Metody Optymalizacji - Laboratorium 2

Wojciech Sęk

6 maja 2023

1 Zadanie 1

1.1 Model

1.1.1 Zmienne decyzyjne

Dla m danych sposobów pocięcia standardowej deski na deski żądanych szerokości przez x_j dla $j \in [m]$ oznaczamy liczbę desek pociętych w j-ty sposób.

1.1.2 Ograniczenia

- Niech $\alpha_{j,i}$ oznacza liczbę desek rodzaju i wyciętych, gdy używamy j-tej metody cięcia deski. Niech δ_i oznacza podaż na deski rodzaju i. Suma wyprodukowanych desek danego rodzaju musi być równa podaży na dany rodzaj:

$$(\forall i \in [n]) \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \alpha_{j,i} = \delta_i \right)$$

1.2 Funkcja celu

Minimalizujemy sumę odpadów z produkcji wszystkich desek. Niech λ_i oznacza szerokość odpadu w i-tej metodzie. Funkcją celu jest wtedy

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \lambda_i$$

1.3 Wyniki

Dla standardowej deski szerokości 22 i żądania na 80 desek szerokości 3, 120 desek szerokości 5 i 110 desek szerokości 7 optymalnie będzie rozciąć deski wg następującej tabeli, gdzie i oznacza numer metody (łącznie metod było 42, pomijamy wiersze dla $x_i = 0$). Niech $\alpha_i(j)$ oznacza liczbę desek szerokości i uzyskanych w danej metodzie:

i	x_i	$x_i \cdot \alpha_i(3)$	$x_i \cdot \alpha_i(5)$	$x_i \cdot \alpha_i(7)$	$x_i \cdot \lambda_i$
26	11	0	0	33	11
33	9	45	0	9	0
37	33	0	99	33	0
39	14	14	14	28	0
42	7	21	7	7	7
Σ_i	11	80	120	110	18

Mamy wtedy resztki szerokości 18.

2 Zadanie 2

2.1 Model

2.1.1 Zmienne decyzyjne

Dla n zadań i horyzontu czasowego T wprowadzamy binarną zmienną $x_{i,j}$, która dla $i \in [n], j \in [T]$ oznacza, że zadanie i rozpoczyna się w momencie $j-1$. T to najpóźniejszy możliwy czas rozpoczęcia zadania, który równa się

$$\max_{i \in [n]} r_i + \sum_{i \in [n]} p_i + 1$$

gdzie r_i to najwcześniejszy moment rozpoczęcia zadania i a p_i to czas jego trwania. W najgorszym przypadku zadania rozpoczną się z największym opóźnieniem r, muszą trwać co najmniej tyle co suma ich wykonywania. Czynnik $+1$ wynika z tego, że $x_{*,t}$ oznacza moment $t-1$.

2.1.2 Ograniczenia

- Każde zadanie rozpoczyna się dokładnie raz:

$$(\forall i \in [n]) \left(\sum_{t \in T} x_{j,t} = 1 \right)$$

- j-te zadanie rozpoczyna się nie wcześniej niż w momencie r_j

$$(\forall j \in [n]) \left(\sum_{t \in T} (t-1) \cdot x_{j,t} \geqslant r_j \right)$$

- W dowolnym momencie czasu wykonujemy co najwyżej jedno zadanie

$$(\forall t \in [T]) \left(\sum_{j \in n} \left(\sum_{s \in \max(1, t+1-p_j)}^{t} x_{j,s} \right) \leqslant 1 \right)$$

2.2 Funkcja celu

Niech w_j oznacza wagę j-ego zadania. Minimalizujemy ważoną sumę czasów zakończenia zadań

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j \in [n]} \sum_{t \in [T]} w_j * (t - 1 + p_j) * x_{j,t}$$

2.3 Wyniki

3 Zadanie 3

3.1 Model

3.1.1 Zmienne decyzyjne

Na całym etapie produkcji podejmujemy kilka decyzji:

