1 Lógica

Las reglas de la logica le dan un significado preciso a los enunciados matematicos o sentensias matematicas. Estas reglas se usan para distinguir entre argumentos validos y no validos. La logica tiene ademas numerosas aplicaciones en ciencias de la computacion. Las reglas de la logiuca se usan en el diseño de circuitos de ordenador, la construccion de programas informaticos, la verificacion de que un programa esta bien construido y mas.

Proposicion

Una proposicion es una oracion declarativa que es correcta o falsa, pero no ambas cosas a la vez.

Ejemplos

1. Todas las siguientes oraciones declarativas son proposiciones:

   (a) Bruselas es la capital de la Union Europea.

   (b) Toronto es la capital de Canada.

   (c) $1 + 1 = 2$.

   (d) $2 + 2 = 3$.

   Las proposiciones 1 y 3 son correctas, mientras que la 2 y 4 son falsas.

2. Considera las siguientes oraciones:

   (a) ¿Que hora es?

   (b) Lee esto con atencion.

   (c) $\mathrm{x} + 1 = 2$.

   (d) $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{z}$.

   Las frases 1 y 2 no son proposiciones porque no son declarativas. Las frases 3 y 4 no son proposiciones porque no son ni verdaderas ni falsas, ya que no se les han asignado valores a las variables.

El **valor de verdad** de una proposicion es V si es verdadera y F si es falsa.

Se llama **calculo proposicional** o **logica proposicional** al area de la logica que trata de proposiciones. Las nuevas proposiciones, llamadas **formulas** o **proposiciones compuestas**, se forman a partir de las existentes usando operadores logicos.

Definicion 1

Sea p una proposicion. El enunciado

$$\textit{No se cumple } p$$

es otra proposicion, llamada la *negacion* de p. La negacion de p se denota mediante p'. La proposicion p' se lee *no p*.

Una **tabla de verdad** muestra las relaciones entre los valores de verdad ed proposiciones. Son especialmente valiosas a la hora de determinar los valores de verdad de proposiciones construidas a partir de proposiciones simples.

La negacion de una proposicion se puede considerar como el resultado de aplicar el **operador negacion** sobre una proposicion. El operador negacion construye una nueva proposicion a partir de la proposicion individual existente.

Definicion 2

Sean p y q proposiciones. La proposicion p *y* q, denotada por $p \wedge q$, es la proposicion que es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas y falsa en cualquier otro caso. La proposicion $p \wedge q$ se llama *conjuncion* de p *y* q.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definicion 3

Sean p y q proposiciones. La proposicion p *o* q, denotada por $p \vee q$, es la proposicion que es falsa cuando tanto p como q son falsas y verdadera en cualquier otro caso. La proposicion $p \vee q$ se llama *disyuncion* de p *o* q.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Definicion 4

Sean p y q proposiciones. El conectivo logico *o exclusivo* de p y q, denotada por $p \oplus q$, es la proposicion que es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones p y q es verdadera y falsa en cualquier otro caso.

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Implicaciones

El concepto matematico de implicacion es independiente de la relacion causa-efecto entre hipotesis y conclusion. Especifica valores de verdad, no se basa en el uso del lenguaje

Definicion 5

Sean p y q proposiciones. La *implicacion* $p \to q$ es la proposicion que es falsa cuando p es verdadera y q es falsa, y verdadera en cualquier otro caso. En esta implicacion p se llama *hipotesis* o *antecedente* o *premisa* y q se llama *tesis* o *conclusion* o *consecuencia*.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Recipropca, contrarreciproca e inversa

Hay algunas implicaciones relacionadas con $p \to q$ que pueden formarse a partir de ella. La proposicion $q \to p$ se llama **reciproca** de $p \to q$. La **contrarreciproca** de $p \to q$ es $q' \to p'$. La proposicion $p' \to q'$ es la **inversa** de $p \to q$. Cuando dos formulas tienen siempre los mismos valores de verdad las llamamos **equivalentes**, de tal forma que una implicacion y su contrarreciproca son equivalentes. La reciproca y la inversa de una implicacion tambien son equivalentes.

Definicion 6

Sean p y q proposiciones. La *bicondicional*, o *doble impliacion*, $p \leftrightarrow q$ es la proposicion que es verdadera cuando p y q tienen los mismos valores de veradd y falsa en los otros casos.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Precedencia de operadores logicos

Operador	Precedencia
' (not)	1
$\wedge$	2
$\vee$	4
$\to$	4
$\leftrightarrow$	5

Busquedas Booleanas

En las busquedas booleanas se usa la conexion AND para emparejar datos almacenados que contengan los dos terminos de la busqueda, la conexion OR se usa para emparejar uno o ambos terminos de la busqueda y la conexion NOT (a veces escrita $ANDNOT$) se usa para excluir un termino particular de busqueda.

