Notas de Probabilidad y Estadística

Ivan Litteri

Contents

1 Probabilidad

El término probabilidad se refiere al término de azar, y la incertidumbre en cualquier situación en la que varios resultados pueden ocurrir.

Definición 1.1 (Experimentos aleatorios)**.** *Acciones o procesos en los cuales conocemos todos los resultados posibles pero no sabemos con certeza cuál va a ocurrir.*

Si conocemos todos los resultados posibles entonces podemos anotarlos, entonces definimos *espacio muestral*:

Definición 1.2 (Espacio muestral (Ω))**.** *Es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio. Sus elementos, ω, se llaman* ***elementos elementales****.*

Ejemplos 1.2.1. *Casos que conozco todas los posibles resultados pero no el resultado final:*

1. *Tiro una moneda y observo la cara superior.*
   Espacio muestral:
   $$\Omega_1 = \{"cara", "ceca"\}$$
2. *Tiro una moneda 2 veces y observo que sale.*
   Espacio muestral:
   $$\Omega_2 = \{("cara", "ceca"), ("ceca", "cara"), ("cara", "cara"), ("ceca", "ceca")\}$$
3. *Tiro un dado y observo el resultado.*
   Espacio muestral:
   $$\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
4. *Registro la cantidad de personas que entran a un banco entre las 11 y las 12hs.*
   Espacio muestral:
   $$\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$$
5. *Registro el tiempo entre la llegada de autos a un peaje.*
   Espacio muestral:
   $$\Omega_5 = \{t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

En el estudio de la probabilidad nos interesa no solo los resultados individuales de los espacios muestrales sino que nos interesan varias recopilaciones de resultados. Por eso definimos *evento* o *suceso*:

Definición 1.3 (Evento o Suceso)**.** *Es cualquier conjunto de resultados en el espacio muestral. Los resultados pueden mostrar un conjunto finito o infinito con cualquier cardinalidad.*

Ejemplo. *Refiriendonos a (1) podemos definir un evento "A" como:*

1. *A. "El valor observado es par". (está formado por 3 eventos elementales) Asi creamos un subconjunto que corresponde a los elementos de Ω_1 que cumple con el evento "A".*

Definición 1.4 (Espacio equiprobable)**.** *Un espacio muestrable es equiprobable cuando todos sus elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.*

Definición 1.5 (Frecuencia absoluta)**.** *Para un evento en particular, la frecuencia absoluta es la cantidad de veces que sucede ese evento. La cantidad de veces que sucede el evento A (o #A), se nota:*

$$\eta_A$$

Definición 1.6 (Frecuencia relativa)**.** *Para un evento en particular, se define como la relación entre la cantidad de veces que ocurre el evento A y el número total de ensayos.*

$$f_a = \frac{\eta_A}{\eta}$$

Ahora estamos en condiciones para definir *probabilidad*.

Definición 1.7 (Probabilidad)**.** *Probabilidad de un evento A, es un número positivo (o nulo) que se le asigna a cada suceso o evento del espacio muestral.*

Definición 1.8 (Regla de Laplace)**.** *La probabilidad de que ocurra un sucedo A se calcula como la cantidad de casos en los que ocurre ese suceso dividido los casos posbiles de ese experimento siempre y cuando los todos los elementos del espacio muestral sean equiprobables:*

$$P(A) = \frac{\#casos\ favorables\ de\ A}{\#casos\ posibles\ del\ experimento}$$

Ejemplos 1.8.1. *Regla de Laplace*

1. *Arrojo un dado equilibrado ¿cuál es la probabilidad de que observe el número 2? ¿cuál es la probabilidad de que observe un número par?*
   Solución:
   - *Experimento aleatorio: arrojo un dado y observo el resultado.*
   - *Espacio muestral:*
     $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
   - *Evento A. "Se observa el número 2".*
   - *Definición de Laplace: ¿es mi espacio equiprobable? el dado es equilibrado, por lo tanto mi espacio es equiprobable. Entonces puedo usar la definición:*
     $$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid} \therefore \mid A \mid = 1 \wedge \mid \Omega \mid = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$
   - *Evento B. "Se observa un número par".*
   - $$P(B) = \frac{\mid B \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$
2. *Un dado equilibrado se arroja 2 veces. Hallar la probabilidad de que:*
   (a) *Los dos resultados sean iguales.*
   (b) *Los dos resultados sean distintos y su suma no supere 9.*
   (c) *La suma de los resultados sea 10.*
   (d) *El primr resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar.*

   Solución:
   - *Experimento aleatorio: arrojo un dado 2 veces y observo el resultado.*
   - *Evento D_i: "Valor observado en el tiro i" $i = 1, 2$*

- *Como los resultados son muchos para escribir el conjunto entero, escribo una tabla:*

$$\Omega = \{(a,b) : a,b = \{1,2,3,4,5,6\}\} \therefore |\ \Omega\ | = 36$$

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1				·		
2						
3				·		
4						
5				·		
6						

(a) A: *"Los dos resultados son iguales"* $\therefore |\ A\ | = 6$

$$P(A) = \frac{|\ A\ |}{|\ \Omega\ |} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) B: *"Los resultados son distintos y la suma no supera 9"* $\therefore |\ B\ | = 26$

$$P(B) = \frac{|\ B\ |}{|\ \Omega\ |} = \frac{26}{36} = \frac{13}{26}$$

(c) C: *"La suma de los resultados sea 10s"* $\therefore |\ C\ | = 4$

$$P(C) = \frac{|\ C\ |}{|\ \Omega\ |} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(d) $\cdot D$: *"El primer resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar".* $\therefore |\ \cdot D\ | = 4$

$$P(D) = \frac{|\ D\ |}{|\ \Omega\ |} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

1.1 Preliminares

Definición 1.9 (Álgebra de eventos)**.** *Dado Ω, sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω, diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de eventos si:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. *Si* $B \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{A}$.
3. *Si* $B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}$.
4. *(σ Álgebra) Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* $\mathcal{A}$ *entonces:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Propiedades 1.9.1. *Álgebra de eventos*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

3. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Ejemplo 1.9.1. *Sea* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$*. Hallar la menor álgebra de subconjuntos tal que el subconjunto* $\{2,4,6\}$ *pertenezca a ella.*
Solución:
Por axioma 2 debe estar su complemento ($\{1,3,5\}$*).*
Por axioma 3 debe estar la unión ($\{1,2,3,4,5,6\}$*).*
Por axioma 2 debe estar su complemento ($\{\emptyset\}$*).*
El axioma 1 se cumplió por accidente.

$$\mathcal{A} = \{\{2,4,6\},\{1,3,5\},\{1,2,3,4,5,6\},\{\emptyset\}\}$$

De eta forma encontramos el menor álgebra de subconjuntos de Ω *con la condición pedida.*

Definición 1.10 (Calcular probabilidad en cualquier espacio)**.** *Una probabilidad (o medida de probabilidad) e suna funcion* $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ *que a cada evento* A *le hace corresponder un número real* $P(A)$ *con las siguientes propiedades:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$ *(la probabilida es un número entre 0 y 1).*

2. $P(\Omega) = 1$.

3. *Si* $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(eventos mutuamente excluyentes o disjuntos: no pueden ocurrir al mismo tiempo).*

4. *(Axioma de continuidad) Para cada sucesión decreciente de eventos* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ *tal que* $\bigcap_{i=1}^{infty} A_i = \emptyset$ *vale que* $\lim_{x \to infty} P(A_n) = 0$.

Propiedades 1.10.1. *:*

1. *Si* $\overline{A}$ *es el evento complementario de* A*, entonces* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   Demostración. (usando los axiomas)

$$\begin{aligned} \Omega =& A \cup \overline{A} \\ & A \cap \overline{A} = \emptyset \\ \text{ax.2) } P(\Omega) =& P(A \cup \overline{A}) = 1 \\ \text{ax.3) } P(A \cup \overline{A}) =& P(A) + P(\overline{A}) = 1 \\ & \therefore P(\overline{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

   □

2. *Sean* A *y* B *eventos pertenecientes a* Ω*, entonces:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   Demostración. usando los axiomas:

   Completar

   □

3. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una sucesión de elementos de A, mutuamente excluyentes 2 a 2, entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Nota (¿Que significa para nosotros el álgebra de eventos?)**.** *Cuando defino un experimento aleatorio puedo definir Ω pero no necesariamente puedo conocer todas las probabilidades de todos los elementos elementales, puede que me falte información, entonces el conjunto del álgebra de eventos me dice a que eventos les puedo calcular la probabilidad.*

Ejemplo. *En argentina, el 80% de los programadores usa Java, C, o ambos. El 50% usa Java y el 4'% usa C. ¿ Cuál es la probabilidad de que al elegir un programador al azar use:*

a) Java y C:

b) Sólo Java.

c) Solo C.

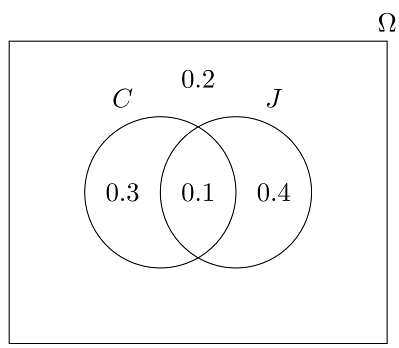
d) Ninguno de los dos lenguajes.

Solución:

- *Elijo el experimento aleatorio (EA):*
  "Elijo un programador al azar y me pregunto que lenguaje usa".

- *Defino eventos:*
  J: "El programador elegido al azar usa Java".
  C: "El programador elegido al azar usa C".

- *Defino quién es Ω (en ese caso lo defino con un diagrama, en específico un diagrama de Venn):*



- *Interpreto los datos:*

$$P(J \cup C) = 0.8$$
$$P(J) = 0.5$$
$$P(C) = 0.4$$
$$\therefore P(J \cup C) = P(J) + P(C) - P(J \cap C)$$
$$\Rightarrow P(J \cap C) = P(J) + P(C) - P(J \cup C) = 0.1$$

- *Resuelvo*

a) $P(J \cap C) = 0.1$

b) $P(J \cap \overline{C}) = P(J - C \cap J) = P(J) - P(C \cap J) = 0.4$

c) $P(C \cap \overline{J}) = P(C - J \cap C) = P(C) - P(J \cap C) = 0.3$

d) *"Ninguno" es el complemento de "alguno" y "alguno"* $= (J \cup C)$ *entonces:*

$$P(\overline{J \cup C}) = P(\overline{C} \cap \overline{J}) = 1 - P(C \cup J) = 0.2$$

Definición 1.11 (Espacio de probabilidad)**.** *Es una terna* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, donde* Ω *es un conjunto no vacío,* $\mathcal{A}$ *es un álgebra sobre* Ω *y* P *es una medida de probabilidad.*

Teorema 1.1. *Sea* $(A_n)_{n\geq 1}$ *una suscesión de eventos tales que* $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$ *y* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$*, luego*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ *una suscesión de eventos tales que* $A_{n+1} \subset A_n$ $\forall n$ *y* $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$*, luego*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Teorema 1.2 (σ-aditividad)**.** *Sea* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ *con los eventos* A_i *mutuamente excluyentes 2 a 2 (cualquier par), entonces*

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A)$$

1.2 Técnicas de Conteo

1.2.1 Numero de Casos Probales

Definición 1.12 (#CP)**.** *Cantidad de casos posibles de un experimento.*

Si tiramos un dado vemos que la cantidad de resultados posibles es 6; si tiramos el dado 2 veces, la cantidad de resultados posibles es 36; si tiramos el dado 3 veces, tengo 6 opciones para cada tiro:

$$\underline{6}\ \underline{6}\ \underline{6}$$

1.2.2 Regla del Producto

Definición 1.13 (Regla del Producto)**.** *Dados dos conjuntos A y B con η_A y η_B elementos cada uno respectivamente, la cantidad de todos los pares ordenados que pueden formarse con un elemento de A y uno de B se calcula como $\eta_A \cdot \eta_B$*

Ejemplos 1.13.1. *Regla del producto*

1. *Tiro un dado 2 veces y por regla del producto:*

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} = 36$$

2. *Tiro un dado 3 veces y por regla del producto:*

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 6^3$$

3. *Tiro un dado 4 veces y por regla del producto:*

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 6^4$$

4. *En 4 tiros, ¿de cuántas formas posibles puede no aparecer ningún 6?*
Tengo 5 opciones en donde no sale un 6, y como son 4 tiros, entonces tengo 5 opciones en donde no sale un 6, 4 veces. Entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 5^4$$

5. *¿Cuántas patentes de 3 letras y 3 números distintas puedo formar?*
Tengo 3 letras (una raya por letra) y 3 números (una raya por número). Tengo 26 letras posibles para la primer posición, para la segunda y tercera igual (porque se pueden repetir). Con los números, tengo 10 opciones para el primero, el segundo y el tercero (10 dígitos de 0 a 9). Por regla del producto:

$$\#CP = \underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 26^3 \cdot 10^3$$

Supongamos que tengo 5 libros y quiero ordenarlos en una biblioteca, que sólo tiene 5 lugares. Quiero contar todas las formas posibles de ordenarlos. Entonces supongo un caso análogo a los anteriores.
Para el primer lugar tengo 5 posibles opciones para colocar uno de mis libros, para el segundo 4 opciones, para el tecero 3 opciones, para el cuarto 2 opciones y para el último lugar ya solo me queda una posible opción. Entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 120 = 5!$$

Lo que hicimos fué pensar en la cantidad de libros que teníamos y ver la cantidad de *ordenamientos* posibles.