- Przez x_c oznaczamy liczbę ton zakupionej ropy typu $c \in C$ (w treści zadania $C = \{B1, B2\}$).
- Przez $y_{o,c}$ oznaczamy liczbę ton oleju z ropy typu $c \in C$ wykorzystanej do celu $o \in O_U$ (w treści zadania $O_U = \{domowe, ciezkie\}$, bo olej trafia albo do paliw domowych albo do paliw ciężkich).
- Przez $z_{d,c}$ oznaczamy liczbę ton destylatu z ropy typu $c \in C$ wykorzystanego do celu $d \in D_U$ (w treści zadania $D_U = \{ciezkie, krak\}$, bo destylat albo trafia do paliw ciężkich albo do krakowania).

3.1.2 Ograniczenia

Wprowadźmy ogólne oznaczenia parametrów:

- $\varepsilon_{p,c}$ - współczynnik uzyskiwania z ropy $c \in C$ produktu $p \in P_C$ (w treści zadania $P_C = \{benzyna, olej, destylat, resztki\}$)
- χ_d - współczynnik uzyskiwania produktu $d \in D_P$ w procesie krakowania destylatu (w treści zadania $D_P = \{benzyna, olej, resztki\}$)
- σ_c - udział siarki w oleju z ropy $c \in C$
- η_c - udział siarki w oleju z krakowania destylatu z ropy $c \in C$

Ograniczenia właściwe:

- Suma oleju wyprodukowanego z danego typu ropy musi równać się sumie ton tego oleju wykorzystanych do różnych celów:

$$(\forall c \in C)\left(\varepsilon_{olej,c} \cdot x_c = \sum_{o \in O_U} y_{o,c}\right)$$

- Suma destylatu wyprodukowanego z danego typu ropy musi równać się sumie ton tego destylatu wykorzystanych do różnych celów:

$$(\forall c \in C)\left(\varepsilon_{destylat,c} \cdot x_c = \sum_{d \in D_U} z_{d,c}\right)$$

- Niech $MIN_{silnikowe}$ oznacza minimalną liczbę ton paliw silnikowych do wyprodukowania. W całości procesu na paliwa silnikowe składa się benzyna ze wszystkich rodzajów ropy i z krakowania:

$$\sum_{c \in C}(\chi_{benzyna} \cdot z_{krak,c} + \varepsilon_{benzyna,c} \cdot x_c) \geqslant MIN_{silnikowe}$$

- Niech MIN_{domowe} oznacza minimalną liczbę ton domowych paliw olejowych do wyprodukowania. W całości procesu na domowe paliwa olejowe składa się olej z destylacji każdego rodzaju ropy wykorzystany do paliw domowych oraz olej z procesu krakowania destylatu:

$$\sum_{c \in C}(\chi_{olej} \cdot z_{krak,c} + y_{domowe,c}) \geqslant MIN_{domowe}$$

- Niech $MIN_{ciezkie}$ oznacza minimalną liczbę ton ciężkich paliw olejowych do wyprodukowania. W całości procesu na ciężkie paliwa olejowe składa się olej oraz destylat z destylacji każdego rodzaju ropy wykorzystane do paliw ciężkich, resztki z każdego etapu produkcji:

$$\sum c \in C(y_{ciezkie,c} + z_{ciezkie,c} + \varepsilon_{resztki,c} \cdot x_c + \chi_{resztki} \cdot z_{krak,c}) \geqslant MIN_{ciezkie}$$

- Niech MAX_S oznacza maksymalny udział siarki w domowych paliwach olejowych. Zatem ten udział przemnożony przez całość domowych paliw olejowych musi być większy lub równy od prawdziwego udziału siarki w poszczególnych produktach składających się na domowe paliwa olejowe, czyli olejach z destylacji ropy oraz olejach z krakowania:

$$\sum_{c \in C}(\sigma_c \cdot y_{domowe,c} + (\eta_c \cdot \chi_{olej} \cdot z_{krak,c})) \leqslant MAX_S \cdot \sum_{c \in C}(\chi_{olej} \cdot z_{krak,c} + y_{domowe,c})$$

