應用子網路擴張流量方法求解最大流量問題之研究

李俊賢

成功大學工業與資訊管理學系碩士班

最大流量問題為一基本之網路最佳化問題，旨在於一具有流量上限的網路中尋找從起點到訖點間可流通之最大可能流量，此問題已有超過五十年以上的研究歷史。傳統的最大流量演算法大致可分為兩大類：其一為不斷自起點找出一條可擴張流量至訖點之擴張路徑來擴張流量；而另一則為先塞滿起點連結出去之弧，允許節點暫存流量，再將具有暫存流量的節點沿其鄰近之一條可行弧逐次擴張流量於其鄰近點，直至所有之暫存流量擴張至訖點或返回起點而止。這些解法在每次擴張流量時，皆僅能沿網路圖之單一路徑或單一弧進行，本論文以能一次即利用網路中所有的可行弧來擴張流量為目標，使用最短路徑所建構之子網路架構來擴張流量,提出三個新的具多項式時間複雜度之最大流量演算法。

第一個最大流量演算法根據可行子網路中各弧殘餘流量上限的比例來分配每次之擴張流量，稱為proportional arc augmenting (PAA) 演算法。PAA演算法依據可行子網路中各節點所連結出去之可行弧的殘餘流量上限比例，計算出該子網路所有弧之擴張流量向量δ，再根據此擴張流量向量計算出該次從起點到訖點之擴張流量，此種等比例擴張流量方式符合具較大流量上限之弧能擴張更多流量的直覺，並保證每次至少可塞滿一個節點。在一個具有n個節點及m條弧的網路上，PAA演算法可在$O(n^2m)$時間內算出其最大流量。此外，本論文亦提出一些加速PAA演算法實作效率之方法。第二個最大流量演算法稱為flow splitting augmenting (FSA) 演算法，旨在以平分流量的方式，快速地將子網路中各節點所接收之流量依其連結出去之弧個數來平均分配，如此可保證每次擴張流量時至少會塞滿一條可行弧。在理論複雜度上，FSA演算法可在$O(nm^2)$時間內算出其最大流量。第三個最大流量演算法以求解線性規劃時可避免退化問題之最小平方對偶-主 (least-squares dual-primal, LSDP)演算法為基礎，在最短路徑所建構之子網路架構上使用電路學的克西荷夫定律，計算子網路中每弧應該推送之單位流量比例以擴張流量，稱modified least-squares dual-primal (MLSDP)演算法。此演算法每次亦可保證塞滿一條節線，並可在$O(nm^5)$時間內算出其最大流量，解決了先前文獻中無法推估如何運用LSDP法求解最大流量問題之理論複雜度問題。由於此法必須重複計算克西荷夫定律之稀疏矩陣線性聯立方程式，因此在實作上我們亦使用專業的聯立方程式求解軟體以加快求解效率。

本論文所提出之三種最大流量演算法皆可能會得到非整數之最佳流量，因此我們提出一個流量分解的方式，以在$O(m^2)$時間內將其轉換為整數最佳流量。在求解效率測試上，我們將所提出之演算法與現今最常見之數種最大流量演算法在不同的模擬測試網路上做求解時間及運算次數之比較。測試結果顯示，雖然此三種新的演算法在平均求解表現上並不十分突出，我們仍可發現其求解機制可能會對某些特殊網路架構有利。最後，我們提出數種演算法效率改善之可能作法，並建議一些具挑戰性的未來研究方向。

***關鍵字*：** 最大流量問題、網路最佳化、擴張流量、克西荷夫定律、最小平方對偶-主、等比例擴張

論文指導教授: ***王逸琳*, ilinwang@mail.ncku.edu.tw**
http://ilin.iim.ncku.edu.tw

李俊賢 **於 2007 年就讀成大工資所碩士班，於 2009 年獲得碩士學位**