0 \\ (19,1 \pm 0,4) - (0,96320 \pm 0,00008)k - 8b = 0 \end{cases}$$

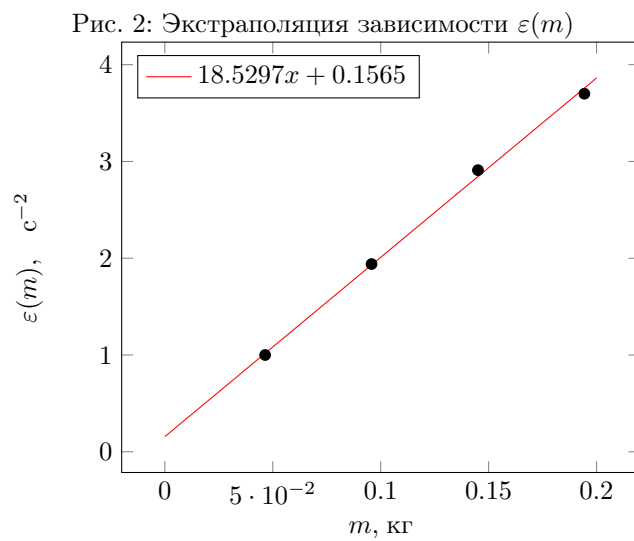
$$\begin{cases} k = 18,5297 \pm 2,3345 \\ b = 0,1565 \pm 0,3246 \end{cases}$$

$$m_0 = -\frac{b}{k}$$

$$\boxed{m_0 = (-8 \pm 18) \cdot 10^{-3} \text{ кг}}$$

По [формуле \(4\)](#):

$$M_{\text{сопр.}} = (-2 \pm 6) \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$$



- Момент инерции барабана \tilde{I} (1):

m , г	t , с	\tilde{I} , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$
46,45	5,356	$(17 \pm 6) \cdot 10^{-3}$
95,75	3,847	$(16,6 \pm 2,9) \cdot 10^{-3}$
145,05	3,140	$(16,3 \pm 1,8) \cdot 10^{-3}$
194,35	2,785	$(17,0 \pm 1,6) \cdot 10^{-3}$

$$\tilde{I} \approx (17 \pm 6) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Окончательные результаты.

- Момент инерции маятника по формуле (5):

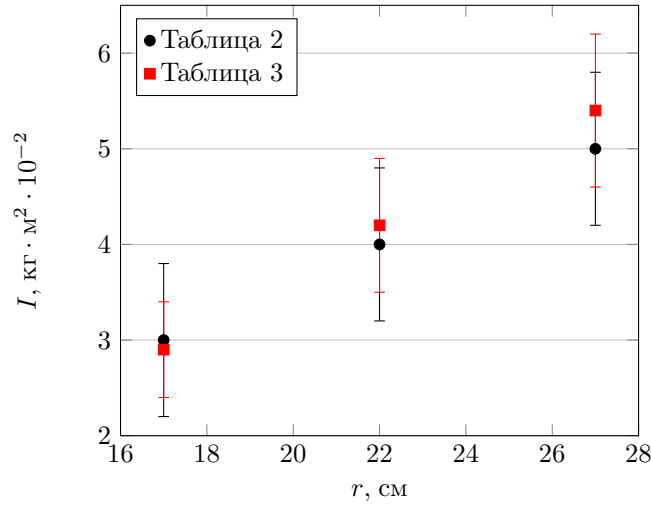
Таблица 2

r , см	I , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$
27	$(5,0 \pm 0,8) \cdot 10^{-2}$
22	$(4,0 \pm 0,8) \cdot 10^{-2}$
17	$(3,0 \pm 0,8) \cdot 10^{-2}$

- Момент инерции маятника по формуле (1)

Таблица 3

r , см	I , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$
27	$(5,4 \pm 0,8) \cdot 10^{-2}$
22	$(4,2 \pm 0,7) \cdot 10^{-2}$
17	$(2,9 \pm 0,5) \cdot 10^{-2}$



Выводы и анализ результатов. Мы косвенно измерили момент инерции маятника Обербека двумя способами, пользуясь формулами (1) и (5). И, к счастью, погрешности этих значений перекрываются. Это означает, что формула (5) верна по отношению к формуле (1), а из этого следует, что момент инерции - аддитивная величина.

В наших вычислениях встречается одна неприятность: m_0 имеет отрицательное значение. Так выходит из-за того, что экстраполируя m_0 получается большая погрешность, и вдобавок момент силы сопротивления очень мал, около $2 \cdot 10^{-3}$ Н · м (соответственно m_0 в окрестности нуля).

Стоит также отметить, что в погрешности не было учтено, что в действительности зависимость $\varepsilon(m)$ не линейная: $\varepsilon(m) = \frac{mgR - M_{\text{сопр}}}{I + mR^2}$. Но в нашем опыте слагаемое mR^2 мало, что позволяет нам использовать линейную экстраполяцию для нахождения m_0 .