1 Espacios Vectoriales

Definicion de espacio vectorial

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V (vectores) en el que estan definidas una ley de composición interna denominada *suma*, que a cada par de elementos u, v de V asocia un elemento w de V denotado $w = u + v$, y una ley de composición externa denominada *producto por escalares*, que a cada numero $\alpha \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) (escalares) y a cada elemento u de V asigna un elemento $v = \alpha u$, que verigican las siguientes condiciones:

1) ***Conmutatividad:*** $u + v = v + u$, $\forall u, v, w \in V$

2) ***Asociatividad:*** $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$

3) $\exists$ ***Elemento Neutro***, $0_V \in V$, *tal que* $u + 0_v = u$, $\forall u \in V$

4) ***Para cada*** $u \in V$ $\exists$ **un opuesto**, *denotado* $-u$, *tal que* $u + (-u) = 0_V$

5) ***Distributividad respecto de los escalares:*** $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall \alpha, \beta \in K$ *y* $\forall u \in V$

6) ***Distributividad respecto de los vectores:*** $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall \alpha \in K$ *y* $u, v \in V$

7) ***Asociatividad respecto de los escalares:*** $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, $\forall \alpha, \beta \in V$ *y* $\forall u \in V$

8) $1u = u, \forall u \in V$

- V es $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\equiv$ V es un espacio vectorial sobre los reales.
- V es $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\equiv$ V es un espacio vectorial sobre los complejos.

Propiedades Elementales

1) *El elemento neutro* $0 \in V$ *es único; también es único el opuesto de un elemento* u

2) $0u = 0 \forall u \in V$ *y* $\alpha 0 = 0$ *para todo escalar* α

3) *Si* $\alpha u = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ *ó* $u = 0$

4) *Si* $u \neq 0, \alpha u = \beta u \Rightarrow \alpha = \beta$*; si* $\alpha \neq 0, \alpha u = \alpha v \Rightarrow u = v$

5) $(-1)u = -u \forall u \in V$

Ejemplos

$$(x_1, ..., x_n) + (x'_1, ..., x'_n) = (x_1 + x'_1, ..., x_n + x'_n) \tag{1}$$

$$\alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & ... & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & ... & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & ... & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & ... & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & ... & \alpha a_{nm} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I \tag{5}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in I \tag{6}$$

Todo espacio vectorial complejo es a su vez un espacio vectorial real si se considera lamisma operacionn suma y el producto por escalares se restringe a escalares reales.

1.1 Subespacios

Definición de subespacio

Un subconjunto S de un espacio vectorial V es subespacio de V si S es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V. Para concluir que un subconjunto S de V es subespacio deberiamos probar que:

1) S no es vacío.
2) La suma y el producto definidos en V son operaciones cerradas en S, es decir, $u + v$ es elemento de S si u y v son elementos de S, y αu es elemento de S si α es un escalar arbitrarioy u es un elemento de S (en caso contrario la suma no sería una ley de composición interna o el producto por escalares no sería una ley de composición externa)
3) Se verifican las propiedades 1 a 8 de la Definicion de espacio vectorial.

Sin embargo no es necesario probar el tercer punto devido al siguiente teorema

Teorema (teorema del subespacio)

Sea S un subconjunto de un espacio vectorial $V \Rightarrow S$ es subespacio de $V \Leftrightarrow$ se verifican las siguientes condiciones:

1. $S \neq \emptyset$
2. *Si* $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$
3. *Si* $u \in S$ *y* α *es un escalar arbitrario,* $\alpha u \in S$

Ejemplos

- $S = \{0\} \wedge S = V \rightarrow$ subespacios triviales.
- Toda recta S que pasa por el origen es subespacio.