1.2.3 Permutaciones

Definición 1.14 (Permutaciones)**.** *La cantidad de formas distintas en las que puedo ordenar n elementos es n!*

Ejemplos 1.14.1. *Permutaciones*

1. *¿De cuántas formas distintas puedo fotografiar a 7 personas en hilera?*

$$\#CP = \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 7!$$

2. *¿Que pasaría si en una biblioteca tengo espacio para 3 libros y yo tengo 5?*
5! son todas las permutaciones de los elementos que tenía originalmente, y hay que dividir por los que conté de más cuando ubiqué a todos. En este caso calculo las permutaciones y luego les divido lo que conté de más, entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!}$$

1.2.4 Variaciones

Definición 1.15 (Variaciones)**.** *Es la cantidad de subconjuntos ordenados de r elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos. Las variaciones son, de un conjunto total de n elementos son todos los subconjuntos diferentes que puedo extraer si me importa el orden en el que los estoy extrayendo.*

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\text{En la calculadora: } \boxed{nPr}$$

Ejemplo 1.15.1. *En un cine con 70 butacas, ¿de cuántas formas distintas pueden sentarse 45 personas?*

$$\#CP = \frac{70!}{(70-45)!} = \frac{70!}{25!}$$

1.2.5 Combinaciones

Definición 1.16 (Combinaciones)**.** *Es la cantidad de subconjuntos NO ordenados de r elementos que pueden formarse a partir de los conjuntos de n elementos.*

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r}$$

$$\text{En la calculadora: } \boxed{nCr}$$

En donde $\binom{n}{r}$ se denomina número combinatorio de n elementos tomados de a r. Lo que me dice este número es de cuantas formas puedo sacar r elementos de un total de n cuando no me importa el orden.

Ejemplos 1.16.1. *Combinaciones*

1. *¿De cuántas formas diferentes puedo elegir 11 personas de un grupo de 30 para formar un equipo de fútbol?*
Tengo un conjunto de 30 personas, y voy a elegir un subconjunto de 11 personas entonces $n = 30$, $r = 11$ y como el orden no me importa, utilizo el número combinatorio para contar estas personas:

$$\#CP = \binom{30}{11}$$

2. *Control de calidad. ¿Cuántas muestras de 10 piezas diferentes puedo elegir de un lote de 100? Tengo un conjunto, y un subconjunto, y el orden no me interesa, entonces:*

$$\#CP = \binom{100}{10}$$

Observación 1.16.1.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Proof.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

□

Ejemplo 1.16.1. *Mazo de 40 cartas esáñolas.*

a) *En un mazo de cartas españolas, tengo 10 cartas de espada, 10 cartas de copa, 10 cartas de basto y 10 cartas de oro. ¿Cuántas manos diferentes puede tener una persona jugando al truco?*

$$n = 40, r = 3$$

$$\#CP = \binom{40}{3}$$

b) *¿Cuántas formas distintas hay de recibir una mano de oro? Todos los casos posibles se dan de elegir 3 cartas de un total de 10 ya que estoy elegiendo entre las cartas que son de oro.*

$$\#CP = \binom{10}{3}$$

c) *¿Cuántas manos puedo recibir siendo todas las cartas del mismo palo? Separo en casos: tengo 4 posibles resultados dada la cantidad de palos disponibles, y por cada palo tengo la cantidad de posibilidades del resultado anterior, entonces ahora tengo que sumar todas las formas de sacar 3 de cada palo.*

$$\#CP_{oro} = \binom{10}{3}, \#CP_{basto} = \binom{10}{3}, \#CP_{espada} = \binom{10}{3}, \#CP_{copa} = \binom{10}{3}$$

$$\#CP = \#CP_{oro} + \#CP_{basto} + \#CP_{espada} + \#CP_{copa}$$

$$\#CP = 4 \cdot \#CP_{palo}$$

$$\#CP = 4 \cdot \binom{10}{3}$$

1.2.6 Anagramas

Definición 1.17 (Anagramas)**.** *Dada una palabra, un anagrama es una forma de escribir otra palabra, cambiando las letras de la palabra original de lugar.*

Ejemplo 1.17.1. *Supongamos la palabra "ANANA", ¿cuántos anagramas puedo formar?*
¿Cómo contamos todos los ordenamientos posibles? Usando lo que aprendimos en número combinatorio: tengo 5 posiciones para ubicar 5 letras, las letras que tengo que ubicar son las letras de la palabra "ANANA":

1. *Acomodo las letras "A", tengo 3 lugares para ubicarla (porque tengo 3). No me importa el orden.*

$$\#CP_A = \binom{5}{3} \tag{1}$$

2. *Por todas esas posiciones que tengo para ubicar la letra "A", tengo que ver todas las posibles opciones que me quedan para la letra "N". Ahora tengo 2 lugares para ubicarla (porque tengo 2).*

$$\#CP_N = \binom{2}{2} = 1 \tag{2}$$

Una vez ubicadas las letras "A" tengo sólo una forma posible de ubicar las "N". Si ubico primero las "N", de los 5 lugares que tengo voy a poder usar 2, y de los 3 lugares que quedan voy a elegir 3 para ubicar la "A".

$$\#CP = \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3}$$

Nota. *Otra forma de pensarlo permutando es hacer el total de permutaciones y dividir esa cantidad por la multiplicación de los casos que conté de más*

$$\#CP = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

Ejemplo 1.17.2. *¿Cuántos anagramas puedo formar de la palabra "MANZANA"?*

- *Con el método de permutaciones:*

$$\#CP = \frac{7!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$$

- *Con números combinatorios (leyendo las letras en orden izq-der):*

$$\#CP = \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1}$$

1.2.7 Permutaciones con Elementos Repetidos

Definición 1.18 (Permutaciones con elementos repetidos)**.** *Si tenemos n elementos en los cuales hay n_1 de la clase 1, n_2 de la clase 2, ... n_k de la k-ésima, el número de permutaciones de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ objetos está dada por*

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_k!}$$

1.2.8 Metodo de las Bolas y Urnas

Definición 1.19 (Método de bolas y urnas (capitulo1-video3 40:00))**.** *Se usa cuando tengo una cantidad de elementos* ***indistinguibles****. Si estoy ordenando r elementos indistinguibles en k urnas tengo que dibujar r crucecitas ("$\times$"), y k-1 palitos ("$|$")*

1.2.9 Metodo Bose-Einstein

Definición 1.20 (Métodos de Bose-Einstein)**.**

$$\#CP = \binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}$$

Ejemplo 1.20.1. *Tengo un mapa, donde cada cuadrado es una manzana, y quiero ir del punto C al punto S. ¿De cuántas formas posibles puedo ir de C a S si solo puedo moverme hacia la izquierda o abajo.*
Esto es análogo al problema del anagrama, por lo tanto

$$\#CP = \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

1.3 Probabilidad Condicional

Se trata de analizar cómo afecta la información de que "un evento B ha ocurrido" a la probabilidad asignada de A.

Definición 1.21 (Probabilidad Condicional)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $A, B \in \mathcal{A}$ *con* $P(B) > 0$*, la probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido está definida por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{B}$$

Propiedades 1.21.1. *La* $P(A|B)$ *para un B fijo satisface todos los axiomas de probabilidad:*

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{A}$

   Proof.
$$\begin{aligned} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{B} &\leq 1 \\ \text{Si } A \cap B = \emptyset &\to P(A \cap B) = 0 \\ \text{Si } A \cap B \neq \emptyset &\to A \cap B \subseteq B \\ &\to P(A \cap B) \leq P(B) \end{aligned}$$
   $\square$

2. $P(\Omega|B) = 1$

   Proof.
$$P(\Omega|B) = \frac{\Omega \cap B}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} \because B \subseteq \Omega$$
   $\square$

3. *Si* $A \cap C = \emptyset \to P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$

4. *Si* $P(B) > 0$

   (a) $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$.

   (b) $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) \cdot P(B \cap B) = P(A|B \cap C) \cdot P(B|C) \cdot P(C)$

Ejemplos.

1. *Si un programador usa C ¿cuál es la probabilidad de que use Java?*
   Tenemos que $P(C) > 0$*, y que lo que sabes es* $P(C)$*, y buscamos* $P(J)$ *entonces*
$$P(J|C) = \frac{P(J \cap C)}{P(C)} = \frac{0 \cdot 1}{0 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

2. *Si un programador no usa Java, ¿cuál es la probabilidad de que use C?*
   Nuevamente identificamos que lo que me está pidiendo es una probabilidad condicional. Con la información que tenemos
$$P(C|\overline{J}) = \frac{P(C \cap \overline{J})}{P(\overline{J})} = \frac{0 \cdot 3}{0 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

3. *Una persona arroja 2 dados equilibrados. Calcular la probabilidad de que la suma sea 7 dado que:*

   (a) *La suma es impar.*

   (b) *La suma es mayor que 6.*

(c) *El número del 2^{do} dado es impar.*

(d) *El número de alguno de los dados es impar.*

(e) *Los dos números son iguales.*

Defino mi EA: "Arrojo dos dados y observo". Ahora defino un evento D_i: "Valor observado en el dado i", $i = 1, 2$.

(a) *Debo calcular la probabilidad de que la suma sea 7 dado que la suma es impar, dicho de otra manera, yo ya se que la suma es impar, y a partir de ello quiero calcular la probabilidad de que la suma sea 7.*

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$$P(\underbrace{D_1 + D_2 = 7}_{\boxed{S}} \,|\, \underbrace{\text{"La suma es impar"}}_{\boxed{A}})$$

$$\begin{aligned} P(S|A) &= \frac{P(S \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{6}{36}}{\frac{18}{36}} \\ &= \frac{6}{18} \end{aligned}$$

Este resultado se puede interpretar como, de los 18 cuadraditos verdes, 6 son naranjas. En otras palabras, cuando tengo un espacio equiprobable y condiciono, es decir, quito posbiles resultados de mi experimento, los resultados restantes siguen siendo equiprobables, lo que me permite seguir calculando la probabilidad con Laplace. Esto hace que en espacios equiprobables hacer las cuentas sea mucho mas fácil.

(b) $\boxed{B}$: *"La suma es mayor que 6"*

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

De los 21 casos en donde la suma es mayor a 6, sólo en 6 la suma es 7

$$\begin{aligned} P(S|B) &= \frac{P(S \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{6}{21} \end{aligned}$$

(c) *C: "El 2^{do} dado es impar"*

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

De los 18 casos en donde el segundo dado es impar, sólo en 3 de esos casos la suma es 7

$$\begin{aligned} P(S|B) &= \frac{P(S \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{3}{18} \end{aligned}$$

(d)

(e)

1.3.1 Particion

Definición 1.22 (Partición)**.** *Decimos que los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ forman una partición de Ω si*

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.
2. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$

Ejemplos 1.22.1.

- *Si tomo una sección de vidrio cuadrada y la rompo, el vidrio quedó particionado. Cada uno de los pedazos de vidrio es un B_j de mi partición. La intersección es vacía, pero si los uno contruyo mi Ω es decir el vidrio completo.*
- *Una pared formada por azulejos. Su intersección es nula, pero su unión es toda la pared. Si salpico salsa en la parted, veo una mancha distribuida en varios azulejos, es decir en parios pedazos de mi partición. Si la salsa es el conjuno A, lo voy a escribir como la unión de todos los azulejos en donde A se interseca con cada B_i es decir*

  $$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k)$$

  Todos los eventos entre paréntesis son mutuamente exclutentes. Si quiero calcular $P(A)$ usando el axioma 3

  $$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k)) \\ &= P((A \cap B_1)) + P((A \cap B_2)) + \cdots + P((A \cap B_k)) \end{aligned}$$

De este último ejemplo surge una definición

1.3.2 Funcion de Probabilidad Total

Definición 1.23 (Fórmula de Probabilidad Total)**.** *Sea*

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k)) \\ &= P((A \cap B_1)) + P((A \cap B_2)) + \cdots + P((A \cap B_k)) \end{aligned}$$

sabiendo que

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

definimos a la fórmula de probabilidad total como

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Ejemplo 1.23.1. *Sé que la probabilidad de que un dado fabricado por una máquina M1 sea defectuoso es de 0.1, si es de la máquina 2 es de 0.05, y si es de la máquina 3 es de 0.01. La producción se divide como*

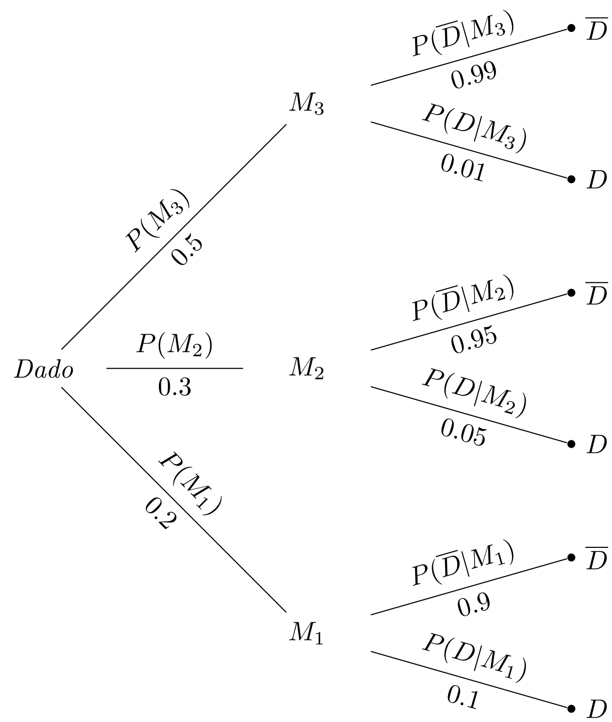
$$M1 \to 20\% \textit{ de la producción}$$
$$M2 \to 30\% \textit{ de la producción}$$
$$M3 \to 50\% \textit{ de la producción}$$

Suponiendo que todos los dados fabricados van a parar a la misma caja. Si elijo un dado al azar de la caja, cuál es la probabilidad de que ese dado sea defectuoso'.

