1 Espacios Vectoriales

Definicion

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V (vectores) en el que estan definidas una ley de composición interna denominada *suma*, que a cada par de elementos u, v de V asocia un elemento w de V denotado $w = u + v$, y una ley de composición externa denominada *producto por escalares*, que a cada numero $\alpha \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) (escalares) y a cada elemento u de V asigna un elemento $v = \alpha u$ si satisface los diez axiomas siguientes que se enuncian en tres grupos.

Axiomas de clusura

Axioma 1. CLAUSURA RESPECTO DE LA ADICION. *A todo par de elementos* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *corresponde un elemento unico de* $\boldsymbol{V}$ *llamado suma de* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$*, designado por*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$

Axioma 2. CLAUSURA RESPECTO DE LA MULTIPLICACION POR NUMEROS REALES. *A todo* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *y todo numero real* $\boldsymbol{a}$ *corresponde un elemento de* $\boldsymbol{V}$ *llamado producto de* $\boldsymbol{a}$ *por* $\boldsymbol{x}$*, designado*

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$$

Axiomas para la adicion

Axioma 3. LEY CONMUTATIVA. *Para todo* $\boldsymbol{x}$ *y todo* $\boldsymbol{y}$ *de* $\boldsymbol{V}$*, tenemos que*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$$

Axioma 4. LEY ASOCIATIVA. *Cualesquiera sean* $\boldsymbol{x}$*,* $\boldsymbol{y}$*,* $\boldsymbol{z}$ *de* $\boldsymbol{V}$*, tenemos que*

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$$

Axioma 5. EXISTENCIA DE ELEMENTO CERO. *Existe un elemento en* $\boldsymbol{V}$*, designado con el simbolo* O_v *tal que*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{O_v} = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}.$$

Axioma 6. EXISTENCIA DE OPUESTOS. *Para todo* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{V}$*, el elemento* $(\boldsymbol{-1})\boldsymbol{x}$ *tiene la propiedad*

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O_v}$$

Axiomas para la multiplicacio por numeros

Axioma 7. LEY ASOCIATIVA. *Para todo* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *y todo par de numeros reales* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$*, tenemos*

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{x}$$

Axioma 8. LEY DISTRIBUTIVA PARA LA ADICION EN V. *Para todo* $\boldsymbol{x}$*y todo* $\boldsymbol{y}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *y todo numero real* $\boldsymbol{a}$*, tenemos*

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y}$$

Axioma 9. LEY DISTRIBUTIVA PARA LA ADICION DE NUMEROS. *Para todo* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *y todo par de numeros reales* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$*, tenemos*

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}$$

Axioma 10. EXISTENCIA DE ELEMENTO IDENTICO. *Para todo* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{V}$*, tenemos*

$$\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

Consecuencias elementales de los axiomas

Teorema 1.1. UNICIDAD DEL ELEMENTO CERO. *En cualquier espacio lineal existe un elemento cero y solo uno.*

Demostracion. El axioma 5 nos asegura que existe por lo menos un elemento cero. Supongamos que existan dos, sean O_1 y O_2. Haciendo $x = O_1$, y $O = O_2$ en el axioma 5, obtenemos $O_1 + O_2 = O_1$. Analogamente, haciendo $X = O_2$ y $O = O_1$, encontramos $O_2 + O_1 = O_2$. Pero $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$, por la ley conmutativa, asi que $O_1 = O_2$

Teorema 1.2. UNICIDAD DE ELEMENTOS. *En cualquier espacio lineal todo elemento tiene exactamente un opuesto. Esto es, para todo* $\boldsymbol{x}$ *existe un* $\boldsymbol{y}$*, y solo uno tal que* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{O}$.

Demostracion. El axioma 6 nos dice que cada $\mathbf{x}$ tiene por lo menos un opuesto, a saber $\boldsymbol{(-1) \cdot x}$. Supongamos $\boldsymbol{y_2}$ a los dos miembros de la primera igualdad y aplicando los axiomas 5, 4, y 3, obtenemos que

$$\boldsymbol{y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_1}$$

y

$$\boldsymbol{y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1}$$

Teorema 1.3. *En un espacio lineal, designemos con* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *dos elementos cualesquiera y con* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *dos escalares cualesquiera. Tenemos entonces las pripiedades siguientes*

(a) $0 \cdot x = O$.

(b) $a \cdot O = O$.

(c) $(-a) \cdot x = -(a \cdot x) = a \cdot (-x)$.

(d) Si $a \cdot x = O$, entonces $a = 0$ o $x = O$, o los dos.

