Notas de Probabilidad y Estadística

Ivan Litteri

Contents

1 Probabilidad

El término probabilidad se refiere al término de azar, y la incertidumbre en cualquier situación en la que varios resultados pueden ocurrir.

Definición 1.1 (Experimentos aleatorios)**.** *Acciones o procesos en los cuales conocemos todos los resultados posibles pero no sabemos con certeza cuál va a ocurrir.*

Si conocemos todos los resultados posibles entonces podemos anotarlos, entonces definimos *espacio muestral*:

Definición 1.2 (Espacio muestral (Ω))**.** *Es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio. Sus elementos, ω, se llaman* ***elementos elementales****.*

Ejemplos 1.2.1. *Casos que conozco todas los posibles resultados pero no el resultado final:*

1. *Tiro una moneda y observo la cara superior.*
   Espacio muestral:
$$\Omega_1 = \{\text{"}cara\text{"}, \text{"}ceca\text{"}\}$$
2. *Tiro una moneda 2 veces y observo que sale.*
   Espacio muestral:
$$\Omega_2 = \{(\text{"}cara\text{"}, \text{"}ceca\text{"}), (\text{"}ceca\text{"}, \text{"}cara\text{"}), (\text{"}cara\text{"}, \text{"}cara\text{"}), (\text{"}ceca\text{"}, \text{"}ceca\text{"})\}$$
3. *Tiro un dado y observo el resultado.*
   Espacio muestral:
$$\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
4. *Registro la cantidad de personas que entran a un banco entre las 11 y las 12hs.*
   Espacio muestral:
$$\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$$
5. *Registro el tiempo entre la llegada de autos a un peaje.*
   Espacio muestral:
$$\Omega_5 = \{t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

En el estudio de la probabilidad nos interesa no solo los resultados individuales de los espacios muestrales sino que nos interesan varias recopilaciones de resultados. Por eso definimos *evento* o *suceso*:

Definición 1.3 (Evento o Suceso)**.** *Es cualquier conjunto de resultados en el espacio muestral. Los resultados pueden mostrar un conjunto finito o infinito con cualquier cardinalidad.*

Ejemplo. *Refiriendonos a (1) podemos definir un evento "A" como:*

1. *A. "El valor observado es par". (está formado por 3 eventos elementales) Asi creamos un subconjunto que corresponde a los elementos de Ω_1 que cumple con el evento "A".*

Definición 1.4 (Espacio equiprobable)**.** *Un espacio muestrable es equiprobable cuando todos sus elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.*

Definición 1.5 (Frecuencia absoluta)**.** *Para un evento en particular, la frecuencia absoluta es la cantidad de veces que sucede ese evento. La cantidad de veces que sucede el evento A (o #A), se nota:*

$$\eta_A$$

Definición 1.6 (Frecuencia relativa). *Para un evento en particular, se define como la relación entre la cantidad de veces que ocurre el evento A y el número total de ensayos.*

$$f_a = \frac{\eta_A}{\eta}$$

Ahora estamos en condiciones para definir *probabilidad*.

Definición 1.7 (Probabilidad). *Probabilidad de un evento A, es un número positivo (o nulo) que se le asigna a cada suceso o evento del espacio muestral.*

Definición 1.8 (Regla de Laplace). *La probabilidad de que ocurra un sucedo A se calcula como la cantidad de casos en los que ocurre ese suceso dividido los casos posbiles de ese experimento siempre y cuando los todos los elementos del espacio muestral sean equiprobables:*

$$P(A) = \frac{\#\text{casos favorables de } A}{\#\text{casos posibles del experimento}}$$

Ejemplos 1.8.1. *Regla de Laplace*

1. *Arrojo un dado equilibrado ¿cuál es la probabilidad de que observe el número 2? ¿cuál es la probabilidad de que observe un número par?*
   Solución:

   - *Experimento aleatorio: arrojo un dado y observo el resultado.*
   - *Espacio muestral:*
     $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
   - *Evento A. "Se observa el número 2".*
   - *Definición de Laplace: ¿es mi espacio equiprobable? el dado es equilibrado, por lo tanto mi espacio es equiprobable. Entonces puedo usar la definición:*
     $$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid} \therefore \mid A \mid = 1 \wedge \mid \Omega \mid = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$
   - *Evento B. "Se observa un número par".*
   - $$P(B) = \frac{\mid B \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. *Un dado equilibrado se arroja 2 veces. Hallar la probabilidad de que:*

   (a) *Los dos resultados sean iguales.*
   (b) *Los dos resultados sean distintos y su suma no supere 9.*
   (c) *La suma de los resultados sea 10.*
   (d) *El primr resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar.*

   Solución:

   - *Experimento aleatorio: arrojo un dado 2 veces y observo el resultado.*
   - *Evento D_i: "Valor observado en el tiro i" $i = 1, 2$*

- *Como los resultados son muchos para escribir el conjunto entero, escribo una tabla:*

$$\Omega = \{(a,b) : a,b = \{1,2,3,4,5,6\}\} \therefore \mid \Omega \mid = 36$$

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1				·		
2						
3				·		
4						
5				·		
6						

(a) A: *"Los dos resultados son iguales"* $\therefore \mid A \mid = 6$

$$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) B: *"Los resultados son distintos y la suma no supera 9"* $\therefore \mid B \mid = 26$

$$P(B) = \frac{\mid B \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{26}{36} = \frac{13}{26}$$

(c) C: *"La suma de los resultados sea 10s"* $\therefore \mid C \mid = 4$

$$P(C) = \frac{\mid C \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(d) $\cdot D$: *"El primer resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar".* $\therefore \mid \cdot D \mid = 4$

$$P(D) = \frac{\mid D \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

1.1 Preliminares

Definición 1.9 (Álgebra de eventos)**.** *Dado Ω, sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω, diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de eventos si:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. *Si* $B \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{A}$.
3. *Si* $B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}$.
4. *(σ Álgebra) Si* $(A_n)_{n \geq 1}$ *es una sucesión en* $\mathcal{A}$ *entonces:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Propiedades 1.9.1. *Álgebra de eventos*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

3. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Ejemplo 1.9.1. *Sea* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Hallar la menor álgebra de subconjuntos tal que el subconjunto* $\{2, 4, 6\}$ *pertenezca a ella.*
Solución:
Por axioma 2 debe estar su complemento ($\{1, 3, 5\}$).
Por axioma 3 debe estar la unión ($\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
Por axioma 2 debe estar su complemento ($\{\emptyset\}$).
El axioma 1 se cumplió por accidente.

$$\mathcal{A} = \{\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\emptyset\}\}$$

De eta forma encontramos el menor álgebra de subconjuntos de Ω *con la condición pedida.*

Definición 1.10 (Calcular probabilidad en cualquier espacio)**.** *Una probabilidad (o medida de probabilidad) e suna funcion* $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *que a cada evento* A *le hace corresponder un número real* $P(A)$ *con las siguientes propiedades:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$ *(la probabilida es un número entre 0 y 1).*

2. $P(\Omega) = 1$.

3. *Si* $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(eventos mutuamente excluyentes o disjuntos: no pueden ocurrir al mismo tiempo).*

4. *(Axioma de continuidad) Para cada sucesión decreciente de eventos* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ *tal que* $\bigcap_{i=1}^{infty} A_i = \emptyset$ *vale que* $\lim_{x \to infty} P(A_n) = 0$.

