Trabajo Práctico N°1

Nombre: Iván Litteri
Padrón: 106223

Fecha de Entrega: 29/09/2021
Grupo: -

Índice general

Capítulo 1

Karatsuba!

1.1. Objetivos

Dada los siguientes números (completada por su número de padrón)

$$a35b411c$$
$$2d98ef55$$

con:

a: dígito del padrón correspondiente a la unidad
b: dígito del padrón correspondiente a la centena
c: los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7
d: dígito del padrón correspondiente a la decena
e: dígito del padrón correspondiente a la unidad de mil
f: los dos dígitos del padrón de la derecha mod 9

Ejemplo. Padrón: 95473

33544114
27985155

Se pide:

1. Resuelva la multiplicación paso a paso utilizando el algoritmo de Karatsuba.
2. Cuente la cantidad de sumas y multiplicaciones que realiza y relaciónelo con la complejidad temporal del método.
3. Comparar lo obtenido con el método de multiplicación tradicional. ¿Observa alguna mejora? Analice.
4. ¿Por qué se puede considerar al algorítmo de Karatsuba como de "división y conquista¿

1.2. Resultados

1.2.1. Preliminar

Dada los siguientes números (completada por su número de padrón)

$$a35b411c$$
$$2d98ef55$$

con:

a: dígito del padrón correspondiente a la unidad
b: dígito del padrón correspondiente a la centena
c: los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7
d: dígito del padrón correspondiente a la decena
e: dígito del padrón correspondiente a la unidad de mil
f: los dos dígitos del padrón de la derecha mod 9

Con mi padrón: 106223, las letras serían

$$\begin{aligned}
a &= 3 \\
b &= 2 \\
c &= 10 \bmod 7 = 3 \\
d &= 2 \\
e &= 6 \\
f &= 23 \bmod 9 = 5
\end{aligned}$$

Luego reemplazando los valores de las letras en los números:

$$33524113$$
$$22986555$$

1.2.2. Multiplicación usando el algoritmo

Para lo que sigue, la función k(x, y) representa la función del algoritmo de Karatsuba

Para mi caso los números a multiplicar son 33524113 y 22986555. Entonces tenemos lo siguiente:

$$x \cdot y \quad \therefore x = 33524113, y = 22986555$$

Entonces debemos llamar una primera vez a la función de esta manera: $k(33524113, 22986555)$

Como el x_0 y el y_0 son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x e y dividido 2, en este caso ambos tienen 8 dígitos, luego la mitad es 4.

$$\begin{aligned}
mitad &= max(len(33524113), len(22986555)) \ // \ 2 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_0 e y_0:

$$x_0 = \underbrace{3352}_{a_0}\underbrace{4113}_{b_0}, y = \underbrace{2298}_{c_0}\underbrace{6555}_{d_0}$$
$$a_0 = 3352, b_0 = 4113, c_0 = 2298, d_0 = 6555$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_0 \cdot c_0$, $b_0 \cdot d_0$, y $(a_0 + b_0) \cdot (c_0 + d_0)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_0 \cdot c_0$ Llamando a $k(a_0, c_0)$.

Como el x_1 y el y_1 son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_0 e y_0 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_1 &= max(len(x_1), len(y_1)) \ // \ 2 \\ &= max(len(3352), len(2298)) \ // \ 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_1 e y_1:

$$x_1 = \underbrace{33}_{a_1}\underbrace{52}_{b_1}, y_1 = \underbrace{22}_{c_1}\underbrace{98}_{d_1}$$
$$a_1 = 33, b_1 = 52, c_1 = 22, d_1 = 98$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_1 \cdot c_1$, $b_1 \cdot d_1$, y $(a_1+b_1)\cdot(c_1+d_1)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_1 \cdot c_1$ Llamando a $k(a_1, c_1)$.

Como el x_2 y el y_2 son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_1 e y_1 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_2 &= max(len(x_2), len(y_2)) \ // \ 2 \\ &= max(len(33), len(22)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_2 e y_2:

$$x_2 = \underbrace{3}_{a_2}\underbrace{3}_{b_2}, y_2 = \underbrace{2}_{c_2}\underbrace{2}_{d_2}$$
$$a_2 = 3, b_2 = 3, c_2 = 5, d_2 = 2$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_2 \cdot c_2$, $b_2 \cdot d_2$, y $(a_2+b_2)\cdot(c_2+d_2)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_2 \cdot c_2$ Llamando a $k(a_2, c_2)$.

Como el $x_3 = 3$ y el $y_3 = 2$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 3 \cdot 2 = 6$$

y retornamos el valor, volviendo a la llamada anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $a_2 \cdot c_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_2 \cdot d_2$, llamamos a la función $k(b_2, d_2)$.

Como el $x_3 = 3$ y el $y_3 = 2$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 3 \cdot 2 = 6$$

y retornamos el valor, volviendo a la llamada anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $b_2 \cdot d_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$, llamamos a la función $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$.

Como el $x_3 = 3 + 3 = 6$ y el $y_3 = 2 + 2 = 4$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 6 \cdot 4 = 24$$

y retornamos el valor, volviendo a la llamada anterior (subíndice 2).

Al valor retornado de $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_2 \cdot c_2$ y $b_2 \cdot b_2$) para obtener $a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 &= (a_2 + b_2 \cdot c_2 + d_2) - a_2 \cdot c_2 - b_2 \cdot b_2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 1) la multiplicación

$$a_1 \cdot c_1 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_1)} + ((a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1) \cdot 10^{mitad_1}) + b_1 \cdot d_1$$
$$6 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10^1 + 6 = 726$$

Ahora tenemos el resultado de $a_1 \cdot c_1$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_1 \cdot d_1$, llamamos a la función $k(b_1, d_1)$.

Como el x_2 y el y_2 son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_2 e y_2 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_2 &= max(len(x_2), len(y_2)) \ // \ 2 \\ &= max(len(52), len(98)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_2 e y_2:

$$x_2 = \underbrace{5}_{a_2}\underbrace{2}_{b_2}, y_2 = \underbrace{9}_{c_2}\underbrace{8}_{d_2}$$
$$a_2 = 5, b_2 = 2, c_2 = 9, d_2 = 8$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_2 \cdot c_2$, $b_2 \cdot d_2$, y $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_2 \cdot c_2$ Llamando a $k(a_2, c_2)$.

Como el x_3 y el y_3 son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 5 \cdot 9 = 45$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $a_2 \cdot c_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_2 \cdot d_2$, llamamos a la función $k(b_2, d_2)$.

Como el $x_3 = 3$ y el $y_3 = 2$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 2 \cdot 8 = 16$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $b_2 \cdot d_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$, llamamos a la función $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$.

