

1 Espacios Vectoriales

Definición de espacio vectorial

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V (vectores) en el que están definidas una ley de composición interna denominada *suma*, que a cada par de elementos u, v de V asocia un elemento w de V denotado $w = u + v$, y una ley de composición externa denominada *producto por escalares*, que a cada número $\alpha \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) (escalares) y a cada elemento u de V asigna un elemento $v = \alpha u$, que verifican las siguientes condiciones:

- 1) **Conmutatividad:** $u + v = v + u, \forall u, v, w \in V$
 - 2) **Asociatividad:** $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$
 - 3) \exists **Elemento Neutro**, $0_V \in V$, tal que $u + 0_V = u, \forall u \in V$
 - 4) **Para cada** $u \in V \exists$ **un opuesto**, denotado $-u$, tal que $u + (-u) = 0_V$
 - 5) **Distributividad respecto de los escalares:** $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall u \in V$
 - 6) **Distributividad respecto de los vectores:** $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in K$ y $u, v \in V$
 - 7) **Asociatividad respecto de los escalares:** $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall u \in V$
 - 8) $1u = u, \forall u \in V$
- V es \mathbb{R} -espacio vectorial $\equiv V$ es un espacio vectorial sobre los reales.
 - V es \mathbb{C} -espacio vectorial $\equiv V$ es un espacio vectorial sobre los complejos.

Propiedades Elementales

- 1) El elemento neutro $0 \in V$ es único; también es único el opuesto de un elemento u
- 2) $0u = 0 \forall u \in V$ y $\alpha 0 = 0$ para todo escalar α
- 3) Si $\alpha u = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ó $u = 0$
- 4) Si $u \neq 0, \alpha u = \beta u \Rightarrow \alpha = \beta$; si $\alpha \neq 0, \alpha u = \alpha v \Rightarrow u = v$
- 5) $(-1)u = -u \forall u \in V$

Ejemplos

$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n) \quad (1)$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \dots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I \quad (5)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in I \quad (6)$$

Todo espacio vectorial complejo es a su vez un espacio vectorial real si se considera la misma operación de suma y el producto por escalares se restringe a escalares reales.

1.1 Subespacios

Definición de subespacio

Un subconjunto S de un espacio vectorial V es subespacio de V si S es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V . Para concluir que un subconjunto S de V es subespacio deberíamos probar que:

- 1) S no es vacío.
- 2) La suma y el producto definidos en V son operaciones cerradas en S , es decir, $u + v$ es elemento de S si u y v son elementos de S , y αu es elemento de S si α es un escalar arbitrario y u es un elemento de S (en caso contrario la suma no sería una ley de composición interna o el producto por escalares no sería una ley de composición externa)
- 3) Se verifican las propiedades 1 a 8 de la Definición de espacio vectorial.

Sin embargo no es necesario probar el tercer punto debido al siguiente teorema

Teorema 1 (teorema del subespacio)

Sea S un subconjunto de un espacio vectorial $V \Rightarrow S$ es subespacio de $V \Leftrightarrow$ se verifican las siguientes condiciones:

1. $S \neq \emptyset$
2. Si $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$
3. Si $u \in S$ y α es un escalar arbitrario, $\alpha u \in S$

Ejemplos

- $S = \{0\} \wedge S = V \rightarrow$ subespacios triviales.
- Toda recta S que pasa por el origen es subespacio.

Apuntes

- En todos los casos, la suma de elementos de un conjunto V y el producto de un elemento de ese conjunto por un número, siempre daba como resultado otro elemento de ese conjunto.
- El polinomio nulo no tiene grado.
- Dos polinomios son iguales cuando todos sus coeficientes son iguales $P = Q \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = 1, \dots, n$
- EJERCICIOS 1-4