# Пояснения по поводу выбора системы отсчёта

Абсолютного движения тела не существует, оно всегда происходит только по отношению к какому-нибудь другому телу или системе тел, которую мы называем системой отсчёта и рассматриваем условно как неподвижную. Действительно, все данные о положении, скорости и ускорении тела будут иметь смысл только тогда, когда мы одновременно называем систему отсчёта, по отношению к которой изучается его движение.

То же движущееся тело или другие явления может изучать наблюдатель, находящийся в другой системе отсчёта, движущейся относительно первой. Его выводы о положении, скорости и ускорении тела будут иными, чем у первого наблюдателя. Связь между утверждениями двух наблюдателей мы выяснили на прошлом занятии.

При решении конкретной задачи мы можем пользоваться в качестве системы отсчёта различными телами. Системы отсчёта, возникающие при выборе различных тел, являются равноправными и одинаково допустимыми при описании движения материальной точки. Однако естественно выбрать систему отсчёта таким образом, чтобы движение в ней выглядело наиболее просто.

Нужно ясно понимать отличие между системой отсёта и системой координат. Систему отсчёта образуют реальные тела. Перемещение, скорость и ускорение тела в выбранной СО – это та реальность, с которой мы имеем дело при решении конкретной задачи. Система координат является математической абстракцией. Один и тот же вектор в различных системах координат имеет различные компоненты, однако его положение относительно системы отсчёта остаётся неизменным. Обычно выбор системы координат определяется соображениями удобства.

# Математическое описание движения

После выбора системы отсчёта, положение тела в любой момент времени можно описать, проведя радиус-вектор из начала координат в точку, в которой находится тело. При этом вектор является функцией времени:

(1)

Это – векторный способ описания движения тела.

Спроектировав векторное уравнение (1) на оси выбранной системы координат, мы перейдём к скалярной системе из одного, двух или даже трёх уравнений. В случае движения в одной плоскости для описания движения достаточно двух координатных осей x и y. Поэтому, уравнению (1) будет соответствовать система двух скалярных уравнений:

(2)

Это – координатный способ описания движения тела. Зависимость x(t) координаты тела от времени называется законом движения по оси x, зависимость y(t) – законом движения по оси y.

Оба способа равноправны и дополняют друг друга:

+ РИС

Другие кинематические характеристики движения, такие как скорость или ускорение , также являются функциями времени и могут быть спроектированы на оси выбранной системы координат.

На прошлом занятии мы рассмотрели наиболее простые случаи движения: равномерное прямолинейное движение , и равнопеременное движение . Детально рассмотрим вывод уравнений движения для обоих случаев.

**Равномерное движение.**

По определению скорости:

, при

Для равномерного движения:

Таким образом, для двух произвольных моментов времени t1 и t2 можно записать:

Из последней формулы следует, что если в некоторый момент времени тело находилось в положении , то в произвольный момент времени t оно будет находиться в положении:

(1)

Это и есть уравнение равномерного движения тела.

**Равнопеременное движение.**

По определению ускорения:

, при

Для равноускоренного движения:

Таким образом, для двух произвольных моментов времени t1 и t2 можно записать:

Из последней формулы следует, что если в некоторый момент времени тело имело скорость , то в произвольный момент времени t оно будет иметь скорость:

(2)

По определению скорости:

, при

Учитывая полученное нами выражение для :

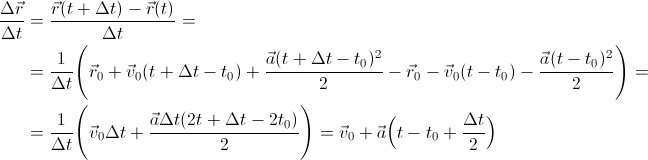
, при (3)

Перед нами – простейшее дифференциальное уравнение, решением которого является функция:

(4)

Здесь  – радиус вектор точки в момент .

Убедимся в том, что выражение (4) является решением уравнения (3) подстановкой:



Очевидно, что при это выражение совпадает с выражением для скорости (2).

Итак, для описания равномерного движения достаточно одного уравнения (1), для описания равнопеременного движения требуется два уравнения (2) и (4).

# Время

Поговорим немного о времени. Детально это понятие мы будем рассматривать в другой раз, сейчас же коснемся только базовых свойств.

В классической физике время — это непрерывная величина, существующая само по себе, отдельно от пространства и любых материальных объектов в мире. Все процессы в мире, независимо от их сложности, не оказывают никакого влияния на ход времени. В этом смысле время в классической физике является абсолютным. Все моменты времени в прошлом, настоящем и будущем между собой равноправны, время однородно. Течение времени всюду и везде в мире одинаково и не может изменяться. Для измерения времени необходимо только одно число, то есть время одномерно.

Поскольку время непрерывно и одномерно, то любому моменту времени соответствует единственная точка на оси времени. При этом ось времени может быть продлена неограниченно назад в прошлое и неограниченно вперед в будущее:

Ось времени

Каждому событию в материальном мире может быть поставлена в соответствие единственная точка на оси времени.

В повседневной жизни, когда мы указываем момент времени, в который произошло некоторое событие, то обязательно указываем и событие, относительно которого ведётся отсчёт времени.