Propiedades 1.10.1. *:*

1. *Si* $\overline{A}$ *es el evento complementario de* A, *entonces* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   Demostración. (usando los axiomas)

$$\begin{aligned} \Omega =& A \cup \overline{A} \\ & A \cap \overline{A} = \emptyset \\ \text{ax.2) } P(\Omega) =& P(A \cup \overline{A}) = 1 \\ \text{ax.3) } P(A \cup \overline{A}) =& P(A) + P(\overline{A}) = 1 \\ & \therefore P(\overline{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

□

2. *Sean* A *y* B *eventos pertenecientes a* Ω, *entonces:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   Demostración. usando los axiomas:

Completar

□

3. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una sucesión de elementos de A, mutuamente excluyentes 2 a 2, entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Nota (¿Que significa para nosotros el álgebra de eventos?)**.** *Cuando defino un experimento aleatorio puedo definir Ω pero no necesariamente puedo conocer todas las probabilidades de todos los elementos elementales, puede que me falte información, entonces el conjunto del álgebra de eventos me dice a que eventos les puedo calcular la probabilidad.*

Ejemplo. *En argentina, el 80% de los programadores usa Java, C, o ambos. El 50% usa Java y el 4'% usa C. ¿ Cuál es la probabilidad de que al elegir un programador al azar use:*

a) Java y C:

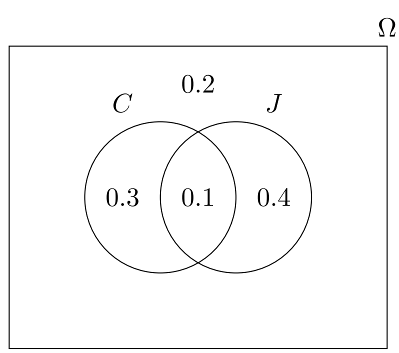
b) Sólo Java.

c) Solo C.

d) Ninguno de los dos lenguajes.

Solución:

- *Elijo el experimento aleatorio (EA):*
  "Elijo un programador al azar y me pregunto que lenguaje usa".
- *Defino eventos:*
  J: "El programador elegido al azar usa Java".
  C: "El programador elegido al azar usa C".
- *Defino quién es Ω (en ese caso lo defino con un diagrama, en específico un diagrama de Venn):*



- *Interpreto los datos:*

$$P(J \cup C) = 0.8$$
$$P(J) = 0.5$$
$$P(C) = 0.4$$
$$\therefore P(J \cup C) = P(J) + P(C) - P(J \cap C)$$
$$\Rightarrow P(J \cap C) = P(J) + P(C) - P(J \cup C) = 0.1$$

- *Resuelvo*

a) $P(J \cap C) = 0.1$

b) $P(J \cap \overline{C}) = P(J - C \cap J) = P(J) - P(C \cap J) = 0.4$

c) $P(C \cap \overline{J}) = P(C - J \cap C) = P(C) - P(J \cap C) = 0.3$

d) "Ninguno" es el complemento de "alguno" y "alguno" $= (J \cup C)$ *entonces:*

$$P(\overline{J \cup C}) = P(\overline{C} \cap \overline{J}) = 1 - P(C \cup J) = 0.2$$

Definición 1.11 (Espacio de probabilidad)**.** *Es una terna* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, donde* Ω *es un conjunto no vacío,* $\mathcal{A}$ *es un álgebra sobre* Ω *y* P *es una medida de probabilidad.*

Teorema 1.1. *Sea* $(A_n)_{n\geq 1}$ *una suscesión de eventos tales que* $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$ *y* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$*, luego*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ *una suscesión de eventos tales que* $A_{n+1} \subset A_n$ $\forall n$ *y* $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$*, luego*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Teorema 1.2 (σ-aditividad)**.** *Sea* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ *con los eventos* A_i *mutuamente excluyentes 2 a 2 (cualquier par), entonces*

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A)$$

1.2 Técnicas de Conteo

Definición 1.12 (#CP)**.** *Cantidad de casos posibles de un experimento.*

Si tiramos un dado vemos que la cantidad de resultados posibles es 6; si tiramos el dado 2 veces, la cantidad de resultados posibles es 36; si tiramos el dado 3 veces, tengo 6 opciones para cada tiro:

$$\underline{6}\ \underline{6}\ \underline{6}$$

Definición 1.13 (Regla del Producto)**.** *Dados dos conjuntos A y B con η_A y η_B elementos cada uno respectivamente, la cantidad de todos los pares ordenados que pueden formarse con un elemento de A y uno de B se calcula como $\eta_A \cdot \eta_B$*

Ejemplos 1.13.1. *Regla del producto*

1. *Tiro un dado 2 veces y por regla del producto:*

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} = 36$$

2. *Tiro un dado 3 veces y por regla del producto:*

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 6^3$$

3. *Tiro un dado 4 veces y por regla del producto:*

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 6^4$$

4. *En 4 tiros, ¿de cuántas formas posibles puede no aparecer ningún 6?*
   Tengo 5 opciones en donde no sale un 6, y como son 4 tiros, entonces tengo 5 opciones en donde no sale un 6, 4 veces. Entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 5^4$$

5. *¿Cuántas patentes de 3 letras y 3 números distintas puedo formar?*
   Tengo 3 letras (una raya por letra) y 3 números (una raya por número). Tengo 26 letras posibles para la primer posición, para la segunda y tercera igual (porque se pueden repetir). Con los números, tengo 10 opciones para el primero, el segundo y el tercero (10 dígitos de 0 a 9). Por regla del producto:

$$\#CP = \underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 26^3 \cdot 10^3$$

Supongamos que tengo 5 libros y quiero ordenarlos en una biblioteca, que sólo tiene 5 lugares. Quiero contar todas las formas posibles de ordenarlos. Entonces supongo un caso análogo a los anteriores.
Para el primer lugar tengo 5 posibles opciones para colocar uno de mis libros, para el segundo 4 opciones, para el tecero 3 opciones, para el cuarto 2 opciones y para el último lugar ya solo me queda una posible opción. Entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 120 = 5!$$

Lo que hicimos fué pensar en la cantidad de libros que teníamos y ver la cantidad de *ordenamientos* posibles.

Definición 1.14 (Permutaciones)**.** *La cantidad de formas distintas en las que puedo ordenar n elementos es $n!$*

Ejemplos 1.14.1. *Permutaciones*

1. *¿De cuántas formas distintas puedo fotografiar a 7 personas en hilera?*

$$\#CP = \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 7!$$

2. *¿Que pasaría si en una biblioteca tengo espacio para 3 libros y yo tengo 5?*
   5! son todas las permutaciones de los elementos que tenía originalmente, y hay que dividir por los que conté de más cuando ubiqué a todos. En este caso calculo las permutaciones y luego les divido lo que conté de más, entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!}$$

Definición 1.15 (Variaciones)**.** *Es la cantidad de subconjuntos ordenados de r elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos. Las variaciones son, de un conjunto total de n elementos son todos los subconjuntos diferentes que puedo extraer si me importa el orden en el que los estoy extrayendo.*

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En la calculadora: $\boxed{nPr}$

Ejemplo 1.15.1. *En un cine con 70 butacas, ¿de cuántas formas distintas pueden sentarse 45 personas?*

$$\#CP = \frac{70!}{(70-45)!} = \frac{70!}{25!}$$

Definición 1.16 (Combinaciones)**.** *Es la cantidad de subconjuntos* <u>*NO*</u> *ordenados de r elementos que pueden formarse a partir de los conjuntos de n elementos.*

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r}$$

En la calculadora: $\boxed{nCr}$

En donde $\binom{n}{r}$ *se denomina número combinatorio de n elementos tomados de a r. Lo que me dice este número es de cuantas formas puedo sacar r elementos de un total de n cuando no me importa el orden.*

Ejemplos 1.16.1. *Combinaciones*

1. *¿De cuántas formas diferentes puedo elegir 11 personas de un grupo de 30 para formar un equipo de fútbol?*
   Tengo un conjunto de 30 personas, y voy a elegir un subconjunto de 11 personas entonces $n = 30$, $r = 11$ *y como el orden no me importa, utilizo el número combinatorio para contar estas personas:*

$$\#CP = \binom{30}{11}$$

2. *Control de calidad. ¿Cuántas muestras de 10 piezas diferentes puedo elegir de un lote de 100?*
   Tengo un conjunto, y un subconjunto, y el orden no me interesa, entonces:

$$\#CP = \binom{100}{10}$$

Observación 1.16.1.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Proof.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$
$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