Juegos de Logica

Son aquellos juegos que se pueden resolver usando el razonamiento logico.

1.1 Logica y Operaciones con Bits

Un **bit** tiene dos valores posibles: 0 y 1. La palabra bit viene de la expresion inglesa *binary digit*. Un bit se puede utilizar para represenar un valor de verdad. Se usa 1 para representar V de verdadero y 0 para representar F de falso. Una variable se llama **variable booleana** si su valor es verdadero o falso. Se puede representar una variable booleana con bits.

Definicion 7

Una *cadena de bits* es una sucesion de cero o mas bits. La longitud de esta cadena es el numero de bits de la cadena.

2 Equivalencias proposicionales

Definicion 1

Una formula que es siempre verdadera, no importa los valores de verdad de las proposiciones que la componen, se denomina *tautologia*. Una formula que es sieprе falsa se denomina *contradiccion*. Finalmente, una proposicion que no es ni una tautologia ni una contradiccion se denomina *contingencia*.

Equivalencias Logicas

Las formulas que tienen los mismos valores de verdad en todos los casos posibles se llaman **logicamente equivalentes**.

Definicion 2

Se dice que las proposiciones p y q son *logicamente equivalentes* si $p \leftrightarrow q$ que es una tautologia. La notacion $p \equiv q$ denota que p y q son logicamente equivalentes.

Equivalencias Logicas

Equivalencia	*Nombre*
$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leyes de identidad
$p \vee V \equiv V$ $p \wedge F \equiv F$	Leyes de dominacion
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leyes de idempotentes
$(p')' \equiv p$	Ley de la doble negacion
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leyes de conmutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee p)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge p)$	Leyes de asociativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leyes de distributivas
$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$	Leyes de Morgan
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Leyes de absorcion
$p \vee p' \equiv V$ $p \wedge p' \equiv F$	Leyes de negacion

Equivalencia
$p \to q \equiv p' \vee q$ $p \to q \equiv q' \vee p$ $p \vee q \equiv p' \to q$ $p \wedge q \equiv (p \vee q')'$ $(p \vee q') \equiv p \to q'$ $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$ $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$ $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$ $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ $p \leftrightarrow q \equiv p' \leftrightarrow q'$ $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (p' \wedge q')$ $(p \leftrightarrow q)' \equiv p \leftrightarrow q'$

3 Predicados y cuantificadores

Cuantificadores

Cuando todas las variables de una funcion proposicional se le han asignado valores, la sentencia resultante se convierte en una proposicion con un cierto valor de verdad. No obstante, hay otra forma importante, llamada **cuantificacion**, de crear una proposicion a partir de una funcion proposicional. Tenemos la cuantificacion universal y la cuantificacion existencial.

El cuantificador universal

Muchas sentencias matematicas imponen que una propiedad es verdadera para todos los valors de una variable en un dominio particular, llamado el **universo de discurso** o **dominio**. Tales sentencias se expresan utilizando un cuantificador universal. La cuantificacion universal de una funcion proposicional es la proposicion que afirma que $P(x)$ es verdadera para todos los valores de x en el dominio. EL dominio especifica los posibles valores de la variable x.

Definicion 1

La *cuantificacion universal* de $P(x)$ es la proposicion $P(x)$ es verdadera para todos los valores x del dominio.

La notacion $\forall x P(x)$ denota la cuantificacion universal de $P(x)$. Aqui llamaremos al simbolo $\forall$ el **cuantificador universal**. La proposicion $\forall x P(x)$ se lee como *para todo* $xP(x)$ o *para cada* $xP(x)$ o *para cualquier* $xP(x)$.

Para mostrar que una sentencia de la forma $\forall x P(x)$ es falsa, donde $P(x)$ es una funcion proposicional, solo necesitamos encontrar un valor de x del dominio para el cual $P(x)$ sea falsa. Este valor de x se llama **contraejemplo** de la sentencia $\forall x P(x)$.

El cuantificador existencial

Muchas sentencias matematicas afirman que hay un elemento con una cierta propiedad. Tales sentencias se expresan mediante cuantificadores existenciales. Con un cuantificador existencial formamos una proposicion que es verdadera si y solo si $P(x)$ es verdadera para al menos un valor de x en el dominio.