Como el $x_3 = 5 + 2 = 7$ y el $y_3 = 9 + 8 = 17$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \ // \ 2 \\ &= max(len(7), len(17)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3 (como x_3 es de una cifra, completo con un cero adelante, luego $x_3 = 07$):

$$x_3 = \underbrace{0}_{a_3}\underbrace{7}_{b_3}, y_3 = \underbrace{1}_{c_3}\underbrace{7}_{d_3}$$
$$a_3 = 0, b_3 = 7, c_3 = 1, d_3 = 7$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3+b_3)\cdot(c_3+d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el x_4 y el y_4 son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 0 \cdot 1 = 0$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 7$ y el $y_4 = 7$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 7 \cdot 7 = 49$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 0 + 7 = 7$ y el $y_4 = 1 + 7 = 8$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 7 \cdot 8 = 56$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3$$
$$0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 49 = 119$$

Al valor retornado de $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_2 \cdot c_2$ y $b_2 \cdot b_2$) para obtener $a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 &= (a_2 + b_2 \cdot c_2 + d_2) - a_2 \cdot c_2 - b_2 \cdot b_2 \\ &= 58 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_2 \cdot c_2 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_2)} + ((a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2) \cdot 10^{mitad_2}) + b_2 \cdot d_2$$
$$45 \cdot 10^2 + 58 \cdot 10^1 + 16 = 5096$$

Ahora tenemos el resultado de $b_1 \cdot d_1$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_1 + b_1) \cdot (c_1 + d_1)$, llamamos a la función $k(a_1 + b_1, c_1 + d_1)$.

Como el $x_2 = 33 + 55 = 88$ y el $y_2 = 22 + 98 = 120$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base.

Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_2 e y_2 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_2 &= max(len(x_2), len(y_2)) \ // \ 2 \\ &= max(len(88), len(120)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_2 e y_2:

$$x_2 = \underbrace{8}_{a_2}\underbrace{8}_{b_2}, y_2 = \underbrace{12}_{c_2}\underbrace{0}_{d_2}$$
$$a_2 = 8, b_2 = 8, c_2 = 12, d_2 = 0$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_2 \cdot c_2$, $b_2 \cdot d_2$, y $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_2 \cdot c_2$ Llamando a $k(a_2, c_2)$.

Como el $x_3 = 8$ y el $y_3 = 12$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \ // \ 2 \\ &= max(len(8), len(12)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3 (como x_3 es de una cifra, completo con un cero adelante, luego $x_3 = 08$):

$$x_3 = \underbrace{0}_{a_3}\underbrace{8}_{b_3}, y_3 = \underbrace{1}_{c_3}\underbrace{2}_{d_3}$$
$$a_3 = 0, b_3 = 8, c_3 = 1, d_3 = 2$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el x_4 y el y_4 son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 0 \cdot 1 = 0$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 7$ y el $y_4 = 7$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 8 \cdot 2 = 16$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 0 + 8 = 8$ y el $y_4 = 1 + 2 = 3$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 8 \cdot 3 = 24$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$
\begin{aligned}
a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$
a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3
$$
$$
0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 16 = 96
$$

Ahora tenemos el resultado de $a_2 \cdot c_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_2 \cdot d_2$, llamamos a la función $k(b_2, d_2)$.

Como el $x_3 = 5$ y el $y_3 = 0$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$
x_3 \cdot y_3 = 5 \cdot 0 = 0
$$

y retornamos el valor, volviendo a la llamada anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $b_2 \cdot d_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$, llamamos a la función $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$.

Como el $x_3 = 8 + 5 = 13$ y el $y_3 = 12 + 0 = 12$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$
\begin{aligned}
mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \ // \ 2 \\
&= max(len(13), len(12)) \ // \ 2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3:

$$
x_3 = \underbrace{1}_{a_3}\underbrace{3}_{b_3}, y_3 = \underbrace{1}_{c_3}\underbrace{2}_{d_3}
$$
$$
a_3 = 1, b_3 = 3, c_3 = 1, d_3 = 2
$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el x_4 y el y_4 son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$
x_4 \cdot y_4 = 1 \cdot 1 = 1
$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 3$ y el $y_4 = 2$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$
x_4 \cdot y_4 = 3 \cdot 2 = 6
$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 1 + 3 = 4$ y el $y_4 = 1 + 2 = 3$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$
x_4 \cdot y_4 = 4 \cdot 3 = 12
$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3+b_3, c_3+d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3$$
$$1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 = 156$$

Al valor retornado de $k(a_2+b_2, c_2+d_2)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_2 \cdot c_2$ y $b_2 \cdot b_2$) para obtener $a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 &= (a_2 + b_2 \cdot c_2 + d_2) - a_2 \cdot c_2 - b_2 \cdot b_2 \\ &= 60 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 1) la multiplicación

$$a_1 \cdot c_1 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_1)} + ((a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1) \cdot 10^{mitad_1}) + b_1 \cdot d_1$$
$$96 \cdot 10^2 + 60 \cdot 10^1 + 0 = 10200$$

Al valor retornado de $k(a_1+b_1, c_1+d_1)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_1 \cdot c_1$ y $b_1 \cdot b_1$) para obtener $a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1$

$$\begin{aligned} a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1 &= (a_1 + b_1 \cdot c_1 + d_1) - a_1 \cdot c_1 - b_1 \cdot b_1 \\ &= 4378 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 0) la multiplicación

$$a_1 \cdot c_1 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_1)} + ((a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1) \cdot 10^{mitad_1}) + b_1 \cdot d_1$$
$$726 \cdot 10^2 + 4378 \cdot 10^1 + 5096 = 7702896$$

Al valor retornado de $k(a_2+b_2, c_2+d_2)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_2 \cdot c_2$ y $b_2 \cdot b_2$) para obtener $a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 &= (a_2 + b_2 \cdot c_2 + d_2) - a_2 \cdot c_2 - b_2 \cdot b_2 \\ &= 58 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_2 \cdot c_2 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_2)} + ((a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2) \cdot 10^{mitad_2}) + b_2 \cdot d_2$$
$$45 \cdot 10^2 + 58 \cdot 10^1 + 16 = 5096$$

Ahora tenemos el resultado de $a_0 \cdot c_0$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_0 \cdot d_0$, llamamos a la función $k(b_0, d_0)$.

