Notas de Probabilidad y Estadística

Ivan Litteri

1 Probabilidad

El término probabilidad se refiere al término de azar, y la incertidumbre en cualquier situación en la que varios resultados pueden ocurrir.

Definición 1.1 (Experimentos aleatorios)**.** *Acciones o procesos en los cuales conocemos todos los resultados posibles pero no sabemos con certeza cuál va a ocurrir.*

Si conocemos todos los resultados posibles entonces podemos anotarlos, entonces definimos *espacio muestral*:

Definición 1.2 (Espacio muestral (Ω))**.** *Es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio. Sus elementos, ω, se llaman* ***elementos elementales****.*

Ejemplos 1.2.1. *Casos que conozco todas los posibles resultados pero no el resultado final:*

1. *Tiro una moneda y observo la cara superior.*
   Espacio muestral:
   $$\Omega_1 = \{\text{"cara"}, \text{"ceca"}\}$$
2. *Tiro una moneda 2 veces y observo que sale.*
   Espacio muestral:
   $$\Omega_2 = \{(\text{"cara"}, \text{"ceca"}), (\text{"ceca"}, \text{"cara"}), (\text{"cara"}, \text{"cara"}), (\text{"ceca"}, \text{"ceca"})\}$$
3. *Tiro un dado y observo el resultado.*
   Espacio muestral:
   $$\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
4. *Registro la cantidad de personas que entran a un banco entre las 11 y las 12hs.*
   Espacio muestral:
   $$\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$$
5. *Registro el tiempo entre la llegada de autos a un peaje.*
   Espacio muestral:
   $$\Omega_5 = \{t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

En el estudio de la probabilidad nos interesa no solo los resultados individuales de los espacios muestrales sino que nos interesan varias recopilaciones de resultados. Por eso definimos *evento* o *suceso*:

Definición 1.3 (Evento o Suceso)**.** *Es cualquier conjunto de resultados en el espacio muestral. Los resultados pueden mostrar un conjunto finito o infinito con cualquier cardinalidad.*

Ejemplo. *Refiriendonos a (1) podemos definir un evento "A" como:*

1. *A. "El valor observado es par". (está formado por 3 eventos elementales) Asi creamos un subconjunto que corresponde a los elementos de Ω_1 que cumple con el evento "A".*

Definición 1.4 (Espacio equiprobable)**.** *Un espacio muestrable es equiprobable cuando todos sus elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.*

Definición 1.5 (Frecuencia absoluta)**.** *Para un evento en particular, la frecuencia absoluta es la cantidad de veces que sucede ese evento. La cantidad de veces que sucede el evento A (o #A), se nota:*

$$\eta_A$$

Definición 1.6 (Frecuencia relativa)**.** *Para un evento en particular, se define como la relación entre la cantidad de veces que ocurre el evento A y el número total de ensayos.*

$$f_a = \frac{\eta_A}{\eta}$$

Ahora estamos en condiciones para definir *probabilidad*.

Definición 1.7 (Probabilidad)**.** *Probabilidad de un evento A, es un número positivo (o nulo) que se le asigna a cada suceso o evento del espacio muestral.*

Definición 1.8 (Regla de Laplace)**.** *La probabilidad de que ocurra un sucedo A se calcula como la cantidad de casos en los que ocurre ese suceso dividido los casos posbiles de ese experimento siempre y cuando los todos los elementos del espacio muestral sean equiprobables:*

$$P(A) = \frac{\#casos\ favorables\ de\ A}{\#casos\ posibles\ del\ experimento}$$

Ejemplos 1.8.1. *Regla de Laplace*

1. *Arrojo un dado equilibrado ¿cuál es la probabilidad de que observe el número 2? ¿cuál es la probabilidad de que observe un número par?*
   Solución:

   - *Experimento aleatorio: arrojo un dado y observo el resultado.*
   - *Espacio muestral:*
     $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- *Evento A. "Se observa el número 2".*
- *Definición de Laplace: ¿es mi espacio equiprobable? el dado es equilibrado, por lo tanto mi espacio es equiprobable. Entonces puedo usar la definición:*

$$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid} \therefore \mid A \mid = 1 \wedge \mid \Omega \mid = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

- *Evento B. "Se observa un número par".*
- $$P(B) = \frac{\mid B \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. *Un dado equilibrado se arroja 2 veces. Hallar la probabilidad de que:*

   (a) *Los dos resultados sean iguales.*

   (b) *Los dos resultados sean distintos y su suma no supere 9.*

   (c) *La suma de los resultados sea 10.*

   (d) *El primr resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar.*

   Solución:

   - *Experimento aleatorio: arrojo un dado 2 veces y observo el resultado.*
   - *Evento D_i: "Valor observado en el tiro i" $i = 1, 2$*
   - *Como los resultados son muchos para escribir el conjunto entero, escribo una tabla:*

$$\Omega = \{(a,b) : a, b = \{1,2,3,4,5,6\}\} \therefore \mid \Omega \mid = 36$$

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1				·		
2						
3				·		
4						
5				·		
6						

   (a) A: *"Los dos resultados son iguales"* $\therefore \mid A \mid = 6$

$$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

   (b) B: *"Los resultados son distintos y la suma no supera 9"* $\therefore \mid B \mid = 26$

$$P(B) = \frac{\mid B \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{26}{36} = \frac{13}{26}$$

(c) *C: "La suma de los resultados sea 10s"* $\therefore \mid C \mid = 4$

$$P(C) = \frac{\mid C \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(d) *$\cdot D$: "El primer resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar".*
$\therefore \mid \cdot D \mid = 4$

$$P(D) = \frac{\mid D \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$