

Notas de Probabilidad y Estadística

Ivan Litteri

1 Probabilidad

El término probabilidad se refiere al término de azar, y la incertidumbre en cualquier situación en la que varios resultados pueden ocurrir.

Definición 1.1 (Experimentos aleatorios). *Acciones o procesos en los cuales conocemos todos los resultados posibles pero no sabemos con certeza cuál va a ocurrir.*

Si conocemos todos los resultados posibles entonces podemos anotarlos, entonces definimos *espacio muestral*:

Definición 1.2 (Espacio muestral (Ω)). *Es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio. Sus elementos, ω , se llaman **elementos elementales**.*

Ejemplos 1.2.1. *Casos que conozco todas los posibles resultados pero no el resultado final:*

1. Tiro una moneda y observo la cara superior.

Espacio muestral:

$$\Omega_1 = \{ "cara", "ceca" \}$$

2. Tiro una moneda 2 veces y observo que sale.

Espacio muestral:

$$\Omega_2 = \{ ("cara", "ceca"), ("ceca", "cara"), ("cara", "cara"), ("ceca", "ceca") \}$$

3. Tiro un dado y observo el resultado.

Espacio muestral:

$$\Omega_3 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

4. Registro la cantidad de personas que entran a un banco entre las 11 y las 12hs.

Espacio muestral:

$$\Omega_4 = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \} = \mathbb{N}_0$$

5. Registro el tiempo entre la llegada de autos a un peaje.

Espacio muestral:

$$\Omega_5 = \{ t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0 \}$$

En el estudio de la probabilidad nos interesa no solo los resultados individuales de los espacios muestrales sino que nos interesan varias recopilaciones de resultados. Por eso definimos *evento* o *suceso*:

Definición 1.3 (Evento o Suceso). *Es cualquier conjunto de resultados en el espacio muestral. Los resultados pueden mostrar un conjunto finito o infinito con cualquier cardinalidad.*

Ejemplo. Refiriendonos a (1) podemos definir un evento "A" como:

1. A. "El valor observado es par". (está formado por 3 eventos elementales) Así creamos un subconjunto que corresponde a los elementos de Ω_1 que cumple con el evento "A".

Definición 1.4 (Espacio equiprobable). *Un espacio muestral es equiprobable cuando todos sus elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.*

Definición 1.5 (Frecuencia absoluta). *Para un evento en particular, la frecuencia absoluta es la cantidad de veces que sucede ese evento. La cantidad de veces que sucede el evento A (o $\#A$), se nota:*

$$\eta_A$$

Definición 1.6 (Frecuencia relativa). *Para un evento en particular, se define como la relación entre la cantidad de veces que ocurre el evento A y el número total de ensayos.*

$$f_a = \frac{\eta_A}{\eta}$$

Ahora estamos en condiciones para definir *probabilidad*.

Definición 1.7 (Probabilidad). *Probabilidad de un evento A , es un número positivo (o nulo) que se le asigna a cada suceso o evento del espacio muestral.*

Definición 1.8 (Regla de Laplace). *La probabilidad de que ocurra un suceso A se calcula como la cantidad de casos en los que ocurre ese suceso dividido los casos posibles de ese experimento siempre y cuando los todos los elementos del espacio muestral sean equiprobables:*

$$P(A) = \frac{\# \text{casos favorables de } A}{\# \text{casos posibles del experimento}}$$

Ejemplos 1.8.1. Regla de Laplace

1. Arrojo un dado equilibrado ¿cuál es la probabilidad de que observe el número 2? ¿cuál es la probabilidad de que observe un número par?

Solución:

- Experimento aleatorio: arrojo un dado y observo el resultado.
- Espacio muestral:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Evento A . "Se observa el número 2".
- Definición de Laplace: ¿es mi espacio equiprobable? el dado es equilibrado, por lo tanto mi espacio es equiprobable. Entonces puedo usar la definición:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \therefore |A| = 1 \wedge |\Omega| = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

- Evento B . "Se observa un número par".
-

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Un dado equilibrado se arroja 2 veces. Hallar la probabilidad de que:

- (a) Los dos resultados sean iguales.
- (b) Los dos resultados sean distintos y su suma no supere 9.
- (c) La suma de los resultados sea 10.
- (d) El primer resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar.