3.2 Funkcja celu

Chcemy minimalizować koszt wytworzenia wszystkich paliw. Niech γ_c oznacza koszt tony ropy typu c, δ oznacza koszt destylacji tony ropy a κ oznacza koszt krakowania tony destylatu. Wtedy całkowity koszt wynosi:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{c \in C}((\gamma_c + \delta) \cdot x_c + \kappa \cdot z_{krak,c})$$

3.3 Wyniki

Optymalnym rozwiązaniem będzie zakup wyłącznie tańszej ropy, czyli ropy typu $B1$. Ostatecznie:

- Kupujemy 1026030.36876356 ton ropy $B1$
- 381561.822125814 ton oleju z destylacji ropy dodajemy do domowych paliw olejowych
- 28850.3253796095 ton oleju z destylacji ropy dodajemy do ciężkich paliw olejowych
- 92190.8893709328 ton destylatu z destylacji ropy dajemy do krakowania
- 61713.6659436009 ton destylatu z destylacji ropy dajemy do ciężkich paliw olejowych

Całkowity koszt wynosi 1345943600.86768 \$.

4 Zadanie 4

4.1 Model

4.1.1 Zmienne decyzyjne

Podejmujemy decyzje o ćwiczeniach oraz o treningach:

- Przez $x_{g,c} = 1$ oznaczamy, że bierzemy zajęcia z kursu $c \in C$ w grupie $g \in G$. W przeciwnym przypadku $x_{g,c} = 0$. W treści zadania $C = \{algebra, analiza, fizyka, chemia_min, chemia_org\}$ i $G = \{I, II, III, IV\}$.
- Przez $y_p = 1$ oznaczamy, że trenujemy w grupie treningowej $p \in P$. W przeciwnym przypadku $y_p = 0$. W treści zadania nie oznaczono tego zbioru, ale można zdefiniować $P_G = \{I, II, II\}$, które oznaczają kolejno treningi w pon 11-13 oraz w środę 11-13 i 13-15.

4.1.2 Ograniczenia

Wprowadźmy ogólne oznaczenia parametrów:

- $\sigma_{g,c}$ - oznacza godzinę rozpoczęcia zajęć z kursu $c \in C$ w grupie $g \in G$
- $\varepsilon_{g,c}$ - oznacza godzinę zakończenia zajęć z kursu $c \in C$ w grupie $g \in G$
- $\delta_{g,c} \in [1, 2, 3, 4, 5]$ - oznacza dzień zajęć z kursu $c \in C$ w grupie $g \in G$
- $\pi_{g,c}$ - oznacza punkty preferencji danych zajęć c w grupie G
- σ_p^{PE} - oznacza godzinę rozpoczęcia treningu p
- ε_p^{PE} - oznacza godzinę zakończenia treningu p
- $\delta_p^{PE} \in [1, 2, 3, 4, 5]$ - oznacza dzień treningu p

Ograniczenia właściwe:

- Każdego dnia suma trwania wszystkich zajęć jest mniejsza lub równa od czterech godzin:

$$(\forall d \in [5]) \left(\sum_{g \in G, c \in C : \delta_{g,c} = d} (\varepsilon_{g,c} - \sigma_{g,c}) \cdot x_{g,c} \leqslant 4 \right)$$

- Dla każdego kursu wybieramy dokładnie jedną grupę:

$$(\forall c \in C) \left(\sum_{g \in G} x_{g,c} = 1 \right)$$

- Student nie może brać udziału w dwóch różnych ćwiczeniach jednocześnie. Zatem jeśli dla dwóch zajęć danego dnia czas rozpoczęcia jednych z nich zawiera się między czasem rozpoczęcia i czasem zakończenia tych drugich to bierzemy co najwyżej jedne z nich:

$$(\forall c_1, c_2 \in C)\,(\forall g_1, g_2 \in G)\,((c_1, g_1) \neq (c_2, g_2) \wedge \delta_{g_1,c_1} = \delta_{g_2,c_2} \wedge \sigma_{g_2,c_2} \in [\sigma_{g_1,c_1}, \varepsilon_{g_1,c_1}] \Rightarrow x_{g_1,c_1} + x_{g_2,c_2} \leqslant 1)$$

