ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЕГАЗОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И.С. Лобанова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие по дисциплине: «Математика»
для студентов заочной формы обучения
для всех специальностей
Семестр I

Тюмень

2010

Оглавление

Введение	4
1. Матрицы и определители	5
1.1. Понятие матрицы	5
1.2. Алгебраические операции над матрицами	6
1.3. Определители и их свойства	8
1.4. Обратная матрица	11
1.5. Ранг матрицы	12
1.6. Системы линейных уравнений	14
2. Векторная алгебра	21
2.1. Понятие вектора	21
2.2. Линейные операции над векторами	22
2. 3. Проекция вектора на ось	23
2.4. Линейная зависимость векторов	24
2.5. Базис. Координаты вектора	24
2.6. Прямоугольная (декартова) система координат	25
2.7. Скалярное произведение векторов	26
2.8. Векторное произведение векторов	27
2.9. Смешанное произведение векторов	28
3. Прямые и плоскости	30
3.1. Определение прямой на плоскости	30
3.2. Виды уравнений прямой на плоскости	30
3.3. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых	31
3.4. Определение плоскости в пространстве	31
3.5. Виды уравнений плоскости	32
3.6. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей	33
3.7. Определение прямой в пространстве	33
3.8. Виды уравнений прямой в пространстве	34

3.9. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых 34
3.10. Условие принадлежности прямых одной плоскости 35
3.11. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости 37
4. Кривые второго порядка 37
4.1. Эллипс 37
4.2. Гипербола 38
4.3. Парабола 39
5. Поверхности второго порядка 40
5.1. Классификация поверхностей 40
5.2. Исследование поверхностей методом сечений 41
Пример контрольной работы и образец ее решения 45
Варианты контрольных работ 62
Рекомендуемая литература 92

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие курса «Линейная алгебра. Аналитическая геометрия» предназначено для студентов, обучающихся по заочной форме обучения, изучающих курс высшей математики.

Настоящее пособие разработано в соответствии с требованиями Государственного стандарта Министерства образования РФ 2005 года.

Особенность учебного пособия состоит в том, что в нем в аккумулятивной форме отражены все основные положения курса. Каждый раздел пособия содержит все наиболее существенные определения и теоремы и снабжен большим количеством примеров.

Необходимость в таком пособии обусловлена тем, что в настоящее время имеющиеся учебники, во-первых, объемны, во вторых, большинство из них содержат либо только теоретические положения, либо задания и не содержат примеров решения. Кроме того, студентам, особенно заочного отделения, бывает крайне затруднительно извлекать из множества источников необходимую информацию для усвоения вопросов курса высшей математики.

1. Матрицы и определители

1.1. Понятие матрицы

Матрицей называется всякая таблица элементов, состоящая из m строк и n столбцов.

Говорят, что число $m\times n$ называется размерностью матрицы.

Обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Размерность: $dimA=m\times n$.

a_{ij}-элемент матрицы, стоящий в i-той строке и j-том столбце.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

размерность матрицы: $\dim A=2\times 3$, элементы матрицы: $a_{23}=10$, $a_{12}=8$.

$$B = (1\ 4\ 5\ {-6})$$

- матрица-строка , $\dim B = 1\times 4$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- матрица-столбец, $\dim C = 3\times 1$

При $m=n$ матрица называется *квадратной*, число n называется порядком матрицы.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица третьего порядка, $n=3$

Элементы квадратной матрицы a_{ij} при $i=j$ образуют *главную* диагональ матрицы.

Квадратная матрица, образованная элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если} \quad i = j, \\ 0, \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

называется *единичной* матрицей.

Пример. Единичная матрица 4-го порядка.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица - матрица, у которой все элементы равны нулю. Нулевая матрица может быть любой размерности.

Матрица, все элементы которой выше либо ниже главной диагонали равны нулю, называется *треугольной* матрицей.

Пример. A - треугольная матрица.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 50 & 11 \\ 0 & 0 & 34 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & -45 \end{pmatrix}$$

1.2. Алгебраические операции над матрицами

1.2.1. Сложение

Суммой двух матриц A и B называется матрица C, каждый элемент которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Из определения следует, что можно складывать матрицы только одинаковой размерности.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix},\quad C=A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}$$

Свойства операции сложения.

1) коммутативность $A+B=B+A$

2) ассоциативность $(A+B)+C=A+(B+C)$

1.2.2. Произведение матрицы на число

Произведением матрицы A на число λ называется матрица C, каждый элемент которой $c_{ij}=\lambda a_{ij}$.

Свойства.

1) ассоциативность $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

2) дистрибутивность

- относительно сложения чисел $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
- относительно сложения матриц $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix},\quad 3\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ -9 & 12\end{pmatrix}$$

1.2.3. Операция транспонирования матриц

Матрица B называется *транспонированной* по отношению к матрице A, если строками матрицы B являются столбцы матрицы A, а столбцами – строки.

Обозначение: $B=A^T$

Свойство операции транспонирования – *рефлексивность*: $(A^T)^T=A$

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 5 & -7\end{pmatrix}\qquad A^T=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 5\\ 1 & -7\end{pmatrix}$$

dim A=2×3 , dim A^T=3×2

Замечание. В случае, если $A^T=A$, матрица называется симметрической, например:

$$A=\begin{pmatrix} 3\,5\,7 \\ 5\,6\,9 \\ 7\,9\,0 \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} 3\,5\,7 \\ 5\,6\,9 \\ 7\,9\,0 \end{pmatrix}.$$

1.2.4. Произведение матриц

Произведением матрицы A $dim\ A=m\times p$ и матрицы B $dim\ B=p\times n$ называется матрица C $dim\ C=m\times n$, каждый элемент которой c_{ij} равен «произведению i-той строки матрицы A на j-тый столбец матрицы B».

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Из определения следует, что умножать можно только те матрицы, у которых *число столбцов первой* матрицы равно *числу строк второй*.

Свойства операции умножения.

- ассоциативность $(AB)C=A(BC)$;
- дистрибутивность $A(B+C)=AB+AC$;
- существование нейтрального элемента (единичной матрицы): $AE=EA=A$;
- связь между операцией транспонирования и произведением матриц: $(AB)^T=B^TA^T$.

Замечания.

1) Умножение матриц не коммутативно, то есть $AB\neq BA$;

2) Обратной операции - деления не существует.

3) Если $AB=BA$, то в этом случае матрицы A и B называются коммутатирующими.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Dim A=2×3, dim B=3×3.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 2\cdot 5+0\cdot(-1)+1\cdot 0 & 2\cdot 0+0\cdot 3+1\cdot 4 & 2\cdot 2+0\cdot 0+1\cdot 1 \\ -5+(-3)+4\cdot 0 & -1\cdot 0+9+16 & -1\cdot 2+3\cdot 0+4\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 \\ -8 & 25 & 3 \end{pmatrix}$$

Dim C=2×3.

