Корреляционный анализ.

1 Переставим использованные при введении коэффициента корреляции Спирмэна пары рангов (R_i, S_i), $i = 1, \dots, n$, в порядке возрастания первой компоненты — получается набор $(1, T_1), \dots, (n, T_n)$. Доказать, что $\rho_S = 1 - \frac{12}{n^3-n} \sum\limits_{i<j} (j-i) I\{T_i > T_j\}$ и $\tau = 1 - \frac{4}{n^2-n} \sum\limits_{i<j} I\{T_i > T_j\}$, где τ — коэффициент корреляции Кэндалла.

2 Доказать, что при верной гипотезе о независимости выборок $\mathsf{E}\tau = 0$ и $\mathsf{D}\tau = 2(2n+5)/(9n(n-1))$, где τ – коэффициент корреляции Кэндалла.

3 Пусть $\{X_i^{(j)}\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$, — k выборок. Доказать, что ранговый коэффициент конкордации Кэндалла удовлетворяет соотношению

$$W = \frac{(k-1)\overline{\rho_S} + 1}{k},$$

где $\overline{\rho_S}$ – среднее арифметическое коэффициентов корреляции Спирмэна по всем $k(k-1)/2$ парам выборок.

4 Выданы выборки $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_n$. Определить на уровне значимости $\alpha = 0.05$, являются ли они зависимыми.

5 Выдано k выборок $\{X_i^{(1)}\}_{i=1}^n, \dots, \{X_i^{(k)}\}_{i=1}^n$. Проверить гипотезу о независимости выборок методами корреляционного анализа с помощью статистической процедуры, контролирующей FWER на уровне $\alpha = 0.05$. Являются ли выборки независимыми в совокупности? Если нет, укажите пары выборок, которые в результате проведённой статистической процедуры признаны зависимыми.

6 Выдано k выборок $\{X_i^{(1)}\}_{i=1}^n, \dots, \{X_i^{(k)}\}_{i=1}^n$. Пользуясь выборочным коэффициентом корреляции для оценки корреляции между выборками, проверить гипотезу о том, что распределение выборки векторов $X = (X_1, \dots, X_n)$, где $X_i = (X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(k)})^T$, является многомерным нормальным распределением, на уровне значимости $\alpha = 0.05$. *Указание.* Выборку из векторов следует разделить на 2 части, по первой части "обучать" коэффициенты корреляции, а по второй уже проверять нормальность с учётом оцененных параметров.