Solución:

- Experimento aleatorio: arrojo un dado 2 veces y observo el resultado.
- Evento D_i : "Valor observado en el tiro i " $i = 1, 2$
- Como los resultados son muchos para escribir el conjunto entero, escribo una tabla:

$$\Omega = \{(a, b) : a, b = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \therefore |\Omega| = 36$$

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

(a) A: "Los dos resultados son iguales" $\therefore |\text{A}| = 6$

$$P(A) = \frac{|\text{A}|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) B: "Los resultados son distintos y la suma no supera 9" $\therefore |\text{B}| = 26$

$$P(B) = \frac{|\text{B}|}{|\Omega|} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

(c) C: "La suma de los resultados sea 10s" $\therefore |\text{C}| = 4$

$$P(C) = \frac{|\text{C}|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(d) D: "El primer resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar" $\therefore |\text{D}| = 4$

$$P(D) = \frac{|\text{D}|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

1.1 Preliminares

Definición 1.9 (Álgebra de eventos). Dado Ω , sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos de Ω , diremos que \mathcal{A} es un álgebra de eventos si:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Si $B \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{A}$.
3. Si $B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}$.
4. (σ Álgebra) Si $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en \mathcal{A} entonces:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Propiedades 1.9.1. Álgebra de eventos

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
3. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

Ejemplo 1.9.1. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hallar la menor álgebra de subconjuntos tal que el subconjunto $\{2, 4, 6\}$ pertenezca a ella.

Solución:

Por axioma 2 debe estar su complemento $(\{1, 3, 5\})$.

Por axioma 3 debe estar la unión $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$.

Por axioma 2 debe estar su complemento $(\{\emptyset\})$.

El axioma 1 se cumplió por accidente.

$$\mathcal{A} = \{\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\emptyset\}\}$$

De esta forma encontramos el menor álgebra de subconjuntos de Ω con la condición pedida.

Definición 1.10 (Calcular probabilidad en cualquier espacio). Una probabilidad (o medida de probabilidad) es una función $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ que a cada evento A le hace corresponder un número real $P(A)$ con las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$ (la probabilidad es un número entre 0 y 1).
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (eventos mutuamente excluyentes o disjuntos: no pueden ocurrir al mismo tiempo).
4. (Axioma de continuidad) Para cada sucesión decreciente de eventos $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ vale que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

Propiedades 1.10.1. :

1. Si \bar{A} es el evento complementario de A , entonces $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Demostración. (usando los axiomas)

$$\begin{aligned} \Omega &= A \cup \bar{A} \\ A \cap \bar{A} &= \emptyset \\ \text{ax.2) } P(\Omega) &= P(A \cup \bar{A}) = 1 \\ \text{ax.3) } P(A \cup \bar{A}) &= P(A) + P(\bar{A}) = 1 \\ \therefore P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

□

2. Sean A y B eventos pertenecientes a Ω , entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración. usando los axiomas:

Completar

□

3. Si A_1, A_2, \dots, A_n es una sucesión de elementos de A , mutuamente excluyentes 2 a 2, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

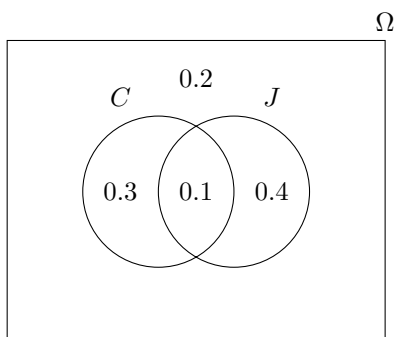
Nota (¿Que significa para nosotros el álgebra de eventos?). Cuando defino un experimento aleatorio puedo definir Ω pero no necesariamente puedo conocer todas las probabilidades de todos los elementos elementales, puede que me falte información, entonces el conjunto del álgebra de eventos me dice a que eventos les puedo calcular la probabilidad.

Ejemplo. En argentina, el 80% de los programadores usa Java, C, o ambos. El 50% usa Java y el 40% usa C. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un programador al azar use:

- Java y C:
- Sólo Java.
- Solo C.
- Ninguno de los dos lenguajes.

Solución:

- Elijo el experimento aleatorio (EA):
"Elijo un programador al azar y me pregunto que lenguaje usa".
- Defino eventos:
J: "El programador elegido al azar usa Java".
C: "El programador elegido al azar usa C".
- Defino quién es Ω (en ese caso lo defino con un diagrama, en específico un diagrama de Venn):



- Interpreto los datos:

$$P(J \cup C) = 0.8$$

$$P(J) = 0.5$$

$$P(C) = 0.4$$

$$\therefore P(J \cup C) = P(J) + P(C) - P(J \cap C)$$

$$\Rightarrow P(J \cap C) = P(J) + P(C) - P(J \cup C) = 0.1$$

• *Resuelvo*

a) $P(J \cap C) = 0.1$

b) $P(J \cap \overline{C}) = P(J - C \cap J) = P(J) - P(C \cap J) = 0.4$

c) $P(C \cap \overline{J}) = P(C - J \cap C) = P(C) - P(J \cap C) = 0.3$

d) "Ninguno" es el complemento de "alguno" y "alguno" = $(J \cup C)$ entonces:

$$P(\overline{J \cup C}) = P(\overline{C} \cap \overline{J}) = 1 - P(C \cup J) = 0.2$$

