Analiza Algorytmów - Laboratorium 7

Wojciech Sęk

12 czerwca 2023

1 Zadanie 15

1.1 Wynik teoretyczny

Linia 6 wywoła się n razy + wywołania rekurencyjne. Czyli mamy:

$$f_0 = 0$$
$$f_n = n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i : \forall i > 0$$

Dodajemy sumy i z^n i mamy:

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} n z^n + \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^n$$

Teraz każdy składnik:

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n z^n = F(z)$$

Dla drugiego korzystamy z **Right Shift** i **Index Multiply**:

$$\sum_{n\geqslant 0} n z^n = z \sum_{n\geqslant 0} n z^{n-1} = z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n\geqslant 0} z^n \right) = z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Dla trzeciego korzystamy z **Right Shift** i **Partial Sum**:

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^n = 0 + \sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^n = z \sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i \right) z^{n-1} = z \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{i=0}^{n} f_i \right) z^n = z \frac{1}{1-z} F(z)$$

Otrzymujemy ostatecznie

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z} F(z)$$

Zatem

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{1-z}{1-2z} = \frac{z}{(1-2z)(1-z)}$$

A tutaj korzystając z **Convolution** i **Right Shift**:

$$F(z) = z \sum_{n\geqslant 0} z^n \cdot \sum_{n\geqslant 0} (2z)^n = z \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k 1^{n-k} \right) z^n = z \sum_{n\geqslant 0} \frac{1-2^{n+1}}{1-2} z^n = \sum_{n\geqslant 0} (2^{n+1}-1) z^{n+1} = f_0 z^0 + \sum_{n\geqslant 1} (2^n - 1) z^n$$

Czyli ostatecznie $f_n = 2^n - 1$.

1.2 Wynik eksperymentalny

W ramach eksperymentu sprawdzono wyniki dla $n \in \{0, 1, \ldots, 128\}$ i pokrywały się one z teoretycznymi.

2 Zadanie 16

2.1 Wynik teoretyczny

Wywołujemy raz i dla $i > 1$ wywołujemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} l_0 &= 1 \\ l_1 &= 1 \\ l_n &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} l_i : \forall i > 1 \end{aligned}$$

Ostatni warunek możemy zapisać równoważnie jako:

$$l_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} l_i : \forall i > 1$$

Podobnie jak w zadaniu 15 dostajemy:

$$L(z) = 1 + z + \sum_{n\geqslant 2} 2z^n + \sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} l_i\right) z^n$$

Zauważmy, że składnik $\sum_{n\geqslant 0} 2z^n$ możemy rozdzielić na dwie połówki i mamy:

$$\begin{aligned} L(z) &= 1 + z + \sum_{n\geqslant 2} z^n + \sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i\right) z^n \\ &= 1 + z + z^2\sum_{n\geqslant 0} z^n + \sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i\right) z^n \\ &= 1 + z^2\sum_{n\geqslant 0} z^n + \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i\right) z^n \\ &= 1 + z^2\sum_{n\geqslant 0} z^n + z\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i\right) z^{n-1} \\ &= 1 + z^2\sum_{n\geqslant 0} z^n + z\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i=0}^{n} l_i\right) z^n \end{aligned}$$

Teraz korzystając z **Partial Sum** mamy:

$$L(z) = 1 + \frac{z^2}{1-z} + \frac{z}{1-z}L(z)$$

Stąd

$$L(z) - zL(z) = 1 - z + z^2 + zL(z)$$

Czyli

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{1 - z + z^2}{1-2z} \\ &= \frac{1}{1-2z} - \frac{z}{1-2z} + \frac{z^2}{1-2z} \end{aligned}$$

Niech $A(z) = \frac{1}{1-2z}$, czyli $a_n = 2^n$. Wtedy:

$$L(z) = A(z) - zA(z) + z^2A(z)$$

Czyli

$$l_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n - 2^{n-1} + 2^{n-2} = (4-2+1)2^{n-2} = 3\cdot 2^{n-2}$$

2.2 Wynik eksperymentalny

W ramach eksperymentu sprawdzono wyniki dla $n \in \{0, 1, \ldots, 128\}$ i pokrywały się one z teoretycznymi.

Ponadto dla miliona prób dla $n = 10$ i losowania jak w oryginalnym algorytmie wynik średni wyniósł 766, co jest blisko 768.