1. 3. Определители и их свойства

1.3.1. Правило вычисления определителей 2-го порядка

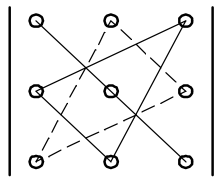
Определитель матрицы *второго порядка* есть число, равное произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов второй диагонали.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

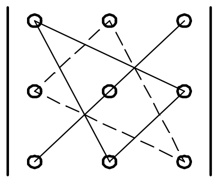
1.3.2. Вычисление определителей 3-го порядка

Правило *треугольников*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



—



$=a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$=1\cdot(-2)\cdot4+2\cdot(-1)\cdot5+0\cdot3\cdot(-3)-[2\cdot(-2)\cdot(-3)+1\cdot3\cdot5+0\cdot(-1)\cdot4] = -27-18= -45$

1.3.3. Вычисление определителей разложением по строке (столбцу)

Пусть A- квадратная матрица порядка n.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента матрицы a_{ij} называется определитель ($n-1$)-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-той строки и j-того столбца, взятый со знаком «+», если сумма $i+j$ четная, и со знаком «-», если нечетная.

Определитель порядка $n>1$ равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots a_{1n} \cdot A_{1n} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Пример. Вычислить определитель разложением по строке либо столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по первой строке.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-23) - 0 + 2 \cdot (-11) = -23 - 22 = -45$$

Ответ: -45.

1.3.4. Вычисление определителей путем приведения матрицы к треугольному виду.

Этот метод называют также методом *элементарных преобразований*.

Определитель *треугольной* матрицы равен *произведению элементов главной* диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11.}a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots a_{nn}$$

Произвольная матрица приводится к треугольному виду методом элементарных преобразований.

Под элементарными преобразованиями понимают умножение какой-либо строки (столбца) на число $\lambda \neq 0$ и добавление к другой строке (столбцу).

Замечание. Элементарные преобразования обратимы, т.е. если матрица *A* может быть получена из матрицы *B* элементарными преобразованиями, то матрица *B* также может быть получена из *A* обратными им элементарными преобразованиями.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix} \cdot 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix} \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -5{,}5 \end{pmatrix}$$

1. Умножим первую строку матрицы на (*-3*) и прибавим ее ко второй строке. Результат запишем во второй строке новой матрицы.

2. Умножим первую строку матрицы на *2* и прибавим ее к третьей строке. Результат запишем в третьей строке новой матрицы.

3. Умножим вторую строку матрицы на *5/4* и прибавим ее к третьей строке. Результат запишем в третьей строке новой матрицы.

Получим треугольную матрицу, определитель которой равен произведению элементов главной диагонали.

$\det A = 1 \cdot 4 \cdot (-5{,}5) = -22$

Ответ: -22.

1.3.5. Свойства определителей

1) При транспонировании матрицы определитель не изменяется, т.е. $\det A = \det(A^T)$

2) При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на обратный.

3) При круговой перестановке строк (столбцов) определитель не изменяется.

4) Если в определителе есть две одинаковые строки (столбца), то определитель равен 0; если одна из строк (столбцов) матрицы получается из другой строки (столбца) умножением на некоторый множитель, то определитель равен 0.

5) При умножении матрицы порядка n на число λ определитель умножается на λ^n.

6) При умножении одной строки (столбца) на число λ определитель умножается на это число.

1.4. Обратная матрица

1.4.1. Определение обратной матрицы

Матрица B называется *обратной* для квадратной матрицы A, если $AB = BA = E$, где E - единичная матрица.

Обозначение: $B = A^{-1}$

Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы: для того, чтобы для матрицы A существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы A был *отличен от нуля*. Если обратная матрица существует, то она единственная.

Элементы обратной матрицы даются формулой: $a_{ij} = A_{ji} / \det A$

Замечание. Если $\det A = 0$, то матрица называется *вырожденной*.

Свойства обратной матрицы.

1) $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

1.4.2. Методы вычисления обратной матрицы

а) Метод присоединенной матрицы.

1) вычисляем $\det A$;

2) находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы;

3) составляем матрицу алгебраических дополнений A^V, которая и называется присоединенной матрицей;

4) транспонируем A^V и делим каждый элемент матрицы на $\det A$:

$$A^{-1} = (A^V)^T / \det A.$$

Пример. Найти обратную матрицу для заданной матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Вычисляем определитель: $\det A = -2$.

2) Находим алгебраические дополнения элементов матрицы $A_{11}=5$; $A_{12}=-(-4)=4$; $A_{21}=-(-3)=3$; $A_{22}=2$.

3) Составляем матрицу алгебраических дополнений:

$$A^V = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Транспонируем матрицу алгебраических дополнений и делим каждый ее элемент на определитель матрицы A:

$$(A^V)^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

б) Метод элементарных преобразований.

Берем матрицу A и составляем расширенную матрицу (A/E):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} & 1 & 0\ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} & 0 & 1\ldots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} & 0 & 0\ldots & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0\ldots & 0 & \text{ОБРАТНАЯ} \\ 0 & 1\ldots & 0 & \\ 0 & 0\ldots & 1 & \text{МАТРИЦА} \end{array}\right)$$

Элементарными преобразованиями над строками матрицы (A/E) она приводится к виду (E/A), т.е. слева стоит единичная матрица, а справа получаем обратную матрицу.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad A/E=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 7 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/4 & -5/4 & 1/4\\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/4 & -5/4 & 1/4\\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -5/4 & 3/4\\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4\end{array}\right),\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & -5/4 & 1/4\\ -1/4 & -5/4 & 3/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4\end{pmatrix}.$$

1.5. Ранг матрицы

1.5.1. Определение ранга матрицы

Пусть A - произвольная матрица размерности $m\times n$.

Возьмем k столбцов и k строк матрицы A, где $k\le\min(m,n)$.

Определение. Минором M матрицы A называется определитель k-го порядка, полученный на пересечении k строк и k столбцов матрицы A.

Пример. Дана матрица A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 9\\ 11 & 4 & 16 & -5\\ 41 & 2 & -7 & 7\\ 3 & 8 & 6 & -1\end{pmatrix}$$

$$M_{1,3}^{2,3}=\begin{vmatrix}11 & 16\\ 41 & -7\end{vmatrix}=-733,\quad M_{3,4}^{1,2}=\begin{vmatrix}0 & 9\\ 16 & -5\end{vmatrix}=-144-\text{миноры } 2-\text{го порядка}$$

$$M_{1,2,4}^{2,3,4}=\begin{vmatrix}11 & 4 & -5\\ 41 & 2 & 7\\ 3 & 8 & -1\end{vmatrix}\ne 0 \qquad -\text{минор } 3-\text{го порядка}$$

$$M=\det A=\begin{vmatrix}1 & -3 & 0 & 9\\ 11 & 4 & 16 & -5\\ 41 & 2 & -7 & 7\\ 3 & 8 & 6 & -1\end{vmatrix}\ne 0$$

Максимальный порядок миноров данной матрицы равен *четырем*.

Рангом матрицы называется наивысший из порядков не равных нулю миноров этой матрицы.

