1 Espacios Vectoriales

Definicion

Sea V un conjunto no vacio de objetos, llamados *elementos.* El conjunto V se llama espacio lineal si satisface los diez axiomas siguientes que se enuncian en tres grupos.

Axiomas de clusura

Axioma 1. CLAUSURA RESPECTO DE LA ADICION. *A todo par de elementos* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *corresponde un elemento unico de* $\boldsymbol{V}$ *llamado suma de* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$*, designado por*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$

Axioma 2. CLAUSURA RESPECTO DE LA MULTIPLICACION POR NUMEROS REALES. *A todo* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *y todo numero real* $\boldsymbol{a}$ *corresponde un elemento de* $\boldsymbol{V}$ *llamado producto de* $\boldsymbol{a}$ *por* $\boldsymbol{x}$*, designado*

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$$

Axiomas para la adicion

Axioma 3. LEY CONMUTATIVA. *Para todo* $\boldsymbol{x}$ *y todo* $\boldsymbol{y}$ *de* $\boldsymbol{V}$*, tenemos que*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$$

Axioma 4. LEY ASOCIATIVA. *Cualesquiera sean* $\boldsymbol{x}$*,* $\boldsymbol{y}$*,* $\boldsymbol{z}$ *de* $\boldsymbol{V}$*, tenemos que*

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$$

Axioma 5. EXISTENCIA DE ELEMENTO CERO. *Existe un elemento en* $\boldsymbol{V}$*, designado con el simbolo* O_v *tal que*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{O_v} = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}.$$

Axioma 6. EXISTENCIA DE OPUESTOS. *Para todo* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{V}$*, el elemento* $(\boldsymbol{-1})\boldsymbol{x}$ *tiene la propiedad*

$$\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{-1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O_v}$$

Axiomas para la multiplicacio por numeros

Axioma 7. LEY ASOCIATIVA. *Para todo* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *y todo par de numeros reales* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$*, tenemos*

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{x}$$

Axioma 8. LEY DISTRIBUTIVA PARA LA ADICION EN V. *Para todo* $\boldsymbol{x}$*y todo* $\boldsymbol{y}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *y todo numero real* $\boldsymbol{a}$*, tenemos*

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y}$$

Axioma 9. LEY DISTRIBUTIVA PARA LA ADICION DE NUMEROS. *Para todo* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{V}$ *y todo par de numeros reales* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$*, tenemos*

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}$$

Axioma 10. EXISTENCIA DE ELEMENTO IDENTICO. *Para todo* $\boldsymbol{x}$ *de* $\boldsymbol{V}$*, tenemos*

$$\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$