

# ANOVA.

- 1 Рассмотрим статистику критерия Пейджа  $L$ . Доказать, что

$$\frac{12L}{nk(k^2 - 1)} - \frac{3(k + 1)}{k - 1} = \overline{\rho_S},$$

где  $\overline{\rho_S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i$ , а  $\rho_i$  – коэффициент корреляции Спирмена, вычисленный между ранжировкой наблюдений  $i$ -того объекта (блока) и возрастающей ранжировкой.

- 2 Доказать, что статистика критерия Фишера однофакторного дисперсионного анализа имеет распределение Фишера с параметрами  $k - 1$  и  $N - k$  при условии, что все выборки независимы и одинаково нормально распределены.
- 3 Выданы независимые выборки  $X_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n_1}), \dots, X_k = (X_{k1}, \dots, X_{kn_k})$ . Решить задачу однофакторного дисперсионного анализа. Выполнены ли условия, при которых можно применять критерий Фишера?
- 4 Выданы наблюдения  $X = \{X_{ij}\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ . В рамках двухфакторного дисперсионного анализа проверить гипотезы об отсутствии влияния каждого из факторов. Можно ли пользоваться критерием Фишера двухфакторного дисперсионного анализа?
- 5 Пусть наблюдения  $\{X_{ij}\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ , подчиняются двухфакторной модели  $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ , где  $\varepsilon_{ij}$  – н.о.р. с ф.р.  $F$ . Исследовать, как ведут себя мощности критериев Пейджа и Фридмана при альтернативе  $H_1 : \beta_j = j\beta$ , где  $\beta > 0$ . Зависит ли мощность критериев от  $\beta$  и от вида функции распределения  $F$ ? Пояснить свои выводы графиками, варьируя на них  $n, k$  и  $\beta$ .
- 6 Пусть наблюдения  $\{X_{ij}\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ , подчиняются однофакторной модели  $X_{ij} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ , где  $\varepsilon_{ij} \sim t_i$ , т.е. имеют распределение Стьюдента с  $i$  степенями свободы, и независимы в совокупности. Рассмотрим критерий Фишера однофакторного дисперсионного анализа  $\{R > u_{0.95}\}$ , где  $u_{0.95}$  – 0.95-квантиль распределения Фишера  $F_{k-1, nk-k}$ . Выбрав  $k = 10$ , исследовать, как меняется уровень значимости критерия Фишера при верной гипотезе о том, что все  $\beta_j$  равны, при увеличении  $n$  (начинать от  $n = 2$ ). Как вы можете это объяснить?