Обозначение: rang A или r(A). В примере r(A)=4.

Пример. Дана матрица A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

det$A$=0, все миноры второго порядка равны 0.

Минор 1-го порядка $M=|3|=3\neq 0$, следовательно, r(A)=1.

1.5.2. Методы вычисления ранга матрицы

а) Метод окаймляющих миноров.

Суть метода:

1) берут не равный нулю минор небольшого, обычно 2-го порядка и рассматривают все миноры 3-го порядка, которые содержат (окаймляют) данный. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен 2;

2) если хотя бы один из миноров 3-го порядка не равен нулю, то берут те миноры 4-го – порядка, которые содержат данный ненулевой и вычисляют их. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен 3;

3) если хотя бы один из миноров 4-го порядка не равен нулю, то продолжают процесс.

б) Метод элементарных преобразований.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Суть метода: элементарными преобразованиями обнуляют как можно большее число элементов матрицы, тогда вычисление ранга не вызывает затруднений.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 9\\ 11 & 4 & 16 & -5\\ 4 & 2 & -7 & 8\\ 3 & -8 & 6 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 37 & 16 & 94\\ 0 & 14 & -7 & -28\\ 0 & 1 & 6 & -28\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 6 & -28\\ 0 & 2 & -1 & -4\\ 0 & 37 & 6 & -28\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 6 & -28\\ 0 & 0 & -13 & 52\\ 0 & 0 & -216 & 1064\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 6 & -28\\ 0 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -27 & 133\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 6 & -28\\ 0 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 25\end{pmatrix}$$

1) Умножим первую строку матрицы на (-11) и прибавим ко второй; умножим первую строку на (-4) и прибавим к третьей; умножим первую строку на (-3) и прибавим к четвертой.
2) Поменяем местами вторую и четвертую строки матрицы.
3) Умножим вторую строку матрицы на (-2) и прибавим к третьей; умножим вторую строку на (-37) и прибавим к четвертой.
4) Разделим третью строку на 13; разделим четвертую строку на 8.
5) Умножим третью строку матрицы на (-27) и прибавим к четвертой, получим треугольную матрицу, определитель которой не равен нулю.

Rang (A)=4.

1.6. Системы линейных уравнений

1.6.1. Определение системы

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots ax = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots ax = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

В матричной форме записи: $AX=B$, где A-матрица коэффициентов, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$m \times n \qquad\qquad n \times 1 \qquad m \times 1$$

Решением системы линейных уравнений называется всякий столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

удовлетворяющий матричному уравнению $AX=B$.

1.6.2. Классификация систем

1) $AX=O$ (B=O) - однородная система.
2) $AX=B$ ($B\neq$O) - неоднородная система.

1.6.3. Крамеровские системы

Неоднородная система линейных уравнений называется *крамеровской*, если выполнены следующие условия:

1) $m = n$, т.е. число уравнений равно числу неизвестных;
2) $\det A \neq 0$ – определитель матрицы коэффициентов не равен нулю.

Иначе: система линейных уравнений *крамеровская*, если A – *квадратная невырожденная* матрица.

Т.к. A – квадратная матрица, то существует обратная матрица A^{-1}, тогда решение системы дается формулой:

$$X=A^{-1}B.$$

Правило Крамера в матричной форме записи:

$$X_i = \frac{\Delta i}{\Delta}$$

Здесь Δ равен определителю матрицы коэффициентов, Δ_I есть определитель матрицы коэффициентов, в котором на месте i-го столбца стоит столбец свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

1) Вычисляем $\det A = \Delta$ и определители Δ_i:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -2$$

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{2}{2} = 1; \quad x_3 = \frac{-2}{2} = -13.$$

Ответ: решение системы

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1.6.4. Произвольные неоднородные системы

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots ax_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots ax_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система называется *совместной*, если у нее существует хотя бы одно решение.

Главную роль в определении совместности системы играет ранг матрицы. Составим матрицу (A/B), которая называется *расширенной* матрицей.

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Теорема *Кронекера – Капелли.* Для того чтобы система линейных уравнений была совместна (т.е. имела решение), необходимо и достаточно, чтобы rang$A$=rang (A/B).

Теорема о числе решений неоднородной системы: пусть для системы из m уравнений с n неизвестными выполнено условие совместности, т.е. r(A)= r(A/B)= r.

Тогда: если $r = n$, то система имеет единственное решение.

Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

При этом (n - r) - неизвестным придают произвольное значение, они называются свободными неизвестными;

r - число базисных неизвестных.

Пример. Решить систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу:

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 8 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

Определим ранги r(A) и r(A/B).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 8 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & -4 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 13 & -7 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 20 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0,2 & 6,4 & -6,6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 20 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 32 & 33 \end{array}\right), \quad M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad M(A/B) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 20 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 33 \end{vmatrix} \neq 0$$

r(A) =r(A/B)=3<4, следовательно, система имеет бесконечное множество решений;

n-r=4-3=1 - одна свободная неизвестная.

r = 3 - три базисных неизвестных.

Т.к. r = 3 , то выберем ненулевой минор третьего порядка, который назовем базисным минором.

$$M_{1,2,3-строки}^{1,2,3-столбцы} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Т.к. в базисный минор входили коэффициенты при x_1, x_2, x_3, то эти неизвестные будут базисными, оставшаяся x_4- свободной.

Перепишем систему в виде:

x_1-2x_2-3x_3 =2+5x_4

2x_1+x_2+4x_3=3-x_4

3x_1-3x_2+8x_3=-1+2x_4

Полученная система является крамеровской, т.к. определитель матрицы коэффициентов есть ненулевой минор третьего порядка.

По правилу Крамера выразим x_1, x_2, x_3 через x_4.

x_1= 30 + 71x_4

x_2= -7-15x_4

x_3= -14-32x_4

Обозначим x_4=C (произвольная константа), тогда общее решение системы имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 30 + 71C \\ -7 - 15C \\ -14 - 32C \\ C \end{pmatrix}$$

Придавая C различные значения, мы получим бесконечное множество частных решений системы.

Например, $X(C=0)=\begin{pmatrix}30\\-7\\-14\\0\end{pmatrix}$ $X(C=1)=\begin{pmatrix}101\\-22\\-46\\1\end{pmatrix}$.

1.6.5. Однородные системы

Пусть дана однородная система m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots ax_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots ax_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое (тривиальное) решение X=0.

Теорема *о решении однородной системы*. Для того чтобы однородная система с n неизвестными имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы r(A)<n.

При m=n условие r(A)<n означает, что определитель матрицы коэффициентов равен нулю.

Пример. Решить систему линейных однородных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1\text{-}4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1\text{-}6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1\text{-}8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$n=4$ – число неизвестных.

1) Вычислим r(A) методом окаймляющих миноров.

$$M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{1,2}^{3,4} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$M_{1,2,3}^{1,3,4} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 17 & 11 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{1,2,3}^{2,3,4} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ -6 & 4 & 2 \\ -8 & 17 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

Следовательно, r(A)=2.