Когда я говорю «Встретимся через час», то имею ввиду, что отсчёт времени идёт от текущего момента. Если я скажу «Вчера в два часа дня я был в институте», то я имею ввиду момент времени, наступивший через два часа после полудня вчерашнего дня. Фраза «Это было 12 апреля 1961 года» предполагает, что отсчёт времени ведётся от начала нашей эры, то есть от «рождества Христова». При этом о более ранних событиях мы говорим, как о событиях, произошедших до нашей эры. Фраза «Этот процесс занял x минут» означает, что от начала процесса (событие, с которым связан отсчёт времени) до его завершения (второе событие) прошло x минут.

Например, фраза «Я поел через 5 минут» нам ни о чём не говорит, так как не понятно, относительно какого события я отсчитывал эти 5 минут. А вот фраза «Я вошёл за 5 минут до тебя» сообщает нашему собеседнику, что событие «я вошёл в помещение» произошло за 5 минут до события «он вошёл в помещение».

Таким образом, говоря о некотором событии, произошедшем в момент времени t, мы должны указать то событие, от которого ведётся отсчёт времени. Этому событию соответствует начало отсчёта времени t=0, поэтому данный момент времени называется «нулевым».

Поскольку все моменты времени между собой равноправны (однородность времени) мы можем выбрать любой из них в качестве нулевого, и все остальные события рассматривать относительно данного.

Допустим, последовательно произошли события A, B и C:

Пока мы не указали, какой из моментов времени считается нулевым, бессмысленно ставить вопрос о том, в какой момент времени произошли эти события. Если же мы указали, что нулевым считается момент времени, в который произошло событие B, то можем идентифицировать моменты времени, в которые произошли события A и C:

При этом t\_A<0, t\_C>0.

В этом смысле выбор начала отсчёта на оси времени эквивалентен выбору начала отсчёта на координатной оси. Пока мы не указали начало координат, бессмысленно ставить вопрос о том, какие координаты имеют заданные точки.

Мы можем и не знать, какое именно событие произошло в начальный момент времени. Достаточно знать любое событие, которое произошло в произвольный момент времени t!=0, этим начало отсчёта времени также определяется однозначно:

Отмечу, что фраза «событие A произошло в момент времени t\_a» определяет начало отсчёта времени однозначно, а фраза «точка A имеет координату x\_a» определяет начало отсчёта координат не однозначно:

Это происходит потому, что время всегда «движется» в одном направлении – от прошлого к будущему.

# Начальные условия

Вернёмся к кинематике. Под «событием» в кинематике подразумевается «тело находилось в положении и имело скорость ». Для краткости обозначим это событие ().

С учётом этого можно по-новому взглянуть на формулы (1), (2) и (4). Они включают в себя, так называемые, начальные условия, то есть значения в определённый момент времени .

Заданием начальных условий мы определяем нулевой момент времени, говоря, что событие «тело находится в положении » произошло в момент t0 от начала отсчёта времени:

Далее, с помощью уравнений, соответствующих нашему движению ((1) для равномерного, (2) и (4) для равнопеременного), мы можем ответить на любой из двух вопросов:

1. В какой момент времени произойдёт событие «тело находится в положении »:

Известны положение и скорость тела, определяем время

1. Какое событие произойдёт в момент времени t, то есть в какой точке траектории будет находиться тело и какую при этом будет иметь скорость:

В заданный момент времени t определяем положение и скорость тела

Во всех случаях начало отсчёта времени t=0 определяется событием (), которое произошло в момент времени t0.

Теперь становится понятным, что уравнения (1), (2), (4) обязаны содержать начальные условия, так как без них невозможно указать начало отсчёта времени и, как следствие, привязать к нему все остальные события. Помните – момент времени t, в который произошло любое событие, отсчитывается не от события (), а от начала отсчёта времени:

Отсчёт времени ведётся от t=0, а не от t0

Если при этом начало отсчёта времени связать с событием (), то уравнения (1), (2) и (4) значительно упростятся:

(11)

(12)

(14)

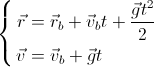
Начало отсчёта времени ведётся от события (), то есть t0=0

Именно этими формулами мы и пользовались на прошлом занятии. Я вас призываю и впредь стараться пользоваться упрощённым видом формул, то есть начало отсчёта времени выбирать в тот момент, когда известны скорость и положение тела, но помните, что формулы (11), (12), (14) – лишь частный случай формул (1), (2), (4).