Definicion 2

La *cuantificacion existencial* de $P(x)$ es la proposicion *Existe un elemento x en el dominio tal que $P(x)$ es verdadera.*

Usamos la notacion $\exists x P(x)$ para la cuantificacion existencial de $P(x)$. El simbolo $\exists$ se denomina **cuantificador existencial**. La cuantificacion existencial $\exists x P(x)$ se lee como *Hay un x tal que $P(x)$* o *Hay al menos un x tal que $P(x)$* o *Para algun $xP(x)$*

Cuantificadores

Sentencia	*¿Cuando es verdadera?*	*¿Cuando es falsa?*
$\forall x P(x)$	$P(x)$ es verdadera para todo x	Hay un x para el que $P(x)$ es falsa
$\exists x P(x)$	Hay un x para el que $P(x)$ es verdadera	$P(x)$ es falsa para todo x

Cuando se quiere determinar el valor de verdad de una cuantificacion, a veces es util realizar una busqueda sobre todos los posibles valores del dominio. Supongamos que hay n objetos en el dominio de la variable x. Para determinar si $\forall x P(x)$ es verdadera para todos ellos. Si encontramos un valor de x para el cual $P(x)$

es falsa, habremos demostrado que $\forall x P(x)$ es falsa. En caso contrario, $\forall x P(x)$ es verdadera. Para ver si $\exists x P(x)$ es verdadera, barremos los n posibles de x buscando algun valor para el cual $P(x)$ sea verdadera. Si encontramos uno, entonces $\exists x P(x)$ es verdadera. Si no encontramos tal valor de x, habremos determinado que $\exists x P(x)$ es falsa.

Variables ligadas

Cuando un cuantificador se usa sobre la variable x o cuando asignamos un valor a esta variable, decimos que la variable aparece **ligada**. Una variable que no aparece ligada por un cuantificador o fijada a un valor particular, se dice que es **libre**. Todas las variables que aparecen en una funcion proposicional deben ser ligadas para convertirla en proposicion. Esto se puede hacer utilizando una combinacion de cuantificadores universales, cuantificadores existenciales y asignacion de valores.

La parte de una expresion logica a la cual se aplica el cuantificador se llama **ambito** de este cuantificador. Consecuentemente, una variable es libre si esta fuera del ambito de todos los cuantificadores en la formula.

Negaciones

Cuando el dominio de un predicado $P(x)$ consiste en n elementos, donde n es un entero positivo, las reglas de la negcion de sentencias cuantificadas son exactamente las mismas que las leyes de De Morgan. Esto es asi porque $(\forall x P(x))'$ es lo mismo que $(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge ... \wedge P(x_n))'$, equivalente a $P(x_1)' \vee P(x_2)' \vee ... \vee P(x_n)'$ por las leyes de De Morgan. Esto es lo mismo que $\exists x P(x)'$. De forma analoga, $(\exists x P(x))'$ es lo mismo que $(P(x_1) \vee P(x_2) \vee ... \vee P(x_n))'$, equivalente a $P(x_1)' \wedge P(x_2)' \wedge ... \wedge P(x_n)'$ por las leyes de De Morgan, lo que equivale $\forall x P(x)'$.

Cuantificadores

Negacion	*Formula equivalente*	*¿Cuando es verdadera la negacion?*	*¿Cuando es falsa?*
$(\forall x P(x))'$	$\forall x P(x)'$	Para cada x, $P(x)$ es falsa	Hay un x para el que $P(x)$ es verdadera
$(\exists x P(x))'$	$\exists x P(x)'$	Hay un x para el que $P(x)$ es falsa	$P(x)$ es verdadera para cada x

4 Cuantificadores anidados

Son cuantificadores que se localizan dentro del rango de aplicacion de otros cuantificadores, como en la sentencia $\forall x \exists y (x + y = 0)$. Los cuantificadores anidados se usan tanto en matematicas como en ciencais de la computacion.

Formalizacion de sentencias con cuantificadores anidados

Ejemplos

1. Supongamos que el dominio de las variables reales x e y consiste en todos los reales. La sentencia

$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

afirma que $x + y = y + x$ para todo par de numeros reales x e y. Es la ley conmutativa para la suma de los numeros reales. De la misma forma la sentencia

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

afirma que para cada numero real x hay un real y tal que $x + y = 0$. Esto declara que todo numero real tiene un inverso para la suma. Analogamente, la sentencia

$$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$$

es la ley asociativa para la suma de numeros reales.

2. $\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0)) \equiv$ todo numero x positivo y para todo y negativo, el producto de ese numero x por y sera menor a cero.

3. $\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y))) \therefore$ *C(x) = x tiene una computadora*, *F(x, y) = x e y son amigos* y el dominio tanto para x como para y consiste en todos los estudiantes de tu facultad. Nos dice que para cada estudiante x de tu facultad, x tiene una computadora o hay un estudiante y tal que y tiene una computadora y x e y son amigos. Con otras palabras, todo estudiante de tu facultad tiene una computadora o un amigo que tiene una.