2) $M_{1,2}^{3,4}$ выберем в качестве базисного, тогда система уравнений запишется в виде:

$5x_3+3x_4=-2x_1+4x_2$

$4x_3+2x_4=-3x_1+6x_2$

x_1,x_2-свободные неизвестные, $x_{3,4}$-связнные.

Выразим x_3,x_4 через x_1, x_2

x_3=-2,5x_1+5x_2

x_4=-3,5x_1-7x_2.

3) Обозначим: $x_1=C_1$, $x_2=C_2$, тогда общее решение системы:

$$X=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -2{,}5C_1+5C_2 \\ -3{,}5C_1-7C_2 \end{pmatrix}$$

Частные решения:

$$\underset{ч.р}{X}(c_1=0, c_2=1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \underset{ч.р}{X}(c_1=1, c_2=0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$$

Замечание. Если однородная система имеет *хотя бы одно* нетривиальное решение, то она имеет бесконечное множество решений.

Общее решение системы есть формула, которая отражает решения системы как функцию свободных неизвестных.

1.6.6. Метод Гаусса решения систем неоднородных уравнений

Методом Гаусса решаются неоднородные системы уравнений АХ=В.

Суть метода Гаусса:

1) систему уравнений приводят к треугольному виду;
2) определяют свободные и связанные неизвестные;
3) составляют крамеровскую систему и решают по правилу Крамера;
4) записывают общее решение системы.

Замечание. В методе Гаусса ранг матрицы определяется автоматически.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=0 \\ 3x_1+x_2-x_3\text{-}x_4=\text{-}2 \\ 3x_1+8x_2-x_3-3x_4=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{-}x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 7x_2+x_3-3x_4=4 \\ 7x_2+2x_3-4x_4=4 \\ 14x_2+2x_3-6x_4=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 7x_2+x_3-3x_4=4 \\ x_3=0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу преобразованной системы и найдем ее ранг.

$$A/B=\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ тогда}$$

$rangA = rang(A/B) = 3$, x_4 - свободная неизвестная; x_1, x_2, x_3 – базисные неизвестные. Выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 + x_4 \\ 7x_2 + x_3 = 4 + 3x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_4=C$, тогда $7x_2=4+2C$, $x_2=4/7+2C/7$, $x_1=4C/7-6/7$.

Ответ: общее решение системы $X=\begin{pmatrix} -6/7+4C/7 \\ 4/7+2C/7 \\ 0 \\ C \end{pmatrix}$.

Методом Гаусса решаются так же крамеровские системы, т.е. системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных и $\det A \neq 0$. В этом случае мы сразу получаем единственное решение системы.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}.$$

Решение: 1) умножим первое уравнение на (-2) и прибавим его ко второму уравнению;

2) умножим первое уравнение на (-5) и прибавим его к третьему уравнению; получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ \quad x_2 - 3x_3 = 4 \\ \quad -3x_2 + 11x_3 = -14 \end{cases}.$$

3) Умножим второе уравнение системы на 3 и прибавим его к третьему уравнению:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ \quad x_2 - 3x_3 = 4 \\ \qquad 2x_3 = -2 \end{cases}.$$

4) Найдем последовательно x_3, x_2, x_1.

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Векторная алгебра

2.1. Понятие вектора

Вектором называется *направленный отрезок* прямой, то есть отрезок, относительно которого указано, какая из его точек является началом, какая концом.

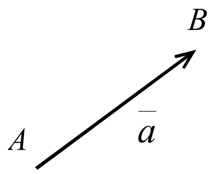


Рис.2.1.

Вектор можно обозначать $\overline{AB}$, где A – начало вектора, B - его конец, или $\overline{a}$.

Длиной или *модулем* вектора называется расстояние между началом и концом вектора, обозначают $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$.

Единичным вектором называется вектор $\overline{e}$, модуль которого равен единице: $|\overline{e}|=1$.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало совпадает с концом. Обозначается: $\overline{0}$.

Нулевой вектор не имеет ни длины, ни направления.

Два вектора называются *равными*, если они имеют равные длины и совпадающие направления.

Ортом вектора $\overline{a}$ называется единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$. Обозначается:

$$\overline{a^0} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}.$$

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны одной и той же прямой. Коллинеарные вектора могут быть:

- сонаправленными, обозначают: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$;

- противоположно направленными, обозначают: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Три вектора называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости.

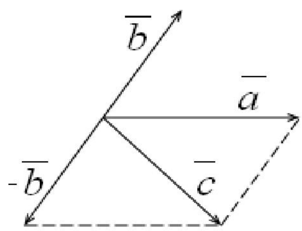
2.2. Линейные операции над векторами

1. *Суммой двух векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$, получаемый по правилам:

а) правило треугольника; б) правило параллелограмма.

Рис.2.2.

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, если $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$, разность векторов обозначается $\bar{a}-\bar{b}$.



$$\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$$

Рис.2.3.

2. *Произведением вектора* $\bar{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\bar{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\lambda\bar{a}|=|\lambda||\bar{a}|$ - модуль вектора $\lambda\bar{a}$ равен произведению модуля вектора $\bar{a}$ на модуль числа λ;

2) $\lambda\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{a}$ - векторы сонаправлены, если $\lambda>0$,

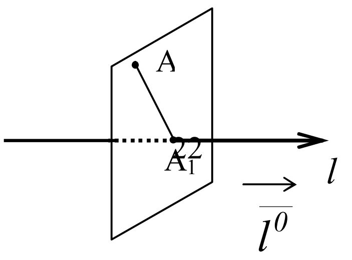
$\lambda\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{a}$ - векторы противоположно направлены, если $\lambda<0$.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\bar{b}=\lambda\bar{a}.$$

2. 3. Проекция вектора на ось

Углом между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший из двух углов φ ($0\le\varphi\le\pi$), на который надо повернуть один вектор, чтобы его направление



совпало со вторым вектором после приведения этих векторов к общему

Рис.2.4.

началу: $\varphi = \left(\hat{\bar{a}, \bar{b}} \right)$.

Рассмотрим ось l, положительное направление которой задано единичным вектором $\overline{l^0}$ (ортом оси).

Проекцией точки A на ось l называется точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно оси l - точка A_1.

Рассмотрим произвольный вектор $\overline{AB}$. Пусть точка A_1 – проекция начала вектора на ось, B_1 - проекция конца вектора.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число,

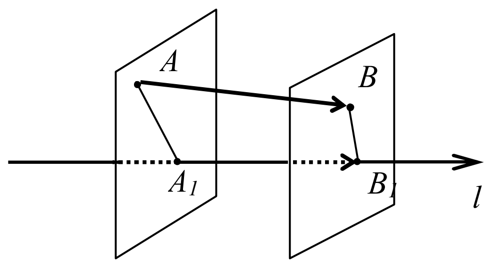


Рис.2.5.

