1 Espacios Vectoriales

Definicion de espacio vectorial

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V en el que estan definidas una ley de composición interna denominada *suma*, que a cada par de elementos u, v de V asocia un elemento w de V denotado $w = u + v$, y una ley de composición externa denominada *producto por escalares*, que a cada numero $\alpha \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y a cada elemento u de V asigna un elemento $v = \alpha u$, que verigican las siguientes condiciones:

1) ***Conmutatividad:*** $u + v = v + u$, $\forall u, v, w \in V$
2) ***Asociatividad:*** $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$
3) $\exists$ ***Elemento Neutro***, $0_V \in V$, *tal que* $u + 0_v = u$, $\forall u \in V$
4) ***Para cada*** $u \in V$ $\exists$ ***un opuesto***, *denotado* $-u$, *tal que* $u + (-u) = 0_V$
5) ***Distributividad respecto de los escalares:*** $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall \alpha, \beta \in K$ *y* $\forall u \in V$
6) ***Distributividad respecto de los vectores:*** $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall \alpha \in K$ *y* $u, v \in V$
7) ***Asociatividad respecto de los escalares:*** $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, $\forall \alpha, \beta \in V$ *y* $\forall u \in V$
8) $1u = u, \forall u \in V$

- V es $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\equiv$ V es un espacio vectorial sobre los reales.
- V es $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\equiv$ V es un espacio vectorial sobre los complejos.

Propiedades Elementales

1) *El elemento neutro* $0 \in V$ *es único; también es único el opuesto de un elemento* u
2) $0u = 0 \forall u \in V$ *y* $\alpha 0 = 0$ *para todo escalar* α
3) *Si* $\alpha u = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ *ó* $u = 0$
4) *Si* $u \neq 0, \alpha u = \beta u \Rightarrow \alpha = \beta$; *si* $\alpha \neq 0, \alpha u = \alpha v \Rightarrow u = v$
5) $(-1)u = -u \forall u \in V$

Ejemplos

$$(x_1, ..., x_n) + (x_1', ..., x_n') = (x_1 + x_1', ..., x_n + x_n') \tag{1}$$

$$\alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & ... & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & ... & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & ... & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & ... & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & ... & \alpha a_{nm} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I \tag{5}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in I \tag{6}$$

Todo espacio vectorial complejo es a su vez un espacio vectorial real si se considera lamisma operacionn suma y el producto por escalares se restringe a escalares reales.

1.1 Subespacios

Definición de subespacio

Un subconjunto S de un espacio vectorial V es subespacio de V si S es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V. Para concluir que un subconjunto S de V es subespacio deberiamos probar que:

1) S no es vacío.

2) La suma y el producto definidos en V son operaciones cerradas en S, es decir, $u + v$ es elemento de S si u y v son elementos de S, y αu es elemento de S si α es un escalar arbitrarioy u es un elemento de S (en caso contrario la suma no sería una ley de composición interna o el producto por escalares no sería una ley de composición externa)

3) Se verifican las propiedades 1 a 8 de la Definicion de espacio vectorial.

Sin embargo no es necesario probar el tercer punto devido al siguiente teorema

Teorema 1 (teorema del subespacio)

Sea S un subconjunto de un espacio vectorial $V \Rightarrow S$ es subespacio de $V \Leftrightarrow$ se verifican las siguientes condiciones:

1. $S \neq \emptyset$
2. *Si* $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$
3. *Si* $u \in S$ *y* α *es un escalar arbitrario,* $\alpha u \in S$

Ejemplos

- $S = \{0\} \wedge S = V \rightarrow$ subespacios triviales.
- Toda recta S que pasa por el origen es subespacio.

Apuntes