

Notas de Probabilidad y Estadística

Ivan Litteri

1 Probabilidad

El término probabilidad se refiere al término de azar, y la incertidumbre en cualquier situación en la que varios resultados pueden ocurrir.

Definición 1.1 (Experimentos aleatorios). *Acciones o procesos en los cuales conocemos todos los resultados posibles pero no sabemos con certeza cuál va a ocurrir.*

Si conocemos todos los resultados posibles entonces podemos anotarlos, entonces definimos *espacio muestral*:

Definición 1.2 (Espacio muestral (Ω)). *Es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio. Sus elementos, ω , se llaman **elementos elementales**.*

Ejemplos 1.2.1. *Casos que conozco todas los posibles resultados pero no el resultado final:*

1. Tiro una moneda y observo la cara superior.

Espacio muestral:

$$\Omega_1 = \{ "cara", "ceca" \}$$

2. Tiro una moneda 2 veces y observo que sale.

Espacio muestral:

$$\Omega_2 = \{ ("cara", "ceca"), ("ceca", "cara"), ("cara", "cara"), ("ceca", "ceca") \}$$

3. Tiro un dado y observo el resultado.

Espacio muestral:

$$\Omega_3 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

4. Registro la cantidad de personas que entran a un banco entre las 11 y las 12hs.

Espacio muestral:

$$\Omega_4 = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \} = \mathbb{N}_0$$

5. Registro el tiempo entre la llegada de autos a un peaje.

Espacio muestral:

$$\Omega_5 = \{ t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0 \}$$

En el estudio de la probabilidad nos interesa no solo los resultados individuales de los espacios muestrales sino que nos interesan varias recopilaciones de resultados. Por eso definimos *evento* o *suceso*:

Definición 1.3 (Evento o Suceso). *Es cualquier conjunto de resultados en el espacio muestral. Los resultados pueden mostrar un conjunto finito o infinito con cualquier cardinalidad.*

Ejemplo. Refiriendonos a (1) podemos definir un evento "A" como:

1. A. "El valor observado es par". (está formado por 3 eventos elementales) Así creamos un subconjunto que corresponde a los elementos de Ω_1 que cumple con el evento "A".

Definición 1.4 (Espacio equiprobable). *Un espacio muestral es equiprobable cuando todos sus elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.*

Definición 1.5 (Frecuencia absoluta). *Para un evento en particular, la frecuencia absoluta es la cantidad de veces que sucede ese evento. La cantidad de veces que sucede el evento A (o $\#A$), se nota:*

$$\eta_A$$

Definición 1.6 (Frecuencia relativa). *Para un evento en particular, se define como la relación entre la cantidad de veces que ocurre el evento A y el número total de ensayos.*

$$f_a = \frac{\eta_A}{\eta}$$

Ahora estamos en condiciones para definir *probabilidad*.

Definición 1.7 (Probabilidad). *Probabilidad de un evento A , es un número positivo (o nulo) que se le asigna a cada suceso o evento del espacio muestral.*

Definición 1.8 (Regla de Laplace). *La probabilidad de que ocurra un suceso A se calcula como la cantidad de casos en los que ocurre ese suceso dividido los casos posibles de ese experimento siempre y cuando los todos los elementos del espacio muestral sean equiprobables:*

$$P(A) = \frac{\# \text{casos favorables de } A}{\# \text{casos posibles del experimento}}$$

Ejemplos 1.8.1. Regla de Laplace

1. Arrojo un dado equilibrado ¿cuál es la probabilidad de que observe el número 2? ¿cuál es la probabilidad de que observe un número par?

Solución:

- Experimento aleatorio: arrojo un dado y observo el resultado.
- Espacio muestral:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Evento A . "Se observa el número 2".
- Definición de Laplace: ¿es mi espacio equiprobable? el dado es equilibrado, por lo tanto mi espacio es equiprobable. Entonces puedo usar la definición:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \therefore |A| = 1 \wedge |\Omega| = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

- Evento B . "Se observa un número par".
-

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Un dado equilibrado se arroja 2 veces. Hallar la probabilidad de que:

- (a) Los dos resultados sean iguales.
- (b) Los dos resultados sean distintos y su suma no supere 9.
- (c) La suma de los resultados sea 10.
- (d) El primer resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar.