Apuntes

- En todos los casos, la suma de elementos de un conjunto V y el producto de un elemento de ese conjunto por un numero, siempre daba como resultado otro elemento de ese conjunto.
- El polinomio nulo no tiene grado.
- Dos polinomios son iguales cuando todos sus coeficientes son iguales $P = Q \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = 1, ..., n$
- EJERCICIOS 1-4

2 Combinaciones Lineales. Dependencia Lineal

Dados $v_1, v_2, ..., v_r$, vectores de un espacio vectorial V, una *combinación lineal* de ellos una expresión de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r$$

con $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ escañares. Por otra parte, se dice que un vector $v \in V$ es *combinación lineal de (o que depende linealmente de)* $v_1, v_2, ..., v_r$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ tal que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r$

Ejemplos

- El vector nulo es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_r \in V$, pues $0 = 0v_1, 0v_2, ..., 0v_r$.
- En $\mathbb{R}, w = (1,1,1)$ es combinación lineal de $v_1 = (2,1,3)$ y $v_2 = (1,0,2)$ pues $w = 1v_1 + (-1)v_2$. Asimismo, $(2,2,2)$ es combinación lineal de $(1,1,1)$ ya que $(2,2,2) = 2(1,1,1)$.
- En $\mathbb{C}, w = (1+i, 2)$ es combinación lineal de $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,1)$, pues $w = (1+i)v_1 + 2v_2$

Dados los vectores $v_1, ..., v_k$ se denomina $gen\{v_1, ..., v_r\}$ al conjunto de todas sus posibles combinaciones lineales. Es decir,

$$gen\{v_1, ..., v_r\} = \{v \in V : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r\} \tag{7}$$

Teorema

Dados $v_1, ..., v_r \in V, gen\{v_1, ..., v_r\}$ es *subespacio del espacio vectorial V.*

Al subespacio $S = gen\{v_1, ..., v_r\}$ se lo denomina *subespacio generado* por los vectores $v_1, ..., v_r$ y a estos últimos *generadores* de S.

Se dice que un subespacio S de un espacio vectorial V está generado por los vectores $v_1, ..., v_r \leftrightarrow S = S = gen\{v_1, ..., v_r\}$. En esta situación se dice que $\{v_1, ..., v_r\}$ es un *conjunto generador* de S y que S es un subespacio *finitamente generado.*

Ejemplos

- $\mathbb{R}^n = gen\{e_1, ..., e_n\}$ con $e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1)$.
- $\mathbb{C}^n = gen\{e_1, ..., e_n\}$ con $e_1, ..., e_n$ definidos anteriormente.
- $\mathbb{P}_n = gen\{1, t, ..., t^n\}$.
- $\mathbb{C}^{2\times 2} = gen\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ con

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

2.1 Conjuntos Linealmente Independientes y Bases

3 Conjuntos Dependientes e Independientes en un Espacio Lineal

Definicion

Un conjunto S de elementos de un espacio lineal V se llama *dependiente* si existe un conjunto finito de elementos distintos de S, $x_1, ..., x_k$ y un correspondiente conjunto de escalares $c_1, ..., c_k$, no todos cero, tales que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = 0 \tag{9}$$

El conjunto S se llama *indepentiende* si no es *dependiente*. En tal caso, cualesquiera que sean los elementos distintos $x_1, ..., x_k$ de S y los escalares $c_1, ..., c_k$,

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_k = 0 \tag{10}$$

Ejemplos

- Los elementos de un conjunto indepediente se llaman elementos independientes.
- Si un subconjunto T de un conjunto S es dependiente, el mismo S es dependiente. Esto es logicamente equivalente a la afirmacion de que todo subconjunto de un conjunto independiente es independiente.
- Si un elemento de S es el producto de otro por un escalar, S es dependiente.
- Si $O \in S \Rightarrow S$ es dependiente.
- El conjunto vacio es independiente.

Teorema

Sia $S = \{x_1, ..., x_k\}$ un $conjuntoindependiente$ que consta de k elementos de un espacio lineal V y sea $L(s)$ el *subespacio* generado por S. ENtonces todo cojunto de $k + 1$ elementos de $L(S)$ es *dependiente*.