Solución: Voy a leer de nuevo mi experimento y entender cual es el experimento aleatorio y a partir de el definir eventos. El EA consiste en "Elegir un dado de la caja al azar y observar si es defectuoso". Los eventos que me van a interesar definir son:

M_i: *"El dado elegido al azar proviene de la máquina i".* $i = 1, 2, 3$
D: "El dado elegido es defectuoso".

Ahora intento visualizar todos los posibles resultados de mi experimento. Utilizando un diagrama de árbol:



Tenemos que calcular $P(D)$, observamos en el árbol de probabilidades que la probabilidad de que el dado sea defectuoso se puede calcular como la probabilidad de que el dado sea defectuoso de la máquina 1, o que sea defectuoso de la máquina 2, o que sea defectuoso de la máquina 3:

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)$$

Como las ramas son excluyentes (el dado no puede ser de más de una máquina al mismo tiempo), podemos calcular la probabilidad de D de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P(D) &= P((D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)) \\ &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3)) \\ &= P(M_1) \cdot P(D \cap M_1) + P(M_2) \cdot P(D \cap M_2) + P(M_3) \cdot P(D \cap M_3) \\ &= 0.2 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.01 \\ &= 0.04 \end{aligned}$$

Observación 1.23.1. *La probabilidad obtenida no puede ser más chica que la producida por la "mejor" máquina, ni más grande que la producida por la "peor" máquina.*

Ejemplo 1.23.2. *Usando el enunciado y datos del ejemplo anterior, ahora se sabe que el dado es defectuoso, y quiero saber que máquina lo fabricó.*

Solución: Recordando que $P(M_1) = 0.2$ yo lo que quiero ver ahora es cómo se ve modificada esa probabilidad ahora que sé que el dado es defectuoso

$$\begin{aligned} P(M_1|D) &= \frac{P(D \cap M_1)}{P(D)} \\ &= \frac{P(D|M_1) \cdot P(M_1)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.4} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

1.3.3 Teorema de Bayes

Teorema 1.3 (Teorema de Bayes)**.** *Sean $B_1, \ldots, B_k$ es una partición de Ω, A un evento de probabilidad positiva, entonces*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

Ejemplo 1.23.3. *En una urna hay una bola verde y dos bolas rojas. En cada paso se extrae una bola al azar y se la repone junto con otra del mismo color.*

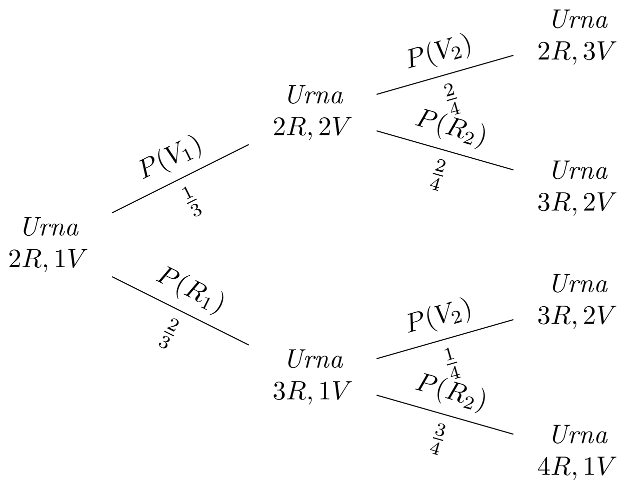
(a) Calcular la proabilidad de que al finalziar el segundo paso la urna contenga dos bolas verdes y 3 rojas.

(b) Si al finalizar el segundo paso la urna contiene dos bolas verdes y 3 rojas, ¿cuál es la probabilidad de que en el primer paso se haya extraido una bola roja?

Solución:

(a) Voy a extraer una bolita, ver el color, y luego la voy a reponer una bola del mismo color. Me va a interesar cada vez que saco una bolita saber de qué color salio y además saber en qué paso la estoy realizando. Defino dos eventos

R_i: *"La extracción i es roja".*
V_i: *"La extracción i es verde". $i = 1, 2$*



Habiendo llenado mi árbol de probabilidad sabiendo que se trata de un espacio equiprobable, ahora defino un evento

S: "Al finalizar, la urna contiene $2V, 3R$*".*

Tengo 2 ramas que corresponden al evento, es decir, dos caminos posibles que me llevan a ese evento. Aplicando el teorema de Probabilidad Total

$$\begin{aligned} P(S) &= P((R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2)) \\ &= P(R_1) \cdot P(V_2|R_1) + P(V_1) \cdot P(R_2|V_1) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(b) Nos están pidiendo es que de todas las opciones posibles que teníamos, me quedo con las que acabamos de analizar.

$$\begin{aligned} P(R_1|S) &= \frac{P(R_1 \cap S)}{P(S)} \therefore S = (R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2) \Rightarrow S \cap R_1 = R_1 \cap V_2 \\ &= \frac{P(V_2|R_1) \cdot P(R_1)}{P(S)} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.4 Eventos Independientes

Definición 1.24 (Eventos Independientes)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $A, B \in \mathcal{A}$ los eventos independientes si y sólo si*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Propiedades 1.24.1. *Eventos independientes*

1. *Si A y B son independientes, también lo son A y $\overline{B}$, $\overline{A}$ y B, $\overline{A}$ y $\overline{B}$. demostrar!!!*
2. *$A_1, \ldots, A_n$ son independientes si y sólo si para cada sucesión de k conjuntos $2 \leq k \leq n$, la probabilidad de la intersección de los k sucesos coincide con el producto de las probabilidades.*

Ejemplo 1.24.1. *Supongo que A, B, y C. Para que sean independientes tiene que ocurrir que:*

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \end{array}\right\} \quad k = 2$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \quad k = 3$$

Observación 1.24.1. *Si $P(B) > 0$, cuando A y B son independientes ocurre que*

$$P(A|B) \overset{\overset{P(B)>0}{\downarrow}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Ejemplo 1.24.2. *Se elije al azar una permutación de las letras A, T, C, G. Mostrar que los eventos "A pertence a T" y "C precede a G" son independientes.*

Primero elijo mi experimento aleatorio

E.A: Elijo una permutación de las letras ATCG,

como las letras son todas distintas entonces

$$\#CP = 4! = 24$$

Ahora defino efentos

$$AT :\text{"}AprecedeaT\text{"}$$
$$CG :\text{"}CprecedeaT\text{"}$$

Mis eventos van a ser independientes tengo que calcular tres probabilidades y ver si se cumple. Como mi espacio es equiprobable, puedo usar Laplace.

$$ATCG$$
$$ACTG$$
$$ACGT$$
$$CATG$$
$$CATG$$
$$CGAT$$

veo que tengo 6 casos, e imagino que si ponía GC tendría otros 6 casos, y si ponía TA tendría otros 12 casos. De esta forma veo los 24 casos.

$$\#AT = 6 + 6 = 12$$
$$\#CG = 12$$
$$\#(AT \cap CG) = 6$$

Sólo resta calcular las probabilidades

$$P(AT \cap CG) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$
$$P(AT) \cdot P(CG) = \frac{12}{24} \cdot \frac{12}{24} = \frac{1}{4}$$

1.5 Introducción a Modelos Continuos

Puntos al azar en un continuo.

El experimento consiste en elegir un numero al azar en el intervalo [0, 1]

1. Hallar la probabilidad de que los primeros 3 dígitos sean 3, 1, 4 (es decir 0.314...)
2. Hallar la probabilidad de que el 0 no esté entre los priemros 4 dígitos.

Lo que necesitamos es alguna manera de calcular la probabilidad para estos experimentos

Proposición 1.4.

$$P(x \in [a;b]) = b - a$$

Proof. Veo si cumple con los axiomas

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{A}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $A \cap B = \emptyset \to P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$\square$

Entonces para mi caso

1. $$P(x \in [0.314; 0.315)) = 0.315 - 0.314 = 0$$
2. No quiero al 0 en los primeros 4. *O: "No aparece el 0 en los primeros 4 dígitos"* Lo que voy a ir haciendo es ir quitando los intervalos en donde hay un 0 en los primeros 4 dígitos, que valores de todo el segmento tienen como primer dígito un 0, eso corresponde al intervalo [0, 0.1). Haciendo lo mismo para los que tienen 0 en el segundo dígito, entonces [0.1, 0.11), [0.2, 0.21), ..., [0.9, 0.91).

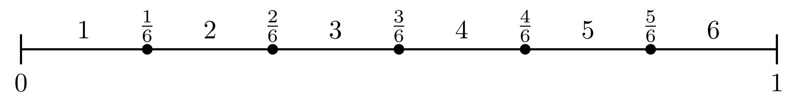
$$P(O) = 1 - P(x \in [0; 0.1))P(x \in [0.1; 0.11)) \cdot 9 - \dots$$

$$\begin{aligned} P(O) &= 1 - 0.1 - 9 \cdot 0.01 - 9^2 \cdot 0.001 - 9^3 \cdot 0.0001 \\ &= 1 - \frac{1}{10} - -\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^i \qquad = \end{aligned}$$

1.6 Introducción a la simulación

Definición 1.25 (Simulación)**.** *"Imitar o fingir que se está realizando una acción cuando en realidad no se está llevando a cabo."*

1.6.1 ¿Cómo simulo el tirar un dado?



Tengo que definir una regla

x: Valor al elegir un n° al azar entre 0 y 1
D: Valor observado en el dado

$$\text{Si } 0 \leq x \leq \frac{1}{6} \rightarrow \text{D} = 1$$
$$\text{Si } \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{2}{6} \rightarrow \text{D} = 2$$
$$\text{Si } \frac{2}{6} \leq x \leq \frac{3}{6} \rightarrow \text{D} = 3$$
$$\text{Si } \frac{3}{6} \leq x \leq \frac{4}{6} \rightarrow \text{D} = 4$$
$$\text{Si } \frac{4}{6} \leq x \leq \frac{5}{6} \rightarrow \text{D} = 5$$
$$\text{Si } \frac{5}{6} \leq x \leq \frac{6}{6} \rightarrow \text{D} = 6$$

Para estimar probabilidades a partir de simulaciones, vamos a usar la idea de frecuencia relativa, vamos a "tirar el dado" muchas veces, y teniendo una idea de chances contando la cantidad de veces que ocurría el evento que queremos observar y lo dividimos por la cantidad de veces que realizo el experimento.

2 Distribucion

2.1 Variables Aleatorias

Dado un $E.A.$ y un Ω el espacio muestral asociado a el, una funcion X que asigna a cada uno de los elementos $\omega \in \Omega$ un numero real $X(w)$ se llama variable aleatoria.

Definición 2.1 (Variable Aleatoria)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una funcion, diremos que X es una variable aleatoria si $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Proposición 2.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X una V.A. entonces $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Luego, se puede calcular la probabilidad, es decir*

$$P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$$

Observación 2.1.1.

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

2.1.1 Funcion de Distribucion

Definición 2.2 (Funcion de Distribucion)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X una V.A., definimos su funcion de distribucion $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por*

$$F_X = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedades 2.2.1.

