El término probabilidad se refiere al término de azar, y la incertidumbre en cualquier situación en la que varios resultados pueden ocurrir.

**Definición 0.1** (Experimentos aleatorios)**.** *Acciones o procesos en los cuales conocemos todos los resultados posibles pero no sabemos con certeza cuál va a ocurrir.*

Si conocemos todos los resultados posibles entonces podemos anotarlos, entonces definimos *espacio muestral*:

**Definición 0.2** (Espacio muestral ($\Omega$))**.** *Es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio. Sus elementos, $\omega$, se llaman* ***elementos elementales****.*

**Ejemplos 0.2.1.** *Casos que conozco todas los posibles resultados pero no el resultado final:*

1. *Tiro una moneda y observo la cara superior.*
   *Espacio muestral:*
$$\Omega_1 = \{"cara", "ceca"\}$$
2. *Tiro una moneda 2 veces y observo que sale.*
   *Espacio muestral:*
$$\Omega_2 = \{("cara", "ceca"), ("ceca", "cara"), ("cara", "cara"), ("ceca", "ceca")\}$$
3. *Tiro un dado y observo el resultado.*
   *Espacio muestral:*
$$\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
4. *Registro la cantidad de personas que entran a un banco entre las 11 y las 12hs.*
   *Espacio muestral:*
$$\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$$
5. *Registro el tiempo entre la llegada de autos a un peaje.*
   *Espacio muestral:*
$$\Omega_5 = \{t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

En el estudio de la probabilidad nos interesa no solo los resultados individuales de los espacios muestrales sino que nos interesan varias recopilaciones de resultados. Por eso definimos *evento* o *suceso*:

**Definición 0.3** (Evento o Suceso)**.** *Es cualquier conjunto de resultados en el espacio muestral. Los resultados pueden mostrar un conjunto finito o infinito con cualquier cardinalidad.*

**Ejemplo.** *Refiriendonos a (1) podemos definir un evento "A" como:*

1. *A. "El valor observado es par". (está formado por 3 eventos elementales) Asi creamos un subconjunto que corresponde a los elementos de $\Omega_1$ que cumple con el evento "A".*

**Definición 0.4** (Espacio equiprobable)**.** *Un espacio muestrable es equiprobable cuando todos sus elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.*

**Definición 0.5** (Frecuencia absoluta)**.** *Para un evento en particular, la frecuencia absoluta es la cantidad de veces que sucede ese evento. La cantidad de veces que sucede el evento A (o #A), se nota:*

$$\eta_A$$

**Definición 0.6** (Frecuencia relativa)**.** *Para un evento en particular, se define como la relación entre la cantidad de veces que ocurre el evento A y el número total de ensayos.*

$$f_a = \frac{\eta_A}{\eta}$$

Ahora estamos en condiciones para definir *probabilidad*.

**Definición 0.7** (Probabilidad)**.** *Probabilidad de un evento A, es un número positivo (o nulo) que se le asigna a cada suceso o evento del espacio muestral.*

**Definición 0.8** (Regla de Laplace)**.** *La probabilidad de que ocurra un sucedo A se calcula como la cantidad de casos en los que ocurre ese suceso dividido los casos posbiles de ese experimento siempre y cuando los todos los elementos del espacio muestral sean equiprobables:*

$$P(A) = \frac{\#casos\ favorables\ de\ A}{\#casos\ posibles\ del\ experimento}$$

**Ejemplos 0.8.1.** *Regla de Laplace*

1. *Arrojo un dado equilibrado ¿cuál es la probabilidad de que observe el número 2? ¿cuál es la probabilidad de que observe un número par?*
   *Solución:*
   - *Experimento aleatorio: arrojo un dado y observo el resultado.*
   - *Espacio muestral:*
     $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
   - *Evento A. "Se observa el número 2".*
   - *Definición de Laplace: ¿es mi espacio equiprobable? el dado es equilibrado, por lo tanto mi espacio es equiprobable. Entonces puedo usar la definición:*
     $$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid} \therefore \mid A \mid = 1 \wedge \mid \Omega \mid = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$
   - *Evento B. "Se observa un número par".*
   - $$P(B) = \frac{\mid B \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. *Un dado equilibrado se arroja 2 veces. Hallar la probabilidad de que:*
   (a) *Los dos resultados sean iguales.*
   (b) *Los dos resultados sean distintos y su suma no supere 9.*
   (c) *La suma de los resultados sea 10.*
   (d) *El primr resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar.*

   *Solución:*
   - *Experimento aleatorio: arrojo un dado 2 veces y observo el resultado.*
   - *Evento $D_i$: "Valor observado en el tiro i" $i = 1, 2$*
   - *Como los resultados son muchos para escribir el conjunto entero, escribo una tabla:*
     $$\Omega = \{(a, b) : a, b = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \therefore \mid \Omega \mid = 36$$

| $D_2/D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | · | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | · | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | · | | |
| 6 | | | | | | |

(a) $A$: *"Los dos resultados son iguales"* $\therefore \mid A \mid = 6$

$$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) $B$: *"Los resultados son distintos y la suma no supera 9"* $\therefore \mid B \mid = 26$

$$P(B) = \frac{\mid B \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{26}{36} = \frac{13}{26}$$