Рассмотрим тело, которое равноускоренно движется по траектории AC в поле тяжести земли, при этом известны радиус вектор и вектор скорости в тот момент, когда тело находилось в точке B:

+ РИС

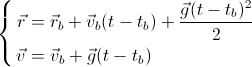
Для описания движения в данном случае целесообразно отсчёт времени вести от момента времени, в который тело находилось в точке B, то есть в начальный момент времени t=0: r(0)=r\_b, v\_0=v\_b:



При этом ta<0, tb=0, tc>0, так как в точке А тело побывало до начала отсчёта времени, а в точке C – после:

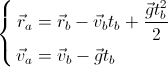
Начало отсчёта времени ведётся от момента, когда тело побывало в точке B

Если же отсчёт времени (t=0) вести от того момента, когда тело находилось в точке A, то предыдущая система примет вид:

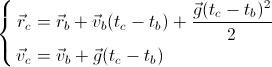


Начало отсчёта времени ведётся от момента, когда тело побывало в точке A

В этом случае, как и должно быть: . Положение и скорость тела в точке А соответствуют положению и скорости тела в нулевой момент времени t=0:



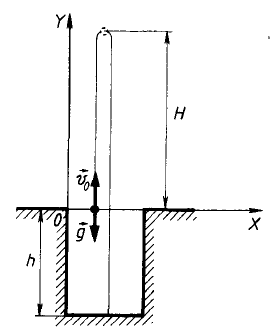
Положение и скорость тела в точке С соответствуют положению и скорости тела в момент времени t=t\_c:



Часто в процессе решения различных задач кинематики «вылезают» отрицательные корни, происхождение которых кажется непонятным. Обычно они не подходят по смыслу задачи и их просто отбрасывают, но я хочу, чтобы вы понимали, откуда они берутся.

**Пример**:

Над ямой глубиной h бросают вертикально вверх камень с начальной скоростью . Через какое время камень упадёт на дно ямы?



Начало координат расположим на уровне земли, ось Oy направим вертикально вверх, отсчёт времени начнём от момента бросания.

Закон движения вдоль оси Oy имеет вид:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f5/f7/fc/57ca1638ef88aac33d493dc7ba6f324e.gif(9)

В выбранной системе координат, имеем:

Y0=0, v0y=v0, gy=-g, имеем:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f2/f3/f1/231a768889d2cd03b6bd9626fa06344e.gif(10)

При написании этого уравнения мы негласно полагаем, что отсчёт времени ведётся от момента бросания тела, что вполне естественно, так как мы знаем скорость тела в этот момент времени.

В момент падения камня на дно ямы его координата y=-h, поэтому:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fd/f3/fd/d3dbf0529e6239542d6f4a25b831be5b.gif

Данное уравнение сводится к квадратному:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f3/f8/f7/3872129272cfd3a3c9cb5d364ff78181.gif

, которое имеет корни:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f7/f4/f1/741986a627f53c30ad68adb4dae7e784.gif

Первый корень всегда отрицателен:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f6/f1/f1/61187c791352060f17b2713716c4fe2d.gif(11)

По смыслу задачи он нам не подходит и ответом является корень:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f2/f8/fd/28d5f4e0daaefc3c45009afefccbd76b.gif

--

Отрицательный корень означает момент времени, в который тело находилось на высоте –h до начала отсчёта времени. Физически этого не было, но записанное нами уравнение движения (10) описывает именно такую ситуацию. Иными словами, отрицательный корень является ответом на вопрос следующего примера.

**Пример.**

Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх так, что на высоте h оно имело скорость. Сколько времени занял подъём на эту высоту?

Решение.

**Первый вариант**:

Начало координат поместим на земле в точке бросания, отсчёт времени будем вести от момента бросания. Обращаю ваше внимание на то, что в момент бросания (выбранный нами в качестве нулевого) скорость тела не известна! Для определённости положим, что тело брошено с начальной скоростью :

+ рис.

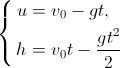
В выбранной нами системе координат уравнения, описывающие движение тела, примут вид:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fe/fd/f2/ed27cbcb5bcd3b013ceddc96e80ea42b.gif (8)

В момент бросания y0=0, v0y=v0, поэтому:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fb/fa/fb/babc26deb62329726d43dc2510e9c027.gif

В момент, когда тело находилось на высоте h и имело скорость u, можем записать:



Данная система содержит два уравнения и два неизвестных v0 и t. Выразим скорость v0 из первого уравнения и подставим во второе, получим:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f0/f3/f6/036370a906f3118e54275031373bc0fd.gif(15)

Данное квадратное уравнение имеет два корня:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f6/fb/f8/6b8680992ea8409d98b28b63030c3a02.gif

Один из корней всегда отрицателен и нас не интересует, второй является искомым решением:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f3/f3/f3/333db0d2ebd13120d89dc323aee51090.gif

**Второй вариант**:

Как и в предыдущем случае, начало координат поместим на земле в точке бросания, отсчёт времени будем вести от момента бросания. Только теперь уравнения движения запишем с учётом момента времени , в который тело находилось на высоте h и имело скорость :

http://postupayu.ru/stuff/formules/fa/f3/fc/a3ce01f37564e246c9bc794e1c702b46.gif

Здесь – искомое время. Его найдём, учтя, что в нулевой момент времени t=0 тело находилось на земле, то есть y(0) =0. При этом для решения нам достаточно только второго уравнения:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f1/f7/f7/177b7c410b12d004e99df0f5a484d7ea.gif

Нетрудно видеть, что это уравнение полностью совпадает с уравнением (15), полученным в предыдущем случае.