1. *$F_X(x) \in [0, 1]$ $\forall x \in \mathbb{R}$.*
2. *$F_X(x)$ es monotona no decreciente.*
3. *$F_X(x)$ es continua a derecha.*
4. *$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$*

2.1.2 Variable Aleatoria Discreta

Definición 2.3 (Variables Aleatorias Discretas)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X una V.A., diremos que X es una V.A. discreta cuando existe $A \in \mathbb{R}$ finito o infinito numerable tal que $p_X(A) = 1$ donde*

$$p_X(A) = P(X \in A)$$

Una V.A. discreta es aquela cuyos valores posibles constituyen un conjunto finito o infinito numerable.
El rango de una V.A.D. es

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X > 0\}$$

Notacion:

$$X \text{ (mayuscula)} \to V.A.$$
$$x \text{ (minuscula)} \to \text{resultados posibles de la } V.A.$$

2.1.3 Funcion de Probabilidad

Definición 2.4 (Funcion de Probabilidad)**.** *Sea X una V.A.D., se llama funcion de probabilidad de X a una funcion $p_(X) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tal que $p_X(x) = P(X = x)$. Con cada resultado posible x_i asociamos un numero $p_X(x_i) = P(X = x_i)$ que debe cmumplir:*

1. *$p_X(x_i) \geq 0$ $\forall i$*
2. *$\sum_{x \in \mathbb{R}} p_X(x) = 1$*

Ejemplo. *E.A.: tiro una moneda 2 veces y observo el resultado. Defino C: observo cara.*

$$\Omega = \{(C, C), (C, \overline{C}), (\overline{C}, C), (\overline{C}, \overline{C})\}$$

1. *X: "Cantidad de caras observadas al tirar una moneda 2 veces".*
2. $R_X = \{\underbrace{0}_{x_1}, \underbrace{1}_{x_2}, \underbrace{2}_{x_3}\}$
3. *Busquemos* $p_X(x) = P(X = x)$ *para cada* $x \in \mathbb{R}$

$$p_X(0) = P(X = 0) = P((\overline{C}, \overline{C})) = \frac{1}{4}$$
$$p_X(1) = P(X = 1) = P((C, \overline{C}) \cup (\overline{C}, C)) = \frac{1}{2}$$
$$p_X(2) = P(X = 2) = P((C, C)) = \frac{1}{4}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(\text{"}alguna\ cara\text{"}) &= P(X \geq 1) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Teorema 2.2. *Sea X una V.A.D., entonces*

$$p_X(B) = \sum_{x_i \in B} p_X(x_i)$$

Para la funcion de distribucion del ejemplo tenemos que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Ejemplo. *De un conjunto de 7 ingenieras y 4 matematicas se eligen al azar 5 personas. Sea X el numero de ingenieras elegidas*

1. *Hallar la funcion de probabilidad de X y graficarla.*
2. *Hallar la funcion de distribucion de X y graficarla.*
3. *Cual es la probabilidad de que el grupo elegido este formado por 3 ingenieras?*

Paso 1: *defino la variable aleatoria*

X: "Cantidad de ingenieras en el grupo de 5".

Paso 2: *encontrar los valores posibles de mi variable aleatoria*

$$R_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Paso 3: *encontrar la funcion de probabilidad*

$$p_X(x) = P(X = x) \forall x \in R_X$$

Empecemos: saco 5 personas al azar, sin importarme el orden

$$\#CP = \binom{11}{5}$$

Ahora por Laplace calculo las funciones de probabilidad

$$p_X(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{7}{1}\binom{4}{4}}{\binom{11}{5}} = \frac{7}{462}$$
$$p_X(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{7}{2}\binom{4}{3}}{\binom{11}{5}} = \frac{84}{462}$$
$$p_X(3) = P(X = 3) = \frac{\binom{7}{3}\binom{4}{2}}{\binom{11}{5}} = \frac{210}{462}$$
$$p_X(4) = P(X = 4) = \frac{\binom{7}{4}\binom{4}{1}}{\binom{11}{5}} = \frac{140}{462}$$
$$p_X(5) = P(X = 5) = \frac{\binom{7}{5}\binom{4}{0}}{\binom{11}{5}} = \frac{21}{462}$$

Para terminar con lo anterior, hace falta verificar la definicion

1. $P(X = x_i) \geq 0$
2. $\sum p_X(x_i) = 1$

GRAFICO

Ahora busco la funcion de distribucion

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{7}{462} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{462} + \frac{84}{462} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{462} + \frac{84}{462} + \frac{210}{462} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{7}{462} + \frac{84}{462} + \frac{210}{462} + \frac{140}{462} & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

Verifico la definicion y confirmo que la funcion es siempre continua a derecha, y esta definida para todo $x \in \mathbb{R}$. *Por ultimo*

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - F_X(2) \\ &= 1 - \frac{91}{462} \\ &= \frac{371}{462} \end{aligned}$$

2.1.4 Distribucion de Bernoulli

Definición 2.5 (Distribucion de Bernoulli)**.** *Una V.A. tiene distribucion de* ***Bernoulli*** *si sus valores posibles son 0 y 1 y le asigna* $P(X = 1) = p$. *Es decir,*

$$X \text{ es V.A.D.}, R_X = \{0, 1\} \text{ y } p_X(0) = 1 - p; p_X(1) = p.$$

Notacion:

$$X \sim Ber(p)$$

Se lee, "la varaibale aleatoria X tiene distribucion de Bernoulli con parametro p"

2.1.5 Funcion Indicadora

Definición 2.6 (Funcion Indicadora)**.** *Un caso particular, es la funcion indicadore, que es una forma "compacta" de escribir una funcion partida*

$$\mathbf{1}\{X \in A\} = \begin{cases} 0 & X \notin A \\ 1 & X \in A \end{cases}$$

IMPORTANTE Para trabajar en la guia 2, el procedimiento es:

Identificar modelos → Tabla de Distribuciones

V.A.D.:

1. Encuentro la $p_X(x)$
2. Voy a la tabla y veo a quien pertenece.

Ejemplo.

$$p_X(x) = \frac{\binom{7}{x}\binom{4}{5-x}}{\binom{11}{5}}, x = 1, 2, 3, 4, 5$$

2.1.6 Variable Aleatoria Continua

Definición 2.7 (Variables Aleatorias Continuas)**.** *Una variable aleatoria es continua si se cumplen las siguientes condiciones*

1. *Su conjunto de valores posibles se compone de todos los numeros que hay en un solo intervalo, o en una union exdcluyente de intervalos.*
2. *Ningun valor posible de la variable aleatoria tiene probabilidad positiva, es decir $P(X = C) = 0\ \forall C \in \mathbb{R}$*

2.1.7 Funcion de Densidad de Probabilidad

Definición 2.8 (Funcion de Densidad de Probabilidad)**.** *Se dice que X es una V.A.C. si existe una funcion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada **funcion de densidad de probabilidad**, que satisface las siguientes condiciones*

1. $f_X \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
3. *Para cualquier a y b tales que $-\infty < a < b < +\infty$ tenemos*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

GRAFICO

Ejemplo 2.8.1. *La demanda de aceite pesado en cientos de litros durante una temporada tiene la siguiente funcion de densidad*

$$f_X(x) = \frac{4x + 1}{3} \cdot \mathbf{1}\{0 < x < 1\}$$

1. *Graficar $f_X(x)$ y verificar que sea una funcion de densidad.*

2. *Hallar la funcion de distribucion de X.*

3. *Calcular $P(\frac{1}{3} < X \leq \frac{2}{3})$ y $P(\frac{1}{3} < X \leq \frac{2}{3}|X < \frac{1}{2})$*

1. ***Paso 1:*** *Defino una variable aleatoria.*

   X: "Demanda de aceite en cientos de litros".

   Paso 2: *Grafico y verifico si es de densidad*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+1}{3} & 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

   (a) $f_X \geq 0$. *SI*
   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. *SI (calculas la integral o calcular el area de la figura bajo la curva, en este caso, el area del trapecio).*

2.
$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dx = 0 & x < 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \frac{4t+1}{3}dt & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x^2 + x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

   Ahora graficamos la funcion de probabilidad para verificar si cumple con las condiciones.

Nota. *Si X es una V.A.C., $F_X(x)$ es una funcion continua $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Teorema 2.3. *Sea $F_X(x)$ la funcion de distribucion de una V.A.C. (admite derivada), luego*

$$f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x)$$

Nota. *La funcion de densidad solo existe para V.A.C.*

2.1.8 Tipo de Variable Segun su Funcion de Distribucion

2.1.9 Atomo

Definición 2.9 (Atomo)**.** *Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es un atomo de $F_X(x)$ si su peso es positivo, es decor $P(X = a) > 0$. El conjunto de todos los atomos de $F_X(x)$ coincide con todos los puntos de discontinuidad de $F_X(x)$. Podemos definir:*

1. *La V.A. X sera discreta si la suma de las probabilidades de todos los atomos es 1.*

2. *La V.A. X sera continua, si $F_X(x)$ es continua (el conjunto de atomos es vacio).*

3. *La V.A. X sera **MIXTA** si no es ni continua, ni discreta.*

2.1.10 Soporte

Definición 2.10 (Soporte)**.**

$$S_X = \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) - F_X(\overline{x}) \neq 0 \ o \ \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) \neq 0\}$$

Ejemplo. *Sea X una V.A. con funcion de distribucion*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \frac{x}{4} \cdot \mathbf{1}\{0 \leq x < 1\} + \frac{1}{3} \cdot \mathbf{1}\{1 \leq x < 2\} + \frac{x}{6} \cdot \mathbf{1}\{x \geq 4\} \end{aligned}$$

1. *Hallar*

$$P(1 < X \leq 4), P(1 \leq X \leq 4), P(1 \leq X < 4), P(1 < X < 4)$$

2. *Sean $A = [1, 3.5]$, $B = (0.5, 3)$ calcular*

$$P(X \in A), P(X \in B | X \in A)$$

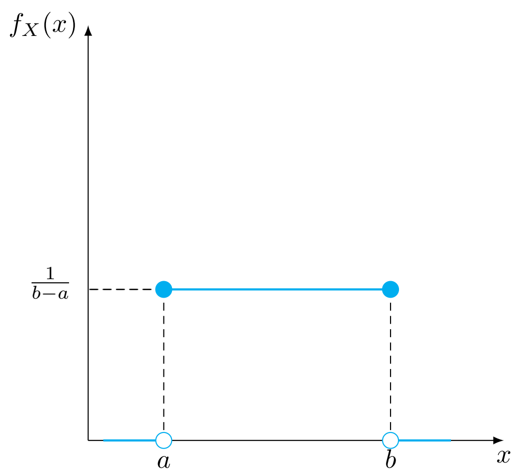
2.2 Modelos Continuos

2.2.1 Distribucion Uniforme

Definición 2.11 (Distribucion Uniforme)**.** *Supongamos que X es una V.A.C que toma todos los valores sobre el intervalo $[a, b]$. Si $f_X(x)$ esta dada por*

$$f_X(x) = \begin{cases} k = \dfrac{1}{b-a} & si \ a < x < b \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Estamos hablando de una variable continua por lo tanto tiene funcion de densidad y se llama uniforme. Cuando hablamos de una variable uniforme lo que estamos diciendo es que su funcion de densidad va a ser constante sobre el intervalo $[a, b]$ y 0 en otros casos, de manera que todos los valores que se encuentren en el intervalo tienen la misma probabilidad de ocurrir. Si graficamos



Entonces, para que sea una funcion de densidad

1. $k > 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

Se dice que la varaibla aleatoria X tiene disstribucion uniforme de paramteros a y b

$$X \sim \mathcal{U}(a,b)$$

Esta distribucion nos debe venir a la cabeza cuando se hable de elegir un punto al azar sobre un continuo.

Ejemplo 2.11.1. *Una vara de longitud $10m$ se corta en un punto elegido al azar. Calcular la probabilidad de que la pueza mas corta mida menos de $3m$.*

Solución: lo primero que vamos a hacer es identificar y definir a nuestra variable aleatoria. Identificando que lo aleatorio en mi experimento es el corte de barra, mi variable aleatoria es el punto en el que se corta la barra

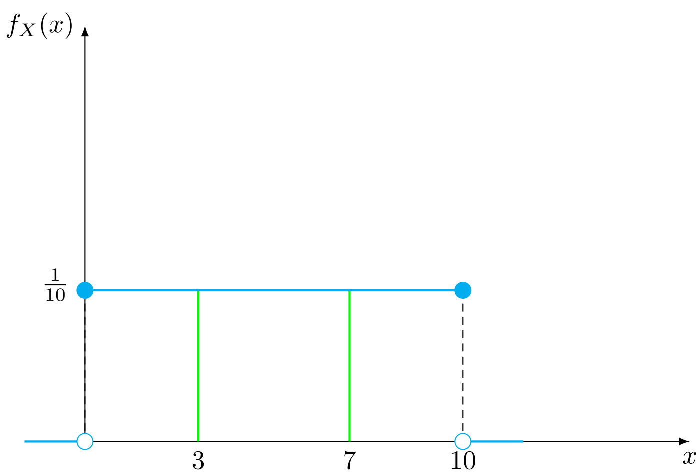
X: "punto den el que se corta la vara".