□

Ejemplo 1.16.1. *Mazo de 40 cartas esáñolas.*

a) *En un mazo de cartas españolas, tengo 10 cartas de espada, 10 cartas de copa, 10 cartas de basto y 10 cartas de oro. ¿Cuántas manos diferentes puede tener una persona jugando al truco?*

$$n = 40, r = 3$$
$$\#CP = \binom{40}{3}$$

b) *¿Cuántas formas distintas hay de recibir una mano de oro?*
Todos los casos posibles se dan de elegir 3 cartas de un total de 10 ya que estoy elegiendo entre las cartas que son de oro.

$$\#CP = \binom{10}{3}$$

c) *¿Cuántas manos puedo recibir siendo todas las cartas del mismo palo?*
Separo en casos: tengo 4 posibles resultados dada la cantidad de palos disponibles, y por cada palo tengo la cantidad de posibilidades del resultado anterior, entonces ahora tengo que sumar todas las formas de sacar 3 de cada palo.

$$\#CP_{oro} = \binom{10}{3}, \#CP_{basto} = \binom{10}{3}, \#CP_{espada} = \binom{10}{3}, \#CP_{copa} = \binom{10}{3}$$
$$\#CP = \#CP_{oro} + \#CP_{basto} + \#CP_{espada} + \#CP_{copa}$$
$$\#CP = 4 \cdot \#CP_{palo}$$
$$\#CP = 4 \cdot \binom{10}{3}$$

Definición 1.17 (Anagramas)**.** *Dada una palabra, un anagrama es una forma de escribir otra palabra, cambiando las letras de la palabra original de lugar.*

Ejemplo 1.17.1. *Supongamos la palabra "ANANA", ¿cuántos anagramas puedo formar?*
¿Cómo contamos todos los ordenamientos posibles? Usando lo que aprendimos en número combinatorio: tengo 5 posiciones para ubicar 5 letras, las letras que tengo que ubicar son las letras de la palabra "ANANA":

1. *Acomodo las letras "A", tengo 3 lugares para ubicarla (porque tengo 3). No me importa el orden.*

$$\#CP_A = \binom{5}{3} \tag{1}$$

2. *Por todas esas posiciones que tengo para ubicar la letra "A", tengo que ver todas las posibles opciones que me quedan para la letra "N". Ahora tengo 2 lugares para ubicarla (porque tengo 2).*

$$\#CP_N = \binom{2}{2} = 1 \tag{2}$$

Una vez ubicadas las letras "A" tengo sólo una forma posible de ubicar las "N". Si ubico primero las "N", de los 5 lugares que tengo voy a poder usar 2, y de los 3 lugares que quedan voy a elegir 3 para ubicar la "A".

$$\#CP = \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3}$$

Nota. *Otra forma de pensarlo permutando es hacer el total de permutaciones y dividir esa cantidad por la multiplicación de los casos que conté de más*

$$\#CP = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

Ejemplo 1.17.2. *¿Cuántos anagramas puedo formar de la palabra "MANZANA"?*

- *Con el método de permutaciones:*

$$\#CP = \frac{7!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$$

- *Con números combinatorios (leyendo las letras en orden izq-der):*

$$\#CP = \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1}$$

Definición 1.18 (Permutaciones con elementos repetidos)**.** *Si tenemos n elementos en los cuales hay n_1 de la clase 1, n_2 de la clase 2, ... n_k de la k-ésima, el número de permutaciones de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ objetos está dada por*

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_k!}$$

Definición 1.19 (Método de bolas y urnas (capitulo1-video3 40:00))**.** *Se usa cuando tengo una cantidad de elementos **indistinguibles**. Si estoy ordenando r elementos indistinguibles en k urnas tengo que dibujar r crucecitas ("×"), y k-1 palitos ("|")*

Definición 1.20 (Métodos de Bose-Einstein)**.**

$$\#CP = \binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}$$

Ejemplo 1.20.1. *Tengo un mapa, donde cada cuadrado es una manzana, y quiero ir del punto C al punto S. ¿De cuántas formas posibles puedo ir de C a S si solo puedo moverme hacia la izquierda o abajo.*
Esto es análogo al problema del anagrama, por lo tanto

$$\#CP = \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

1.3 Probabilidad Condicional

Se trata de analizar cómo afecta la información de que "un evento B ha ocurrido" a la probabilidad asignada de A.

Definición 1.21. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$, la probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido está definida por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{B}$$

Propiedades 1.21.1. *La $P(A|B)$ para un B fijo satisface todos los axiomas de probabilidad:*

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{A}$

   Proof.
   $$\begin{aligned} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{B} &\leq 1 \\ \text{Si } A \cap B = \emptyset &\to P(A \cap B) = 0 \\ \text{Si } A \cap B \neq \emptyset &\to A \cap B \subseteq B \\ &\to P(A \cap B) \leq P(B) \end{aligned}$$
   $\square$

2. $P(\Omega|B) = 1$

   Proof.
   $$P(\Omega|B) = \frac{\Omega \cap B}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} \because B \subseteq \Omega$$
   $\square$

3. *Si* $A \cap C = \emptyset \to P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$

4. *Si* $P(B) > 0$

   (a) $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$.

   (b) $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) \cdot P(B \cap B) = P(A|B \cap C) \cdot P(B|C) \cdot P(C)$

Ejemplos.

1. *Si un programador usa C ¿cuál es la probabilidad de que use Java?*
   Tenemos que $P(C) > 0$, y que lo que sabes es $P(C)$, y buscamos $P(J)$ entonces
   $$P(J|C) = \frac{P(J \cap C)}{P(C)} = \frac{0 \cdot 1}{0 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

2. *Si un programador no usa Java, ¿cuál es la probabilidad de que use C?*
   Nuevamente identificamos que lo que me está pidiendo es una probabilidad condicional. Con la información que tenemos
   $$P(C|\overline{J}) = \frac{P(C \cap \overline{J})}{P(\overline{J})} = \frac{0 \cdot 3}{0 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

3. *Una persona arroja 2 dados equilibrados. Calcular la probabilidad de que la suma sea 7 dado que:*

   (a) *La suma es impar.*

   (b) *La suma es mayor que 6.*

(c) *El número del 2^{do} dado es impar.*

(d) *El número de alguno de los dados es impar.*

(e) *Los dos números son iguales.*

Defino mi EA: "Arrojo dos dados y observo". Ahora defino un evento D_i: "Valor observado en el dado i", $i = 1, 2$.

(a) *Debo calcular la probabilidad de que la suma sea 7 dado que la suma es impar, dicho de otra manera, yo ya se que la suma es impar, y a partir de ello quiero calcular la probabilidad de que la suma sea 7.*

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$$P(\underbrace{D_1 + D_2 = 7}_{S} \,|\, \underbrace{\text{"La suma es impar"}}_{A})$$

$$\begin{aligned} P(S|A) &= \frac{P(S \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{6}{36}}{\frac{18}{36}} \\ &= \frac{6}{18} \end{aligned}$$

Este resultado se puede interpretar como, de los 18 cuadraditos verdes, 6 son naranjas. En otras palabras, cuando tengo un espacio equiprobable y condiciono, es decir, quito posbiles resultados de mi experimento, los resultados restantes siguen siendo equiprobables, lo que me permite seguir calculando la probabilidad con Laplace. Esto hace que en espacios equiprobables hacer las cuentas sea mucho mas fácil.