**Третий вариант**:

Решим задачу в той же системе координат, но отсчёт времени будем вести от момента, в который тело находилось на высоте h. В этом случае движение тела будет описываться уравнениями:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f8/fe/fd/8ed5ef88b8b7930af5918d178c4a7acb.gif

Теперь нас интересует, в какой момент времени тело находилось в начале координат, то есть при y=0. В таком случае достаточно лишь одного уравнения:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fb/f4/fd/b4dfa26e4001b2044fc95e8fc6d36c6d.gif

Это квадратное уравнение имеет два корня:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fe/f4/f3/e4310ae3825bb1857f36e2d7321ca3ef.gif

Один из корней положителен и соответствует моменту, когда тело упало на землю. Второй – отрицателен, и соответствует моменту, когда тело впервые побывало на высоте h=0, то есть в момент броска. Он-то нам и нужен:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fc/fc/f8/cc817ecd3c82848c31ad405256882d4d.gif

Модуль этого корня равен:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f0/fd/f4/0d435f8700d414d4f4acfbb7330377df.gif

Нетрудно видеть, что это выражение совпадает с полученными ранее.

Как видите, грамотным выбором начала отсчёта времени можно упростить задачу и избежать введения промежуточных величин (таких как v0 при первом способе решения), которые потом всё равно нужно будет исключить.

Нужно твёрдо усвоить, что и – это значения координат и скорости тела в один и тот же момент времени t0. При этом если этот момент времени не совпадает с нулевым, то есть t0!=0, то необходимо использовать формулы (1), (2), (4), учитывающие сдвиг между началом отсчёта времени t=0 и состоянием (, ) тела.

Общая схема решения задач кинематики выглядит примерно так:

1. Определяете тип движения – равномерное или равнопеременное, в зависимости от этого будут использованы формулы (2) или (3), (4).
2. Выбираете тело отсчёта и связываете с ним систему координат, направляя координатные оси так, чтобы движение выглядело наиболее просто.
3. Выбираете положение тела, которым определяется нулевой момент времени t=0, затем выбираете положение (, ) в момент времени t0, которое будет использовано в качестве начальных условий. Если t0=0, то следует использовать упрощённый вариант формул: (11), (13), (14).
4. С учётом выбора начальных условий записываете конечный вид уравнений, описывающих движение тела, проецируете их на оси выбранной системы координат и решаете полученные уравнения для заданного момента времени или для заданного положения тела.

Все эти примеры я привёл для того, чтобы вы твёрдо усвоили: x0 и v0 есть не что иное, как положение и скорость тела в один и тот же, нулевой, момент времени.

Решение кинематических задач выглядит так: вы выбираете тело отсчёта и связываете с ним систему координат. В этой системе координат вы записываете общее уравнение движение тела. Например – для равноускоренного движения вдоль оси Ox мы записываем:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f7/f8/f3/783e2b304ad3e303de79052b3d9b731f.gif

Далее определяем, от какого положения тела мы будем вести отсчёт времени. В соответствии с нашим выбором определяются x0 и v0x. Записываем уравнение в проекциях на направление оси Ox. Допустим, мы получили:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fd/f5/fd/d5da3c5ea63022d8cb993334dacd38a8.gif

Это уравнение можно читать так: в выбранной нами системе отсчёта оси направлены так, что скорость со направлена с осью Ox, ускорение – противоположно направлено оси Ox, а в момент начала отсчёта времени тело находилось на расстоянии s от начала координат и имело при этом скорость v. Теперь из этого уравнения можно получить ответы на два типа вопросов:

1. В какой момент времени тело находилось в положении x от начала координат?

Если в ответ на этот вопрос вы получаете два или более корней, то это означает, что тело было в точке x несколько раз. Отрицательные корни при этом означают, что тело было в точке x до начала отсчёта времени.

1. В каком положении от начала координат находилось тело в момент t от начала отсчёта времени?

При этом вы можете совершенно спокойно подставлять в это уравнение движения отрицательные моменты времени, имея в виду, что интересуетесь положением тела до начала отсчёта времени.

В определение системы отсчёта входят: тело отсчёта, система координат и часы для отсчёта времени. И вот вы, находясь в выбранной системе отсчёта (реально или мысленно), должны ещё принять решение, от какого момента времени вы будете рассматривать движение тела.

Как видите, понятия абсолютного времени также не существует, вы должны обязательно указывать, относительно какого момента ведётся отсчёт времени.

Как видите, чтобы решить эту задачу, нужно понимать, как работают уравнения (1) и (2).

К сожалению, записав систему (4) и получив корни (5), некоторые решают, что это и есть два искомых момента времени. Однако это не так. Должно было насторожить хотя бы то обстоятельство, что один из корней (5) всегда отрицателен.

Всё дело в том, что системы (1) и (2), равно как и взятые из них уравнения (3), определяют движение тела в выбранной СО в произвольный момент времени.

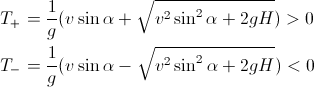
В отличие от них, система (4) записана для конкретного момента времени T, в который тело находилось в точке А. Её решения (5), это моменты времени, в которые тело находилось именно в точке А, а не просто на высоте H.

Но почему корней два? Ведь это означает, что тело побывало в точке A – дважды, что невозможно. Почему при этом один из корней всегда отрицателен?