(e) Si $a \cdot x = a \cdot y$ y $a \neq 0$ entonces $x = y$.

(f) Si $a \cdot x = b \cdot x$ y $x \neq O$ entonces $a = b$.

(g) $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$.

(h) $x + x = 2 \cdot x$, $x + x + x = 3 \cdot x$, y en general, $\sum_{i=1}^{n} x = n \cdot x$.

Demostracion de a). Sea $z = 0x$. Deseamos demostrar que $z = O$. Sumando z a si mismo y aplicando el axioma 9, encontramos que

$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z$$

Sumando ahora $-z$ a ambos miembros y obtenemos $z = O$.
Demostracion de b). Sea $z = aO$, sumar z a su mismo, y aplicar el axioma 8.
Demostracion de c). Sea $z = (-a)x$. Sumando z a ax y aplicando el axioma 9, encontramos que

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = O$$

asi que z es el opuesto de $ax, z = -(ax)$. Analogamente, si sumamos $a(-x)$ a ax y aplicamos el axioma 8 y la propiedad b), encontramos que $a(-x) = -(ax)$.

Ejemplos

$$(x_1, ..., x_n) + (x_1', ..., x_n') = (x_1 + x_1', ..., x_n + x_n') \tag{1}$$

$$\alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & ... & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & ... & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & ... & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & ... & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & ... & \alpha a_{nm} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I \tag{5}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in I \tag{6}$$

Todo espacio vectorial complejo es a su vez un espacio vectorial real si se considera la misma operacionn suma y el producto por escalares se restringe a escalares reales.

1.1 Subespacios

Definición de subespacio

Un subconjunto S de un espacio vectorial V es subespacio de V si S es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V. Para concluir que un subconjunto S de V es subespacio deberiamos probar que:

1) S no es vacío.

2) La suma y el producto definidos en V son operaciones cerradas en S, es decir, $u+v$ es elemento de S si u y v son elementos de S, y αu es elemento de S si α es un escalar arbitrarioy u es un elemento de S (en caso contrario la suma no sería una ley de composición interna o el producto por escalares no sería una ley de composición externa)

3) Se verifican las propiedades 1 a 8 de la **??**.

Sin embargo no es necesario probar el tercer punto devido al siguiente teorema

Teorema (teorema del subespacio)

Sea S un subconjunto de un espacio vectorial $V \Rightarrow S$ es subespacio de $V \Leftrightarrow$ se verifican las siguientes condiciones:

1. $S \neq \emptyset$
2. *Si* $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$
3. *Si* $u \in S$ *y* α *es un escalar arbitrario,* $\alpha u \in S$

Ejemplos

- $S = \{0\} \wedge S = V \rightarrow$ subespacios triviales.
- Toda recta S que pasa por el origen es subespacio.

Apuntes

- En todos los casos, la suma de elementos de un conjunto V y el producto de un elemento de ese conjunto por un numero, siempre daba como resultado otro elemento de ese conjunto.
- El polinomio nulo no tiene grado.
- Dos polinomios son iguales cuando todos sus coeficientes son iguales $P = Q \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = 1, ..., n$
- EJERCICIOS 1-4

2 Combinaciones Lineales

Dados $v_1, v_2, ..., v_r$, vectores de un espacio vectorial V, una *combinación lineal* de ellos una expresión de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r$$

con $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ escañares. Por otra parte, se dice que un vector $v \in V$ es *combinación lineal de (o que depende linealmente de)* $v_1, v_2, ..., v_r$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ tal que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r$

Ejemplos

- El vector nulo es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_r \in V$, pues $0 = 0v_1, 0v_2, ..., 0v_r$.
- En $\mathbb{R}, w = (1, 1, 1)$ es combinación lineal de $v_1 = (2, 1, 3)$ y $v_2 = (1, 0, 2)$ pues $w = 1v_1 + (-1)v_2$. Asimismo, $(2, 2, 2)$ es combinación lineal de $(1, 1, 1)$ ya que $(2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$.
- En $\mathbb{C}, w = (1 + i, 2)$ es combinación lineal de $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (0, 1)$, pues $w = (1 + i)v_1 + 2v_2$

Dados los vectores $v_1, ..., v_k$ se denomina $gen\{v_1, ..., v_r\}$ al conjunto de todas sus posibles combinaciones lineales. Es decir,

$$gen\{v_1, ..., v_r\} = \{v \in V : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r\} \tag{7}$$