Formalizacion de sentencias en expresiones logicas

Ejemplos

1. Expresa la sentencia «Si una persona es del sexo femenino y tiene un hijo, esta persona es la madre de alguien» como una expresión lógica que involucre predicados, cuantificadores −cuyo dominio es el conjunto de todas las personas− y conectivos lógicos.
   Solucion: La frase anterior se puede expresar como «Para toda persona x, si la persona x es del sexo femenino y la persona x tiene un hijo, entonces existe una persona y tal que Ja persona x es madre de la persona y». Introducimos los predicados $F(x)$ para representar «x es del sexo femenino», $P(x)$ para representar «x tiene un hijo» y $M(x, y)$ para representar «x es madre de y» . La frase original se puede expresar como
$$\forall x((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x, y))$$
$$\forall x \exists y((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow M(x, y))$$

2. «La suma de dos enteros positivos es positiva» $\equiv \forall x \forall y((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0))$

3. «Todo numero real, excepto cero, tiene un inverso para el producto» $\equiv \forall x \exists y((x \neq 0) \rightarrow (xy = 1))$

4. Definicion de limita usando cuantificadores
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
   Tenemos que para todo numero real $\varepsilon > 0$, existe un numero real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.
$$\forall \varepsilon \exists \delta(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$
   o
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Negacion de cuantificadores anidados

Las sentencias con varios cuantificadores anidados se pueden negar aplicando sucesivamente las reglas de negación de las sentencias que contienen un único cuantificador.

Ejemplos

1. Negar $\forall x \exists y(xy = 1)$ de tal forma que ninguna negacion preceda al cuantificador.
   Solucion:
$$(\forall x \exists y(xy = 1))' \equiv \forall x(\exists y(xy = 1))' \equiv \forall x \exists y(xy = 1)'$$
$$\therefore (xy = 1)' \equiv (xy \neq 1)$$
$$\Rightarrow \forall x \exists y(xy \neq 1)$$

2. Usa cuantificadores para expresar la sentencia «No existe ninguna mujer que haya viajado en un vuelo de cada una de las líneas aéreas del mundo».
   Solucion:
$$\begin{aligned}(\forall w \forall a \exists f(P(w,f) \wedge Q(f,a)))' &\equiv \forall w' \forall a \exists f(P(w,f) \wedge Q(f,a)) \\ &\equiv \forall w \forall a' \exists f(P(w,f) \wedge Q(f,a)) \\ &\equiv \forall w \forall a \exists f'(P(w,f) \wedge Q(f,a)) \\ &\equiv \forall w \forall a \exists f(P(w,f) \wedge Q(f,a))' \\ &\equiv \forall w \forall a \exists f(P(w,f)' \wedge Q(f,a)')\end{aligned} \tag{1}$$

   «Para toda mujer hay una línea aérea tal que, para todo vuelo, esta mujer no ha viajado en ese vuelo o ese vuelo no es de esa línea aérea».

4.1 El orden de los cuantificadores

Cuantificadores de dos variables

Sentencia	*¿Cuando es verdadera?*	*¿Cuando es falsa?*
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall x \forall y P(x,y)$	$P(x,y)$ es verdadera para todo x, y	Hay un par x, y para el cual $P(x,y)$ es falsa
$\forall x \exists y P(x,y)$	Para todo x hay un y para el cual $P(x,y)$ es verdadera	Hay un x tal que $P(x,y)$ es falsa para todo y
$\exists x \forall y P(x,y)$	Hay un x tal que $P(x,y)$ es verdadera para todo y	Para todo x hay un y para el cual $P(x,y)$ es falsa
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists x \exists y P(x,y)$	Hay un par x, y para el cual $P(x,y)$ es verdadera	$P(x,y)$ es falsa para todo x, y

De forma similar para determinar si $\forall x \exists y P(x,y)$ es verdadera, recorreremos en un bucle todos los valores de x. Para cada x, recorremos en un bucle los valores de y hasta que encontramos un y para el cual $P(x,y)$ es verdadera. Si para todos los x encontramos tal valor de y, entonces $\forall x \exists y P(x,y)$ es verdadera; si para algun x no encontramos un valor de y con esa propiedad, entonces $\forall x \exists y P(x,y)$ falsa. Para ver si $\exists x \forall y P(x,y)$ es verdadera, recorremos los valores de x en un bucle hasta que encontramos un x para el cual $P(x)$ es siempre verdadera cuando recorremos en un bucle todos los valores de y. Una vez encontrado tal valor de x, sabemos que $\exists x \forall y P(x,y)$ es verdadera. Si no encontramos nunca un x como ese, entonces sabremos que $\exists x \forall y P(x,y)$ es falsa. Finalmente, para saber si $\exists x \exists y P(x,y)$ es verdadera, recorremos en un bucle los valores de x, y para cada valor de x recorremos los valores de y hasta que encontremos un x oara el cual haya un y que verifique que $P(x,y)$ sea verdadera.