Estamos eligiendo al azar en un continuo, entonces nuestra variable aleatoria tiene una distribucion continua en un intervalor dado

$$X \sim \mathcal{U}(0,10)$$

Luego

$$P(\text{"Pieza mas corta mida menos de 3m})$$
$$P(\underbrace{(X<3, X<5)}_{X<3} \cup \underbrace{(10-X<3, X>5)}_{X>7})$$



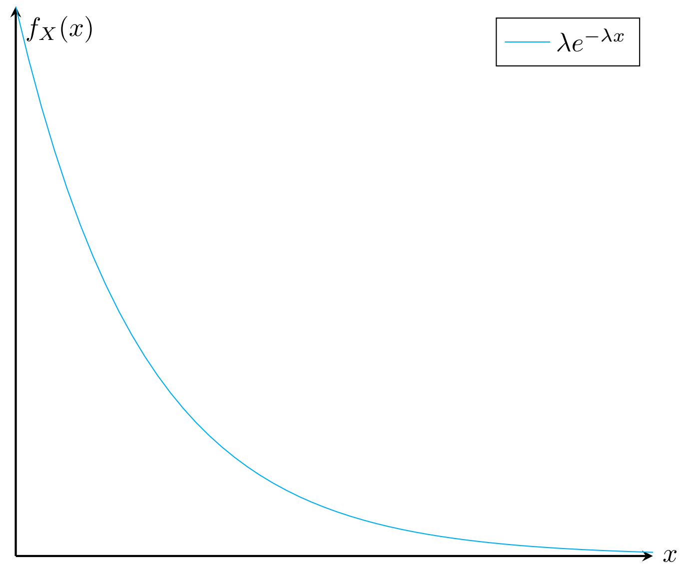
Nos quedaron areas de rectangulos entonces

$$\begin{aligned} P(X<3, X>7) &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{6}{10} \end{aligned}$$

2.2.2 Distribucion Exponencial

Definición 2.12 (Distribucion Exponencial)**.** *Una variable aleatoria tiene distribucion exponencial de parametro $\lambda > 0$ si su funcion de densidad esta dada por*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \; si \; a < x < b \\ 0 \; e.o.c \end{cases}$$



$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} \qquad \textit{siempre que } \lambda > 0, \lambda e^{-\lambda x} > 0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Calculando su funcion de distribucion

$$
F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t} & x \geq 0 \end{cases}
$$

Entonces, i $x < 0$

$$
P(X > x) = 1 - F_X(x = e^{-\lambda x})
$$

Propiedades 2.12.1. *1. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ entonces $P(X > t+s, X > t) = P(X > s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$*

Proof.

$$
\begin{aligned}
P(X > t+s | X > t) &= \frac{P(X > t+s, X > t)}{P(X > t)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\
&= e^{-\lambda s} \\
&= P(X > s)
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo
Supongamos que X es la duracion de una lampara de bajo consumo, entonces, la ecuacion anterior expresaria, que probabilidad hay de que mi lampara dure 8 horas si ya se que duro 4 horas. Y desarrollando llegamos a que esa expresion es equivalente a decir que probabilidad hay de que mi lampara dure mas de 4 horas. Esta propiedad se llama perdida de memoria.

2. *Si X es una V.A.C y $P(X > t + s|X > t) = P(X > s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$ entonces existe $\lambda > 0$ tal que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. En otras palabras, si X es continua y tiene perdida de memoria entonces X es una distribucion exponencial*

Definición 2.13 (Funcion de Riesgo (para una *V.A.C*))**.** *Pregunta: Dado que un compente duro un cierto tiempo t, cual es la probabilidad de que se rompa un instante despues?*

$$T: \text{"Tiempo hasta que el componente falla"}$$

$$P(T < t + \Delta t|T > t)$$

Esta probabilidad se puede pensar como una funcion de t a la que vamos a llamar funcion intensidad de fallas multiplicado por un intervalo Δt

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T < t + \Delta t|T > t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t \cdot P(T > t)} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{\Delta t \cdot (1 - F_T(t))} \\
&= \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}
\end{aligned}$$

Este ultimo cociente se parece a la derivada del logaritmo. Porque la funcion de densidad es la derivada de la funcion de distribucion, entonces

$$-\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln 1 - F_T(t)$$

$$-\int_0^t \lambda(t) ds = \ln 1 - F_T(t)$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t) ds}$$

Cuando nos den la funcion intensidad de falla vamos a poder encontrar la funcion de distribucion de nuestra variable aleatoria que en general va a medir un tiempo hasta un evento, usando la formula a la que acabamos de lllegar, y con esa funcion de distribucion podemos calcular cualquier cosa que nos pidan.

2.2.3 Distribucion Gamma

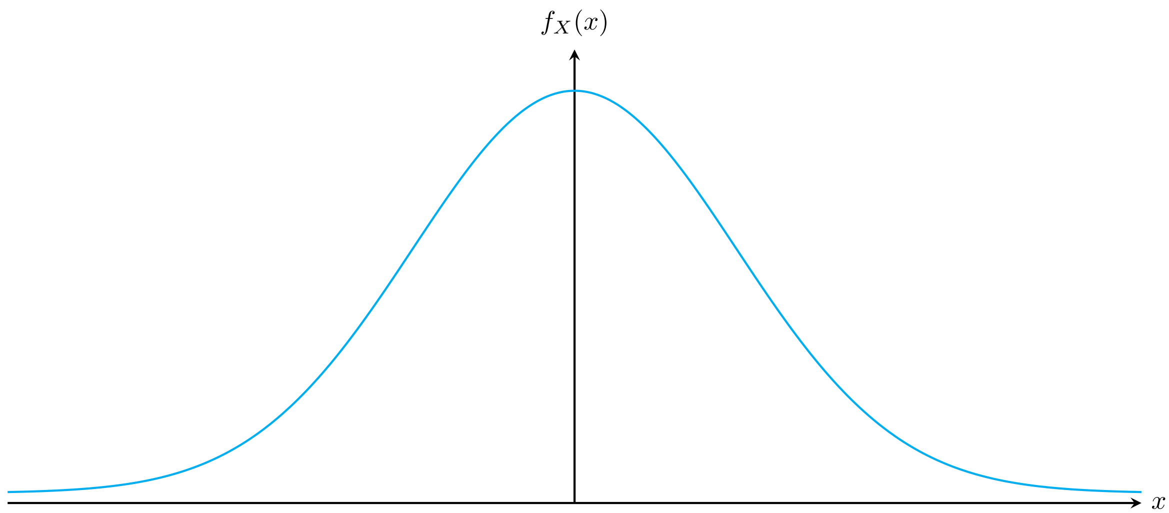
Definición 2.14 (Distribucion Gamma)**.** *Se dice que una variable aleatoria tiene distribucion Gamma de parametros λ y k si su funcion de densidad es*

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma}(k) \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}$$

2.2.4 Distribucion Normal Estandar

Definición 2.15 (Distribucion Normal Estandar)**.** *La V.A. X que toma los valores de $-\infty < x < \infty$ tiene una distribucion normal estandar si su funcion de densidad es de la forma*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Su probabilidad se calcula

$$\Phi(x) = F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

2.2.5 Cuantil

Definición 2.16 (Cuantil)**.** *Definimos al cuantil α como el minimo valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que la funcioin de distribucion de x sea mayor o igual a α. Busco $x_\alpha : P(X \leq x_\alpha) = \alpha$.*

En general

$$x_\alpha = min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}$$

2.2.6 Funcion de Variable Aleatoria

Definición 2.17 (Funcion de Variable Aleatoria)**.** *Sea*

$$Y = g(x),$$

si X es una V.A.D., Y sera discreta, con

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in B} p_X(x)$$

$$\therefore B = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = t\}$$

Ejemplo 2.17.1. *Tiro un dado equilibrado, si sale 1, gano 10 pesos, sino pierdo 1 peso. Hallar la funcion de probabilidad de la ganancia. Ya conozco la variable aleatoria de este ejemplo y su funcion de probabilidad*

X: "Valor observado al arrojar el dado"

$$p_X = \frac{1}{6}, x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Ahora tengo que definir una nueva variable aleatoria discreta

G: "Ganancia"

que va a poder tomar los valores

$$R_G = \{-1, 10\}$$

con probabilidad de ganar 10 siendo

$$P(G = 10) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

y probabilidad de no hacerlo es la suma de todos los X desde 2 hasta 6

$$P(G = -1) = \sum_{X=2}^{6} p_X(x) = \frac{5}{6}$$

En general, si $Y = g(x)$ luego

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

y calculo esa probabilidad $\forall y \in \mathbb{R}$

Ejemplos 2.17.1. *1. Sea $X \sim \mathcal{E}(1)$. Probar que $Y = \frac{X}{\lambda} \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Desarrollando*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(\frac{X}{\lambda} \leq y) \\ &= P(X \leq \lambda y) \\ &= F_X(\lambda y) \end{aligned}$$

en donde $y \in \mathbb{R}$ y la funcion de distribucion de una exponencial es

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= F_X(\lambda y) \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \end{aligned}$$

que es nada mas ni nada menos que la funcion de distribucion de una variable exponencial de parametro λ.

$$Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

Sea Z una V.A. con distribucion normal estandar, y sea $X = Z^2$. Encontrar la distribucion de X. Cuando se pide buscar la distribucion, no se refiere a buscar la funcion de distribucion, sino que se pide como se distribuye esta nueva variable, es decir, se pide que se defina la variable, que busquemos la medida de la probabilidad y que busquemos en la tabla si tiene algun nombre conocido.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(Z^2 \leq x) \\ &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ P(|Z|) \leq \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vamos adibujar la campana y entender que probabilidad me estan pidiendo. Si la variable es $x < 0$, entonces la probabilidad vale 0, ya que cualquier numero elvado al cuadrado devuelve un numero positivo. Si $x \geq 0$

tengo que despejar Z, en este caso corresponde a la probabilidad de que el modulo de Z sea menor o igual a la raiz de x. Esto significa que quiero calcular la probabilidad de que Z este entre $-\sqrt{x}$ y $\sqrt{x}$, que para ello debemos evaluar la funcion Φ en $-\sqrt{x}$ y $\sqrt{x}$. Por lo tanto para cada $x > 0$ tengo que ir a la tabla de la distribucion normal y calcular la probabilidad con ella.

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq \sqrt{x}) &= P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) \\ &= \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) \end{aligned}$$

Observamos que $F_X(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto, X es una V.A.C.. Podemos buscar su funcion de densidad y ver si se parece a alguna de la tabla

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) \\ &= \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ \phi(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - \phi(-\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} & x \geq 0 \end{array} \end{aligned}$$

Reemplazamos con $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t}{2}}$. Y evaluando nuestro resultado

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbf{1}\{x \geq 0\}$$

Ahora viendo en la tabla nos damos cuenta que esta se parece a una ditribucion Gamma

$$X \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

2.3 Simulacion

Ejemplos.

1. *(Repaso cap.1) Simular el tiro de una moneda usando un numero al azar entre 0 y 1. Vimos que en una recta de 0 a 1, marcando el medio en 0.5 el lado izquierdo o derecho significaba cara o ceca. Formalizando:*

   X: "Cantidad de caras al tirar una moneda".

   $$U \sim \mathcal{U}(0,1) \begin{cases} 0 \leq u < 0.5 & \rightarrow \quad x = 1 \\ 0.5 \leq u < 1 & \rightarrow \quad x = 0 \end{cases}$$

   Esto funciona porque

   $$P(0 \leq U < 0.5) = P(X = 1) = 0.5$$

   $$P(0.5 \leq U < 1) = P(X = 0) = 0.5$$

   Estos dos eventos tienen la misma probabilidad de ocurrir, entonces es una buena forma de simular tirar una moneda. Esta relacion entre las variables es la relacion que vamos a encontrar cada vez que querramos simular.

2. *Simular el tiro de un dado usando un numero al azar entre 0 y 1. Definiendo nuestra variable aleatoria*

   X: "Valor observado al arrojar un dado"

   Y U va a ser nuestra variable aleatorai uniforme 0,1 (no significa nada, es mi herramienta de simulacion, lo que queremos hacer es traducir esos valores de U a valores de X que si significan algo para nosotros)

   $$U \sim \mathcal{U}(0,1)$$

Escribiendo una recta (regla de traduccion) de este experimento

$$\begin{aligned}
0 \leq u < \frac{1}{6} &\quad \rightarrow \quad x = 1 \\
\frac{1}{6} \leq u < \frac{2}{6} &\quad \rightarrow \quad x = 2 \\
\frac{2}{6} \leq u < \frac{3}{6} &\quad \rightarrow \quad x = 3 \\
\frac{3}{6} \leq u < \frac{4}{6} &\quad \rightarrow \quad x = 4 \\
\frac{4}{6} \leq u < \frac{5}{6} &\quad \rightarrow \quad x = 5 \\
\frac{5}{6} \leq u \leq 1 &\quad \rightarrow \quad x = 6
\end{aligned}$$

Lo que tengo aca, es una formula que me dice la equivalencia entre U y X. Decimos que vamos a considerar 2 evbentos como "equivalentes" si tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Simular 3 valores de una V.A. con distribucion exponencial a partir de 3 valores seleccionados al azar en el intervalo [0, 1]

$$X \sim \mathcal{E}(1)$$

Dadods u_1, u_2, u_3 necesito una "formula" para transformarlos a x_1, x_1, x_1 (y asi simular los 3 valores exponenciales). Grafico las funciones de distribucion de U y la de X. El valor dado de U devo ver que valor acumula, y ver el valor de X que acumula la misma probabilidad, entonces ese valor de X que acumula la misma probabilidad que el de U, significa que es el equivalente. En general

$$F_U(u_i) = F_X(x_i)$$

Para cada u_i, la $F_U(_i)$ va a ser igual a $F_X(x_i)$. Luego despejo x_i en funcion de u_i. Quedando entonces

$$F_U(u_i) = u_i = F_X(x_i) = 1 - e^{-x_i}$$

$$\Rightarrow x_i = -\ln(1 - u_i)$$

Y asi ya encontre mi formula para simular cualquier valore de $x_i > 0$ en funcion de un valor al azar entre 0 y 1.