равное модулю вектора проекции $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если угол φ между вектором $\overline{A_1B_1}$ и осью $\overline{l^0}$ острый, и отрицательное число $-\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если угол между вектором $\overline{A_1B_1}$ и осью $\overline{l^0}$ - тупой.

Обозначается проекция вектора $np_{\bar{l}}\bar{a}$ и вычисляется по формуле: $np_{\bar{l}}\bar{a} = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi$.

2.4. Линейная зависимость векторов

Выражение $c_1\overline{a_1} + c_2\overline{a_2} + \ldots + c_n\overline{a_n}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ с коэффициентами $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ называются *линейно зависимой*, если их линейная комбинация обращается в ноль $c_1\overline{a_1} + c_2\overline{a_2} + \ldots + c_n\overline{a_n} = \bar{0}$ при $c_1, c_2, \ldots, c_n$, не равных нулю одновременно; и *линейно независимой*, если $c_1\overline{a_1} + c_2\overline{a_2} + \ldots + c_n\overline{a_n} = \bar{0}$ только тогда, когда все коэффициенты $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$.

Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Любые два неколлинеарных вектора линейно независимы. Любая система из трех векторов на плоскости линейно зависима.

Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Любые три некомпланарных вектора линейно независимы. Любая система из четырех векторов в пространстве линейно зависима.

2.5. Базис. Координаты вектора

Пусть V – векторное пространство. *Базисом* в пространстве V называется всякая система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$, которая линейно независима и полна (т. е. всякий вектор пространства можно выразить через данную систему векторов).

Обозначим через V_1 – множество векторов на прямой; V_2 – множество векторов на плоскости; V_3 - множество векторов в пространстве.

Базисом в V_1 называется любой ненулевой вектор; **в** V_2 – любая пара неколлинеарных векторов; **в** V_3 – любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Теорема *о разложении вектора по базису*: Любой вектор можно разложить по базису единственным образом:

1) в V_1: $\overline{a} = x_1\overline{e_1}$;
2) в V_2: $\overline{a} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}$;
3) в V_3: $\overline{a} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3}$.

2.6. Прямоугольная (декартова) система координат

Системой *прямоугольных* (*декартовых* координат) называется совокупность точки O и базиса, обозначаемого $(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$ и удовлетворяющего условиям:

1) $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$;
2) $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$,
3) тройка векторов $(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$ - правая.

Любой вектор $\bar{a}$ можно представить в виде разложения по базису

$(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})$: $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

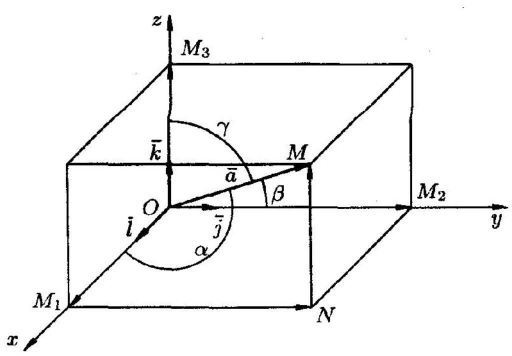


Рис.2.6. Вектор в прямоугольной декартовой системе координат.

,

Числа *x, y, z* называются *прямоугольными* (*декартовыми*) координатами вектора $\overline{a}$.

Геометрический смысл координат вектора – координаты вектора есть проекции этого вектора на координатные оси:

$$x = np_{\overline{i}}\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\alpha,\ \alpha = \left(\overline{a},\overset{\wedge}{\ }\overline{i}\right);$$

$$y = np_{\overline{j}}\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\beta,\ \beta = \left(\overline{a},\overset{\wedge}{\ }\overline{j}\right);$$

$$z = np_{\overline{k}}\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\gamma,\ \alpha = \left(\overline{a},\overset{\wedge}{\ }\overline{k}\right).$$

Cosα, cosβ, cosγ - называются направляющими косинусами вектора.

Пусть даны точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и точка $M_2(x_2,y_2,z_2)$, тогда вектор $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$.

Координаты вектора $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Модуль вектора $\overline{M_1M_2}$, равный расстоянию между точками M_1 и M_2, находится по формуле:

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Рассмотрим векторы $\overline{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\overline{b}(x_b; y_b; z_b)$, тогда

- если $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, то $\overline{c}(x_a+x_b; y_a+y_b; z_a+z_b)$;
- если $\overline{c} = \lambda\overline{a}$, то $\overline{c}(\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a)$.

Условие коллинеарности векторов в координатной форме: векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны ($\overline{a}=\lambda\overline{b}$) тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda\ .$$

Координаты середины отрезка M_1M_2:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

2.7. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right).$$

Алгебраические свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ - свойство коммутативности;

2) $\bar{a}\cdot\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ - скалярное произведение вектора на себя равно квадрату модуля вектора;

3) $(\alpha\bar{a})=\alpha(\bar{a}\bar{b})$ – свойство ассоциативности;

4) $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}$ - свойство дистрибутивности.

Геометрические свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a} \perp \bar{b}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}\bar{b}=0$ – *условие ортогональности* векторов;

2) Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляют:

- острый угол, если $\bar{a}\,\bar{b}>0$;
- тупой угол, если $\bar{a}\,\bar{b}<0$;

Скалярное произведение в координатах двух векторов $\bar{a}(x_a;y_a;z_a)$ и $\bar{b}(x_b;y_b;z_b)$ есть число, равное сумме произведений одноименных координат:

$$\bar{a}\bar{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b.$$

Из определения скалярного произведения вытекают следующие формулы:

- *косинус угла* между векторами $\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right) = \dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$;

- *проекция* вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ равна $пр_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{b}|} = |\bar{a}|\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$.

2.8. Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a}\times\bar{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$;

2) $\bar{a}\times\bar{b} \perp \bar{a}$, $\bar{a}\times\bar{b} \perp \bar{b}$;

3) тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{b}$ - правая (кратчайший поворот от вектора к вектору происходит против часовой стрелки).

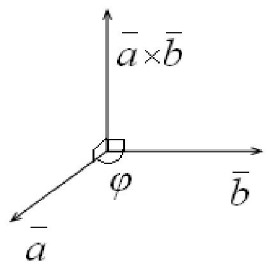


Рис.2.7. Векторное произведение векторов

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$ - свойство *антикоммутативности*;

2) $(\alpha\bar{a})\times\bar{b}=\alpha(\bar{a}\times\bar{b})$ – свойство ассоциативности;

3) $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{0}$ - векторное произведение вектора на себя равно нулю.

Геометрические свойства векторного произведения:

1) вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, если $\bar{a}\times\bar{b}=0$;

2) модуль векторного произведения $|\bar{a}\times\bar{b}|$ равен площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - *геометрический смысл* векторного произведения.

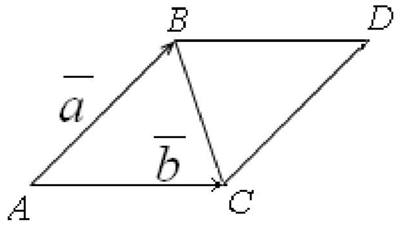


Рис.2.8. Геометрический смысл векторного произведения

Векторное произведение в координатах векторов $\bar{a}(x_a;\ y_a;\ z_a)$ и $\bar{b}(x_b;\ y_b;\ z_b)$ есть вектор, вычисляемый по правилу: $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}$.

