

Проверка гипотез.

- 1 Пусть X_1, \dots, X_n – выборка из распределения $Cauchy(\theta)$. Построить оценку параметра θ методом моментов.
- 2 Пусть X_1, \dots, X_n – выборка из распределения $N(\theta, 1)$. Существует ли равномерно наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $H_0 : \theta = 0$ против альтернативы $H_1 : \theta \neq 0$?
- 3 Пусть X_1, \dots, X_n – выборка из распределения $\Gamma(\alpha, \theta)$, где α, θ – неизвестные параметры. Предложить критерий для проверки гипотезы $H_0 : \alpha = 1$ против альтернативы $H_1 : \alpha > 1$.
- 4 Выдана выборка X_1, \dots, X_n . Рассмотрим основную гипотезу $H_0 : X \sim Bin(m, p)$ против альтернативы $H_1 : X \sim Pois(\lambda)$, где m можно полагать известным. На основе байесовского критерия построить критерии различения H_0 и H_1 уровней значимости 0.01, 0.05, 0.1 для $n = 100, 250, 500$ с помощью моделирования.
- 5 Выдана выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения с плотностью $f_0(x; a, b)$ или $f_1(x; a, b)$, где $a \in \mathbb{R}$ – параметр сдвига, а $b > 0$ – параметр масштаба. Рассмотрим задачу различения гипотез $H_0 : X \sim f_0(x; a, b)$ против альтернативы $H_1 : X \sim f_1(x; a, b)$. Известно (см. Antle, Bain, 1969), что при такой постановке задачи статистика критерия отношения максимальных правдоподобий (RML-test)

$$RML = \frac{\max_{a,b} f_1(X; a, b)}{\max_{a,b} f_0(X; a, b)}$$

не зависит от параметров a, b . Представляя критерий в виде $\{(RML)^{1/n} > u_{1-\alpha}\}$, найти при $n = 50, 100, 200$ и при уровнях значимости $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ критические значения $u_{1-\alpha}$, а также мощность критерия.

- 6 Выдана выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из неизвестного распределения Q . Рассмотрим гипотезу $H_0 : Q \in \mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, где \mathcal{P} – некое (заданное семинаристом) семейство распределений. С помощью разделения (возможно, многократного) выборки на 2 части и построения по первой части оценки параметра θ проверить гипотезу H_0 и объяснить, почему критерий работает. Критерий должен правильно работать на достаточно большом количестве распределений.

Примечание. Использовать критерии согласия и известные критерии проверки принадлежности данному в задаче семейству распределений нельзя.