Definición 2.18 (Eventos Equivalentes para Variables Continuas)**.** *Diremos que 2 eventos los consideraremos equivalentes cuando acumulan la misma probabilidad.*

Definición 2.19 (Inversa Generalizada)**.**

$$F_X^{-1}(u) = min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}, u \in (0, 1)$$

Observación 2.19.1. *Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una funcion de distribucion, existe una variable4 aleatoria X tal que $F_X(x) = P(X \leq x)$*

Ejemplo 2.19.1. *Simular 5 v alores de la V.A. mixta del ejemplo 3 del video 1, usando 5 valores elegidos al azar entre 0 y 1. Grafico las funciones de distribucion. Primero la funcion de distribucion de la variable que quiero simular, y segundo la funcion de distribucion de la variable que voy a usar para simular.*

GRAFICOS

Ya que queremos simular muchos valores, buscamos la formula. Busco $x_i = h(u_i), 0 < u_i < 1$. Pero $F_X(x_i)$ es una funcion partida, por lo tanto h tambien lo sera. Para cada intervalo, buscamos que $F_X(x_i) = F_U(u_i)$ viendo los graficos.

$$u_i = F_X(x) \rightarrow x_i = F_X^{-1}(u_i)$$

Por partes vamos a ir viendo quien es esa funcion inversa generalizada.

$$\begin{aligned}
0 \leq u < \frac{1}{4} \quad &\rightarrow \quad u = \frac{x}{4} \rightarrow \quad x = 4u \\
\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{3} \quad &\rightarrow \qquad\qquad \rightarrow \quad x = 1 \\
\frac{1}{3} \leq u < \frac{2}{3} \quad &\rightarrow \quad u = \frac{x}{6} \rightarrow \quad x = 6u \\
\frac{2}{3} \leq u < 1 \quad &\rightarrow \qquad\qquad \rightarrow \quad x = 4
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = h(u) = \begin{cases} 4u & 0 \leq u < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{3} \\ 6u & \frac{1}{3} < u < \frac{2}{3} \\ 4 & 1 \leq u \end{cases}$$

Teorema 2.4. *Si F es una funcion que cumple*

- *Ser no decreciente.*
- $\lim_{x \to +\infty} F = 1$ *y* $\lim_{x \to -\infty} F = 0$
- *Continua a derecha.*

Entonces si defino

$$X = F^{-1}(U)$$

con

$$U \sim \mathcal{U}(0, 1)$$

se tiene que X es una V.A. cuya funcion de distribucion es la funcion F dada.

Nota. *Para poder simular lo que realmente hay que entender es como encontrar la funcion de distribucion de la variable que queres simular.*

2.4 Truncamiento

Definición 2.20 (Truncamiento)**.** *Sea X una V.A. con $F_X(x) = P(X \leq x)$*

$$\begin{aligned}
F_{X|X \in A}(x) &= P(X \leq x | x \in A) \\
&= \frac{P(X \leq x, X \in A)}{P(X \in A)}
\end{aligned}$$

El cálculo de esta probabilidad dependerá del tipo de V.A. y de su distribución

Observación 2.20.1. *Si X es una V.A.C. con función de densidad $f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x)$, la función de densidad de X condicionada a $X \in A$ se calcula como*

$$f_{X|X \in A}(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) = \frac{f_X(x) \cdot \mathbf{1}\{X \in A\}}{P(X \in A)}$$

2.5 Vectores Aleatorios

2.5.1 Vector Aleatorio

Definición 2.21 (Vector Aleatorio). *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad, se dice que* $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *es un* ***vector aleatorio*** *de dimensión* n*, si para cada* $j = 1, \ldots, n$*,* $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$ *es una V.A.*

Teorema 2.5. *Para todo* $\mathbb{X} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *se tendrá que*

$$X^{-1} = ((-\infty, x_1) \cdot \cdots \cdot (-\infty, x_n)) \in \mathcal{A}$$

2.5.2 Función de Distribución de un Vector Aleatorio

Definición 2.22 (Función de distribución de un vector aleatorio). *Sea* $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *un vector aleatorio de dimensión* n*, definimos la* ***función de distribución de*** $\mathbb{X}$ *como*

$$F_{\mathbb{X}}(\frown) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

Propiedades 2.22.1. *Cuando* $\mathbb{X} = (X, Y)$

1. $$\lim_{X,Y \to \infty} F_{\mathbb{X}}(x) = 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} F_{\mathbb{X}}(x) = 0$$
$$\lim_{y \to -\infty} F_{\mathbb{X}}(x) = 0$$

2. $F_{\mathbb{X}}(x)$ *es monótona no decreciente en cada variable.*

3. $F_{\mathbb{X}}(x)$ *es continua a derecha en cada variable.*

4. $$P((X, Y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)) = F_{\mathbb{X}}(b_1, b_2) - F_{\mathbb{X}}(b_1, a_2) - F_{\mathbb{X}}(a_1, b_2) + F_{\mathbb{X}}(a_1, a_2)$$

2.5.3 Función de Probabilidad de un Vector Aleatorio Discreto

Definición 2.23 (Función de probabilidad de un vector aleatorio). *Sea* X *e* Y *dos V.A.D. definidas en el espacio muestral* Ω *de un experimento. La* ***función de probabilidad conjunta*** *se define para cada par de números* (x, y) *como*

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

Debe cumplirse que

1. $$p_{X,Y}(x, y) \geq 0$$

2. $$\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$$

Ejemplo 2.23.1. *De una urna que contiene 3 bolillas numeradas* $1, 2, 3$*, se extraen sin reposición y sucesivamente 2 bolillas. Sea* X *el número de la primer bolilla e* Y *el número de la segunda.*

1. *Hallar la función de probabilidad conjunta de* X *e* Y*.*

1. *Vamos a graficar un dibujo que nos de idea del experimento (urna con bolillas), voy a sacar 2. Como primer paso, defino mis varibales*

X: "número de la primera bolilla"
Y: "número de la segunda bolilla"

Como segundo paso, veo que valores pueden tomar las variables aleatorias, en este caso, una tabla de doble entrada para poder ver todos los valores que puede tomar x, todos los valores que puede tomar y, y para ver todas las probabilidades en conjunto.

y/x	1	2	3	$p_Y(y)$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
$p_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Nos piden hayar la función de probabilidad conjunta de X e Y, quién por definición es

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall (x,y)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
p_{X,Y}(1,1) &= P(X=1,Y=1) = 0\\
p_{X,Y}(1,2) &= P(X=1,Y=2) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{6}\\
p_{X,Y}(1,3) &= P(X=1,Y=3) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{6}\\
p_{X,Y}(2,1) &= P(X=2,Y=1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{6}\\
p_{X,Y}(2,2) &= P(X=2,Y=2) = 0\\
p_{X,Y}(2,3) &= P(X=2,Y=3) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{6}\\
p_{X,Y}(3,1) &= P(X=3,Y=1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{6}\\
p_{X,Y}(3,2) &= P(X=3,Y=2) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{6}\\
p_{X,Y}(3,3) &= P(X=3,Y=3) = 0
\end{aligned}$$

2.5.4 Función de Probabilidad Marginal Discretas

Definición 2.24 (Funciones de probabilidad marginal)**.** *Las funciones de probabilidad marginales para X e Y están dadas por*

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$$
$$p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$$

En general, sea A cualquier conjunto compuesto de pares de valores (x,y) entonces

$$P((X,Y) \in A) = \sum \sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y)$$

2.5.5 Función de Densidad de un Vector Aleatorio Continuo

Definición 2.25 (Función de densidad de un vector alearotio continuo)**.** *Sean X e Y V.A.C., una función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ de estas dos variables es una función que satisface*

1. $$f_{X,Y}(x,y) \geq 0$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

Entonces, para cualquier conjunto A, la probabilidad de que cada conjunto pertenezca a A se calcula como

$$P((X,Y) \in A) = \int\int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

2.5.6 Función de Probabilidad Marginal Continuas

Definición 2.26 (Funciones de probabilidad marginal)**.** *Las funciones de probabilidad marginales para X e Y están dadas por*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Ejemplo 2.26.1. *Se elige al azar un punto (x,y) en el circulo de centro $(0,0)$ y radio 1.*

1. *Hallar la función de densidad conjunta del vector aleatorio (X,Y).*
2. *Hallar la probabilidad de que la distancia del punto al centro del círculo sea menor a 0.5.*
3. *Hallar las funciones de densidad marginal de X e Y.*

Interpretando el enunciado, nos deice que (x,y) va a ser un punto seleccionado al azar sobre la región circular R. El vector (X,Y) va a tener una distribución uniforme sobre toda la región

$$(X,Y) \sim \mathcal{U}(R)$$

y la función de densidad conjunta debe ser

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k & (x,y) \in R \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

y cumplir

1. $k \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

Entonces tengo que hacer

$$\begin{aligned}\int\int_R k \cdot dxdy &= k \underbrace{\int\int_R dxdy}_{\text{Área del círculo}} \\ &= k \cdot \pi r^2 \\ &= k \cdot \pi 1^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\pi}$$

finalmente

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x,y) \in R \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Nos piden

$$P(X^2 + Y^2 \leq 0.5)$$

Voy a ir al soporte, y representar lo que me están pidiendo, que es, si tengo el círculo de radio 0.5 *cuál es la probabilidad de caer ahí adentro. Esa probabilidad la puedo ver como la porción de volúmen sobre la región cubierta. Por geometría puedo calcular el volúmen*

$$\begin{aligned} P(X^2 + Y^2 \leq 0.5) &= \pi \cdot 0.5^2 \cdot \frac{1}{\pi} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Nos piden las funciones de probabilidad marginales, que por definición son

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \begin{cases} 0 & x < -1 \ \ o \ x > 1 \\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy & -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \mathbf{1}\{-1 \leq x \leq 1\} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \\ &= \begin{cases} 0 & y < -1 \ \ o \ y > 1 \\ \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx & -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-y^2} \cdot \mathbf{1}\{-1 \leq y \leq 1\} \end{aligned}$$

2.5.7 Independencia en Variables Aleatorias

Definición 2.27 (Independencia para Variables Aleatorias)**.** *Sea* (X, Y) *un vector aleatorio, las variables aleatorias* X *e* Y *son independientes si y sólo si*

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad \forall A, B$$

Propiedades 2.27.1. *Independencia para Variables Aleatorias*

1. *Se dice que* $X_1, \ldots, X_n$ *son V.A. independientes sii*

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

2. *Se dice que las V.A.D.* $X_1, \ldots, X_n$ *son independientes sii*

$$p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot p_{X_n}(x_n)$$

3. *Se dice que las V.A.C. $X_1, \ldots, X_n$ son independientes sii*

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot f_{X_n}(x_n)$$

Ejemplo 2.27.1. *Para ir todos los días al trabajo, Donna se dirige en auto hasta la estación de tren y luego sigue su camino en tren. Donna sale de su casa en un intervalo distribuido uniformemente entre las $7:30$ y las $7:50$. El tiempo de viaje hasta la estación es también uniforme entre 20 y 40 minutos, e independiente de la hora de salida. Hay un tren que sale $8:12$ y otro que sale $8:26$.*

1. *Cuál es la probabilidad de que Donna pierda ambos trenes?*
2. *Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 8 minutos en la estación hasta que salga el tren?*

Primero defino las variables aleatorias

S: "minutos después de las 7:30 en los que Donna sale de su casa".
V: "teimpo de viaje a la estación (en minutos)".