(b) B: *"La suma es mayor que 6"*

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

De los 21 casos en donde la suma es mayor a 6, sólo en 6 la suma es 7

$$\begin{aligned} P(S|B) &= \frac{P(S \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{6}{21} \end{aligned}$$

(c) *C: "El 2^{do} dado es impar"*

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

De los 18 casos en donde el segundo dado es impar, sólo en 3 de esos casos la suma es 7

$$\begin{aligned} P(S|B) &= \frac{P(S \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{3}{18} \end{aligned}$$

(d)

(e)

Definición 1.22 (Partición)**.** *Decimos que los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ forman una partición de Ω si*

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.
2. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$

Ejemplos 1.22.1.

- *Si tomo una sección de vidrio cuadrada y la rompo, el vidrio quedó particionado. Cada uno de los pedazos de vidrio es un B_j de mi partición. La intersección es vacía, pero si los uno contruyo mi Ω es decir el vidrio completo.*
- *Una pared formada por azulejos. Su intersección es nula, pero su unión es toda la pared. Si salpico salsa en la parted, veo una mancha distribuida en varios azulejos, es decir en parios pedazos de mi partición. Si la salsa es el conjuno A, lo voy a escribir como la unión de todos los azulejos en donde A se interseca con cada B_i es decir*

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k)$$

Todos los eventos entre paréntesis son mutuamente exclutentes. Si quiero calcular $P(A)$ usando el axioma 3

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k)) \\ &= P((A \cap B_1)) + P((A \cap B_2)) + \cdots + P((A \cap B_k)) \end{aligned}$$

De este último ejemplo surge una definición

Definición 1.23. *Fórmula de Probabilidad Total*
Sea

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k)) \\ &= P((A \cap B_1)) + P((A \cap B_2)) + \cdots + P((A \cap B_k)) \end{aligned}$$

sabiendo que

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

definimos a la fórmula de probabilidad total como

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Ejemplo 1.23.1. *Sé que la probabilidad de que un dado fabricado por una máquina M1 sea defectuoso es de 0.1, si es de la máquina 2 es de 0.05, y si es de la máquina 3 es de 0.01. La producción se divide como*

$$M1 \to 20\% \text{ de la producción}$$
$$M2 \to 30\% \text{ de la producción}$$
$$M3 \to 50\% \text{ de la producción}$$

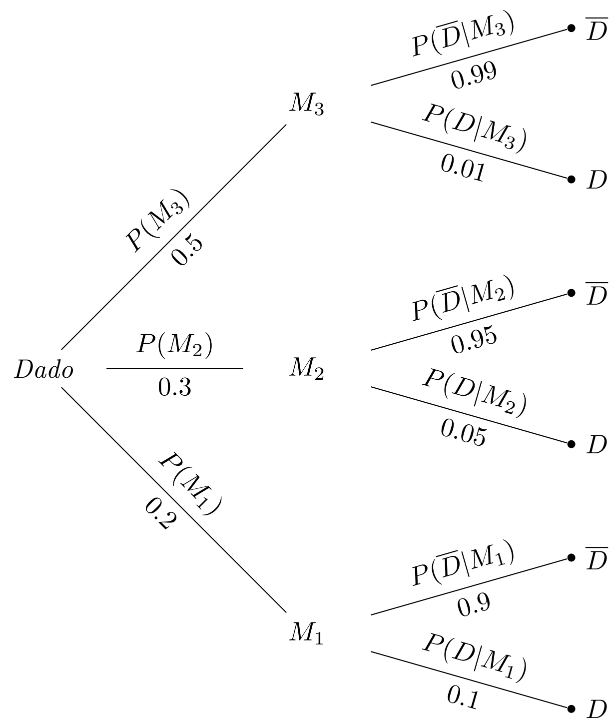
Suponiendo que todos los dados fabricados van a parar a la misma caja. Si elijo un dado al azar de la caja, cuál es la probabilidad de que ese dado sea defectuoso'.

Solución: Voy a leer de nuevo mi experimento y entender cual es el experimento aleatorio y a partir de el definir eventos. El EA consiste en "Elegir un dado de la caja al azar y observar si es defectuoso". Los eventos que me van a interesar definir son:

M_i: *"El dado elegido al azar proviene de la máquina i".* $i = 1, 2, 3$

D: "El dado elegido es defectuoso".

Ahora intento visualizar todos los posibles resultados de mi experimento. Utilizando un diagrama de árbol:



Tenemos que calcular $P(D)$, observamos en el árbol de probabilidades que la probabilidad de que el dado sea defectuoso se puede calcular como la probabilidad de que el dado sea defectuoso de la máquina 1, o que sea defectuoso de la máquina 2, o que sea defectuoso de la máquina 3:

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)$$

Como las ramas son excluyentes (el dado no puede ser de más de una máquina al mismo tiempo), podemos calcular la probabilidad de D de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
P(D) &= P((D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)) \\
&= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3)) \\
&= P(M_1) \cdot P(D \cap M_1) + P(M_2) \cdot P(D \cap M_2) + P(M_3) \cdot P(D \cap M_3) \\
&= 0.2 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.01 \\
&= 0.04
\end{aligned}$$

Observación 1.23.1. *La probabilidad obtenida no puede ser más chica que la producida por la "mejor" máquina, ni más grande que la producida por la "peor" máquina.*

Ejemplo 1.23.2. *Usando el enunciado y datos del ejemplo anterior, ahora se sabe que el dado es defectuoso, y quiero saber que máquina lo fabricó.*

Solución: Recordando que $P(M_1) = 0.2$ yo lo que quiero ver ahora es cómo se ve modificada esa probabilidad ahora que sé que el dado es defectuoso

$$\begin{aligned} P(M_1|D) &= \frac{P(D \cap M_1)}{P(D)} \\ &= \frac{P(D|M_1) \cdot P(M_1)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.4} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Teorema 1.3 (Teorema de Bayes)**.** *Sean $B_1, \ldots, B_k$ es una partición de Ω, A un evento de probabilidad positiva, entonces*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

Ejemplo 1.23.3. *En una urna hay una bola verde y dos bolas rojas. En cada paso se extrae una bola al azar y se la repone junto con otra del mismo color.*

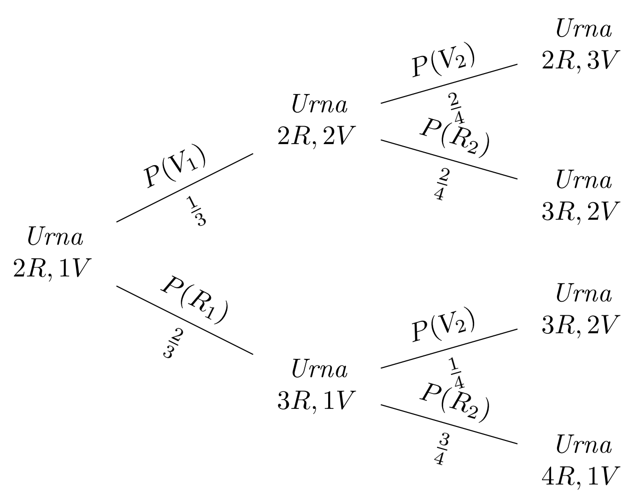
(a) *Calcular la proabilidad de que al finalziar el segundo paso la urna contenga dos bolas verdes y 3 rojas.*

(b) *Si al finalizar el segundo paso la urna contiene dos bolas verdes y 3 rojas, ¿cuál es la probabilidad de que en el primer paso se haya extraido una bola roja?*

Solución:

(a) *Voy a extraer una bolita, ver el color, y luego la voy a reponer una bola del mismo color. Me va a interesar cada vez que saco una bolita saber de qué color salio y además saber en qué paso la estoy realizando. Defino dos eventos*

R_i: *"La extracción i es roja".*
V_i: *"La extracción i es verde".* $i = 1, 2$



Habiendo llenado mi árbol de probabilidad sabiendo que se trata de un espacio equiprobable, ahora defino un evento

S: "Al finalizar, la urna contiene $2V, 3R$*".*

Tengo 2 ramas que corresponden al evento, es decir, dos caminos posibles que me llevan a ese evento.