Из определения векторного произведения вытекают следующие формулы:

- *синус угла* между векторами $\sin\left(\bar{a},\overset{\wedge}{\ }\bar{b}\right)=\dfrac{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}{|\bar{a}||\bar{b}|}$;

- *площадь треугольника*, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна $1/2|\bar{a}\times\bar{b}|$.

2.9. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$:

$$\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}.$$

Алгебраические свойства смешанного произведения:

1) $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$ - смешанное произведение не изменяется от перегруппировки сомножителей;

2) $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=-(\bar{a}\bar{c}\bar{b})$ - смешанное произведение меняет знак на обратный при перестановке пары сомножителей;

3) $(\lambda\overline{abc})=\lambda(\overline{abc})$ - при умножении вектора на число смешанное произведение умножается на это число.

Геометрические свойства смешанного произведения:

1) три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, если $\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)=0$ - *условие компланарности* трех векторов;

2) модуль смешанного произведения $|\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)|$ некомпланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$;

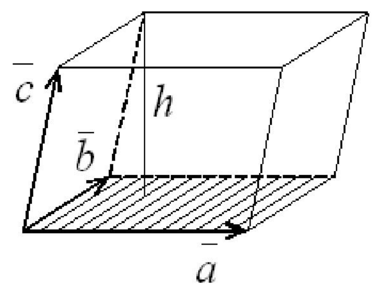


Рис.2.9. Параллелепипед, построенный на трех векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$;

4) тройка векторов правая, если $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})>0$;
тройка левая, если $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})<0$.

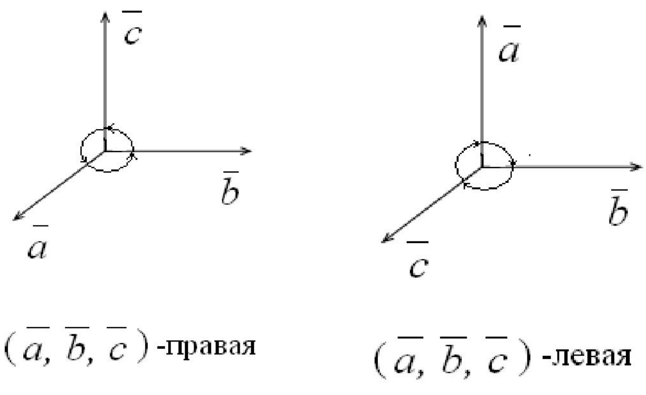


Рис.2.10. Правая и левая тройка векторов

Смешанное произведение в координатах трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ есть число, равное определителю, составленному из координат векторов:

$$\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Из определения смешанного произведения векторов вытекают следующие формулы:

- объем тетраэдра $V = \frac{1}{6}\left|\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)\right|$;

- высота тетраэдра (параллелепипеда) $h = \frac{\left|\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)\right|}{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|}$.

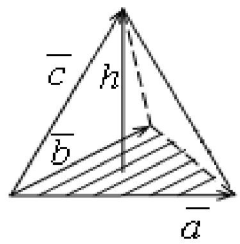


Рис.2.11. Тетраэдр, построенный на трех векторах

3. Прямые и плоскости

3.1. Задание прямой на плоскости

Всякий вектор $\bar{l}$, параллельный прямой L, называется *направляющим вектором прямой L*.

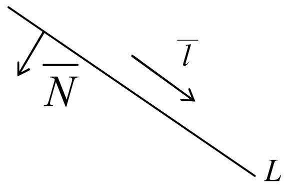


Рис.3.1. Направляющий и нормальный векторы прямой

Всякий вектор $\bar{N}$, ортогональный прямой L, называется *нормальным вектором прямой L*.

Прямая на плоскости задается:

1) парой точек этой прямой;

2) точкой и направляющим вектором прямой, тогда множество точек M прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\bar{l}$, будет удовлетворять условию $\overline{M_0M} \,||\, \bar{l}$.

3) точкой и нормальным вектором прямой, тогда множество точек M прямой, проходящей через точку M_0 ортогонально вектору $\bar{N}$, будет удовлетворять условию $\overline{M_0M} \perp \bar{N}$.

3.2. Виды уравнений прямой на плоскости

1) **Общее** уравнение прямой:

$$Ax+By+C=0,$$

где $\overline{N}\,(A;B)$ – нормальный вектор прямой L.

2) **Каноническое** уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},$$

где $\overline{l}\ (m;n)$ – направляющий вектор прямой L.

3) Уравнение прямой, **проходящей через две точки** $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

4) **Параметрическое** уравнение прямой:

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \end{cases},$$

где $m,\ n,$ – координаты направляющего вектора $\overline{l}$ прямой; x_0, y_0 - координаты заданной точки прямой, t – параметр, $-\infty<t<+\infty$.

5) Уравнение прямой **с угловым коэффициентом:** $y=kx+b$,

где $k=\mathrm{tg}\alpha$ - угловой коэффициент прямой L (тангенс угла наклона прямой к оси Ox).

3.3. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

Способ задания прямых	Угол между двумя прямыми	Условия параллельности	Условия перпендикулярности
Прямые заданы общими уравнениями: $A_1x+B_1y+C=0$, $A_2x+B_2y+C=0$.	$\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$	$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$
Прямые заданы каноническими уравнениями:		$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$	$m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2=0$

$\dfrac{x-x_{01}}{m_1}=\dfrac{y-y_{01}}{n_1}$, $\dfrac{x-x_{02}}{m_2}=\dfrac{y-y_{02}}{n_2}$.	$\cos\varphi=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$		
Прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом: $y=k_1\cdot x+b_1$, $y=k_2\cdot x+b_2$	$\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$	$k_1=k_2$	$k_1\cdot k_2=-1$

3.4. Задание плоскости в пространстве

Плоскость в пространстве может быть задана:
1) тремя точками плоскости;
2) точкой и нормальным вектором плоскости, тогда множество точек M плоскости, проходящей через точку M_0 ортогонально вектору $\overline{N}$, будет удовлетворять условию $\overline{M_0M}\perp\overline{N}$.
3) точкой и двумя неколлинеарными векторами $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$, тогда множество точек M плоскости будет удовлетворять условию, что векторы $\overline{M_0M}$, $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$ компланарны

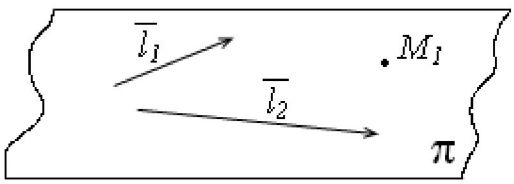
3.5. Виды уравнений плоскости

1) **Общее** уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где $\overline{N}(A;B;C)$ – нормальный вектор плоскости.