Tenemos que S y V son independientes porque el enunciado dice que el tiempo de viaje es independiente de la hora de salida y además

$$S \sim \mathcal{U}(0,20)$$
$$V \sim \mathcal{U}(20,40)$$

Si defino mi hora cero como las 7:30, el primer tren sale en el minuto 42 a partir de esa hora, y el segundo tren sale en el minuto 56. Saber la distribución de las variables es unbiforme, y que son independientes me ayuda a encontrar la función de densidad conjunta ya que

$$f_{S,V} = f_S(s)\cdot f_V(v)$$

y conozco las densidades marginales porque S y V son uniformes

$$f_{S,V} = \frac{1}{20}\mathbf{1}\{0<s<20\}\cdot\frac{1}{20}\mathbf{1}\{20<s<40\}$$

1.
$$\begin{aligned} P(\text{"pierde ambos trenes"}) &= P(S+V>56)\\ &= P(V>56-S)\\ &= \int\int f_{S,V}(s,v)dsdv\\ &= \frac{4^2}{2}\cdot\frac{1}{20^2}\\ &= \frac{1}{50}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} P(\text{"espere + de 8 minutos"}) &= P(S+V<34 \text{ o } 42<S+V<48)\\ &= \frac{14^2}{2}\cdot\frac{1}{20^2}+\left(\frac{18^2}{2}-\frac{12^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{20^2}\\ &= \end{aligned}$$

Pintamos y calculamos volúmen por geometría sólo cuando la función de densidad es constante.

3 Momentos

3.1 Esperanza de una Variable Aleatoria

Definición 3.1 (Esperanza de una Variable Aleatoria)**.** *Es el promedio ponderado de los valores que puede tomar una variable aleatoria (se puede pensar como el centro de masa)*

3.1.1 Esperanza de una Variable Aleatoria Discreta

Definición 3.2 (Esperanza de una variable aleatoria discreta)**.** *Sea X una V.A.D. con función de probabilidad $p_X(x)$, el valor esperado (o media) de X es*

$$E(X) = \sum_{X \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

A veces, usamos la notación $\mu_X = E(X)$

Ejemplo. *Tiremos un dado*
Si defino mi variable aleatoria como

X: "Valor observado al tirar un dado"

ya sabemos que los valores posibles que puede tomar esa variable son

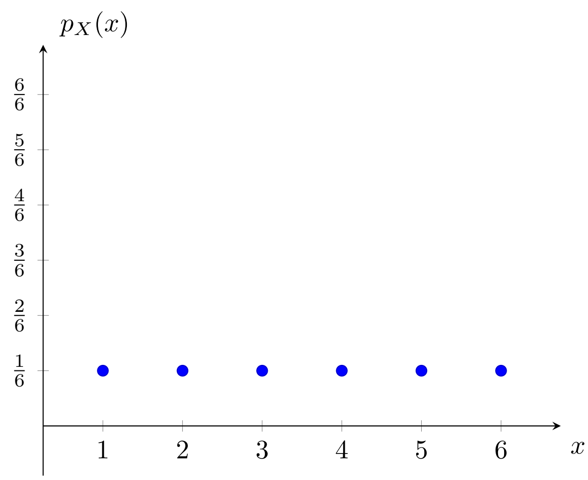
$$R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y que cada uno tiene una función de probabilidad tal que

$$p_X(x) = \frac{1}{6} \quad x \in R_X$$

si armamos la tabla y graficamos

x	1	2	3	4	5	6
$p_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



entonces la esperanza se calcula

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=1}^{6} x \cdot p_X(x) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\
&= 3.5
\end{aligned}$$

Cuando calculo esperanza, estoy buscando equilibrio. En este caso el equilibrio está en 3.5 (no necesariamente tiene que se un valor del rango, pero si tiene que estar dentro del intervalo del rango).

Ejemplo 3.2.1. *Hallar la esperanza de la cantidad de tiros necesarios de un dado equilibrado hasta observar el primer 6. Lo primero que vamos a hacer es definir la variable aleatoria (en estos casos es más fácil, si se observa, la variable aleatoria es el objeto del cuál me están pidiendo la esperanza), luego*

X: "Cantidad de tiros hasta observar el primer 6"

Puedo observar que esta variable tiene una distribución geométrica con parámetro $\frac{1}{6}$, ya que estoy contando cantidad de tiros hasta observar el primer 6, sabemos que cada tiro puede ser 6 o no, de forma independiente y siempre con la misma probabilidad. Además conocemos su rango y su función de probabilidad.

$$X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{6}) \rightarrow R_X = \mathbb{N}, p_X(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

Por definición de esperanza

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}
\end{aligned}$$

Para que se vea más sencillo, defino

$$p = \frac{1}{6}$$

luego, me queda la serie

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^{x-1} \\
&= p \sum_{x=1}^{\infty} \underbrace{x \cdot (1-p)^{x-1}}_{\frac{\partial}{\partial p}(1-p)^x(-1)} \\
&= p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p}(1-p)^x(-1) \\
&= -p \frac{\partial}{\partial p} \quad \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^x}_{\textit{Serie Geométrica}} \\
&= -p \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right) \\
&= -p \cdot \frac{-1}{p^2} \\
&= \frac{1}{p} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{6}} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

3.1.2 Esperanza de una Función de una Variable Aleatoria Discreta

Definición 3.3 (Esperanza de una función de una variable aleatoria discreta)**.** *El valor de la esperanza de cualquier función $h(X)$ se calcula como*

$$E(h(X)) = \sum_{x \in R_X} h(x) \cdot p_X(x)$$

3.1.3 Esperanza de una Variable Aleatoria Continua

Definición 3.4 (Esperanza de una variable aleatoria continua)**.** *Sea X una V.A.C. con función de densidad $f_X(x)$, el valor esperado de X es*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Ejemplo 3.4.1. *Sea $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Hallar $E(X)$.*
Solución: por definición

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx
\end{aligned}
$$

cuya resolución se lleva a cambo integrando por partes, pero, usando la tabla de distribuciones, sabiendo que si integro las funciones que allí se encuentran sobre todo su soporte, obtengo 1 como resultado. Lo que tengo que hacer ahora es mirar lo que está dentro de la integral y ver si se parece a una de las densidades de la tabla de funciones de densidad, ya que si se parece a una, lo que voy a ahcer es llevarla a que sea igual y por lo tanto ya se cuanto vale la integral. En este caso se parece a la distribución de una Gamma cuya densidad *es*

$$f_T(t) = \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \cdot t^{x-1} \cdot e^{-\lambda x} \quad t > 0$$

Para encontrar los parámetros observo, la variable estaba elevada al primer parámetro menos uno. Mi variable es x y está elevado a la uno, por lo tanto el primer parámetro parece ser 2, de manera que tengo x^{2-1}, y el segundo parámetro lo observo en el exponente de la exponencial, que es λ, y en este caso la exponencial está elevada a $-\lambda x$, por lo tanto, lo que está dentro de mi integral se parece mucho a

$$\Gamma(2, \lambda)$$

luego su función de densidad de esta Gamma es

$$\lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x}$$

y yo quiero integrar esa densidad entre 0 e infinito

$$\int_0^\infty \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x} dx$$

pero aún no está exactamente como la que tenía antes, pues me sobra un λ multiplicando, entonces acomodo

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^\infty \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x} dx}_{\text{Da 1, porque es la integral de una función de densidad en todo su soporte}} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

3.1.4 Esperanza de una Función de una Variable Aleatoria Continua

Definición 3.5 (Esperanza de una función de una variable aleatoria continua)**.** *El valor de la esperanza de cualquier función $h(X)$ se calcula como*

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^\infty h(X) \cdot f_X(x) dx$$

3.1.5 Esperanza Parcial

Definición 3.6 (Esperanza parcial)**.**

$$E(X|X \in A) = \frac{E(X\mathbf{1}\{X \in A\})}{P(X \in A)}$$

Para la esperanza parcial uso la fórmula de esperanza (general) pero solo en la región que indeica la indicadora.

3.1.6 Esperanza Total

Definición 3.7 (Esperanza total)**.** *Si despejo y pienso en una partición tenemos*

$$E(X) = E(X|X \in A) \cdot P(X \in A) + E(X|X \in \overline{A}) \cdot P(X \in \overline{A})$$

que es el cálculo de esperanza total

Ejemplo. *Hallar $E(T|T < 1)$ cuadno $T \sim \mathcal{E}(1)$.*
Solución: sabemos de la distribución exponencial que

- $E(T) = 1$.
- $T|T > 1 = 1 + T'$ *donde* $T' \sim \mathcal{E}(1)$.
- T *no tiene memoria.*

Luego

$$\begin{aligned} E(T|T > 1) &= 1 + E(T) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Usando la fórmula de esperanza total

$$E(T) = E(T|T < 1) \cdot P(T < 1) + E(T|T \geq 1) \cdot P(T \geq 1)$$

despejando

$$E(T|T < 1) = 0.418$$

Propiedad 3.7.1. *Si yo grafico una función de densidad cualquiera, la parte de $+x$ voy a calcular el área por encima de la función de distribución, y a eso le voy a restar el área por debajo de la función para todos los $-x$.*

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx - \int_{-\infty}^0 F)X(x)dx$$

Ejemplo. *Hallar la esperanza de $T* = min(T, 1)$ con $T \sim \mathcal{E}(1)$*

$$T* = \begin{cases} T & T < 1 \\ 1 & T \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(T*) &= \int_0^1 1 - (1 - e^{-t})dt \\ &= \int_0^1 e^{-t}dt \\ &= 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

Si usamos la definición de $E(h(X))$, como T es continua me queda una integral por partes.

Propiedad 3.7.2. *Sea X una V.A. con $E(X) = \mu$ si $h(X) = aX + b \to E(h(X)) = a\mu + b$.*

Para V.A.C..

$$\begin{aligned} E(h(X)) &= E(aX + b) \\ &= \sum_{x \in R_X} (ax + b)p_X(x) \\ &= \sum_{x \in R_X} (axp_X + bp_X) \\ &= \underbrace{a \sum_{X \in R_X} x \cdot p_X(x)}_{\mu} + \underbrace{b \sum_{X \in R_X} \cdot p_X(x)}_{1} \\ &= a\mu + b \end{aligned}$$

$\square$

3.1.7 Caso General

Sea X una $V.A.$ con función de distribución $F_X(x) = P(X \leq x)$, si $h(X)$ es una función cualquiera de X, si definimos A como el conjunto de átomos (valores de X que concentran masa positiva), entonces

$$E(h(X)) = \sum_{x \in A} h(x) \cdot P(X = x) + \int_{\mathbb{R} \setminus A} h(x) \cdot F'_X(x) dx$$

- Si X es una $V.A.D.$, en este caso el conjunto de átomos acumula probailidad 1, y la derivada de $F_X(x)$ va a ser 0 en todo el resto de los reales, entonces el segundo término desaparece, y como la suma de las probabilidades de todos los elementos de A es 1, $P(X = x) = p_X(x)$.
- Si X es una $V.A.C.$, el conjunto de átomos está vacío, osea que el primer término desaparece y la deribada de la función de distribución existe y la llamamos función de densidad

$$\frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = f_X(x)$$

Ejemplo. *Sea X una V.A. con*

$$F_X(x) = \frac{x}{4} \cdot \mathbf{1}\{0 \leq x < 1\} + \frac{1}{3} \cdot \mathbf{1}\{1 \leq x < 2\} + \frac{x}{7} \cdot \mathbf{1}\{4 \leq x\}$$

1. *Hallar $E(X)$.*
2. *Hallar $E(X|X < 1)$ y $E(X|X \leq 1)$*

Solución: lo primero que hacemos es graficar la función de distribución. Al ver que se trata de una variable aleatoria mixta, lo que sigue hacer es identificar el conjunto de átomos (que está formado por todos los puntos de discontinuidad de la función, es decir, donde la función pega saltos) en este caso

$$A_X = \{1, 4\}$$

y luego anotamos sus probabilidades fijándonos lo que mide un salto

$$P(X = 1) = \frac{1}{12}$$
$$P(X = 4) = \frac{1}{3}$$

1. *Vamos a calcular $E(X)$ usando la última fórmula*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in A_X} + \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot F'_X(x) dx \\ &= 1 \cdot P(X = 1) + 4 \cdot P(X = 4) + \int_0^1 x \frac{1}{4} dx + \int_2^4 x \frac{1}{6} dx \\ &= \frac{1}{12} + \frac{4}{3} + \frac{1}{8} + 1 \\ &= \frac{61}{24} \\ &\approx 2.54 \end{aligned}$$

Un detalle muy importante cuando calculamos la esperanza, es que debe estar dentro del soporte de la variable.

2. La esperanza se calcula a una V.A. En este caso, una V.A. truncada. Para este caso, al truncar, transformo mi variable, que antes era mixta, a una continua, luego existe su función de densidad

$$f_{X|X<1}(x) = \frac{1}{P(X<1)} \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \cdot \mathbf{1}\{X<1\}$$

Entonces la esperanza que nos piden la calculo como la esperanza de una variable aleatoria continua

$$\begin{aligned}
E(X|X<1) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|X<1}(x)dx \\
&= \frac{1}{P(X<1)} \qquad \underbrace{\int_0^1 x\frac{1}{4}dx}_{E(X\mathbf{1}\{X<1\}), Esperanza\ Parcial} \\
&= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Luego con la fórmula de esperanza parcial calculo la ultima parte

$$\begin{aligned}
E(X|X\leq 1) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|X\leq 1}(x)dx \\
&= \frac{\frac{1}{12}\int_0^1 x\frac{1}{4}dx}{F_X(1)} \\
&= \frac{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

3.2 Varianza de Una Variable Aleatoria

Definición 3.8 (Varianza)**.** *Sea X una V.A., definimos la varianza de X como*

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

Propiedad 3.8.1.