Aplicando el teorema de Probabilidad Total

$$\begin{aligned} P(S) &= P((R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2)) \\ &= P(R_1) \cdot P(V_2|R_1) + P(V_1) \cdot P(R_2|V_1) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(b) *Nos están pidiendo es que de todas las opciones posibles que teníamos, me quedo con las que acabamos de analizar.*

$$\begin{aligned} P(R_1|S) &= \frac{P(R_1 \cap S)}{P(S)} \therefore S = (R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2) \Rightarrow S \cap R_1 = R_1 \cap V_2 \\ &= \frac{P(V_2|R_1) \cdot P(R_1)}{P(S)} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.4 Eventos Independientes

Definición 1.24 (Eventos Independientes)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *los eventos independientes si y sólo si*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Propiedades 1.24.1. *Eventos independientes*

1. *Si* A *y* B *son independientes, también lo son* A *y* $\overline{B}$*,* $\overline{A}$ *y* B*,* $\overline{A}$ *y* $\overline{B}$*. demostrar!!!*
2. $A_1, \ldots, A_n$ *son independientes si y sólo si para cada sucesión de* k *conjuntos* $2 \leq k \leq n$*, la probabilidad de la intersección de los* k *sucesos coincide con el producto de las probabilidades.*

Ejemplo 1.24.1. *Supongo que* A*,* B*, y* C*. Para que sean independientes tiene que ocurrir que:*

$$\left.\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \end{aligned}\right\} \quad k = 2$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \quad k = 3$$

Observación 1.24.1. *Si* $P(B) > 0$*, cuando* A *y* B *son independientes ocurre que*

$$P(A|B) \overset{\overset{P(B)>0}{\downarrow}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Ejemplo 1.24.2. *Se elije al azar una permutación de las letras A, T, C, G. Mostrar que los eventos "A pertence a T" y "C precede a G" son independientes.*

Primero elijo mi experimento aleatorio

E.A: Elijo una permutación de las letras ATCG,

como las letras son todas distintas entonces

$$\#CP = 4! = 24$$

Ahora defino efentos

$$AT : \text{"}AprecedeaT\text{"}$$
$$CG : \text{"}CprecedeaT\text{"}$$

Mis eventos van a ser independientes tengo que calcular tres probabilidades y ver si se cumple. Como mi espacio es equiprobable, puedo usar Laplace.

$$\begin{gathered} ATCG \\ ACTG \\ ACGT \\ CATG \\ CATG \\ CGAT \end{gathered}$$

veo que tengo 6 casos, e imagino que si ponía GC tendría otros 6 casos, y si ponía TA tendría otros 12 casos. De esta forma veo los 24 casos.

$$\#AT = 6 + 6 = 12$$
$$\#CG = 12$$
$$\#(AT \cap CG) = 6$$

Sólo resta calcular las probabilidades

$$P(AT \cap CG) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$
$$P(AT) \cdot P(CG) = \frac{12}{24} \cdot \frac{12}{24} = \frac{1}{4}$$

1.5 Introducción a Modelos Continuos

Puntos al azar en un continuo.

El experimento consiste en elegir un numero al azar en el intervalo [0, 1]

1. Hallar la probabilidad de que los primeros 3 dígitos sean 3, 1, 4 (es decir 0.314...)
2. Hallar la probabilidad de que el 0 no esté entre los priemros 4 dígitos.

Lo que necesitamos es alguna manera de calcular la probabilidad para estos experimentos

Proposición 1.4.

$$P(x \in [a; b]) = b - a$$

Proof. Veo si cumple con los axiomas

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{A}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $A \cap B = \emptyset \to P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$\square$

Entonces para mi caso

1. $$P(x \in [0.314; 0.315)) = 0.315 - 0.314 = 0$$
2. No quiero al 0 en los primeros 4. *O: "No aparece el 0 en los primeros 4 dígitos"* Lo que voy a ir haciendo es ir quitando los intervalos en donde hay un 0 en los primeros 4 dígitos, que valores de todo el segmento tienen como primer dígito un 0, eso corresponde al intervalo [0, 0.1). Haciendo lo mismo para los que tienen 0 en el segundo dígito, entonces [0.1, 0.11), [0.2, 0.21), ..., [0.9, 0.91).

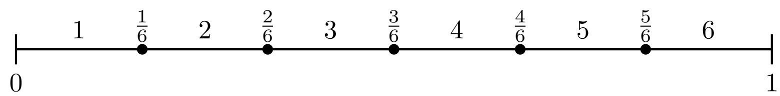
$$P(O) = 1 - P(x \in [0; 0.1))P(x \in [0.1; 0.11)) \cdot 9 - \dots$$

$$\begin{aligned} P(O) &= 1 - 0.1 - 9 \cdot 0.01 - 9^2 \cdot 0.001 - 9^3 \cdot 0.0001 \\ &= 1 - \frac{1}{10} - -\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^i & = \end{aligned}$$

1.6 Introducción a la simulación

Definición 1.25 (Simulación)**.** *"Imitar o fingir que se está realizando una acción cuando en realidad no se está llevando a cabo."*

1.6.1 ¿Cómo simulo el tirar un dado?



Tengo que definir una regla

x: Valor al elegir un n° al azar entre 0 y 1
D: Valor observado en el dado

$$\text{Si } 0 \leq x \leq \frac{1}{6} \rightarrow \text{D} = 1$$
$$\text{Si } \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{2}{6} \rightarrow \text{D} = 2$$
$$\text{Si } \frac{2}{6} \leq x \leq \frac{3}{6} \rightarrow \text{D} = 3$$
$$\text{Si } \frac{3}{6} \leq x \leq \frac{4}{6} \rightarrow \text{D} = 4$$
$$\text{Si } \frac{4}{6} \leq x \leq \frac{5}{6} \rightarrow \text{D} = 5$$
$$\text{Si } \frac{5}{6} \leq x \leq \frac{6}{6} \rightarrow \text{D} = 6$$

Para estimar probabilidades a partir de simulaciones, vamos a usar la idea de frecuencia relativa, vamos a "tirar el dado" muchas veces, y teniendo una idea de chances contando la cantidad de veces que ocurría el evento que queremos observar y lo dividimos por la cantidad de veces que realizo el experimento.

2 Distribucion

2.1 Variables Aleatorias

Dado un $E.A.$ y un Ω el espacio muestral asociado a el, una funcion X que asigna a cada uno de los elementos $\omega \in \Omega$ un numero real $X(w)$ se llama variable aleatoria.

Definición 2.1 (Variable Aleatoria)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una funcion, diremos que X es una variable aleatoria si $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Proposición 2.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X una V.A. entonces $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Luego, se puede calcular la probabilidad, es decir*

$$P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$$

Observación 2.1.1.

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

Definición 2.2 (Funcion de Distribucion)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X una V.A., definimos su funcion de distribucion $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por*

$$F_X = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedades 2.2.1.