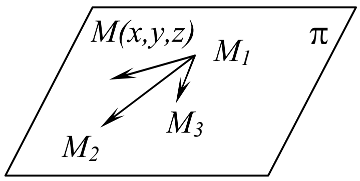
2) Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно



двум *неколлинеарным* векторам $\overline{l_1}(m_1;n_1;p_1)$, $\overline{l_2}(m_2;n_2;p_2)$.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

2) Уравнение плоскости, **проходящей через три точки** $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$:



$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Это уравнение есть условие *компланарности* трех векторов $\overline{MM_1}, \overline{M_2M_1}, \overline{M_3M_1}$.

3.6. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть две плоскости π_1 и π_2 заданы общими уравнениями:

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D=0;$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D=0.$$

Вопрос об определении угла между указанными плоскостями сводится к определению угла φ между их нормальными векторами $\overline{N_1}(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{N_2}(A_2,B_2,C_2)$.

Из определения скалярного произведения $\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}=\left|\overline{N_1}\right|\cdot\left|\overline{N_2}\right|\cos\varphi$ и записи его в координатной форме, получим:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} .$$

Условие *параллельности* плоскостей π_1 и π_2, эквивалентное условию коллинеарности векторов $\overline{N_1}(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{N_2}(A_2,B_2,C_2)$, заключается в пропорциональности координат этих векторов, т.е. имеет вид:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} .$$

Условие *перпендикулярности* плоскостей π_1 и π_2 выражается равенством нулю скалярного произведения векторов $\overline{N_1}(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{N_2}(A_2,B_2,C_2)$. Оно имеет вид:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

3.7. Определение прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей; либо точкой и направляющим вектором прямой.

Прямая в пространстве *не определяется* через нормальный вектор, т.к. любая прямая имеет в каждой своей точке бесконечное множество нормальных векторов.

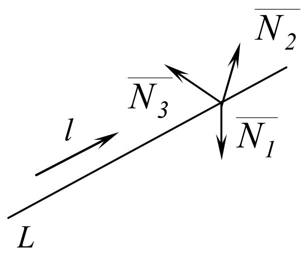


Рис.3.2. Направляющий и нормальные векторы прямой

3.8. Виды уравнений прямой в пространстве

1) *Каноническое* уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $\overline{l}$ $(m;n;p)$ – направляющий вектор прямой; x_0, y_0, z_0 - координаты заданной точки прямой.

2) Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

3) *Общее* уравнение прямой в пространстве:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Каждое из уравнений системы является уравнением плоскости, прямая – линия пересечения двух плоскостей.

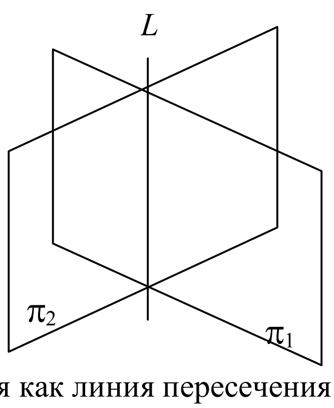


Рис.3.3. Прямая как линия пересечения двух плоскостей

4) *Параметрическое* уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases},$$

где *m, n, p* – координаты направляющего вектора $\overline{l}$ прямой; x_0, y_0, z_0 - координаты заданной точки прямой, *t* – параметр, $-\infty<t<+\infty$.

3.9. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть две прямые в пространстве заданы своими каноническими уравнениями:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1};$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Задача определения угла между этими прямыми сводится к определению угла φ между их направляющими векторами $\overline{l_1}$ $(m_1;n_1;p_1)$ и $\overline{l_2}$ $(m_2;n_2;p_2)$. По определению скалярного произведения:

$$\overline{l_1} \cdot \overline{l_2} = \left|\overline{l_1}\right| \cdot \left|\overline{l_2}\right| \cos\varphi;$$

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2, эквивалентное условию коллинарности векторов $\overline{l_1}$ $(m_1;n_1;p_1)$ и $\overline{l_2}$ $(m_2;n_2;p_2)$, заключается в пропорциональности координат их направляющих векторов:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 выражается равенством нулю скалярного произведения векторов $\overline{l_1}$ и $\overline{l_2}$:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

3.10. Условие принадлежности прямых одной плоскости

Две прямые L_1 и L_2 в пространстве могут: пересекаться, быть параллельными, скрещиваться. В первых двух случаях прямые лежат в одной плоскости.

Для принадлежности одной плоскости прямых L_1 и L_2, заданных каноническими уравнениями:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$
$$L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

необходимо и достаточно, чтобы три вектора $\overline{M_1M_2}$ $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\overline{l_1}$ $(m_1;n_1;p_1)$ и $\overline{l_2}$ $(m_2;n_2;p_2)$ были компланарны. Тогда *необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых* L_1 и L_2 *одной плоскости* является равенство нулю их смешанного произведения:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если прямые удовлетворяют этому условию, то они либо пересекаются, либо параллельны. Определить, как эти прямые располагаются в плоскости, позволяет условие параллельности прямых.

Прямая $L : \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ принадлежит плоскости π: $Ax+By+Cz+D=0$, если выполнены два условия:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0;$$
$$Am+Bn+Cp=0.$$

Первое из них означает, что точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, через которую проходит прямая, принадлежит плоскости, а второе есть условие параллельности прямой и плоскости.

3.11. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

3.11.1. Угол между прямой и плоскостью

Рассмотрим плоскость, заданную общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, и прямую, заданную каноническим уравнением

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Т.к. *угол* φ *между прямой и плоскостью* является дополнительным к углу ξ между направляющим вектором прямой $\overline{l}$ $(m;n;p)$ и нормальным вектором плоскости $\overline{N}$ $(A;B;C)$,

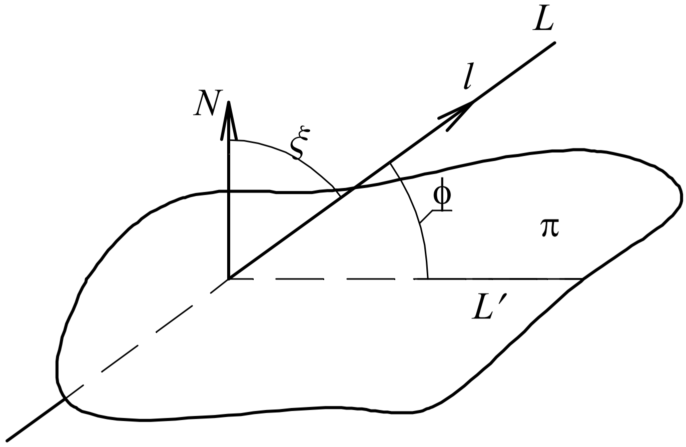


Рис.3.4. Угол между прямой и плоскостью

то из определения скалярного произведения $\overline{l}\cdot\overline{N}=\left|\overline{l}\right|\cdot\left|\overline{N}\right|\cos\xi$ и равенства cosξ=cos(90°-φ)=sinφ получим:

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

3.11.2. Условие параллельности прямой и плоскости

Условие параллельности прямой и плоскости эквивалентно условию перпендикулярности векторов $\overline{l}\,(m;n;p)$ и $\overline{N}\,(A;B;C)$, и выражается равенством нулю скалярного произведения этих векторов:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

3.11.3. Условие перпендикулярности прямой и плоскости эквивалентно условию параллельности векторов $\overline{l}\,(m;n;p)$ и $\overline{N}\,(A;B;C)$, и выражается пропорциональностью координат этих векторов:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

4. Кривые второго порядка

4.1 Эллипс

Эллипс – множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$.