(c) $C$: *"La suma de los resultados sea 10s"* $\therefore \mid C \mid = 4$

$$P(C) = \frac{\mid C \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(d) $\cdot D$: *"El primer resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar".* $\therefore \mid \cdot D \mid = 4$

$$P(D) = \frac{\mid D \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

## 0.1 Preliminares

**Definición 0.9** (Álgebra de eventos)**.** *Dado $\Omega$, sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de $\Omega$, diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de eventos si:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$ .
2. *Si* $B \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{A}$.
3. *Si* $B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}$.
4. *($\sigma$ Álgebra) Si* $(A_n)_{n \geq 1}$ *es una sucesión en* $\mathcal{A}$ *entonces:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

**Propiedades 0.9.1.** *Álgebra de eventos*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
3. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

**Ejemplo 0.9.1.** *Sea* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*. Hallar la menor álgebra de subconjuntos tal que el subconjunto* $\{2, 4, 6\}$ *pertenezca a ella.*
*Solución:*
*Por axioma 2 debe estar su complemento* $(\{1, 3, 5\})$*.*
*Por axioma 3 debe estar la unión* $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$*.*
*Por axioma 2 debe estar su complemento* $(\{\emptyset\})$*.*
*El axioma 1 se cumplió por accidente.*

$$\mathcal{A} = \{\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\emptyset\}\}$$

*De eta forma encontramos el menor álgebra de subconjuntos de $\Omega$ con la condición pedida.*

**Definición 0.10** (Calcular probabilidad en cualquier espacio). *Una probabilidad (o medida de probabilidad) e suna funcion $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ que a cada evento $A$ le hace corresponder un número real $P(A)$ con las siguientes propiedades:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$ *(la probabilida es un número entre 0 y 1).*
2. $P(\Omega) = 1$.
3. *Si* $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(eventos mutuamente excluyentes o disjuntos: no pueden ocurrir al mismo tiempo).*
4. *(Axioma de continuidad) Para cada sucesión decreciente de eventos* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ *tal que* $\bigcap_{i=1}^{infty} A_i = \emptyset$ *vale que* $\lim_{x \to infty} P(A_n) = 0$.

**Propiedades 0.10.1.** *:*

1. *Si* $\overline{A}$ *es el evento complementario de* $A$, *entonces* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   *Demostración.* (usando los axiomas)

$$
\begin{aligned}
\Omega =& A \cup \overline{A} \\
& A \cap \overline{A} = \emptyset \\
\text{ax.2) } P(\Omega) =& P(A \cup \overline{A}) = 1 \\
\text{ax.3) } P(A \cup \overline{A}) =& P(A) + P(\overline{A}) = 1 \\
& \therefore P(\overline{A}) = 1 - P(A)
\end{aligned}
$$

□

2. *Sean* $A$ *y* $B$ *eventos pertenecientes a* $\Omega$, *entonces:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   *Demostración.* usando los axiomas:

$$Completar$$

□

3. *Si* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *es una sucesión de elementos de* $A$, *mutuamente excluyentes* 2 *a* 2, *entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

**Nota** (¿Que significa para nosotros el álgebra de eventos?). *Cuando defino un experimento aleatorio puedo definir* $\Omega$ *pero no necesariamente puedo conocer todas las probabilidades de todos los elementos elementales, puede que me falte información, entonces el conjunto del álgebra de eventos me dice a que eventos les puedo calcular la probabilidad.*

**Ejemplo.** *En argentina, el 80% de los programadores usa Java, C, o ambos. El 50% usa Java y el 4'% usa C. ¿ Cuál es la probabilidad de que al elegir un programador al azar use:*

*a) Java y C:*

*b) Sólo Java.*

*c) Solo C.*

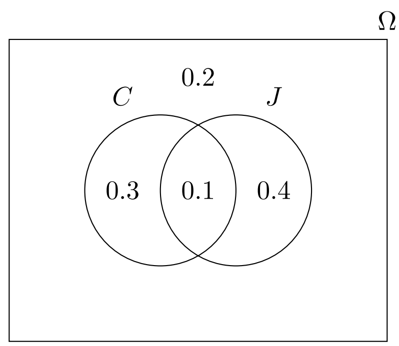
*d) Ninguno de los dos lenguajes.*

*Solución:*

- *Elijo el experimento aleatorio (EA):*
  *"Elijo un programador al azar y me pregunto que lenguaje usa".*

- *Defino eventos:*
  $J$*: "El programador elegido al azar usa Java".*
  $C$*: "El programador elegido al azar usa C".*

- *Defino quién es* $\Omega$ *(en ese caso lo defino con un diagrama, en específico un diagrama de Venn):*




- *Interpreto los datos:*

$$P(J \cup C) = 0.8$$
$$P(J) = 0.5$$
$$P(C) = 0.4$$
$$\therefore P(J \cup C) = P(J) + P(C) - P(J \cap C)$$
$$\Rightarrow P(J \cap C) = P(J) + P(C) - P(J \cup C) = 0.1$$

- *Resuelvo*

  *a)* $P(J \cap C) = 0.1$
  *b)* $P(J \cap \overline{C}) = P(J - C \cap J) = P(J) - P(C \cap J) = 0.4$
  *c)* $P(C \cap \overline{J}) = P(C - J \cap C) = P(C) - P(J \cap C) = 0.3$
  *d) "Ninguno" es el complemento de "alguno" y "alguno"* $= (J \cup C)$ *entonces:*

$$P(\overline{J \cup C}) = P(\overline{C} \cap \overline{J}) = 1 - P(C \cup J) = 0.2$$

**Definición 0.11** (Espacio de probabilidad)**.** *Es una terna* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, donde* $\Omega$ *es un conjunto no vacío,* $\mathcal{A}$ *es un álgebra sobre* $\Omega$ *y* $P$ *es una medida de probabilidad.*