Анализ временных рядов.

1 Пусть временной ряд $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с нулевым матожиданием подчиняется модели авторегрессии $AR(2) : X_n = \alpha X_{n-1} + \beta X_{n-2} + \varepsilon_n$, где белый шум ε_n не зависит от X_{n-i}, $i \geq 1$. Доказать, что необходимыми условиями того, чтобы ряд X_n являлся стационарным в широком смысле, являются $|\alpha+\beta| \leq 1$, $|\alpha-\beta| \leq 1$.

2 В качестве оценки ковариационной функции $R(n)$ центрированного стационарного в широком смысле процесса $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ используется

$$\widehat{R}_N(m) := \frac{1}{N-m}\sum_{k=0}^{N-m-1} X_{m+k}X_k \quad \text{при } 0 \leq m \leq N-1,$$

положим также $\widehat{R}_N(m) := \widehat{R}_N(-m)$, если $0 \geq m \geq -N+1$, и 0 при всех остальных $m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что если X – гауссовский процесс, то следующие условия эквивалентны:

$$E(\widehat{R}_N(m) - R(m))^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} R^2(k) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

3 Выдан временной ряд $\{X_i\}_{i=1}^{n+k}$. Методами анализа временных рядов построить прогноз значений ряда $(\widehat{X}_{n+1}, \ldots, \widehat{X}_{n+2k})$ по первым n наблюдениям. Визуализировать прогноз на графике в сравнении с истинными значениями ряда.

4 Простым экспоненциальным сглаживанием называется прогноз вида $\widehat{X}_{n+1|n} = \alpha X_n + \alpha(1-\alpha)X_{n-1} + \ldots,\ \alpha \in (0;1)$, его применяют в случае малого количества наблюдений и отсутствия тренда и сезонности. Выдан временной ряд $\{X_i\}_{i=1}^{n+k}$. Предсказать значения $(\widehat{X}_{n+1}, \ldots, \widehat{X}_{n+k})$ с помощью метода экспоненциального сглаживания и в рамках модели ARIMA, сравнить качество полученных прогнозов с помощью U-коэффициента Тейла (если он равен 1, то прогноз так же плох, как и наивный: $\widehat{X}_{n+1|n} = X_n$)

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(\widehat{X}_{n+i|n+i-1} - X_{n+i})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(X_{n+i} - X_{n+i-1})^2}}.$$

5 Выдан временной ряд $\{X_i\}_{i=1}^{n+k}$. Методами анализа временных рядов построить прогноз значений ряда $(\widehat{X}_{n+1}, \ldots, \widehat{X}_{n+2k})$ по первым n наблюдениям. С помощью STL-разложения по первым n наблюдениям построить другой прогноз. Визуализировать прогнозы на графике в сравнении с истинными значениями ряда.

6 Пусть $X_t, t \in \mathbb{R}$ – гауссовский центрированный стационарный процесс с ковариационной функцией $R(s,t) = e^{-|t-s|}$. Промоделировать этот процесс моделями AR(1) и AR(2). Вывести несколько траекторий смоделированных процессов. По полученным значениям оценить ковариационную функцию процесса (см. задачу 2) и сравнить её с истинным значением функции. Как зависит близость оценки к истинному значению от величины шага при моделировании?