- Podobnie ćwiczenia nie mogą zaczynać się w trakcie treningu:

$$(\forall c \in C)\,(\forall g \in G)\,(\forall p \in P)\,\left(\delta_{g,c} = \delta_p^{PE} \wedge \sigma_{g,c} \in [\sigma_p^{PE}, \varepsilon_p^{PE}] \Rightarrow x_{g,c} + y_p \leqslant 1\right)$$

- Ani trening w trakcie ćwiczeń:

$$(\forall c \in C)\,(\forall g \in G)\,(\forall p \in P)\,\left(\delta_{g,c} = \delta_p^{PE} \wedge \sigma_p^{PE} \in [\sigma_{g,c}, \varepsilon_{g,c}] \Rightarrow x_{g,c} + y_p \leqslant 1\right)$$

- Każdego dnia student musi mieć godzinę wolnego czasu między 12:00 i 14:00. Zatem suma czasu spędzonego na treningach i ćwiczeniach w tym okienku musi być mniejszy lub równy od 1:

$$\begin{aligned}(\forall d \in [5])(& \sum_{g\in G, c\in C: \delta_{g,c}=d \wedge \sigma_{g,c}<12 \wedge \varepsilon_{g,c}\leqslant 14} (\varepsilon_{g,c} - 12)\cdot x_{g,c} + \\ & \sum_{g\in G, c\in C: \delta_{g,c}=d \wedge \sigma_{g,c}\geqslant 12 \wedge \varepsilon_{g,c}\leqslant 14} (\varepsilon_{g,c} - \sigma_{g,c})\cdot x_{g,c} + \\ & \sum_{g\in G, c\in C: \delta_{g,c}=d \wedge \sigma_{g,c}\geqslant 12 \wedge \varepsilon_{g,c}> 14} (14 - \sigma_{g,c})\cdot x_{g,c} + \\ & \sum_{p\in P: \delta^{PE} p=d \wedge \sigma_p^{PE}<12 \wedge \varepsilon_p^{PE}\leqslant 14} (\varepsilon_p^{PE} - 12)\cdot y_p + \\ & \sum_{p\in P: \delta^{PE} p=d \wedge \sigma_p^{PE}\geqslant 12 \wedge \varepsilon_p^{PE}\leqslant 14} (\varepsilon_p^{PE} - \sigma_p^{PE})\cdot y_p + \\ & \sum_{p\in P: \delta^{PE} p=d \wedge \sigma_p^{PE}\geqslant 12 \wedge \varepsilon_p^{PE}> 14} (14 - \sigma_p^{PE})\cdot y_p \leqslant 1)\end{aligned}$$

- Student trenuje co najmniej raz w tygodniu:

$$\sum_{p\in P} y_p \geqslant 1$$

Dodatkowe warunki:

- Brak zajęć w środy i w piątki:

$$(\forall g \in G, c \in C)\,(\delta_{g,c} \in \{3, 5\} \Rightarrow x_{g,c} = 0)$$

- Brak ćwiczeń o preferencji mniejszej od 5:

$$(\forall g \in G, c \in C)\,(\pi_{g,c} < 5 \Rightarrow x_{g,c} = 0)$$

4.2 Funkcja celu

4.3 Wyniki

Przedział czasu	**Zużycie zasobu r_1**	**Wykonywane zadania**
(0,50)	9	1
(50,54)	4	4
(54,96)	15	3,4
(96,109)	28	2,3
(109,116)	17	2
(109,143)	24	2,6
(143,144)	20	5,6
(144,159)	27	5,6,7
(159,173)	20	5,6
(173,175)	13	5
(173,237)	17	8