Solución:

- Experimento aleatorio: arrojo un dado 2 veces y observo el resultado.
- Evento D_i : "Valor observado en el tiro i " $i = 1, 2$
- Como los resultados son muchos para escribir el conjunto entero, escribo una tabla:

$$\Omega = \{(a, b) : a, b = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \therefore |\Omega| = 36$$

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

(a) A: "Los dos resultados son iguales" $\therefore |\text{A}| = 6$

$$P(A) = \frac{|\text{A}|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) B: "Los resultados son distintos y la suma no supera 9" $\therefore |\text{B}| = 26$

$$P(B) = \frac{|\text{B}|}{|\Omega|} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

(c) C: "La suma de los resultados sea 10s" $\therefore |\text{C}| = 4$

$$P(C) = \frac{|\text{C}|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(d) D: "El primer resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar" $\therefore |\text{D}| = 4$

$$P(D) = \frac{|\text{D}|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

1.1 Preliminares

Definición 1.9 (Álgebra de eventos). Dado Ω , sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos de Ω , diremos que \mathcal{A} es un álgebra de eventos si:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Si $B \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{A}$.
3. Si $B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}$.
4. (σ Álgebra) Si $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión en \mathcal{A} entonces:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Propiedades 1.9.1. Álgebra de eventos

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
3. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

Ejemplo 1.9.1. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hallar la menor álgebra de subconjuntos tal que el subconjunto $\{2, 4, 6\}$ pertenezca a ella.

Solución:

Por axioma 2 debe estar su complemento $(\{1, 3, 5\})$.

Por axioma 3 debe estar la unión $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$.

Por axioma 2 debe estar su complemento $(\{\emptyset\})$.

El axioma 1 se cumplió por accidente.

$$\mathcal{A} = \{\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\emptyset\}\}$$

De esta forma encontramos el menor álgebra de subconjuntos de Ω con la condición pedida.

Definición 1.10 (Calcular probabilidad en cualquier espacio). Una probabilidad (o medida de probabilidad) es una función $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ que a cada evento A le hace corresponder un número real $P(A)$ con las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$ (la probabilidad es un número entre 0 y 1).
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (eventos mutuamente excluyentes o disjuntos: no pueden ocurrir al mismo tiempo).
4. (Axioma de continuidad) Para cada sucesión decreciente de eventos $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ vale que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

Propiedades 1.10.1. :

1. Si \bar{A} es el evento complementario de A , entonces $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Demostración. (usando los axiomas)

$$\begin{aligned} \Omega &= A \cup \bar{A} \\ A \cap \bar{A} &= \emptyset \\ \text{ax.2) } P(\Omega) &= P(A \cup \bar{A}) = 1 \\ \text{ax.3) } P(A \cup \bar{A}) &= P(A) + P(\bar{A}) = 1 \\ \therefore P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

□

2. Sean A y B eventos pertenecientes a Ω , entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración. usando los axiomas:

Completar

□

3. Si A_1, A_2, \dots, A_n es una sucesión de elementos de A , mutuamente excluyentes 2 a 2, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

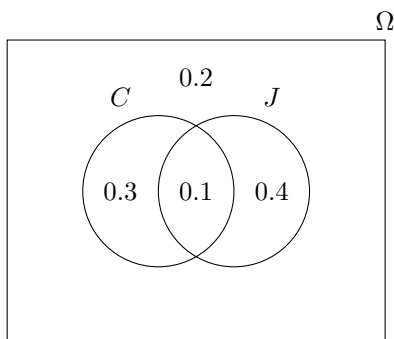
Nota (¿Que significa para nosotros el álgebra de eventos?). Cuando defino un experimento aleatorio puedo definir Ω pero no necesariamente puedo conocer todas las probabilidades de todos los elementos elementales, puede que me falte información, entonces el conjunto del álgebra de eventos me dice a que eventos les puedo calcular la probabilidad.

Ejemplo. En argentina, el 80% de los programadores usa Java, C, o ambos. El 50% usa Java y el 40% usa C. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un programador al azar use:

1. Java y C:
2. Sólo Java.
3. Solo C.
4. Ninguno de los dos lenguajes.

Solución:

- Elijo el experimento aleatorio (EA):
"Elijo un programador al azar y me pregunto que lenguaje usa".
- Defino eventos:
J: "El programador elegido al azar usa Java".
C: "El programador elegido al azar usa C".
- Defino quién es Ω (en ese caso lo defino con un diagrama, en específico un diagrama de Venn):



Interpreto los datos:

$$\begin{aligned}
 P(J \cup C) &= 0.8 \\
 P(J) &= 0.5 \\
 P(C) &= 0.4 \\
 \therefore P(J \cup C) &= P(J) + P(C) - P(J \cap C) \\
 \Rightarrow P(J \cap C) &= P(J) + P(C) - P(J \cup C) = 0.1
 \end{aligned}$$

• *Resuelvo*

a) $P(J \cap C) = 0.1$

b) $P(J \cap \overline{C}) = P(J - C \cap J) = P(J) - P(C \cap J) = 0.4$

c) $P(C \cap \overline{J}) = P(C - J \cap C) = P(C) - P(J \cap C) = 0.3$

d) "Ninguno" es el complemento de "alguno" y "alguno" = $(J \cup C)$ entonces:

$$P(\overline{J \cup C}) = P(\overline{C} \cap \overline{J}) = 1 - P(C \cup J) = 0.2$$

Definición 1.11 (Espacio de probabilidad). *Es una terna (Ω, \mathcal{A}, P) , donde Ω es un conjunto no vacío, \mathcal{A} es un álgebra sobre Ω y P es una medida de probabilidad.*