Definición 1.11 (Espacio de probabilidad). *Es una terna (Ω, \mathcal{A}, P) , donde Ω es un conjunto no vacío, \mathcal{A} es un álgebra sobre Ω y P es una medida de probabilidad.*

1.2 Técnicas de Conteo

Definición 1.12 (#CP). *Cantidad de casos posibles de un experimento.*

Si tiramos un dado vemos que la cantidad de resultados posibles es 6; si tiramos el dado 2 veces, la cantidad de resultados posibles es 36; si tiramos el dado 3 veces, tengo 6 opciones para cada tiro:

$$\underline{6} \underline{6} \underline{6}$$

Definición 1.13 (Regla del Producto). *Dados dos conjuntos A y B con η_A y η_B elementos cada uno respectivamente, la cantidad de todos los pares ordenados que pueden formarse con un elemento de A y uno de B se calcula como $\eta_A \cdot \eta_B$*

Ejemplos 1.13.1. *Regla del producto*

1. Tiro un dado 2 veces y por regla del producto:

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} = 36$$

2. Tiro un dado 3 veces y por regla del producto:

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 6^3$$

3. Tiro un dado 4 veces y por regla del producto:

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 6^4$$

4. En 4 tiros, ¿de cuántas formas posibles puede no aparecer ningún 6?

Tengo 5 opciones en donde no sale un 6, y como son 4 tiros, entonces tengo 5 opciones en donde no sale un 6, 4 veces. Entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 5^4$$

5. ¿Cuántas patentes de 3 letras y 3 números distintas puedo formar?

Tengo 3 letras (una raya por letra) y 3 números (una raya por número). Tengo 26 letras posibles para la primer posición, para la segunda y tercera igual (porque se pueden repetir). Con los números, tengo 10 opciones para el primero, el segundo y el tercero (10 dígitos de 0 a 9). Por regla del producto:

$$\#CP = \underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 26^3 \cdot 10^3$$

Supongamos que tengo 5 libros y quiero ordenarlos en una biblioteca, que sólo tiene 5 lugares. Quiero contar todas las formas posibles de ordenarlos. Entonces supongo un caso análogo a los anteriores. Para el primer lugar tengo 5 posibles opciones para colocar uno de mis libros, para el segundo 4 opciones, para el tercero 3 opciones, para el cuarto 2 opciones y para el último lugar ya solo me queda una posible opción. Entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 120 = 5!$$

Lo que hicimos fué pensar en la cantidad de libros que teníamos y ver la cantidad de *ordenamientos* posibles.

Definición 1.14 (Permutaciones). *La cantidad de formas distintas en las que puedo ordenar n elementos es $n!$*

Ejemplos 1.14.1. *Permutaciones*

1. *¿De cuántas formas distintas puedo fotografiar a 7 personas en hilera?*

$$\#CP = \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 7!$$

2. *¿Que pasaría si en una biblioteca tengo espacio para 3 libros y yo tengo 5?*

5! son todas las permutaciones de los elementos que tenía originalmente, y hay que dividir por los que conté de más cuando ubiqué a todos. En este caso calculo las permutaciones y luego les divido lo que conté de más, entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!}$$

Definición 1.15 (Variaciones). *Es la cantidad de subconjuntos ordenados de r elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos. Las variaciones son, de un conjunto total de n elementos son todos los subconjuntos diferentes que puedo extraer si me importa el orden en el que los estoy extrayendo.*

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En la calculadora: \boxed{nPr}

Ejemplo 1.15.1. *En un cine con 70 butacas, ¿de cuántas formas distintas pueden sentarse 45 personas?*

$$\#CP = \frac{70!}{(70-45)!} = \frac{70!}{25!}$$

Definición 1.16 (Combinaciones). *Es la cantidad de subconjuntos NO ordenados de r elementos que pueden formarse a partir de los conjuntos de n elementos.*

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r}$$

En la calculadora: \boxed{nCr}

En donde $\binom{n}{r}$ se denomina número combinatorio de n elementos tomados de a r . Lo que me dice este número es de cuantas formas puedo sacar r elementos de un total de n cuando no me importa el orden.

Ejemplos 1.16.1. *Combinaciones*

1. ¿De cuántas formas diferentes puedo elegir 11 personas de un grupo de 30 para formar un equipo de fútbol?