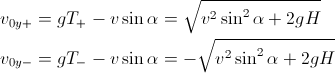
Чтобы ответ на эти вопросы был максимально понятен, я озвучу наши рассуждения во время решения:

«Тело находится в точке А на высоте H и имеет скорость v, направленную под углом α к горизонту. Я выбираю систему отсчёта так, чтобы в начальный момент времени t=0 высота тела над уровнем земли была равна нулю: h0=0. Сколько времени занял путь от начала системы отсчёта до точки А?»

Именно эту задачу описывает система (4). Обозначим корни (5) этой системы и :



Определим из первого уравнения системы (4) вертикальные составляющие начальной скорости V0y, соответствующие каждому из корней:



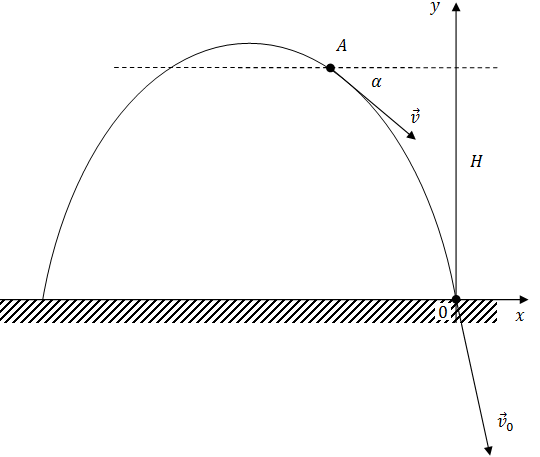
Как нетрудно видеть:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fe/fa/f0/ea081427f9358ec18fa644f13dfb6e01.gif (10)

Математику не обманешь☺ Наличие двух корней и указывает на существование двух разных систем отсчёта, в которых движение тела описывается одной и той же системой уравнений (4).

Первая СО – та, в которой тело достигло точки А в момент времени Т+>0. В ней начало координат совмещено с точкой бросания. В этой СО тело имеет горизонтальную составляющую скорости в момент t=0: v0y+>0. Эта СО изображена на **рис.1**.

Вторая СО – та, в которой тело достигло точки А в момент времени Т-<0. В ней начало координат совмещено с точкой падения тела на землю. В этой СО тело имеет горизонтальную составляющую скорости в момент t=0: v0y-<0. Эта СО изображена ниже:



При этом T- < 0 потому, что отсчёт времени во второй СО ведётся от момента падения тела на землю.

Напомню, что h0 и v0 – это высота и скорость тела в момент начала отсчёта времени, то есть при t=0, ничего более.

Система (4) не содержит никаких дополнительных условий, которые бы однозначно указывали на то, какую именно СО мы имеем ввиду. Во всех смыслах обе они являются абсолютно равнозначными.

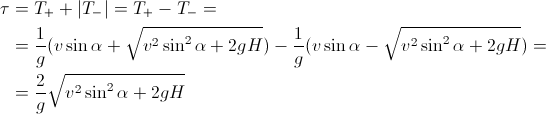
Если бы для решения предыдущего примера в систему (4) мы добавили ещё какое-либо ограничение, например: x(T)>0 или vy0>0, то СО была бы определена однозначно.

Итак, если рассматривать движение тела в первой СО (рис.1), то оно окажется в точке А в момент времени T+. При этом отчёт ведётся от момента бросания тела с поверхности земли.

Если мы рассматриваем движение тела во второй СО (рис. 2), то тело окажется в точке A в момент времени T-. Отчёт времени в этой СО ведётся от момента падения тела на землю.

Иными словами, T+ - время, прошедшее от момента начала движения тела до точки А; |T-| - время , прошедшее от момента, когда тело находилось в точке А, до падения тела на землю.

Таким образом, сумма T+ + |T-| есть полное время движения тела, от начала полёта до падения:



Напомню, что модуль числа |a| равен самому числу, если а>=0, и –a, если а<0.

В соответствии с (8) можем выразить полное время полёта через v0y:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f1/f0/f4/104bff2c9c9e14e1b9475ea563a5c61d.gif

На прошлом занятии мы решили задачу о движении тела, брошенного с поверхности земли под углом к горизонту, и получили такой же результат.

Кстати, с учётом (10), в СО, связанной с моментом падения тела на землю, полное время полёта будет . Это и понятно – полное время полёта не может зависеть от выбора СО, так как это один и тот же физический процесс, однако отсчёт времени в двух СО ведётся от разных моментов времени.

Вообще к отрицательным моментам времени нужно относиться спокойно и понимать, что это такой же момент времени, как и все остальные, просто он наступил до момента начала отсчёта времени.

Как видите, понимание уравнений (1) и (2) позволяет чувствовать себя гораздо увереннее. Со временем вы будете спокойно относиться к появлению «неожиданных» корней и объяснять их происхождение.

В этом и есть прелесть физики, разговаривающей на языке математики – если вы построили физическую модель и описали её математически, то решение уравнений покажет вам всё, что происходит в этой модели, даже то, что сначала «не видно глазу».