Como el x_1 y el y_1 son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_1 e y_1 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_1 &= max(len(x_1), len(y_1)) \ // \ 2 \\ &= max(len(4113), len(6555)) \ // \ 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_1 e y_1:

$$x_1 = \underbrace{41}_{a_1}\underbrace{13}_{b_1}, y_1 = \underbrace{65}_{c_1}\underbrace{55}_{d_1}$$
$$a_1 = 41, b_1 = 13, c_1 = 65, d_1 = 55$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_1 \cdot c_1$, $b_1 \cdot d_1$, y $(a_1+b_1)\cdot(c_1+d_1)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_1 \cdot c_1$ Llamando a $k(a_1, c_1)$.

Como el x_2 y el y_2 son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_2 e y_2 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_2 &= max(len(x_2), len(y_2)) \ // \ 2 \\ &= max(len(41), len(65)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_2 e y_2:

$$x_2 = \underbrace{4}_{a_2}\underbrace{1}_{b_2}, y_2 = \underbrace{6}_{c_2}\underbrace{5}_{d_2}$$
$$a_2 = 4, b_2 = 1, c_2 = 6, d_2 = 5$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_2 \cdot c_2$, $b_2 \cdot d_2$, y $(a_2+b_2)\cdot(c_2+d_2)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_2 \cdot c_2$ Llamando a $k(a_2, c_2)$.

Como el $x_3 = 4$ y el $y_3 = 6$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 4 \cdot 6 = 24$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $a_2 \cdot c_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_2 \cdot d_2$, llamamos a la función $k(b_2, d_2)$.

Como el $x_3 = 1$ y el $y_3 = 5$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 1 \cdot 5 = 5$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $b_2 \cdot d_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$, llamamos a la función $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$.

Como el $x_3 = 4 + 1 = 5$ y el $y_3 = 6 + 5 = 11$ hay un número de más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \ // \ 2 \\ &= max(len(5), len(11)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3 (como x_3 es de una cifra, completo con un cero adelante, luego $x_3 = 05$):

$$x_3 = \underbrace{0}_{a_3}\underbrace{5}_{b_3}, y_3 = \underbrace{1}_{c_3}\underbrace{1}_{d_3}$$
$$a_3 = 0, b_3 = 5, c_3 = 1, d_3 = 1$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3+b_3) \cdot (c_3+d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el x_4 y el y_4 son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 0 \cdot 1 = 0$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 5$ y el $y_4 = 1$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 5 \cdot 1 = 5$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 0 + 5 = 5$ y el $y_4 = 1 + 1 = 2$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 5 \cdot 2 = 10$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3$$
$$0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 = 55$$

Al valor retornado de $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_2 \cdot c_2$ y $b_2 \cdot b_2$) para obtener $a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 &= (a_2 + b_2 \cdot c_2 + d_2) - a_2 \cdot c_2 - b_2 \cdot b_2 \\ &= 26 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_2 \cdot c_2 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_2)} + ((a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2) \cdot 10^{mitad_2}) + b_2 \cdot d_2$$
$$24 \cdot 10^2 + 26 \cdot 10^1 + 5 = 2665$$

Ahora tenemos el resultado de $a_1 \cdot c_1$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_1 \cdot d_1$, llamamos a la función $k(b_1, d_1)$.

Como el x_2 y el y_2 son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_2 e y_2 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_2 &= max(len(x_2), len(y_2)) \ // \ 2 \\ &= max(len(13), len(55)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_2 e y_2:

$$x_2 = \underbrace{1}_{a_2}\underbrace{3}_{b_2}, y_2 = \underbrace{5}_{c_2}\underbrace{5}_{d_2}$$
$$a_2 = 1, b_2 = 3, c_2 = 5, d_2 = 5$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_2 \cdot c_2$, $b_2 \cdot d_2$, y $(a_2+b_2) \cdot (c_2+d_2)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_2 \cdot c_2$ Llamando a $k(a_2, c_2)$.

Como el $x_3 = 1$ y el $y_3 = 5$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 1 \cdot 5 = 5$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $a_2 \cdot c_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_2 \cdot d_2$, llamamos a la función $k(b_2, d_2)$.

Como el $x_3 = 3$ y el $y_3 = 5$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 3 \cdot 5 = 15$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $b_2 \cdot d_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$, llamamos a la función $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$.

Como el $x_3 = 1 + 3 = 4$ y el $y_3 = 5 + 5 = 10$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \ // \ 2 \\ &= max(len(4), len(10)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3 (como x_3 es de una cifra, completo con un cero adelante, luego $x_3 = 04$):

$$x_3 = \underbrace{0}_{a_3}\underbrace{4}_{b_3}, y_3 = \underbrace{1}_{c_3}\underbrace{0}_{d_3}$$
$$a_3 = 0, b_3 = 4, c_3 = 1, d_3 = 0$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3+b_3) \cdot (c_3+d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el $x_4 = 0$ y el $y_4 = 1$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 0 \cdot 1 = 0$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 4$ y el $y_4 = 0$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 4 \cdot 0 = 0$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 0 + 4 = 4$ y el $y_4 = 1 + 0 = 2$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 4 \cdot 1 = 4$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3$$
$$0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 0 = 40$$

Al valor retornado de $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_2 \cdot c_2$ y $b_2 \cdot b_2$) para obtener $a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 &= (a_2 + b_2 \cdot c_2 + d_2) - a_2 \cdot c_2 - b_2 \cdot b_2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_2 \cdot c_2 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_2)} + ((a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2) \cdot 10^{mitad_2}) + b_2 \cdot d_2$$
$$5 \cdot 10^2 + 20 \cdot 10^1 + 15 = 715$$

Ahora tenemos el resultado de $b_1 \cdot d_1$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_1 + b_1) \cdot (c_1 + d_1)$, llamamos a la función $k(a_1 + b_1, c_1 + d_1)$.

Ahora tenemos el resultado de $b_1 \cdot d_1$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_1 + b_1) \cdot (c_1 + d_1)$, llamamos a la función $k(a_1 + b_1, c_1 + d_1)$.

Como el $x_2 = 41 + 13 = 54$ y el $y_2 = 65 + 55 = 120$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base.

Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_2 e y_2 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_2 &= max(len(x_2), len(y_2)) \ // \ 2 \\ &= max(len(54), len(120)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_2 e y_2:

$$x_2 = \underbrace{5}_{a_2}\underbrace{4}_{b_2}, y_2 = \underbrace{12}_{c_2}\underbrace{0}_{d_2}$$
$$a_2 = 5, b_2 = 4, c_2 = 12, d_2 = 0$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_2 \cdot c_2$, $b_2 \cdot d_2$, y $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_2 \cdot c_2$ Llamando a $k(a_2, c_2)$.