1. *$F_X(x) \in [0, 1]$ $\forall x \in \mathbb{R}$.*
2. *$F_X(x)$ es monotona no decreciente.*
3. *$F_X(x)$ es continua a derecha.*
4. *$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$*

Definición 2.3 (Variables Aleatorias Discretas)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X una V.A., diremos que X es una V.A. discreta cuando existe $A \in \mathbb{R}$ finito o infinito numerable tal que $p_X(A) = 1$ donde*

$$p_X(A) = P(X \in A)$$

Una V.A. discreta es aquela cuyos valores posibles constituyen un conjunto finito o infinito numerable.
El rango de una V.A.D. es

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X > 0\}$$

Notacion:

$$X \text{ (mayuscula)} \to V.A.$$
$$x \text{ (minuscula)} \to \text{resultados posibles de la } V.A.$$

Definición 2.4. *Sea X una V.A.D., se llama funcion de probabilidad de X a una funcion $p_(X) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tal que $p_X(x) = P(X = x)$. Con cada resultado posible x_i asociamos un numero $p_X(x_i) = P(X = x_i)$ que debe cmumplir:*

1. *$p_X(x_i) \geq 0$ $\forall i$*
2. *$\sum_{x\in\mathbb{R}} p_X(x) = 1$*

Ejemplo. *E.A.: tiro una moneda 2 veces y observo el resultado. Defino C: observo cara.*

$$\Omega = \{(C, C), (C, \overline{C}), (\overline{C}, C), (\overline{C}, \overline{C})\}$$

1. *X: "Cantidad de caras observadas al tirar una moneda 2 veces".*

2. $R_X = \{\underbrace{0}_{x_1}, \underbrace{1}_{x_2}, \underbrace{2}_{x_3}\}$

3. *Busquemos* $p_X(x) = P(X = x)$ *para cada* $x \in \mathbb{R}$

$$p_X(0) = P(X = 0) = P((\overline{C}, \overline{C})) = \frac{1}{4}$$
$$p_X(1) = P(X = 1) = P((C, \overline{C}) \cup (\overline{C}, C)) = \frac{1}{2}$$
$$p_X(2) = P(X = 2) = P((C, C)) = \frac{1}{4}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(\text{"alguna cara"}) &= P(X \geq 1) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Teorema 2.2. *Sea X una V.A.D., entonces*

$$p_X(B) = \sum_{x_i \in B} p_X(x_i)$$

Para la funcion de distribucion del ejemplo tenemos que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Ejemplo. *De un conjunto de 7 ingenieras y 4 matematicas se eligen al azar 5 personas. Sea X el numero de ingenieras elegidas*

1. *Hallar la funcion de probabilidad de X y graficarla.*
2. *Hallar la funcion de distribucion de X y graficarla.*
3. *Cual es la probabilidad de que el grupo elegido este formado por 3 ingenieras?*

Paso 1: *defino la variable aleatoria*

X: "Cantidad de ingenieras en el grupo de 5".

Paso 2: *encontrar los valores posibles de mi variable aleatoria*

$$R_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Paso 3: *encontrar la funcion de probabilidad*

$$p_X(x) = P(X = x) \forall x \in R_X$$

Empecemos: saco 5 personas al azar, sin importarme el orden

$$\#CP = \binom{11}{5}$$

Ahora por Laplace calculo las funciones de probabilidad

$$p_X(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{7}{1}\binom{4}{4}}{\binom{11}{5}} = \frac{7}{462}$$
$$p_X(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{7}{2}\binom{4}{3}}{\binom{11}{5}} = \frac{84}{462}$$
$$p_X(3) = P(X = 3) = \frac{\binom{7}{3}\binom{4}{2}}{\binom{11}{5}} = \frac{210}{462}$$
$$p_X(4) = P(X = 4) = \frac{\binom{7}{4}\binom{4}{1}}{\binom{11}{5}} = \frac{140}{462}$$
$$p_X(5) = P(X = 5) = \frac{\binom{7}{5}\binom{4}{0}}{\binom{11}{5}} = \frac{21}{462}$$

Para terminar con lo anterior, hace falta verificar la definicion

1. $P(X = x_i) \geq 0$
2. $\sum p_X(x_i) = 1$

GRAFICO

Ahora busco la funcion de distribucion

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{7}{462} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{462} + \frac{84}{462} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{462} + \frac{84}{462} + \frac{210}{462} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{7}{462} + \frac{84}{462} + \frac{210}{462} + \frac{140}{462} & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

Verifico la definicion y confirmo que la funcion es siempre continua a derecha, y esta definida para todo $x \in \mathbb{R}$. *Por ultimo*

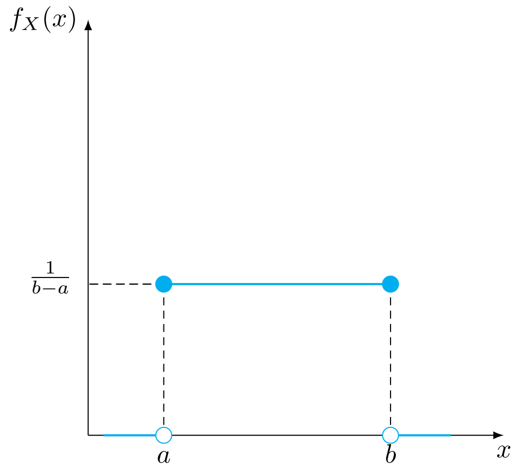
$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - F_X(2) \\ &= 1 - \frac{91}{462} \\ &= \frac{371}{462} \end{aligned}$$

2.2 Modelos Continuos

Definición 2.5 (Distribucion Uniforme)**.** *Supongamos que X es una V.A.C que toma todos los valores sobre el intervalo $[a, b]$. Si $f_X(x)$ esta dada por*

$$f_X(x) = \begin{cases} k = \frac{1}{b-a} \ \ si\ a < x < b \\ 0 \ \ e.o.c \end{cases}$$

Estamos hablando de una variable continua por lo tanto tiene funcion de densidad y se llama uniforme. Cuando hablamos de una variable uniforme lo que estamos diciendo es que su funcion de densidad va a ser constante sobre el intervalo $[a, b]$ *y 0 en otros casos, de manera que todos los valores que se encuentren en el intervalo tienen la misma probabilidad de ocurrir. Si graficamos*



Entonces, para que sea una funcion de densidad

1. $k > 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Se dice que la varaibla aleatoria X tiene disstribucion uniforme de paramteros a y b

$$X \sim \mathcal{U}(a, b)$$

Esta distribucion nos debe venir a la cabeza cuando se hable de elegir un punto al azar sobre un continuo.

Ejemplo 2.5.1. *Una vara de longitud* $10m$ *se corta en un punto elegido al azar. Calcular la probabilidad de que la pueza mas corta mida menos de* $3m$.

Solución: lo primero que vamos a hacer es identificar y definir a nuestra variable aleatoria. Identificando que lo aleatorio en mi experimento es el corte de barra, mi variable aleatoria es el punto en el que se corta la barra

X: "punto den el que se corta la vara".

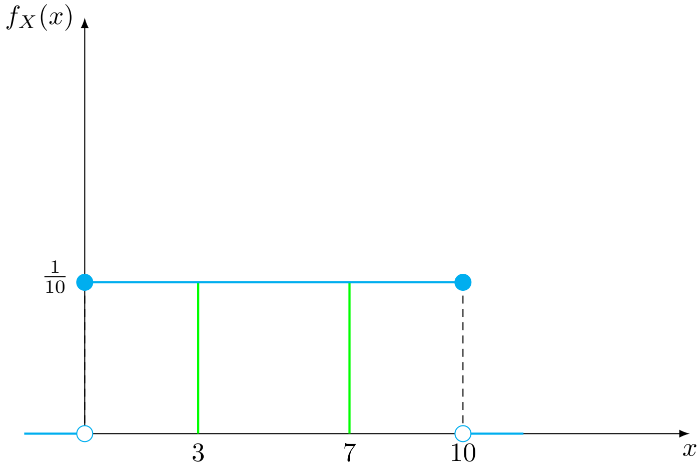
Estamos eligiendo al azar en un continuo, entonces nuestra variable aleatoria tiene una distribucion continua en un intervalor dado

$$X \sim \mathcal{U}(0, 10)$$

Luego

$$P(\text{"Pieza mas corta mida menos de 3}m)$$

$$P(\underbrace{(X < 3, X < 5)}_{X<3} \cup \underbrace{(10 - X < 3, X > 5)}_{X>7})$$