В нашем случае мы описали движение, но неоднозначно описали систему отсчёта, в которой это движение рассматривается. В результате математика выявила эту нашу оплошность. При этом она её не только вывела, но и дала решения для обоих случаев.

К сожалению, причина появления «нежданных» корней не всегда очевидна. Рассмотрим ещё один пример, а позже я дам рекомендацию, что в таких случаях делать.

Пример.

Автомобиль начинает разгон от светофора с начальной скоростью v0 и постоянным ускорением a. Через какое время автомобиль будет на расстоянии s от светофора?

Решение.

Автомобиль всё время движется в одном и том же направлении, а значит, через каждую точку своей траектории он проходит единожды. Ощущения нам подсказывают, что ответ должен быть один. Дам рисунок:

http://t3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSn2PQ4Oo39KA10xDmNCm8GzJV9GvleP-Y7btMIPxvB8i3PaNJx

http://t3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSn2PQ4Oo39KA10xDmNCm8GzJV9GvleP-Y7btMIPxvB8i3PaNJxhttp://t3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSn2PQ4Oo39KA10xDmNCm8GzJV9GvleP-Y7btMIPxvB8i3PaNJx

Рис.2

Систему отсчёта свяжем со светофором, отсчёт времени будем вести с момента начала движения. Закон движения вдоль оси Оx имеет вид:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f1/fa/fc/1acb403b4b6f2af65eed57a874e1b69b.gif(1)

В данном случае x0=0, x=S, получим:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fa/f3/f8/a38c077337c2180812585736b572d274.gif(2)

Данное квадратное уравнение имеет два корня:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f4/f3/f8/438c790b7a6cb6db2586f7bbd2d473a4.gif

Ну вот, опять два корня! Тут то почему их два? Причём снова один из корней всё время отрицателен… Понятно, что по смыслу задачи нам нужен корень, в котором взят знак плюс:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f2/f1/fc/21c2b71dcd961ba50108794a2fd8183d.gif

Но чему соответствует корень, в котором взят минус:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f5/f8/fb/58bcfd9658b95cae3dc40ac85c1fdc65.gif

И опять математика выявляет то, что совсем не очевидно. Сейчас я сделаю небольшую перестановку в (2), и вы догадаетесь, в чём дело:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fb/fd/f7/bd70c42225d90b64b3402d1cdead13bc.gif(3)

Сопоставляя (1) и (3), видим, что уравнение (1) описывает не только исходную задачу, но и следующую:

«Автомобиль, находящийся на расстоянии S от светофора, начинает разгон с постоянным ускорением a. Проезжая мимо светофора, автомобиль имел скорость V0. За какое время автомобиль достиг светофора?»

Рисунок, соответствующий этой задаче, представлении ниже:

+ Рис.2

В данном случае система отсчёта определена однозначно, но вот движение в ней определено неоднозначно.

Нам опять показалось, что мы описали одну задачу, а математика выявила, что мы описали сразу две задачи, и дала ответ на обе.

Кстати, наблюдательный читатель заметит, что |t+|<|t-|, то есть в первом случае (начиная движение от светофора) автомобиль быстрее преодолел расстояние s, нежели во втором. Это легко объяснить: в первом случае автомобиль имел скорость v0 уже в начале движения, а во втором набрал ту же скорость только в конце движения.

Так что же делать, когда вы сталкиваетесь с «нежданными» корнями? Дам рекомендации для двух случаев:

Время на решение ограничено.

Если вы находитесь на экзамене, где время ограничено и нет возможности глубоко анализировать задачу, то руководствуйтесь физическим (а также здравым) смыслом.

В любом случае краткий анализ полученного результата проводить обязательно, так как один из корней может быть вовсе не лишним, а таким же равноправным.

Если же один из корней явно не подходит и сразу не понятно, почему он «вылез» (как в предыдущей задаче), то так и пишите: «отрицательный корень не подходит по смыслу задачи». Очень часто это можно определить сразу.

Думаю лишне говорить, что после, в спокойной обстановке, эту задачу нужно обязательно разобрать.

Время не ограничено.

Если время не поджимает, то обязательно проанализируйте, почему в результате решения появились неочевидные корни. Это – крайне полезно.

Вы не только лучше поймёте физическую суть задачи и перестанете бояться подобных ситуаций (а происходят они довольно часто), но и разовьёте в себе дух исследователя, что обязательно пригодится вам в будущем.

Справедливости ради я должен сказать и о другой интерпретации того факта, что система (4) имеет два корня.

Первое объяснение, как я уже сказал, заключалось в том, что рассматриваемое движение описывается одной и той же системой (4) в двух разных системах отсчёта:

+ РИС

Одно и то же движение в двух СО

Второе объяснение заключается в том, что в выбранной нами СО одной и той же системой уравнений (4) описываются два движения:

+ РИС

Одна СО, два варианта движения

Одно движение началось в начале координат выбранной СО, второе закончится в начале координат этой СО.

Какой из вариантов объяснения верный, решайте сами. Обе интерпретации являются совершенно равноправными.

Первая указывает на то, что одно и то же движение может быть рассмотрено в двух равноправных системах отсчёта. Второе указывает на то, что рассматриваемое движение неоднозначно описано в выбранной СО и допускает два варианта.