Como el $x_3 = 5$ y el $y_3 = 12$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$
\begin{aligned}
mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \ // \ 2 \\
&= max(len(5), len(12)) \ // \ 2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3 (como x_3 es de una cifra, completo con un cero adelante, luego $x_3 = 05$):

$$
x_3 = \underbrace{0}_{a_3}\underbrace{5}_{b_3}, y_3 = \underbrace{1}_{c_3}\underbrace{2}_{d_3}
$$

$$
a_3 = 0, b_3 = 5, c_3 = 1, d_3 = 2
$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el x_4 y el y_4 son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$
x_4 \cdot y_4 = 0 \cdot 1 = 0
$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 5$ y el $y_4 = 2$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$
x_4 \cdot y_4 = 5 \cdot 2 = 10
$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 0 + 5 = 5$ y el $y_4 = 1 + 2 = 3$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$
x_4 \cdot y_4 = 5 \cdot 3 = 15
$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$
\begin{aligned}
a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$
a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3
$$

$$
0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 10 = 60
$$

Ahora tenemos el resultado de $a_2 \cdot c_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_2 \cdot d_2$, llamamos a la función $k(b_2, d_2)$.

Como el $x_3 = 4$ y el $y_3 = 0$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$
x_3 \cdot y_3 = 4 \cdot 0 = 0
$$

y retornamos el valor, volviendo a la llamada anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $b_2 \cdot d_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$, llamamos a la función $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$.

Como el $x_3 = 5 + 4 = 9$ y el $y_3 = 12 + 0 = 12$ uno de los números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \ // \ 2 \\ &= max(len(9), len(12)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3:

$$x_3 = \underbrace{0}_{a_3}\underbrace{9}_{b_3}, y_3 = \underbrace{1}_{c_3}\underbrace{2}_{d_3}$$
$$a_3 = 0, b_3 = 9, c_3 = 1, d_3 = 2$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el x_4 y el y_4 son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 0 \cdot 1 = 0$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 9$ y el $y_4 = 2$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 9 \cdot 2 = 18$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 0 + 9 = 9$ y el $y_4 = 1 + 2 = 3$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 9 \cdot 3 = 27$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3$$
$$0 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 18 = 108$$

Al valor retornado de $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_2 \cdot c_2$ y $b_2 \cdot b_2$) para obtener $a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2$

$$a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 = (a_2 + b_2 \cdot c_2 + d_2) - a_2 \cdot c_2 - b_2 \cdot b_2$$
$$= 48$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 1) la multiplicación

$$a_1 \cdot c_1 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_1)} + ((a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1) \cdot 10^{mitad_1}) + b_1 \cdot d_1$$
$$60 \cdot 10^2 + 48 \cdot 10^1 + 0 = 6480$$

Al valor retornado de $k(a_1 + b_1, c_1 + d_1)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_1 \cdot c_1$ y $b_1 \cdot b_1$) para obtener $a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1$

$$a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1 = (a_1 + b_1 \cdot c_1 + d_1) - a_1 \cdot c_1 - b_1 \cdot b_1$$
$$= 3100$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 0) la multiplicación

$$a_1 \cdot c_1 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_1)} + ((a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1) \cdot 10^{mitad_1}) + b_1 \cdot d_1$$
$$2665 \cdot 10^2 + 3100 \cdot 10^1 + 715 = 26960715$$

Ahora tenemos el resultado de $b_0 \cdot d_0$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_0 + b_0) \cdot (c_0 + d_0)$, llamamos a la función $k(a_0 + b_0, c_0 + d_0)$.

Como el $x_1 = 3352 + 4113 = 7465$ y el $y_1 = 2298 + 6555 = 8853$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base.

Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_1 e y_1 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$mitad_1 = max(len(x_1), len(y_1)) \ // \ 2$$
$$= max(len(7465), len(8853)) \ // \ 2$$
$$= 2$$

Ahora partimos en dos a x_1 e y_1:

$$x_1 = \underbrace{74}_{a_1}\underbrace{65}_{b_1}, y_1 = \underbrace{88}_{c_1}\underbrace{53}_{d_1}$$
$$a_1 = 74, b_1 = 65, c_1 = 88, d_1 = 53$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_1 \cdot c_1$, $b_1 \cdot d_1$, y $(a_1 + b_1) \cdot (c_1 + d_1)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_1 \cdot c_1$ Llamando a $k(a_1, c_1)$.

Como el $x_2 = 74$ y el $y_2 = 88$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_2 e y_2 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$mitad_2 = max(len(x_2), len(y_2)) \ // \ 2$$
$$= max(len(74), len(88)) \ // \ 2$$
$$= 1$$

Ahora partimos en dos a x_2 e y_2 (como x_2 es de una cifra, completo con un cero adelante, luego $x_2 = 08$):

$$x_2 = \underbrace{7}_{a_2}\underbrace{4}_{b_2}, y_2 = \underbrace{8}_{c_2}\underbrace{8}_{d_2}$$
$$a_2 = 7, b_2 = 4, c_2 = 8, d_2 = 8$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_2 \cdot c_2$, $b_2 \cdot d_2$, y $(a_2+b_2)\cdot(c_2+d_2)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_2 \cdot c_2$ Llamando a $k(a_2, c_2)$.

Como el $x_3 = 7$ y el $y_3 = 8$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 7 \cdot 8 = 56$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $a_2 \cdot c_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_2 \cdot d_2$, llamamos a la función $k(b_2, d_2)$.

Como el $x_2 = 4$ y el $y_2 = 8$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_2 \cdot y_2 = 4 \cdot 8 = 32$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_2 \cdot d_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$, llamamos a la función $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$.

Como el $x_3 = 7 + 4 = 11$ y el $y_3 = 8 + 8 = 16$ son números de más de una cifra. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \ // \ 2 \\ &= max(len(11), len(16)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3:

$$x_3 = \underbrace{1}_{a_3}\underbrace{1}_{b_3}, y_3 = \underbrace{1}_{c_3}\underbrace{6}_{d_3}$$
$$a_3 = 1, b_3 = 1, c_3 = 1, d_3 = 6$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3+b_3)\cdot(c_3+d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el $x_4 = 1$ y el $y_4 = 1$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 1 \cdot 1 = 1$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 3$ y el $y_4 = 2$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 1 \cdot 6 = 6$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 1 + 1 = 2$ y el $y_4 = 1 + 6 = 7$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 2 \cdot 7 = 14$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3+b_3, c_3+d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3$$
$$1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 = 176$$

Al valor retornado de $k(a_2+b_2, c_2+d_2)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_2 \cdot c_2$ y $b_2 \cdot b_2$) para obtener $a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 &= (a_2 + b_2 \cdot c_2 + d_2) - a_2 \cdot c_2 - b_2 \cdot b_2 \\ &= 88 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 1) la multiplicación

$$a_1 \cdot c_1 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_1)} + ((a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1) \cdot 10^{mitad_1}) + b_1 \cdot d_1$$
$$56 \cdot 10^2 + 88 \cdot 10^1 + 32 = 6512$$

Ahora tenemos el resultado de $a_1 \cdot c_1$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_1 \cdot d_1$, llamamos a la función $k(b_1, d_1)$.