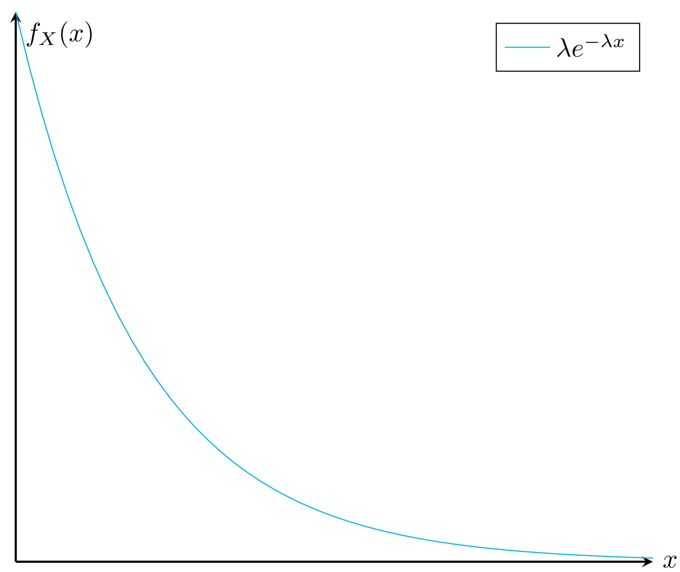


Nos quedaron areas de rectangulos entonces

$$
\begin{aligned}
P(X < 3, X > 7) &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \\
&= \frac{6}{10}
\end{aligned}
$$

Definición 2.6 (Distribucion Exponencial)**.** *Una variable aleatoria tiene distribucion exponencial de parametro* $\lambda > 0$ *si su funcion de densidad esta dada por*

$$
f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \ si \ a < x < b \\ 0 \ e.o.c \end{cases}
$$



$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= -e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} \qquad siempre \ que \ \lambda > 0, \lambda e^{-\lambda x} > 0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Calculando su funcion de distribucion

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t} & x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, i $x < 0$

$$P(X > x) = 1 - F_X(x = e^{-\lambda x})$$

Propiedades 2.6.1. *1. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ entonces $P(X > t + s, X > t) = P(X > s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$*

Proof.

$$\begin{aligned} P(X > t + s | X > t) &= \frac{P(X > t + s, X > t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} \\ &= P(X > s) \end{aligned}$$

□

Ejemplo
Supongamos que X es la duracion de una lampara de bajo consumo, entonces, la ecuacion anterior expresaria, que probabilidad hay de que mi lampara dure 8 horas si ya se que duro 4 horas. Y desarrollando llegamos a que esa expresion es equivalente a decir que probabilidad hay de que mi lampara dure mas de 4 horas. Esta propiedad se llama perdida de memoria.

2. Si X es una V.A.C y $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$ entonces existe $\lambda > 0$ tal que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. En otras palabras, si X es continua y tiene perdida de memoria entonces X es una distribucion exponencial

Definición 2.7 (Funcion de Riesgo (para una $V.A.C$))**.** *Pregunta: Dado que un compente duro un cierto tiempo t, cual es la probabilidad de que se rompa un instante despues?*

T: "Tiempo hasta que el componente falla"

$$P(T < t + \Delta t | T > t)$$

Esta probabilidad se puede pensar como una funcion de t a la que vamos a llamar funcion intensidad de fallas multiplicado por un intervalo Δt

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t \cdot P(T > t)} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{\Delta t \cdot (1 - F_T(t))} \\ &= \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} \end{aligned}$$

Este ultimo cociente se parece a la derivada del logaritmo. Porque la funcion de densidad es la derivada de la funcion de distribucion, entonces

$$-\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln 1 - F_T(t)$$

$$-\int_0^t \lambda(t)ds = \ln 1 - F_T(t)$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)ds}$$

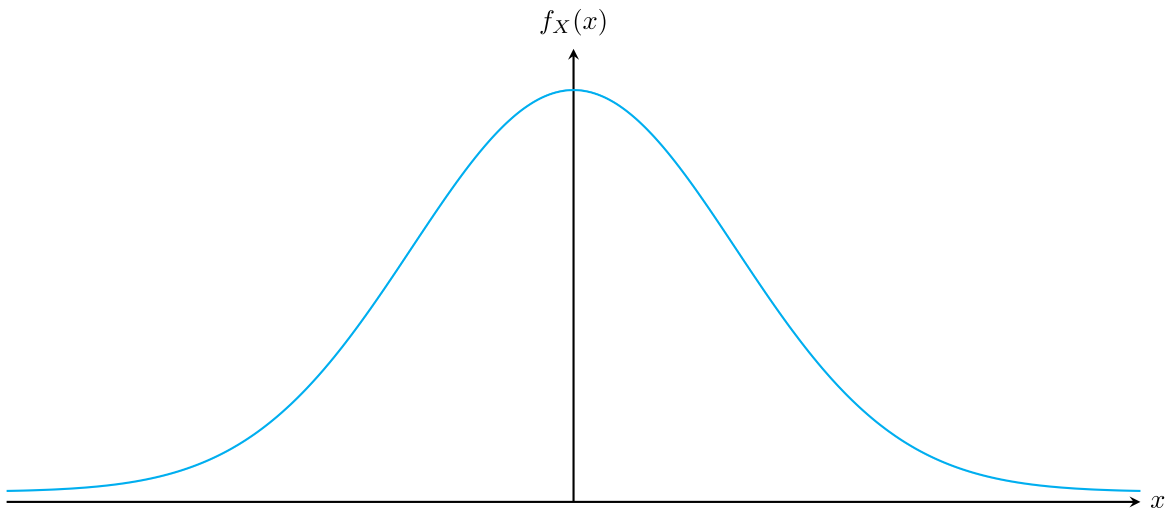
Cuando nos den la funcion intensidad de falla vamos a poder encontrar la funcion de distribucion de nuestra variable aleatoria que en general va a medir un tiempo hasta un evento, usando la formula a la que acabamos de lllegar, y con esa funcion de distribucion podemos calcular cualquier cosa que nos pidan.

Definición 2.8 (Distribucion Gamma)**.** *Se dice que una variable aleatoria tiene distribucion Gamma de parametros λ y k si su funcion de densidad es*

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma}(k) \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}$$

Definición 2.9 (Distribucion Normal Estandar)**.** *La V.A. X que toma los valores de $-\infty < x < \infty$ tiene una distribucion normal estandar si su funcion de densidad es de la forma*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Su probabilidad se calcula

$$\Phi(x) = F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Definición 2.10 (Cuantil)**.** *Definimos al cuantil α como el minimo valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que la funcioin de distribucion de x sea mayor o igual a α. Busco $x_\alpha : P(X \leq x_\alpha) = \alpha$.*

En general

$$x_\alpha = min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}$$

3 Clase 29-04

1. Defino mi variable aleatoria

   $$\text{X: "Cantidad de libros mal ubicados por dia"}$$

   Tiene distribucion de Poisson (ver tabla)

   $$X \sim Poi(\mu) \quad R_X = \mathbb{N}_0$$

   cuya funcion de probabilidad es

   $$p_X(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad x = 0, 1, \ldots$$

   (a)
   $$\begin{aligned} P(X/geq1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} \\ &= 1 - e^{-1} \\ &= 0.6321 \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} \\ &= 0.0613 \end{aligned}$$

   (c) (BONUS) Si se sabe que hubo mas de 2 libros mal ubicados, cual es la probabilidad de que haya mas de 4 mal ubicados?

   $$\begin{aligned} P(X < 4 | X > 2) &= \frac{P(X < 4, X > 2)}{P(X > 2)} \\ &= \frac{P(X = 3)}{1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)} \\ &= \frac{\frac{e^{-1}}{3!}}{1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{e^{-1}}{2!}} \\ &= 0.7635 \end{aligned}$$