Tengo un conjunto de 30 personas, y voy a elegir un subconjunto de 11 personas entonces $n = 30$, $r = 11$ y como el orden no me importa, utilizo el número combinatorio para contar estas personas:

$$\#CP = \binom{30}{11}$$

2. Control de calidad. ¿Cuántas muestras de 10 piezas diferentes puedo elegir de un lote de 100?

Tengo un conjunto, y un subconjunto, y el orden no me interesa, entonces:

$$\#CP = \binom{100}{10}$$

Observación 1.16.1.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Proof.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

□

Ejemplo 1.16.1. Mazo de 40 cartas españolas.

- a) En un mazo de cartas españolas, tengo 10 cartas de espada, 10 cartas de copa, 10 cartas de basto y 10 cartas de oro. ¿Cuántas manos diferentes puede tener una persona jugando al truco?

$$n = 40, r = 3$$

$$\#CP = \binom{40}{3}$$

- b) ¿Cuántas formas distintas hay de recibir una mano de oro?

Todos los casos posibles se dan de elegir 3 cartas de un total de 10 ya que estoy eligiendo entre las cartas que son de oro.

$$\#CP = \binom{10}{3}$$

- c) ¿Cuántas manos puedo recibir siendo todas las cartas del mismo palo?

Separo en casos: tengo 4 posibles resultados dada la cantidad de palos disponibles, y por cada palo tengo la cantidad de posibilidades del resultado anterior, entonces ahora tengo que sumar todas las formas de sacar 3 de cada palo.

$$\#CP_{oro} = \binom{10}{3}, \#CP_{basto} = \binom{10}{3}, \#CP_{espada} = \binom{10}{3}, \#CP_{copa} = \binom{10}{3}$$

$$\#CP = \#CP_{oro} + \#CP_{basto} + \#CP_{espada} + \#CP_{copa}$$

$$\#CP = 4 \cdot \#CP_{palo}$$

$$\#CP = 4 \cdot \binom{10}{3}$$

Definición 1.17 (Anagramas). Dada una palabra, un anagrama es una forma de escribir otra palabra, cambiando las letras de la palabra original de lugar.

Ejemplo 1.17.1. Supongamos la palabra "ANANA", ¿cuántos anagramas puedo formar?

¿Cómo contamos todos los ordenamientos posibles? Usando lo que aprendimos en número combinatorio: tengo 5 posiciones para ubicar 5 letras, las letras que tengo que ubicar son las letras de la palabra "ANANA":

1. Acomodo las letras "A", tengo 3 lugares para ubicarla (porque tengo 3). No me importa el orden.

$$\#CP_A = \binom{5}{3} \quad (1)$$

2. Por todas esas posiciones que tengo para ubicar la letra "A", tengo que ver todas las posibles opciones que me quedan para la letra "N". Ahora tengo 2 lugares para ubicarla (porque tengo 2).

$$\#CP_N = \binom{2}{2} = 1 \quad (2)$$

Una vez ubicadas las letras "A" tengo sólo una forma posible de ubicar las "N". Si ubico primero las "N", de los 5 lugares que tengo voy a poder usar 2, y de los 3 lugares que quedan voy a elegir 3 para ubicar la "A".

$$\#CP = \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3}$$

Nota. Otra forma de pensarlo permutando es hacer el total de permutaciones y dividir esa cantidad por la multiplicación de los casos que conté de más

$$\#CP = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

Ejemplo 1.17.2. ¿Cuántos anagramas puedo formar de la palabra "MANZANA"?

- Con el método de permutaciones:

$$\#CP = \frac{7!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$$

- Con números combinatorios (leyendo las letras en orden izq-der):

$$\#CP = \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1}$$

Definición 1.18 (Permutaciones con elementos repetidos). Si tenemos n elementos en los cuales hay n_1 de la clase 1, n_2 de la clase 2, ... n_k de la k -ésima, el número de permutaciones de $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ objetos está dada por

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Definición 1.19 (Método de bolas y urnas (capitulo1-video3 40:00)). Se usa cuando tengo una cantidad de elementos **indistinguibles**. Si estoy ordenando r elementos indistinguibles en k urnas tengo que dibujar r crucecitas ("×"), y $k-1$ palitos ("|")

Definición 1.20 (Métodos de Bose-Einstein).

$$\#CP = \binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}$$

Ejemplo 1.20.1. Tengo un mapa, donde cada cuadrado es una manzana, y quiero ir del punto C al punto S . ¿De cuántas formas posibles puedo ir de C a S si solo puedo moverme hacia la izquierda o abajo. Esto es análogo al problema del anagrama, por lo tanto

$$\#CP = \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$