Todo

Рассказать о том, что на двойственность корней можно посмотреть с двух сторон – одно движение, две СО, или одна СО и два вида движения.

Задачи равноправны.

Задачи – дана не H, а L.

Всегда анализируйте результат

Твёрдо запомните – получаемый результат всегда должен согласовываться с физическим смыслом задачи. Если этого не происходит, то в ответ наверняка закралась ошибка. Смело проверяйте получаемые вами ответы на то, как они себя ведут при различных значениях входящих в них величин.

Например, если в задаче на движение тела, брошенного вертикально вверх, вы получили обратную зависимость между начальной скоростью и максимальной высотой подъёма тела (hmax~1/v0, с ростом v0, hmax падает), то будьте уверены – ответ неверен.

Проанализируем ответ к примеру 1:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f6/f7/f1/67129a52ec5ab28fea168f2fe0e906f5.gif(20)

Подкоренное выражение всегда больше ноля, поэтому всегда будет момент времени, в который тело находилось в точке А. Это происходит потому, что нахождение тела в точке A является частью условия задачи. Иначе говоря – мы заложили это в модель, а значит, тело в любом случае «доберётся до точки А».

При α=0 (sinα=0) задача имеет один корень. Физический смысл этого довольно прост – при α=0 скорость тела в точке А – горизонтальна, а значит точка A является наивысшей точкой траектории. Понятно, что на этой высоте тело побывает единожды.

При v=0 задача также имеет один корень. Мы знаем, что в случае движения тела в поле тяжести земли такое возможно только в случае, когда тело подброшено вертикально вверх и при этом находится в наивысшей точке траектории. Это также согласуется с ответом.

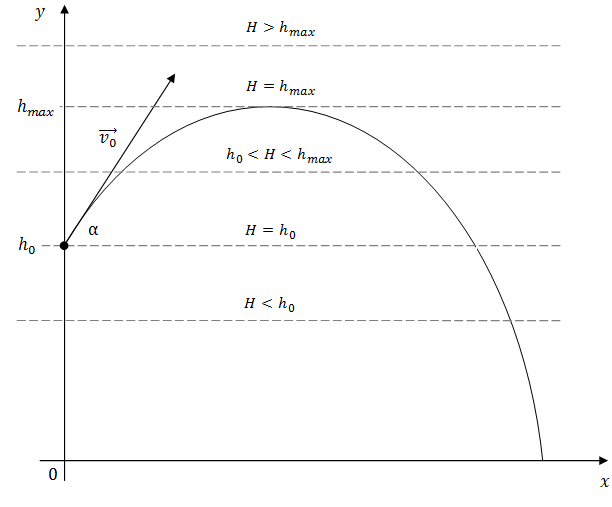
Зачастую в кинематике ответ можно проанализировать не только после его получения, но и до! Под «проанализировать ответ» я подразумеваю «предсказать характеристики искомого ответа». Рассмотрим пример.

Пример 1.

Тело брошено с высоты h0 с начальной скоростью v0, направленной под углом α к горизонту. Определите момент времени, в который тело находилось на высоте H.

Решение.

Ещё до того, как мы начнём писать формулы, предлагаю рассмотреть все возможные ситуации, которые должен описывать искомый ответ. Для удобства рассуждений приведу рисунок:



В отличие от прим 1, в данном случае не утверждается, что тело вообще сможет добраться до высоты H, поэтому ответ должен допускать ситуацию, при которой корней не будет.

На рисунке hmax – максимальная высота подъёма тела. Начало координат располагается на земле под точкой бросания. Отсчёт времени ведётся от момента бросания.

В зависимости от соотношения между h0, hmax и H возможны 5 ситуаций, и искомый нами ответ должен описывать их все:

H > hmax

Тело вообще не доберётся до высоты H, то есть корней – нет.

H = hmax

Тело побывает на заданной высоте единожды, в таком случае должен быть один корень.

h0<H<hmax

Тело побывает на заданной высоте дважды, таким образом, должно быть два корня. Оба корня – положительны, так как оба события произойдут после начала отсчёта времени.

H=h0

Тело побывает на заданной высоте дважды, но первый момент времени совпадает с началом отсчёта времени, а значит, один из двух корней равен нулю.

H<h0

Тело побывает на заданной высоте единожды, но корней будет два. При этом один из корней всегда будет отрицателен, так как он описывает ситуацию, в которой тело находилось на высоте H до начала отсчёта времени.

По поводу последнего случая. Тело, конечно, не будет фактически двигаться слева от вертикальной оси, но если не наложить одно из условий: x>0 или t>0, то исходная задача будет эквивалентна следующей:

«Тело брошено с поверхности земли так, что на высоте h0 оно имело скорость v0, направленную под углом α к горизонту. Определите момент времени, в который тело находилось на высоте H.».

В этой задаче тело побывает на высоте H<h0 дважды.

Итак, мы получили довольно солидный список ситуаций, которые должен описывать искомый ответ.