2. Defino mi variable aleatoria

   $$\text{T: "Tiempo que se mantiene adherida la etiqueda".}$$

   Tenemos que la tasa con respecto al tiempo

   $$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \nVdash\{t > 0\}$$

   a partir de ella podemos encontrar la funcion de distribucion. En este caso es la funcion de riesgo

   $$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t) ds} \\ &= \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\int_0^t s^{-\frac{1}{2}} ds} & t > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-2\sqrt{t}} & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora que tengo la funcion de distribucion, me piden una probabilidad condicional, el primer anio estuvo adherida entonces

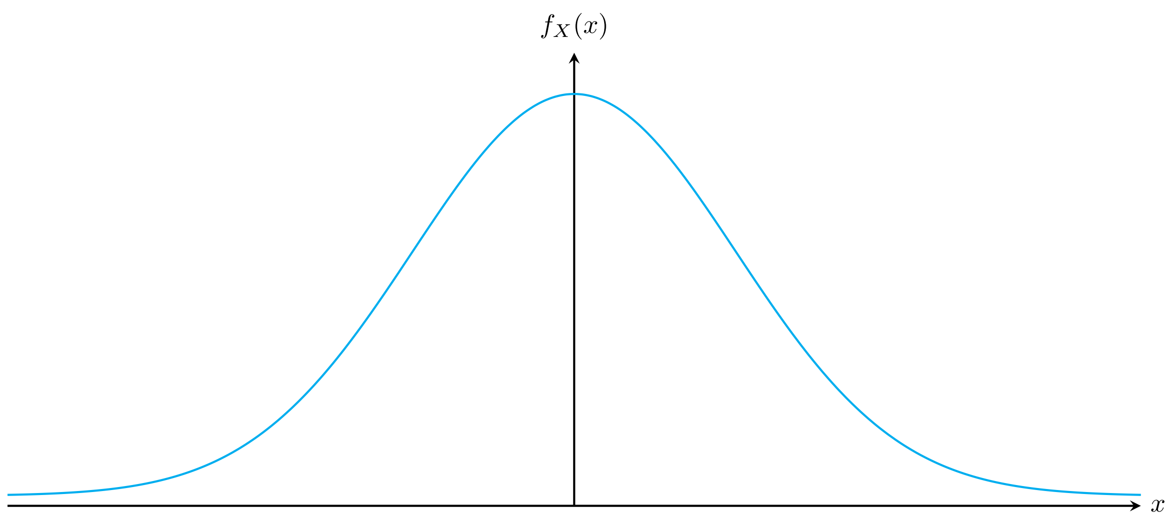
$$\begin{aligned}
P(T \geq 2 | T > 1) &= \frac{P(T \geq 2, T > 1)}{P(T > 1)} \\
&= \frac{T \geq 2}{P(T > 1)} \\
&= \frac{1 - F_T(2)}{1 - F_T(1)} \\
&= \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{e^{-2}} \\
&= 0.4367
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\overline{P(T > t)}}_{\text{Supervivencia}} = 1 - F_T(t)$$

3. Tengo que

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{(normal estandar)}$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$



$$F_Z(z) = \Phi(z)$$

(a) i.

$$\begin{aligned}
P(Z < 1) &= F_Z(1) \\
&= \Phi(1) \\
&= 0.8413
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
P(Z > 1) &= 1 - F_Z(1) \\
&= 0.1587
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
P(-1.5 < Z < 0.5) &= \Phi(0.5) - \Phi(-1.5) \\
&= 0.6247
\end{aligned}$$

iv.
$$
\begin{aligned}
P(-1.5 < Z < 0.5) &= \Phi(0.5) - \Phi(-1.5) \therefore \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) \\
&= 0.6247
\end{aligned}
$$

(b) Estoy buscando

$$a : P(Z > a) = 0.95$$

Que es lo mismo que decir

$$\Phi(a) = 0.05$$

Nuestro a corresponde a un numero negativo, ya que para cubrir la probabilidad que cubre, debe hacerlo desde los negativos. Ahora calculo a

$$
\begin{aligned}
a &= \Phi^{-1}(0.05) \\
&= -1.6449
\end{aligned}
$$

4. Definimos la $V.A.$

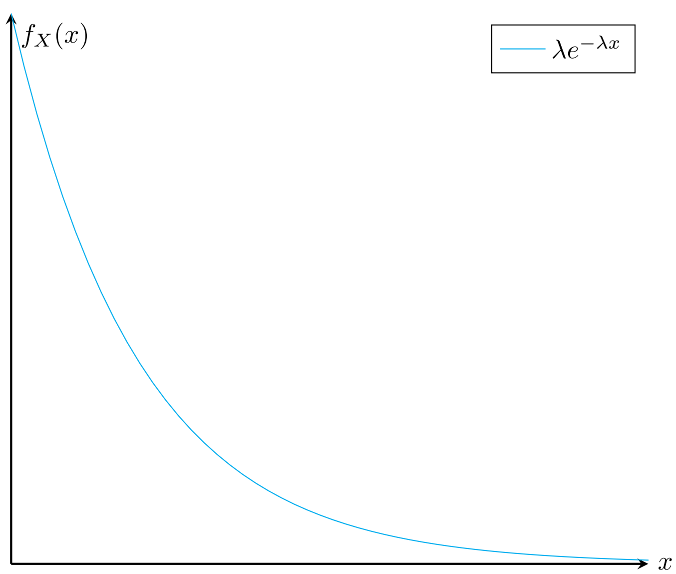
P: "Cantidad (en toneladas) del producto utilizada en un dia"

Sabemos que P tiene una distribucion exponencial con paramtro 0.25

$$P \sim \mathcal{E}(0.25)$$

Cuya funcion de distribucion es

$$f_P(p) = \begin{cases} 0.25 \cdot e^{-0.25p} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$



Luego

$$F_P(p) = \begin{cases} 0 & p < 0 \\ 1 - e^{-0.25p} & p \geq 0 \end{cases}$$

Por ultimo, si $p > 0$, $P(P > p) = e^{-0.25}$

(a)

$$\begin{aligned} P(T > 4) &= 1 - F_T(4) \\ &= e^{-\frac{1}{4}\cdot 4} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

(b)

$$P(\underbrace{\text{"Agotar existencia"}}_{T \geq a}) = 0.05$$

Me piden $a > P(T \geq a) = 0.05$, es decir $e^{-\frac{a}{4}} = 0.05$ por lo tanto

$$\begin{aligned} a &= -4\ln(0.05) \\ &= 11.98 \end{aligned}$$

5. Definimos la variable aleatoria

X: "tiempo de reabastecimiento en dias"

y me dan la funcion de densidad

$$f_X(x) = \frac{(0.1)^4}{3!} \cdot x^3 e^{-\frac{x}{10}} \cdot \mathbb{1}\{x > 0\}$$

(a)

$$P(X < 20) = \int_0^{20} \frac{(0.1)^4}{3!} \cdot x^3 e^{-\frac{x}{10}} dx$$

Veo que la funcion de densidad se parece a la funcion de distribucion de Gamma

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma}(k) \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}$$

Si fuera Gamma $k = 4$ y $\lambda = \frac{1}{10}$. Verifico que cumple, entonces

$$\therefore X \sim \Gamma(4, \frac{1}{10})$$

Usando la Supervivencia de Gamma

$$\Gamma(a) = (a-1) \cdot \Gamma(a-1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(X < 20) &= 1 - P(X > 20) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{i!} \cdot e^{-2} \\ &= 0.1429 \end{aligned}$$

(b) s

$$\begin{aligned} P(X < 60) &= 1 - P(X > 60) \\ &= 1- \end{aligned}$$