Teorema 1.5. Dados $v_1, ..., v_r \in V, gen\{v_1, ..., v_r\}$ es *subespacio del espacio vectorial* V. Al subespacio $S = gen\{v_1, ..., v_r\}$ se lo denomina *subespacio generado* por los vectores $v_1, ..., v_r$ y a estos últimos *generadores* de S. Se dice que un subespacio S de un espacio vectorial V está generado por los vectores $v_1, ..., v_r \leftrightarrow S = S = gen\{v_1, ..., v_r\}$. En esta situación se dice que $\{v_1, ..., v_r\}$ es un *conjunto generador* de S y que S es un subespacio *finitamente generado.*

Ejemplos

- $\mathbb{R}^n = gen\{e_1, ..., e_n\}$ con $e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$.
- $\mathbb{C}^n = gen\{e_1, ..., e_n\}$ con $e_1, ..., e_n$ definidos anteriormente.
- $\mathbb{P}_n = gen\{1, t, ..., t^n\}$.
- $\mathbb{C}^{2\times 2} = gen\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ con

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

2.1 Conjuntos Linealmente Independientes y Bases

3 Conjuntos Dependientes e Independientes en un Espacio Lineal

Definicion

Un conjunto S de elementos de un espacio lineal V se llama *dependiente* si existe un conjunto finito de elementos distintos de S, $x_1, ..., x_k$ y un correspondiente conjunto de escalares $c_1, ..., c_k$, no todos cero, tales que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = 0 \tag{9}$$

El conjunto S se llama *indepentiende* si no es *dependiente*. En tal caso, cualesquiera que sean los elementos distintos $x_1, ..., x_k$ de S y los escalares $c_1, ..., c_k$,

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_k = 0 \tag{10}$$

Ejemplos

- Los elementos de un conjunto indepediente se llaman elementos independientes.
- Si un subconjunto T de un conjunto S es dependiente, el mismo S es dependiente. Esto es logicamente equivalente a la afirmacion de que todo subconjunto de un conjunto independiente es independiente.
- Si un elemento de S es el producto de otro por un escalar, S es dependiente.
- Si $O \in S \Rightarrow S$ es dependiente.
- El conjunto vacio es independiente.

Teorema 1.6. Sea $S = \{x_1, ..., x_k\}$ un *conjuntoindependiente* que consta de k elementos de un espacio lineal V y sea $L(s)$ el *subespacio* generado por S. Entonces todo cojunto de $k+1$ elementos de $L(S)$ es *dependiente*.

Demostracion. La demostracion es por induccion sobre k, numero de elementos de S. Supongamos primero que $k = 1$. Entonces, por hipotesis, S contiene un solo elemento x_1 siendo $x_1 \neq O$ puesto que S es independiente. Ahora tomemos en $L(s)$ dos elementos distintos y_1 e y_2. Entonces, cada uno de estos elementos es un escalar multiplicado por x_1, sea $y_1 = c_1 x_1$ e $y_2 = c_2 x_2$, en donde c_1 y c_2 no son ambos cero. Obetenemos

$$c_2 y_1 - c_1 y_2 = O$$

Por lo tanto y_1 e y_2 son dependientes, qeudando asi demostrado el teorema cuando $k = 1$. Supongamos ahora que el teorema es cierto para $k-1$ y demostremos que tambien lo es para k. Tomemos un conjunto de $k+1$ elementos en $L(S)$, sea $T = \{y_1, ---, y_{k+1}\}$. Queremos probar que T es dependiente. Puesto que cada elemento y_i esta contenido en $L(S)$, podemos escribir

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j, \forall i = 1, ..., k+1 \tag{11}$$

Examinaremos todos los escalares a_{ij} que multiplican a x_1 y, para ello, consideremos dos casos en la demostracion.

CASO 1. $a_{i1} = 0, \forall i = 1, ..., k+1$. En este caso (11), no incluye a x_1, asi cada y_1 en T esta en la envolvente lineal del conjunto $S' = \{x_2, ..., x_k\}$. Pero S' es independiente y contiene $k-1$ elementos. Por induccion y para $k-1$, el teorema es cierto, siendo por lo tanto, T dependiente.