Решим задачу и проверим, всё ли выполняется. Нам достаточно уравнений движения вдоль вертикальной оси, которые в нашем случае имеют вид:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fd/f5/fa/d5a77ce132ad8186bdcb58f044e41046.gif

Время подъёма на максимальную высоту T определим, как и раньше, исходя из того, что v\_y(T)=0, откуда:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f0/fc/f0/0c091b0db12a6f39f2197c34d4f1c8bb.gif

С учётом этого определим максимальную высоту подъёма тела h\_max=y(T):

http://postupayu.ru/stuff/formules/f8/fe/ff/8efde0eb8a82f53c0a9d35f2093371aa.gif(1)

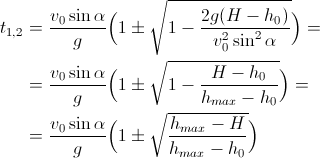
Для ответа на вопрос задачи решим уравнение y(t)=H, которое сводится к квадратному:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f0/fa/fa/0aaa21e63e9e093e2f14221395d62baf.gif

Данное уравнение имеет два корня:

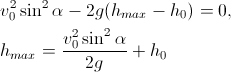
http://postupayu.ru/stuff/formules/f0/f8/f4/084b6ea1d47fe16b85b2933fcbef6c08.gif(2)

Полученное выражение и есть искомое решение поставленной задачи. Для упрощения проверки преобразуем выражение (2) с учётом выражения (1):



Посмотрим, соответствует ли оно всем нашим критериям.

Когда подкоренное выражение равно нулю, мы имеем всего один корень. Эта ситуация соответствует случаю H = hmax, получим:



При h0=0 задача сводится к задаче о теле, брошенном с поверхности земли под углом к горизонту. Её мы уже решали и получили именно такое выражение для максимальной высоты подъёма тела.

Для упрощения дальнейшего анализа, сделаем замену:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fe/f0/f9/e09e7a731f064b49fb0697cd3633f7f9.gif

С учётом этого, выражение (1) примет вид:

http://postupayu.ru/stuff/formules/fb/f5/f9/b59d670ffe5e25ddda87afff23cda13c.gif(2)

Выражения (1) и (2) позволят нам проверить все 5 критериев:

H > hmax

Тело вообще не доберётся до высоты H, то есть корней – нет.

Подкоренное выражение в (2) – отрицательно, значит – корней нет.

H = hmax

Тело побывает на заданной высоте единожды, в таком случае должен быть один корень.

Подкоренное выражение в (2) рано нулю, поэтому имеется ровно один корень:

T=v0sina/g. Это время соответствует времени подъёма на высоту Hmax.

h0<H<hmax

Тело побывает на заданной высоте дважды, таким образом, должно быть два корня.

Подкоренное выражение в (2) строго положительно, поэтому имеется два корня.

H=h0

Тело также побывает на заданной высоте дважды, но первый момент времени совпадает с моментом бросания, а значит, один из корней равен нулю.

Из (1) при H=h0, имеем:

http://postupayu.ru/stuff/formules/f5/f6/f7/5672dff24e44ce0745213d53ba364144.gif

Один корень равен нулю и соответствует моменту бросания, второй – больше ноля и равен:

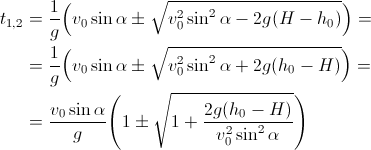
T=2v0sinA/g. В этот момент времени тело оказалось на высоте h0 во второй раз.

H<h0

Тело побывает на заданной высоте единожды, но корней будет два. Один из корней будет всегда отрицательным, так как он описывает ситуацию, в которой тело находилось на высоте H до начала отсчёта времени.

Подкоренное выражение в (2) строго положительно, поэтому имеется два корня.

Но из 1 получим:



Поскольку h0>H, значит второе слагаемое под корнем всегда положительно, а значит весь корень – больше единицы. Таким образом, один из корней всегда положителен, второй – всегда отрицателен.

Все наши предсказания сбылись, полученный ответ полностью согласуется с физическим смыслом задачи.

Кроме того, поскольку о конкретных значениях ничего не сказано, то они могут быть совершенно произвольными. Например, вполне может быть равной нулю, а начальная скорость направлена как вертикально вверх, так и горизонтально, и даже под углом вниз (при этом ). Начальная скорость может быть равной нулю, и тогда задача сведётся к задаче свободно падающего тела.

Посчитать общее количество частных случаев – хорошая комбинаторная задача, решите её самостоятельно, я же приведу лишь некоторые:

h0=0

Тело брошено с поверхности земли с начальной скоростью , направленной под углом к горизонту.

= 0

Тело свободно падает с высоты h0.

α = 0

Тело брошено горизонтально с высоты h0.

α = 90, h0=0

Тело брошено вертикально вверх с поверхности земли

α = 90, h0>0

Тело брошено вертикально вверх с начальной высоты h0

α = -90

Тело брошено вертикально вниз с начальной скоростью v0

α < 0

Тело брошено вниз c высоты h0 под углом |α| к горизонту

Думаю примеров достаточно. Некоторые из приведённых здесь случаев мы с вами рассматривали на предыдущем занятии, и их решения нам известны.

Теперь проанализируем, сводится ли полученный ответ к различным частным случаям: