El término probabilidad se refiere al término de azar, y la incertidumbre en cualquier situación en la que varios resultados pueden ocurrir.

Definición 0.1 (Experimentos aleatorios)**.** *Acciones o procesos en los cuales conocemos todos los resultados posibles pero no sabemos con certeza cuál va a ocurrir.*

Si conocemos todos los resultados posibles entonces podemos anotarlos, entonces definimos *espacio muestral*:

Definición 0.2 (Espacio muestral (Ω))**.** *Es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio. Sus elementos, ω, se llaman* ***elementos elementales****.*

Ejemplos 0.2.1. *Casos que conozco todas los posibles resultados pero no el resultado final:*

1. *Tiro una moneda y observo la cara superior.*
   Espacio muestral:
$$\Omega_1 = \{"cara", "ceca"\}$$
2. *Tiro una moneda 2 veces y observo que sale.*
   Espacio muestral:
$$\Omega_2 = \{("cara", "ceca"), ("ceca", "cara"), ("cara", "cara"), ("ceca", "ceca")\}$$
3. *Tiro un dado y observo el resultado.*
   Espacio muestral:
$$\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
4. *Registro la cantidad de personas que entran a un banco entre las 11 y las 12hs.*
   Espacio muestral:
$$\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$$
5. *Registro el tiempo entre la llegada de autos a un peaje.*
   Espacio muestral:
$$\Omega_5 = \{t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

En el estudio de la probabilidad nos interesa no solo los resultados individuales de los espacios muestrales sino que nos interesan varias recopilaciones de resultados. Por eso definimos *evento* o *suceso*:

Definición 0.3 (Evento o Suceso)**.** *Es cualquier conjunto de resultados en el espacio muestral. Los resultados pueden mostrar un conjunto finito o infinito con cualquier cardinalidad.*

Ejemplo. *Refiriendonos a (1) podemos definir un evento "A" como:*

1. *A. "El valor observado es par". (está formado por 3 eventos elementales) Asi creamos un subconjunto que corresponde a los elementos de Ω_1 que cumple con el evento "A".*

Definición 0.4 (Espacio equiprobable)**.** *Un espacio muestrable es equiprobable cuando todos sus elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.*

Definición 0.5 (Frecuencia absoluta)**.** *Para un evento en particular, la frecuencia absoluta es la cantidad de veces que sucede ese evento. La cantidad de veces que sucede el evento A (o #A), se nota:*

$$\eta_A$$

Definición 0.6 (Frecuencia relativa)**.** *Para un evento en particular, se define como la relación entre la cantidad de veces que ocurre el evento A y el número total de ensayos.*

$$f_a = \frac{\eta_A}{\eta}$$

Ahora estamos en condiciones para definir *probabilidad*.

Definición 0.7 (Probabilidad)**.** *Probabilidad de un evento A, es un número positivo (o nulo) que se le asigna a cada suceso o evento del espacio muestral.*

Definición 0.8 (Regla de Laplace)**.** *La probabilidad de que ocurra un sucedo A se calcula como la cantidad de casos en los que ocurre ese suceso dividido los casos posbiles de ese experimento siempre y cuando los todos los elementos del espacio muestral sean equiprobables:*

$$P(A) = \frac{\#\textit{casos favorables de } A}{\#\textit{casos posibles del experimento}}$$

Ejemplos 0.8.1. *Regla de Laplace*

1. *Arrojo un dado equilibrado ¿cuál es la probabilidad de que observe el número 2? ¿cuál es la probabilidad de que observe un número par?*
   Solución:

   - *Experimento aleatorio: arrojo un dado y observo el resultado.*
   - *Espacio muestral:*
     $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
   - *Evento A. "Se observa el número 2".*
   - *Definición de Laplace: ¿es mi espacio equiprobable? el dado es equilibrado, por lo tanto mi espacio es equiprobable. Entonces puedo usar la definición:*
     $$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid} \therefore \mid A \mid = 1 \wedge \mid \Omega \mid = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$
   - *Evento B. "Se observa un número par".*
   - $$P(B) = \frac{\mid B \mid}{\mid \Omega \mid} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. *Un dado equilibrado se arroja 2 veces. Hallar la probabilidad de que:*

   (a) *Los dos resultados sean iguales.*
   (b) *Los dos resultados sean distintos y su suma no supere 9.*
   (c) *La suma de los resultados sea 10.*
   (d) *El primr resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar.*

   Solución:

   - *Experimento aleatorio: arrojo un dado 2 veces y observo el resultado.*
   - *Evento D_i: "Valor observado en el tiro i" $i = 1, 2$*
   - *Como los resultados son muchos para escribir el conjunto entero, escribo una tabla:*
     $$\Omega = \{(a, b) : a, b = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \therefore \mid \Omega \mid = 36$$

D_2/D_1	1	2	3	4	5	6
1				·		
2						
3				·		
4						
5				·		
6						

(a) $\boxed{A}$: *"Los dos resultados son iguales"* $\therefore |\boxed{A}| = 6$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) $\boxed{B}$: *"Los resultados son distintos y la suma no supera 9"* $\therefore |\boxed{B}| = 26$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{26}{36} = \frac{13}{26}$$

(c) $\boxed{C}$: *"La suma de los resultados sea 10s"* $\therefore |\boxed{C}| = 4$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(d) $\boxed{\cdot D}$: *"El primer resultado sea 4 y el segundo resultado sea impar".* $\therefore |\boxed{\cdot D}| = 4$

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

0.1 Preliminares

Definición 0.9 (Álgebra de eventos)**.** *Dado Ω, sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω, diremos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de eventos si:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. *Si* $B \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{A}$.
3. *Si* $B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}$.
4. *(σ Álgebra) Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* $\mathcal{A}$ *entonces:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Propiedades 0.9.1. *Álgebra de eventos*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
3. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Ejemplo 0.9.1. *Sea* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*. Hallar la menor álgebra de subconjuntos tal que el subconjunto* $\{2, 4, 6\}$ *pertenezca a ella.*
Solución:
Por axioma 2 debe estar su complemento $(\{1, 3, 5\})$*.*
Por axioma 3 debe estar la unión $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$*.*
Por axioma 2 debe estar su complemento $(\{\emptyset\})$*.*
El axioma 1 se cumplió por accidente.

$$\mathcal{A} = \{\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\emptyset\}\}$$

De eta forma encontramos el menor álgebra de subconjuntos de Ω *con la condición pedida.*

Definición 0.10 (Calcular probabilidad en cualquier espacio)**.** *Una probabilidad (o medida de probabilidad) e suna funcion $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ que a cada evento A le hace corresponder un número real $P(A)$ con las siguientes propiedades:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$ *(la probabilida es un número entre 0 y 1).*
2. $P(\Omega) = 1$.
3. *Si* $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(eventos mutuamente excluyentes o disjuntos: no pueden ocurrir al mismo tiempo).*
4. *(Axioma de continuidad) Para cada sucesión decreciente de eventos* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ *tal que* $\bigcap_{i=1}^{infty} A_i = \emptyset$ *vale que* $\lim_{x \to infty} P(A_n) = 0$.

Propiedades 0.10.1. *:*

1. *Si* $\overline{A}$ *es el evento complementario de* A*, entonces* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   Demostración. (usando los axiomas)

$$\begin{aligned} \Omega =& A \cup \overline{A} \\ & A \cap \overline{A} = \emptyset \\ \text{ax.2) } P(\Omega) =& P(A \cup \overline{A}) = 1 \\ \text{ax.3) } P(A \cup \overline{A}) =& P(A) + P(\overline{A}) = 1 \\ & \therefore P(\overline{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

   □

2. *Sean* A *y* B *eventos pertenecientes a* Ω*, entonces:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

   Demostración. usando los axiomas:

$$Completar$$

   □

3. *Si* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *es una sucesión de elementos de* A*, mutuamente excluyentes* 2 *a* 2*, entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Nota (¿Que significa para nosotros el álgebra de eventos?)**.** *Cuando defino un experimento aleatorio puedo definir Ω pero no necesariamente puedo conocer todas las probabilidades de todos los elementos elementales, puede que me falte información, entonces el conjunto del álgebra de eventos me dice a que eventos les puedo calcular la probabilidad.*

Ejemplo. *En argentina, el 80% de los programadores usa Java, C, o ambos. El 50% usa Java y el 4'% usa C. ¿ Cuál es la probabilidad de que al elegir un programador al azar use:*

a) *Java y C:*

b) Sólo Java.

c) Solo C.

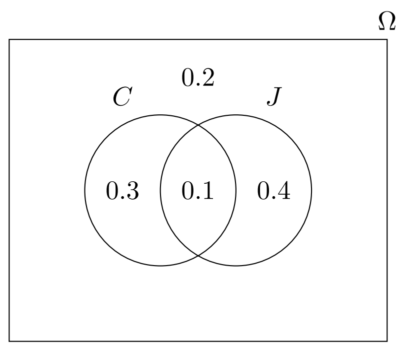
d) Ninguno de los dos lenguajes.

Solución:

- *Elijo el experimento aleatorio (EA):*
  "Elijo un programador al azar y me pregunto que lenguaje usa".

- *Defino eventos:*
  J: "El programador elegido al azar usa Java".
  C: "El programador elegido al azar usa C".

- *Defino quién es Ω (en ese caso lo defino con un diagrama, en específico un diagrama de Venn):*



- *Interpreto los datos:*

$$P(J \cup C) = 0.8$$
$$P(J) = 0.5$$
$$P(C) = 0.4$$
$$\therefore P(J \cup C) = P(J) + P(C) - P(J \cap C)$$
$$\Rightarrow P(J \cap C) = P(J) + P(C) - P(J \cup C) = 0.1$$

- *Resuelvo*

  a) $P(J \cap C) = 0.1$

  b) $P(J \cap \overline{C}) = P(J - C \cap J) = P(J) - P(C \cap J) = 0.4$

  c) $P(C \cap \overline{J}) = P(C - J \cap C) = P(C) - P(J \cap C) = 0.3$

  d) "Ninguno" es el complemento de "alguno" y "alguno" = $(J \cup C)$ entonces:

$$P(\overline{J \cup C}) = P(\overline{C} \cap \overline{J}) = 1 - P(C \cup J) = 0.2$$

Definición 0.11 (Espacio de probabilidad)**.** *Es una terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donde Ω es un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre Ω y P es una medida de probabilidad.*

0.2 Técnicas de Conteo

Definición 0.12 (#CP)**.** *Cantidad de casos posibles de un experimento.*

Si tiramos un dado vemos que la cantidad de resultados posibles es 6; si tiramos el dado 2 veces, la cantidad de resultados posibles es 36; si tiramos el dado 3 veces, tengo 6 opciones para cada tiro:

$$\underline{6}\ \underline{6}\ \underline{6}$$

Definición 0.13 (Regla del Producto)**.** *Dados dos conjuntos A y B con η_A y η_B elementos cada uno respectivamente, la cantidad de todos los pares ordenados que pueden formarse con un elemento de A y uno de B se calcula como $\eta_A \cdot \eta_B$*

Ejemplos 0.13.1. *Regla del producto*

1. *Tiro un dado 2 veces y por regla del producto:*

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} = 36$$

2. *Tiro un dado 3 veces y por regla del producto:*

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 6^3$$

3. *Tiro un dado 4 veces y por regla del producto:*

$$\#CP = \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 6^4$$

4. *En 4 tiros, ¿de cuántas formas posibles puede no aparecer ningún 6?*
   Tengo 5 opciones en donde no sale un 6, y como son 4 tiros, entonces tengo 5 opciones en donde no sale un 6, 4 veces. Entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 5^4$$

5. *¿Cuántas patentes de 3 letras y 3 números distintas puedo formar?*
   Tengo 3 letras (una raya por letra) y 3 números (una raya por número). Tengo 26 letras posibles para la primer posición, para la segunda y tercera igual (porque se pueden repetir). Con los números, tengo 10 opciones para el primero, el segundo y el tercero (10 dígitos de 0 a 9). Por regla del producto:

$$\#CP = \underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 26^3 \cdot 10^3$$

Supongamos que tengo 5 libros y quiero ordenarlos en una biblioteca, que sólo tiene 5 lugares. Quiero contar todas las formas posibles de ordenarlos. Entonces supongo un caso análogo a los anteriores.
Para el primer lugar tengo 5 posibles opciones para colocar uno de mis libros, para el segundo 4 opciones, para el tecero 3 opciones, para el cuarto 2 opciones y para el último lugar ya solo me queda una posible opción. Entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 120 = 5!$$

Lo que hicimos fué pensar en la cantidad de libros que teníamos y ver la cantidad de *ordenamientos* posibles.

Definición 0.14 (Permutaciones)**.** *La cantidad de formas distintas en las que puedo ordenar n elementos es n!*

Ejemplos 0.14.1. *Permutaciones*

1. *¿De cuántas formas distintas puedo fotografiar a 7 personas en hilera?*

$$\#CP = \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 7!$$

2. *¿Que pasaría si en una biblioteca tengo espacio para 3 libros y yo tengo 5?*
5! son todas las permutaciones de los elementos que tenía originalmente, y hay que dividir por los que conté de más cuando ubiqué a todos. En este caso calculo las permutaciones y luego les divido lo que conté de más, entonces:

$$\#CP = \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!}$$

Definición 0.15 (Variaciones)**.** *Es la cantidad de subconjuntos ordenados de r elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos. Las variaciones son, de un conjunto total de n elementos son todos los subconjuntos diferentes que puedo extraer si me importa el orden en el que los estoy extrayendo.*

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En la calculadora: $\boxed{nPr}$

Ejemplo 0.15.1. *En un cine con 70 butacas, ¿de cuántas formas distintas pueden sentarse 45 personas?*

$$\#CP = \frac{70!}{(70-45)!} = \frac{70!}{25!}$$

Definición 0.16 (Combinaciones)**.** *Es la cantidad de subconjuntos NO ordenados de r elementos que pueden formarse a partir de los conjuntos de n elementos.*

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r}$$

En la calculadora: $\boxed{nCr}$

En donde $\binom{n}{r}$ se denomina número combinatorio de n elementos tomados de a r. Lo que me dice este número es de cuantas formas puedo sacar r elementos de un total de n cuando no me importa el orden.

Ejemplos 0.16.1. *Combinaciones*

1. *¿De cuántas formas diferentes puedo elegir 11 personas de un grupo de 30 para formar un equipo de fútbol?*
Tengo un conjunto de 30 personas, y voy a elegir un subconjunto de 11 personas entonces $n = 30$, $r = 11$ y como el orden no me importa, utilizo el número combinatorio para contar estas personas:

$$\#CP = \binom{30}{11}$$

2. *Control de calidad. ¿Cuántas muestras de 10 piezas diferentes puedo elegir de un lote de 100?*
Tengo un conjunto, y un subconjunto, y el orden no me interesa, entonces:

$$\#CP = \binom{100}{10}$$

Observación 0.16.1.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Proof.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$
$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

□

Ejemplo 0.16.1. *Mazo de 40 cartas esáñolas.*

a) En un mazo de cartas españolas, tengo 10 cartas de espada, 10 cartas de copa, 10 cartas de basto y 10 cartas de oro. ¿Cuántas manos diferentes puede tener una persona jugando al truco?

$$n = 40, r = 3$$
$$\#CP = \binom{40}{3}$$

b) ¿Cuántas formas distintas hay de recibir una mano de oro?
Todos los casos posibles se dan de elegir 3 cartas de un total de 10 ya que estoy elegiendo entre las cartas que son de oro.

$$\#CP = \binom{10}{3}$$

c) ¿Cuántas manos puedo recibir siendo todas las cartas del mismo palo?
Separo en casos: tengo 4 posibles resultados dada la cantidad de palos disponibles, y por cada palo tengo la cantidad de posibilidades del resultado anterior, entonces ahora tengo que sumar todas las formas de sacar 3 de cada palo.

$$\#CP_{oro} = \binom{10}{3}, \#CP_{basto} = \binom{10}{3}, \#CP_{espada} = \binom{10}{3}, \#CP_{copa} = \binom{10}{3}$$
$$\#CP = \#CP_{oro} + \#CP_{basto} + \#CP_{espada} + \#CP_{copa}$$
$$\#CP = 4 \cdot \#CP_{palo}$$
$$\#CP = 4 \cdot \binom{10}{3}$$

Definición 0.17 (Anagramas)**.** *Dada una palabra, un anagrama es una forma de escribir otra palabra, cambiando las letras de la palabra original de lugar.*

Ejemplo 0.17.1. *Supongamos la palabra "ANANA", ¿cuántos anagramas puedo formar?*
¿Cómo contamos todos los ordenamientos posibles? Usando lo que aprendimos en número combinatorio: tengo 5 posiciones para ubicar 5 letras, las letras que tengo que ubicar son las letras de la palabra "ANANA":

1. *Acomodo las letras "A", tengo 3 lugares para ubicarla (porque tengo 3). No me importa el orden.*

$$\#CP_A = \binom{5}{3} \tag{1}$$

2. *Por todas esas posiciones que tengo para ubicar la letra "A", tengo que ver todas las posibles opciones que me quedan para la letra "N". Ahora tengo 2 lugares para ubicarla (porque tengo 2).*

$$\#CP_N = \binom{2}{2} = 1 \tag{2}$$

Una vez ubicadas las letras "A" tengo sólo una forma posible de ubicar las "N". Si ubico primero las "N", de los 5 lugares que tengo voy a poder usar 2, y de los 3 lugares que quedan voy a elegir 3 para ubicar la "A".

$$\#CP = \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3}$$

Nota. *Otra forma de pensarlo permutando es hacer el total de permutaciones y dividir esa cantidad por la multiplicación de los casos que conté de más*

$$\#CP = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

Ejemplo 0.17.2. *¿Cuántos anagramas puedo formar de la palabra "MANZANA"?*

- *Con el método de permutaciones:*

$$\#CP = \frac{7!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$$

- *Con números combinatorios (leyendo las letras en orden izq-der):*

$$\#CP = \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1}$$

Definición 0.18 (Permutaciones con elementos repetidos)**.** *Si tenemos n elementos en los cuales hay n_1 de la clase 1, n_2 de la clase 2, ... n_k de la k-ésima, el número de permutaciones de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ objetos está dada por*

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_k!}$$

Definición 0.19 (Método de bolas y urnas (capitulo1-video3 40:00))**.** *Se usa cuando tengo una cantidad de elementos **indistinguibles**. Si estoy ordenando r elementos indistinguibles en k urnas tengo que dibujar r crucecitas ("×"), y k-1 palitos ("|")*

Definición 0.20 (Métodos de Bose-Einstein)**.**

$$\#CP = \binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}$$

Ejemplo 0.20.1. *Tengo un mapa, donde cada cuadrado es una manzana, y quiero ir del punto C al punto S. ¿De cuántas formas posibles puedo ir de C a S si solo puedo moverme hacia la izquierda o abajo.*
Esto es análogo al problema del anagrama, por lo tanto

$$\#CP = \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$