CASO 2. *No son cero todos los escalares* a_{i1}. Suponemos que $a_{11} \neq 0$. Tomando $i = 1$ en (11) y multiplicando los dos miembros por c_i, siendo $c_i = a_{i1}/a_{11}$, obtenemos

$$c_i y_1 = a_{i1} x_1 + \sum_{j=2}^{k} c_i a_{1j} x_j. \tag{12}$$

Si a (12) le restamos (11), resulta

$$c_i y_1 - y_i = \sum_{j=2}^{k} (c_i a_{1j} - a_{ij}) x_j, \forall i = 2, ..., k+1$$

Esta ecuacion expresa cada uno de los elementos $c_i y_1 - y_i$ como una combinacion lineal de los $k-1$ elementos independientes $x_2, ..., x_k$. Por induccion, los k elementos $c_i y_1 - y_i$ deben ser dependientes. En consecuencia, para cualquier eleccion de escalares $t_2, ..., t_{k+1}$, no son todos cero, tenemos

$$\sum_{i=2}^{k+1} t_i (c_i y_1 - y_i) = O,$$

$$(\sum_{i=2}^{k+1} t_i c_i) y_1 - \sum_{i=2}^{k+1} t_i y_i = O$$

Esto es una combinacion de $y_1, ..., y_{k+1}$, que representa el vector cero, de esta manera los elementos $y_1, ..., y_{k+1}$ deben ser dependientes, completando asi la demostracion.

3.1 Bases y Dimensiones

Definicion

Un conjunto finito S de elementos de un espacio vectorial V se llama **base finita** de V si S es independiente y genera V. El espacio V es de *dimension finita* si tiene una base finita. De otro modo, V es de infinitas dimensiones.

Teorema 1.7. *Sea V un espacio lineal de dimension finita. Entonces toda base finita de V tiene el mismo numero de elementos.*

Demostracion. Sean S y T dos bases finitas de V. Supongamos que S y T constan respectivamente de k y m elementos. Puesto que S es independiente y genera V, el teorema 1.66 nos dice que todo conjunto de $k+1$ elementos de V es dependiente. Por consiguiente, todo conjunto de mas de k elementos de V es dependiente. Ya que T es un conjunto indeoendiente, debe ser $m \leq k$. El mismo razonamiento con S y T intercambiadas prueba que $k \leq m$. Por lo tanto $k = m$.

Definicion

Si un espacio lineal V tiene una base de n elementos, el entero n se llama *dimension* de V. Escribimos $n = dim(V)$.

Ejemplos

- Bases canonicas
  - $\varepsilon_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $\varepsilon_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $\varepsilon_{\mathbb{P}_2} = \{1, x, x^2\}$
- $\varepsilon_{\mathbb{R}^{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $\varepsilon_{\mathbb{P}_n} = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$

- Dimensiones de las bases canonicas
  - $dim(\mathbb{R}) = n$
  - $dim(\mathbb{R}[x]) = n + 1$
  - $dim(\mathbb{R}^2) = 4$
  - $dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$

Teorema 1.8. *Sea V un espacio lineal de dimension finita con $dim(V) = n$ se tiene*

(a) Cualquier conjunto de elementos independiente de V es un subconjunto de una cierta base para V.

(b) Cualquier conjunto de n elementos independientes es una base para V.

Demostracion. Para demostrar (a), consideremos el conjunto independiente $S = \{x_1, ..., x_k\}$ constituido por elementos en V. Si $L(S) = V$, entonces S es una base. Si no, entonces hay algun elemento y en V que no esta en $L(S)$. Añadamos ese elemento a S y consideremos el nuevo conjunto $S' = \{x_1, ..., x_k, y\}$. Si en este conjunto dependiente multiplicamos sus elementos por escalares $c_1, ..., c_{k+1}$ siendo alguno diferente de cero, estableceremos que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i + c_{k+1} y = O$$

Pero $c_{k+1} \neq 0$ puesto que $x_1, ..., x_k$ son independientes. De aqui que podamos resolver esta ecuacion respecto a y llegando a la conclusion de que $y \in L(S)$, lo qe contradice el supuesto de que y no pertenece a $L(S)$. Por lo tanto el conjunto S' es independiente y contiene $k+1$ elementos. Si $L(S') = V$, entonces S' es una base y, siendo S un subconjunto de S', la parte (a) queda demostrada. Si S' no es una base, entonces podemos proceder con S', de igual manera que procedimos con S y considerar otro nuevo conjunto S'' que contiene $k+2$ elementos y es independiente. Si S'' es una base, (a) queda demostrado. Si no, repetimos el proceso. Debemos llegar a una base después de un número finito de etapas, ya que de otra manera obtendríamos un conjunto independiente con $n + 1$ elementos, contradiciendo el teorema 1.6. Por eso, la parte (a) del teorema 1.8 queda demostrada. Para demostrar la parte (b) consideremos un conjunto indepediente S con n elementos. Por la parte (a), S es un subconjunto de base B. Pero por el teorema 1.5, la base B tiene exactamente n elementos, por lo tanto, $S = B$.