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E((X - E(X))^2) \\
&= E(X^2) - 2XE(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.8.1. *Para nuestra X mixta, hallar $Var(X)$ y $Var(X?X\leq 1)$*

Solución: usando la propiedad $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x \in A} x^2 \cdot P(X - x) + \int_{\mathbb{R} \setminus A} x^2 \cdot F'_X(x)dx \\
&= 1^2 \underbrace{P(X = 1)}_{\frac{1}{12}} + 4^2 \underbrace{P(X = 3)}_{\frac{1}{3}} + \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{4}dx + \int_2^4 x^2 \cdot \frac{1}{6}dx \\
&= \frac{155}{18} \\
Var(X) &= \frac{155}{18} - \left(\frac{61}{24}\right)^2 \\
&= \frac{413}{192} \\
&\approx 2.15
\end{aligned}$$

Para la varianza truncada

$$\begin{aligned}
Var(X|X \leq 1) &= E(X^2|X \leq 1) - E(X|X \leq 1) \\
E(X^2|X \leq 1) &= \frac{E(X^2 \mathbf{1}\{x \leq 1\})}{P(X \leq 1)} \\
&=
\end{aligned}$$

3.3 Desvío Estándar

Definición 3.9 (Desvío estánda)**.** *Se define como la raíz cuadrada de la varianza de una V.A.*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

3.4 Mediana

Definición 3.10 (Mediana)**.** *La **mediana** es el valor de* X *que acumula una probabilidad de* 0.5 *(es el cuantil* 0.5*)*

3.5 Moda

Definición 3.11. *Moda La **moda** es el valor de* X *con mayor probabilidad*

3.6 Esperanza de un Vector Aleatorio

3.6.1 Esperanza de una Función de un Vector Aleatorio Discreto

Definición 3.12. *El valor esperado de una función* $h(X, Y)$ *esta dado por*

$$E(h(X, Y)) = \sum_x \sum_y h(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$$

3.6.2 Esperanza de una Función de un Vector Aleatorio Continuo

Definición 3.13. *El valor esperad de una función* $h(X, Y)$ *está dado por*

$$E(h(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y)dxdy$$

3.6.3 Propiedades de Orden

Sea $\mathbb{X} = X_1, \dots, X_n$ un vector aleatorio, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, tenemos que

1. Si $X > 0$ entonces $E(X) > 0$.
2. Si $g(X) > 0$ enttonces $E(g(X)) > 0$.
3. Sea $h(X) > g(X)$ entonces $E(h(X)) > E(g(X))$.
4. $E(|X|) \geq E(X)$.
5. $E(|XY) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$.

Propiedades 3.13.1. *1.* $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

Proof. □

2. Si $X_1, \dots, X_n$ *son independientes entonces*

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Proof.

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx}_{E(X)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy}_{E(Y)} \end{aligned}$$

□

3.7 Covarianza

Definición 3.14. *Sean* X *e* Y *dos variables aleatorias*

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)))$$

Propiedades 3.14.1. *1.* $Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

Proof.

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) \\ &= E(X \cdot Y - x \cdot E(Y) - Y \cdot E(X) + E(X) \cdot E(Y)) \\ &= E(X \cdot Y) - E(Y) \cdot E(X) - E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y) \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

□

2. Si X *e* Y *son independientes entonces la esperanza del producto entre ellas se puede calcular como el producto de sus esperanzas.*

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

y por lo tanto

$$Cov(X, Y) = 0$$

$Cov(a + bX, c + dY) = b \cdot d \cdot Cov(X, Y)$

Proof.

$$foto$$

□

$Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$.

Proof. □

$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$.

Proof.

$$foto$$

□

3.7.1 Coeficiente de Correlación

Definición 3.15. *El coeficiente de correlación entre las variables aleatorias X e Y está dado por*

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

Lo que estamos haciendo es llevar a que el valor absoluto de la covarianza esté entre 0 y 1.

Propiedad 3.15.1.

$$|\rho_{X,Y}| = 1 \leftrightarrow P(aX + bY) = 1$$

Si $\rho_{X,Y} = 0$ eso nos dice que no hay correlación lineal entre las variables, lo que puede significar que no hay dependencia o que hay correlación de otro tipo.

4 Clase 29-04

1. Defino mi variable aleatoria

   $$\text{X: "Cantidad de libros mal ubicados por dia"}$$

   Tiene distribucion de Poisson (ver tabla)

   $$X \sim Poi(\mu) \quad R_X = \mathbb{N}_0$$

   cuya funcion de probabilidad es

   $$p_X(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad x = 0, 1, \ldots$$

   (a)
   $$\begin{aligned} P(X/geq1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} \\ &= 1 - e^{-1} \\ &= 0.6321 \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} \\ &= 0.0613 \end{aligned}$$

   (c) (BONUS) Si se sabe que hubo mas de 2 libros mal ubicados, cual es la probabilidad de que haya mas de 4 mal ubicados?

   $$\begin{aligned} P(X < 4|X > 2) &= \frac{P(X < 4, X > 2)}{P(X > 2)} \\ &= \frac{P(X = 3)}{1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)} \\ &= \frac{\frac{e^{-1}}{3!}}{1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{e^{-1}}{2!}} \\ &= 0.7635 \end{aligned}$$

2. Defino mi variable aleatoria

   $$\text{T: "Tiempo que se mantiene adherida la etiqueda".}$$

   Tenemos que la tasa con respecto al tiempo

   $$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathbf{1}\{t > 0\}$$

   a partir de ella podemos encontrar la funcion de distribucion. En este caso es la funcion de riesgo

   $$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t) ds} \\ &= \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\int_0^t s^{-\frac{1}{2}} ds} & t > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-2\sqrt{t}} & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora que tengo la funcion de distribucion, me piden una probabilidad condicional, el primer anio estuvo adherida entonces

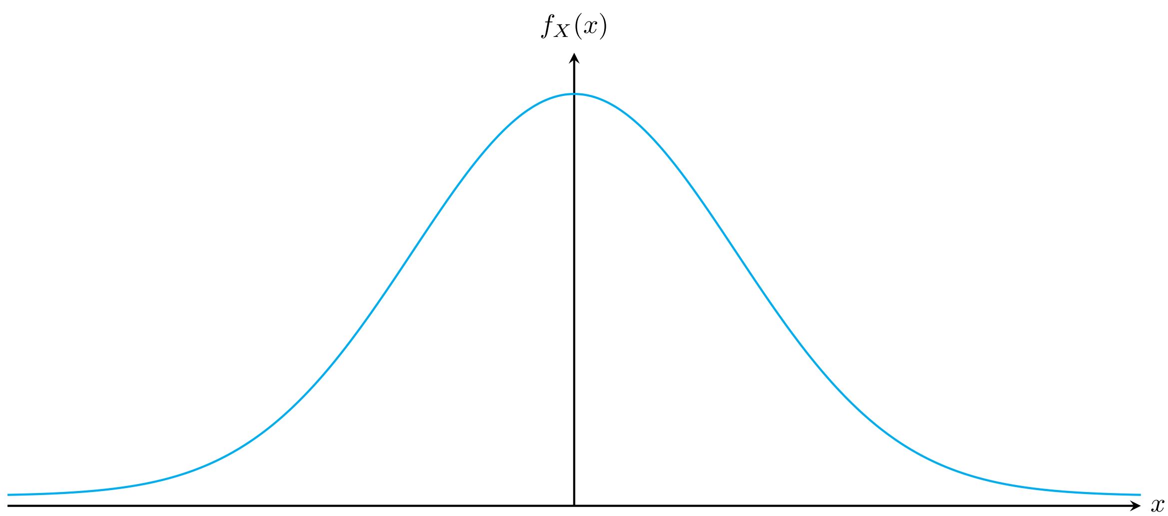
$$
\begin{aligned}
P(T \geq 2 | T > 1) &= \frac{P(T \geq 2, T > 1)}{P(T > 1)} \\
&= \frac{T \geq 2}{P(T > 1)} \\
&= \frac{1 - F_T(2)}{1 - F_T(1)} \\
&= \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{e^{-2}} \\
&= 0.4367
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{\overline{P(T > t)}}_{\text{Supervivencia}} = 1 - F_T(t)$$

3. Tengo que

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{(normal estandar)}$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$



$$F_Z(z) = \Phi(z)$$

(a) i.

$$
\begin{aligned}
P(Z < 1) &= F_Z(1) \\
&= \Phi(1) \\
&= 0.8413
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
P(Z > 1) &= 1 - F_Z(1) \\
&= 0.1587
\end{aligned}
$$

iii.

$$
\begin{aligned}
P(-1.5 < Z < 0.5) &= \Phi(0.5) - \Phi(-1.5) \\
&= 0.6247
\end{aligned}
$$

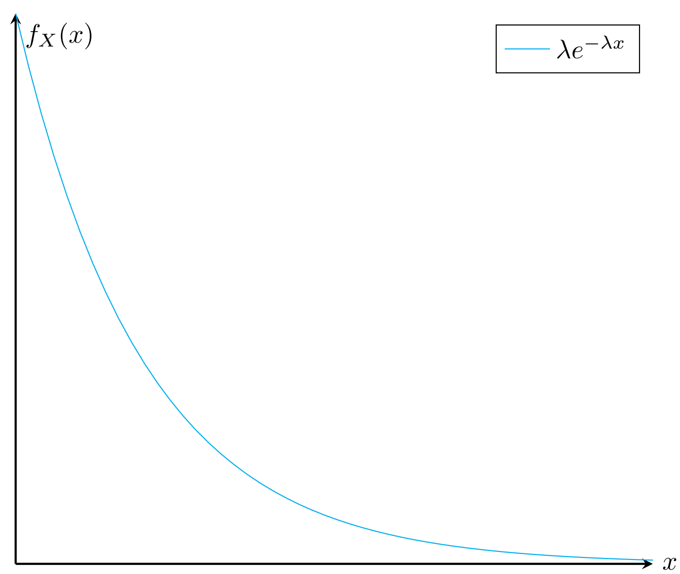
iv.
$$P(-1.5 < Z < 0.5) = \Phi(0.5) - \Phi(-1.5) \therefore \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5)$$
$$= 0.6247$$

(b) Estoy buscando
$$a : P(Z > a) = 0.95$$
Que es lo mismo que decir
$$\Phi(a) = 0.05$$
Nuestro a corresponde a un numero negativo, ya que para cubrir la probabilidad que cubre, debe hacerlo desde los negativos. Ahora calculo a
$$a = \Phi^{-1}(0.05)$$
$$= -1.6449$$

4. Definimos la $V.A.$

P: "Cantidad (en toneladas) del producto utilizada en un dia"

Sabemos que P tiene una distribucion exponencial con paramtro 0.25
$$P \sim \mathcal{E}(0.25)$$
Cuya funcion de distribucion es
$$f_P(p) = \begin{cases} 0.25 \cdot e^{-0.25p} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$



Luego
$$F_P(p) = \begin{cases} 0 & p < 0 \\ 1 - e^{-0.25p} & p \geq 0 \end{cases}$$
Por ultimo, si $p > 0$, $P(P > p) = e^{-0.25}$

(a)

$$\begin{aligned} P(T > 4) &= 1 - F_T(4) \\ &= e^{-\frac{1}{4}\cdot 4} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

(b)

$$P(\underbrace{\text{"Agotar existencia"}}_{T \geq a}) = 0.05$$

Me piden $a > P(T \geq a) = 0.05$, es decir $e^{-\frac{a}{4}} = 0.05$ por lo tanto

$$\begin{aligned} a &= -4\ln(0.05) \\ &= 11.98 \end{aligned}$$

5. Definimos la variable aleatoria

X: "tiempo de reabastecimiento en dias"

y me dan la funcion de densidad

$$f_X(x) = \frac{(0.1)^4}{3!} \cdot x^3 e^{-\frac{x}{10}} \cdot \mathbf{1}\{x > 0\}$$

(a)

$$P(X < 20) = \int_0^{20} \frac{(0.1)^4}{3!} \cdot x^3 e^{-\frac{x}{10}} dx$$

Veo que la funcion de densidad se parece a la funcion de distribucion de Gamma

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma}(k) \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}$$

Si fuera Gamma $k = 4$ y $\lambda = \frac{1}{10}$. Verifico que cumple, entonces

$$\therefore X \sim \Gamma(4, \frac{1}{10})$$

Usando la Supervivencia de Gamma

$$\Gamma(a) = (a-1) \cdot \Gamma(a-1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(X < 20) &= 1 - P(X > 20) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{i!} \cdot e^{-2} \\ &= 0.1429 \end{aligned}$$

(b) s

$$\begin{aligned} P(X < 60) &= 1 - P(X > 60) \\ &= 1 - \end{aligned}$$