Como el x_2 y el y_2 son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_2 e y_2 dividido 2, en este caso ambos tienen 2 dígitos, luego la mitad es 1.

$$\begin{aligned} mitad_2 &= max(len(x_2), len(y_2)) \ // \ 2 \\ &= max(len(65), len(53)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_2 e y_2:

$$x_2 = \underbrace{6}_{a_2}\underbrace{5}_{b_2}, y_2 = \underbrace{5}_{c_2}\underbrace{3}_{d_2}$$
$$a_2 = 6, b_2 = 5, c_2 = 5, d_2 = 3$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_2 \cdot c_2$, $b_2 \cdot d_2$, y $(a_2+b_2)\cdot(c_2+d_2)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_2 \cdot c_2$ Llamando a $k(a_2, c_2)$.

Como el $x_3 = 6$ y el $y_3 = 5$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 6 \cdot 5 = 30$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $a_2 \cdot c_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_2 \cdot d_2$, llamamos a la función $k(b_2, d_2)$.

Como el $x_3 = 5$ y el $y_3 = 3$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 5 \cdot 3 = 15$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $b_2 \cdot d_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$, llamamos a la función $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$.

Como el $x_3 = 6 + 5 = 11$ y el $y_3 = 5 + 3 = 8$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \;//\; 2 \\ &= max(len(11), len(8)) \;//\; 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3 (como x_3 es de una cifra, completo con un cero adelante, luego $y_3 = 08$):

$$x_3 = \underbrace{1}_{a_3}\underbrace{1}_{b_3}, y_3 = \underbrace{0}_{c_3}\underbrace{8}_{d_3}$$
$$a_3 = 1, b_3 = 1, c_3 = 0, d_3 = 8$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el $x_4 = 1$ y el $y_4 = 0$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 1 \cdot 0 = 0$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 1$ y el $y_4 = 8$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 1 \cdot 8 = 8$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 1 + 1 = 2$ y el $y_4 = 0 + 8 = 8$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 2 \cdot 8 = 16$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3$$
$$0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 8 = 88$$

Al valor retornado de $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_2 \cdot c_2$ y $b_2 \cdot b_2$) para obtener $a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 &= (a_2 + b_2 \cdot c_2 + d_2) - a_2 \cdot c_2 - b_2 \cdot b_2 \\ &= 43 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_2 \cdot c_2 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_2)} + ((a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2) \cdot 10^{mitad_2}) + b_2 \cdot d_2$$
$$30 \cdot 10^2 + 43 \cdot 10^1 + 15 = 3445$$

Ahora tenemos el resultado de $b_1 \cdot d_1$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_1 + b_1) \cdot (c_1 + d_1)$, llamamos a la función $k(a_1 + b_1, c_1 + d_1)$.

Ahora tenemos el resultado de $b_1 \cdot d_1$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_1 + b_1) \cdot (c_1 + d_1)$, llamamos a la función $k(a_1 + b_1, c_1 + d_1)$.

Como el $x_2 = 74 + 65 = 139$ y el $y_2 = 88 + 53 = 141$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base.

Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_2 e y_2 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_2 &= max(len(x_2), len(y_2)) \ // \ 2 \\ &= max(len(139), len(141)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_2 e y_2:

$$x_2 = \underbrace{13}_{a_2}\underbrace{9}_{b_2}, y_2 = \underbrace{14}_{c_2}\underbrace{1}_{d_2}$$
$$a_2 = 13, b_2 = 9, c_2 = 14, d_2 = 1$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_2 \cdot c_2$, $b_2 \cdot d_2$, y $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_2 \cdot c_2$ Llamando a $k(a_2, c_2)$.

Como el $x_3 = 13$ y el $y_3 = 14$ son números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \ // \ 2 \\ &= max(len(13), len(14)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3:

$$x_3 = \underbrace{1}_{a_3}\underbrace{3}_{b_3}, y_3 = \underbrace{1}_{c_3}\underbrace{4}_{d_3}$$
$$a_3 = 1, b_3 = 3, c_3 = 1, d_3 = 4$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el $x_4 = 1$ y el $y_4 = 1$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 1 \cdot 1 = 1$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 3$ y el $y_4 = 4$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 3 \cdot 4 = 12$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 1 + 3 = 4$ y el $y_4 = 1 + 4 = 5$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 4 \cdot 5 = 20$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3$$
$$1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 12 = 182$$

Ahora tenemos el resultado de $a_2 \cdot c_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_2 \cdot d_2$, llamamos a la función $k(b_2, d_2)$.

Como el $x_3 = 9$ y el $y_3 = 1$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_3 \cdot y_3 = 9 \cdot 1 = 9$$

y retornamos el valor, volviendo a la llamada anterior (subíndice 2).

Ahora tenemos el resultado de $b_2 \cdot d_2$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_2 + b_2) \cdot (c_2 + d_2)$, llamamos a la función $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$.

Como el $x_3 = 13 + 9 = 22$ y el $y_3 = 14 + 1 = 15$ uno de los números tiene más de una cifra, no entramos en el caso base. Se calcula la mitad a partir del máximo de dígitos entre x_3 e y_3 dividido 2, en este caso ambos tienen 4 dígitos, luego la mitad es 2.

$$\begin{aligned} mitad_3 &= max(len(x_3), len(y_3)) \ // \ 2 \\ &= max(len(22), len(15)) \ // \ 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora partimos en dos a x_3 e y_3:

$$x_3 = \underbrace{2}_{a_3}\underbrace{2}_{b_3}, y_3 = \underbrace{1}_{c_3}\underbrace{5}_{d_3}$$
$$a_3 = 2, b_3 = 2, c_3 = 1, d_3 = 5$$

Necesitamos calcular las siguientes multiplicaciones: $a_3 \cdot c_3$, $b_3 \cdot d_3$, y $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$. Para ello llamamos recursivamente a la funcion k, primero para $a_3 \cdot c_3$ Llamando a $k(a_3, c_3)$.

Como el x_4 y el y_4 son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 2 \cdot 1 = 2$$

Retornamos el valor a la llamada anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $a_3 \cdot c_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $b_3 \cdot d_3$, llamamos a la función $k(b_3, d_3)$.

