Критерии согласия и проверка нормальности.

1 Для проверки гипотезы о том, что выборка взята из распределения с непрерывной функцией распределения F, используется статистика Андерсона-Дарлинга

$$\Omega_n^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{(F_n^*(y) - F(y))^2}{(1 - F(y))F(y)} dF(y),$$

где $F_n^*(y)$ – эмпирическая функция распределения данной выборки. Доказать, что при выполнении основной гипотезы распределение статистики Ω_n^2 не зависит от распределения с функцией распределения F.

2 Доказать, что для статистики критерия Смирнова-Крамера-Мизеса $\omega_n^2 = \int (F_n^*(y) - F(y))^2 dF(y)$ верно следующее соотношение:

$$n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left(F(X_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2.$$

3 Выдана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Определить, из какого распределения эта выборка.

4 Выдана выборка $X_1, \ldots, X_n$. Определить, из какого распределения эта выборка.

5 Для критерия Андерсона-Дарлинга $\{n\Omega_n^2 > u_{1-\alpha}\}$ с помощью моделирования найти критические значения $u_{1-\alpha}$ при $n = 25, 100, 500, 2000$ и $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$. Пользуясь полученными критическими значениями, сравнить мощности критериев Андерсона-Дарлинга и Колмогорова при проверке гипотезы $H_0 : P = N(0, 1)$ против альтернативы $H_1 : P = T(10)$, где $T(10)$ – распределение Стьюдента с 10 степенями свободы.

6 Выдана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из дискретного распределения P, сосредоточенного на множестве $\{0, 1, 2\}$. Проверить гипотезу $H_0 : P \in \mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in (0; 0,5)\}$ против альтернативы $H_1 : P \notin \mathcal{P}$, где

$$P_\theta(\{0\}) = -\frac{\sqrt{\theta}}{\ln \theta}, \quad P_\theta(\{1\}) = \frac{1}{2} e^{-\theta}, \quad P_\theta(\{2\}) = 1 + \frac{\sqrt{\theta}}{\ln \theta} - \frac{1}{2} e^{-\theta}.$$

Замечание. В задачах 3 и 4 пользоваться критериями принадлежности определённому типу распределения (которые не были рассказаны на лекции) можно, если вы объясните необходимость применения этого критерия.