Como el $x_4 = 2$ y el $y_4 = 5$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 2 \cdot 5 = 10$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Ahora tenemos el resultado de $b_3 \cdot d_3$, para seguir con la siguiente multiplicación, $(a_3 + b_3) \cdot (c_3 + d_3)$, llamamos a la función $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$.

Como el $x_4 = 2 + 2 = 4$ y el $y_4 = 1 + 5 = 6$ son números de una cifra, entramos en el caso base, ergo realizamos la multiplicación normal.

$$x_4 \cdot y_4 = 4 \cdot 6 = 24$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 3).

Al valor retornado de $k(a_3 + b_3, c_3 + d_3)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_3 \cdot c_3$ y $b_3 \cdot b_3$) para obtener $a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3$

$$\begin{aligned} a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3 &= (a_3 + b_3 \cdot c_3 + d_3) - a_3 \cdot c_3 - b_3 \cdot b_3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 2) la multiplicación

$$a_3 \cdot c_3 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_3)} + ((a_3 \cdot d_3 + b_3 \cdot c_3) \cdot 10^{mitad_3}) + b_3 \cdot d_3$$
$$2 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10^1 + 10 = 330$$

Al valor retornado de $k(a_2 + b_2, c_2 + d_2)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_2 \cdot c_2$ y $b_2 \cdot b_2$) para obtener $a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2$

$$\begin{aligned} a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 &= (a_2 + b_2 \cdot c_2 + d_2) - a_2 \cdot c_2 - b_2 \cdot b_2 \\ &= 139 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 1) la multiplicación

$$a_1 \cdot c_1 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_1)} + ((a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1) \cdot 10^{mitad_1}) + b_1 \cdot d_1$$
$$182 \cdot 10^2 + 139 \cdot 10^1 + 9 = 19599$$

Al valor retornado de $k(a_1 + b_1, c_1 + d_1)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_1 \cdot c_1$ y $b_1 \cdot b_1$) para obtener $a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1$

$$\begin{aligned} a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1 &= (a_1 + b_1 \cdot c_1 + d_1) - a_1 \cdot c_1 - b_1 \cdot b_1 \\ &= 9642 \end{aligned}$$

Retornamos al llamado anterior (subíndice 0) la multiplicación

$$a_1 \cdot c_1 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_1)} + ((a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1) \cdot 10^{mitad_1}) + b_1 \cdot d_1$$
$$6512 \cdot 10^4 + 9642 \cdot 10^2 + 3445 = 66087645$$

Al valor retornado de $k(a_0 + b_0, c_0 + d_0)$ le restamos las multiplicaciones obtenidas anteriormente ($a_0 \cdot c_0$ y $b_0 \cdot b_0$) para obtener $a_0 \cdot d_0 + b_0 \cdot c_0$

$$\begin{aligned} a_0 \cdot d_0 + b_0 \cdot c_0 &= (a_0 + b_0 \cdot c_0 + d_0) - a_0 \cdot c_0 - b_0 \cdot b_0 \\ &= 31424034 \end{aligned}$$

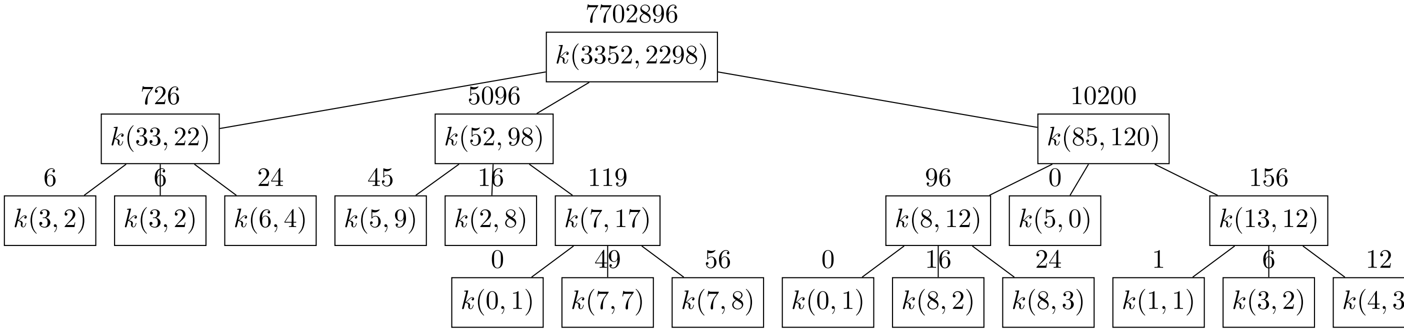
Retornamos al llamado anterior (subíndice 1) la multiplicación

$$a_0 \cdot c_0 \cdot 10^{(2 \cdot mitad_0)} + ((a_0 \cdot d_0 + b_0 \cdot c_0) \cdot 10^{mitad_0}) + b_0 \cdot d_0$$

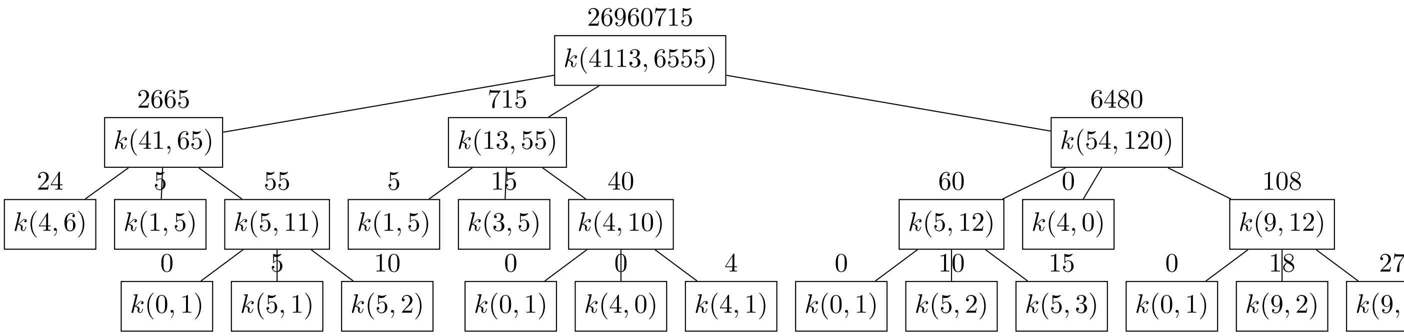
$$7702896 \cdot 10^8 + 31424034 \cdot 10^4 + 26960715 = 7{,}706038673 \times 10^{14}$$

1.2.3. Árbol de recursión

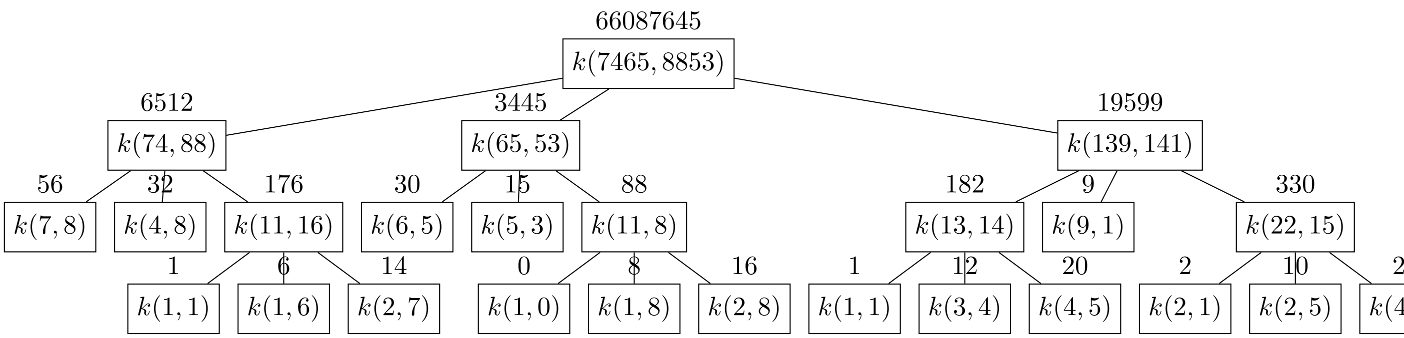
Subarbol izquierdo ($a_0 \cdot c_0$)



Subarbol medio ($b_0 \cdot d_0$)



Subarbol derecho ($(a_0 + b_0) \cdot (c_0 + d_0)$)



1.2.4. Cantidad de sumas y multiplicaciones computadas con el algoritmo

Para contar la cantidad de sumas y multiplicaciones, me baso en la premisa de que, el número de sumas y multiplicaciones en el caso base es de 0 y 1 respectivamente, y de que el número de sumas y multiplicaciones que se realizan si no se entra en el caso base es de 6 y 2 respectivamente (se realizan 6 sumas para obtener $(a_i d_i + b_i ci$ porque se obtiene de hacer $k(a_i + b_i, c_i + d_i) - a_i ci - b_i d_i)$ y por lo tanto, ayudándome con el árbol de recursión concluyo:

	Hoja	Padre	Raíz
Multiplicaciones	1	2	2
Sumas	0	6	6

Cuadro 1.1: *Cantidad de sumas y multiplicaciones según los distintos componentes del árbol de recursión*

Luego, contando la cantidad de los distintos componentes que hay en el árbol de recursión concluyo:

Hojas	Padres	Raíz
49	22	1

Cuadro 1.2: *Cantidad de componentes en el árbol de recursión*

Usando los datos de la tabla 1.1 y la tabla 1.2, se puede decir que:

Sumas	Multiplicaciones
138	95

Cuadro 1.3: *Cantidad de sumas y multiplicaciones totales realizadas con el algoritmo*

1.2.5. Multiplicación usando el método tradicional

$$
\begin{array}{rrll}
 & 33524113 & & \\
\times & 22986555 & & \\
\hline
 & 1676205655 & (=33524113 \times 5) & (1) \\
+ & 1676205655 & (=33524113 \times 50) & (2) \\
+ & 1676205655 & (=33524113 \times 500) & (3) \\
+ & 201144678 & (=33524113 \times 6000) & (4) \\
+ & 268192904 & (=33524113 \times 80000) & (5) \\
+ & 301717017 & (=33524113 \times 900000) & (6) \\
+ & 67048226 & (=33524113 \times 2000000) & (7) \\
+ & 67048226 & (=33524113 \times 20000000) & (8) \\
\hline
 & 7{,}706038673 \times 10^{14} & (=33524113 \times 22986555) &
\end{array}
$$

1.2.6. Cantidad de sumas y multiplicaciones computadas con el método tradicional

Tanto el multiplicando como el multiplicador son enteros de 8 dígitos. En el método tradicional, a cada dígito del multiplicador le corresponde multiplicar un dígito del multiplicando, por ello, en la columna de Çantidad de multiplicaciones”todas las celdas tienen el mismo valor (8). Para el caso de la columna de Çantidad de sumas”, los valores corresponden a la cantidad de veces que se sumó la unidad del resultado de una multiplicación con el carry de la suma anterior.

Multiplicación (1.2.5)	Cantidad de mutliplicaciones	Cantidad de sumas
(1)	8	5
(2)	8	5
(3)	8	5
(4)	8	5
(5)	8	5
(6)	8	5
(7)	8	1
(8)	8	1

Cuadro 1.4: *Cantidad de sumas y multiplicaciones computadas utilizando el método tradicional (iteración por iteración).*

Sumando las cantidades de multiplicaciones y sumas de cada iteración, más la suma final de los resultados concretos de las iteraciones, se obtiene el siguiente resultado:

Sumas	Multiplicaciones
39	64

Cuadro 1.5: *Cantidad de sumas y multiplicaciones totales computadas con el método tradicional*

1.3. Conclusiones

1.3.1. Cantidad de sumas y multiplicaciones computadas con el algoritmo y relación con la complejidad temporal

Analizando la cantidad de sumas y multiplicaciones computadas en el algoritmo, se puede concluir que, en este caso, el multiplicando y el multiplicador no son lo suficientemente grandes como para que sea conveniente emplear éste algoritmo para realizar su multiplicación. A priori se puede decir que éste algoritmo es óptimo y eficiente (porque aún no se comparó con otro, más adelante en este trabajo lo compararemos con el método tradicional y concluiremos si sigue siendo eficiente o no).

Teorema maestro

$$\boxed{T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \mathcal{O}(n^c)}$$

$$\begin{array}{rcl} & < & \rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n^c) \\ Si : \log_b(a) & = & C \rightarrow \mathcal{O}(n^c \log_b(n)) = \mathcal{O}((n^c \log(n)) \\ & > & \rightarrow \mathcal{O}(n^{\log_b(a)}) \end{array}$$

Análisis de complejidad del algoritmo de Karatsuba con el teorema maestro

Ya que las sumas, las restas, y los desplazamientos de dígitos (multiplicaciones por potencias de la base) en el caso base del algoritmo de Karatsuba requieren tiempos proporcionales a n, su coste se hace insignificante a medida que crece n. Precisamente, si $T(n)$ denota el número total de operaciones elementales que el algoritmo realiza cuando se multiplican dos números de n dígitos, entonces podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
a = 3 &\quad \because T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ es llamada 3 veces en el algoritmo} \\
b = 2 &\quad \because \text{ se divide en 2 el arreglo inicial} \\
c = 1 &\quad \because \text{ calcular el resultado de la expresión es} \mathcal{O}(n)
\end{aligned}
$$

Reemplazando en el Teorema Maestro:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n)$$

luego $\log_b(a) = 1{,}584962501 > c = 1$ entonces obtenemos la cota superior asintótica:

$$\boxed{T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)}) \approxeq \mathcal{O}(n^{1{,}58})}$$

Esto quiere decir que éste algoritmo es una mejor opción que el del método tradicional (teóricamente, pues $n^{1{,}58} < n^2$).

1.3.2. Comparación de método tradicional y algoritmo

Cant. de Operaciones	Algoritmo de Karatsuba	Método tradicional
Sumas	138	39
Multiplicaciones	95	64

Cuadro 1.6: *Comparación de cantidad de opearciones (sumas y multiplicaciones) computadas entre el algoritmo de Karatsuba y el método tradicional*

Analizando la tabla 1.6 de arriba se puede observar que el algoritmo de Karatsuba tiene una cantidad de operaciones mayor que el método tradicional tanto en multipliaciones como en sumas. Éste resultado refuerza lo concluido en la sección 1.3.1. Efectivamente no es conveniente utilizar el algoritmo de Karatsuba por sobre el método tradicional en este caso.

Se observa que, para un n suficientemente grande, el algoritmo de Karatsuba realizará menos desplazamientos y sumas de un solo dígito que la multiplicación a mano, incluso cuando su caso base use más sumas y desplazamientos que la fórmula sencilla. Para valores pequeños de n, sin embargo, los desplazamientos y operaciones de suma pueden hacerlo ir más lentamente que el método tradicional.

Por otro lado si bien ambos algoritmos son óptimos, pero parece que el método tradicional es más eficiente en la multiplicación dada su menor cantidad de operaciones.

1.3.3. ¿Por qué el algoritmo de Karatsuba es de división y conquista?

El algoritmo de Karatsuba se puede decir que es de división y conquista porque, un algoritmo de éste tipo separa un problema en subproblemas que se parecen al problema original, de manera recursiva resuelve los subproblemas y, por último, combina las soluciones de los subproblemas para resolver el problema original. Como divide y vencerás resuelve subproblemas de manera recursiva, cada subproblema debe ser más pequeño que el problema original, y debe haber un caso base para los subproblemas. Debes pensar que los algoritmos de divide y vencerás tienen tres partes:

1. Divide: el problema en un número de subproblemas que son instancias más pequeñas del mismo problema.
2. Vence: los subproblemas al resolverlos de manera recursiva. Si son los suficientemente pequeños, resuelve los subproblemas como casos base.
3. Combina: las soluciones de los subproblemas en la solución para el problema original.

Y este algortimo divide los números a multiplicar en 2, y así recursivamente hasta que se llega a un número muy pequeño (una cifra específicamnete), en el cual se resuelve el problema. Y luego se van combinando los resultados de los subproblemas para resolver el problema original.

Capítulo 2

Cuestión de complejidad...

2.1. Objetivos

Dada la siguiente relación de recurrencia

$$a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \mathcal{O}(c)$$

Con:

a : 1 + (los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 9)
b : 2 + (los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7)
c : "n" si su padrón es múltiplo de 4,
sino "$n \log(n)$" si su padrón es múltiplo de 3,
sino "n2"

Se pide:

1. Responda y complete: ¿Qué le falta a la relación de recurrencia para que se pueda aplicar el teorema maestro?
2. Calcular la complejidad temporal utilizando el teorema maestro.
3. Explique paso a paso cómo llega a la misma.

2.2. Resultados

2.2.1. Preliminar

Dada la siguiente relación de recurrencia

$$aT\left(\frac{n}{b}\right) + \mathcal{O}(c)$$

Con:

a : 1 + (los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 9)
b : 2 + (los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7)
c : "n" si su padrón es múltiplo de 4,
sino "$n \log(n)$" si su padrón es múltiplo de 3,
sino "n^2"

Con mi padrón: 106223, las letras serían

$$a = 1 + (10 \bmod 9) = 2$$
$$b = 2 + (10 \bmod 7) = 5$$
$$c = 106223 \bmod 3 \neq 0, 106223 \bmod 4 \neq 0 \Rightarrow c = n^2$$

Luego reemplazando los valores la relación de recurrencia queda:

$$2T\left(\frac{n}{5}\right) + \mathcal{O}(n^2)$$

2.2.2. Verificación de caso base constante de la relación de recurrencia

Para que a la relación de recurrencia se le pueda aplicar el teorema maestro, lo que hace falta es que el caso base sea constante, es decir:

$$T(0) = cte$$

2.2.3. Cálculo de la complejidad temporal de la relación de recurrencia

Teorema maestro

Sean $a \geq 1$ y $b \geq 1$ constantes, $f(n)$ una función, y tenemos una función de recurrencia $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ con $T(0) = cte$. Entonces:

1. Si $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)-e})$, $e > 0 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$.
2. Si $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log(n))$.
3. Si $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+e})$, $e > 0 \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$.

   Y $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, $c < 1$, y $n >>$

Aplicación del teorema maestro

Primero identificamos las constantes a, b y c de la relación de recurrencia:

$$T(n) = \underbrace{2}_{a} T\left(\frac{n}{\underbrace{5}_{b}}\right) + \mathcal{O}(\underbrace{n^2}_{c})$$

$$a = 2$$
$$b = 5$$
$$c = n^2$$

verifico que $a = 2 \geq 1$ y $b = 5 \geq 1$ son constantes, y que $f(n) = n^2$ es una función, además $T(0) = cte$ es un caso base constante.

Ahora que verificamos que se le puede aplicar el teorema maestro, intento primero comprobar la primer condición, :

$$\mathcal{O}(n^{\log_b(a)-e}) \approx \mathcal{O}(n^{0{,}43-e}), e > 0$$

$$0{,}43 - e < 0 \Rightarrow \text{ no se cumple porque en ese caso no podría acotar a } n^2$$

Se prueba el siguiente caso:

$$\Theta(n^{\log_b(a)}) \approx \Theta(n^{0,43})$$

$$0{,}43 < 2 \Rightarrow \text{ no se cumple porque en ese caso no podría acotar a } n^2$$

Ahora el último caso:

$$\Omega(n^{\log_b(a)+e}) \approx \Omega(n^{0,43+e})$$

$$0{,}43 + e > 0 \Rightarrow \text{ este caso se cumple, porque puede acotar a } n^2$$

Finalmente:

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$$