При этом не исключается совпадение фокусов эллипса, в этом случае получаем окружность.

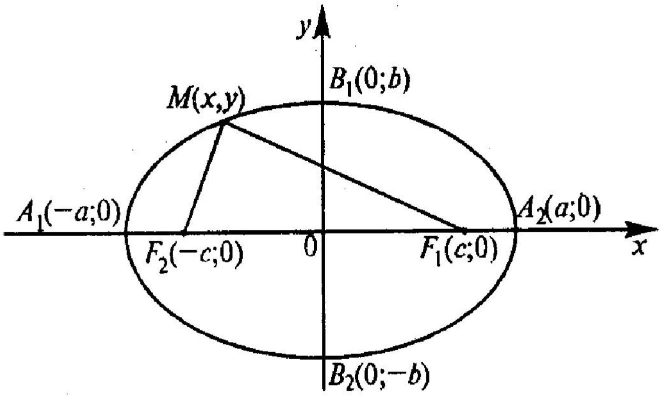


Рис.4.1. Эллипс

Пусть точка $M(x,y)$ – некоторая точка плоскости. Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки M до точек F_1 и F_2 соответственно. Согласно определению эллипса равенство: $r_1+r_2=2a$ является необходимым и достаточным условием расположения точки $M(x,y)$ на данном эллипсе. Фокусы F_1 и F_2 имеют координаты $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ - *каноническое* уравнение эллипса.

Свойства эллипса.

1) Эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy и точки $O(0;0)$ – центра эллипса.

Точки пересечения эллипса с осями координат $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$ называются *вершинами эллипса*.

Отрезки $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$ называются соответственно *большой* и *малой* осями эллипса.

2) Эллипс содержится внутри прямоугольника $|x|\le a$, $|y|\le b$. В самом деле, из канонического уравнения вытекает, что $\frac{x^2}{a^2}\le 1$, $\frac{x^2}{b^2}\le 1$. Эти неравенства эквивалентны неравенствам $|x|\le a$, $|y|\le b$.

3) Отношение расстояния между фокусами к длине большой оси эллипса называется *эксцентриситетом* эллипса:

$$e=c/a.$$

Учитывая, что $b^2=a^2-c^2$, получим:

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\,.$$

Из этой формулы видно, что эксцентриситет эллипса меньше единицы.

Чем больше эксцентриситет эллипса, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$ малой полуоси эллипса b к его большой полуоси a, и значит, тем более сплющенным будет эллипс.

4.2. Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек плоскости F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$.

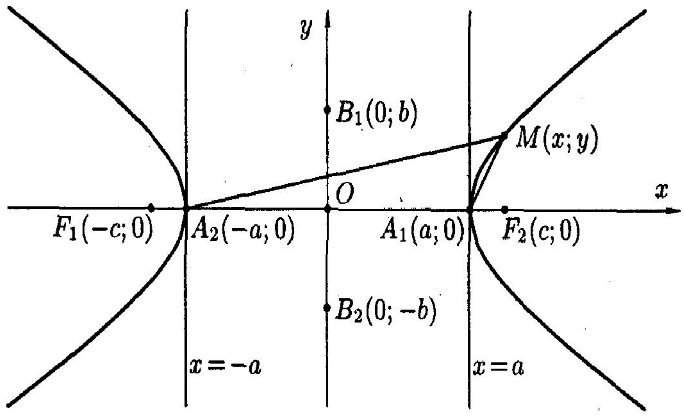


Рис.4.2. Гипербола

Точки F_1 и F_2 имеют координаты $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$.

Пусть точка $M(x,y)$ – некоторая точка плоскости. Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки M до точек F_1 и F_2 соответственно. Согласно определению гиперболы равенство:

$$|r_1-r_2|=2a$$

является необходимым и достаточным условием расположения точки $M(x,y)$ на данной гиперболе.

Уравнение гиперболы в данной системе координат примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ - *каноническое* уравнение гиперболы,

где $b^2=c^2-a^2$.

Если $a=b$, то гипербола называется *равносторонней*.

Свойства гиперболы.

1) Гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy и точки $O(0;0)$ – центра гиперболы.

2) Гипербола состоит из двух частей, называемых *ветвями* гиперболы.

Точки пересечения гиперболы с осью Ox $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются *вершинами* гиперболы.

Отрезок $A_1A_2=2a$ называется *действительной* осью гиперболы.

3) Прямые $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами* гиперболы (ветви гиперболы неограниченно приближаются к этим прямым).

Отношение расстояния между фокусами к длине действительной оси эллипса называется *эксцентриситетом* гиперболы:

$$e=c/a.$$

Учитывая, что $b^2=c^2-a^2$, получим: $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$.

Из этой формулы видно, что эксцентриситет гиперболы больше единицы.

Эксцентриситет гиперболы можно рассматривать как числовую характеристику величины угла между ее асимптотами, т.к. отношение $\frac{b}{a}$ есть тангенс половины угла между асимптотами гиперболы.

4.3. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки F, называемой *фокусом*, и данной прямой l, называемой *директрисой*.

Расстояние от фокуса F до директрисы l называется *параметром* параболы и обозначается через p.

Пусть ось Ox проходит через фокус F перпендикулярно директрисе, а начало координат расположено посередине между фокусом и директрисой. Тогда $F(p/2;0)$, а уравнение директрисы $x=-p\backslash 2$.

$\boldsymbol{y^2=2px}$ – *каноническое* уравнение параболы.

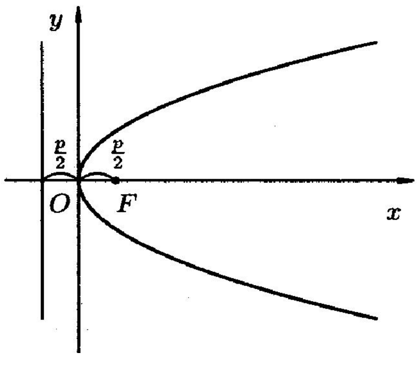


Рис.4.3. Парабола

Свойства параболы.

1) Парабола симметрична относительно оси Ox (Ox - *ось симметрии* параболы), т.к. в каноническом уравнении параболы величина y фигурирует в четной степени.

Парабола проходит через начало координат, точка $O(0;0)$ – *вершина* параболы.

Отметим, что кривая $y^2=2px$ при $p<0$ также является параболой, которая располагается в левой полуплоскости.

5. Поверхности второго порядка

5.1. Классификация поверхностей

Общее уравнение поверхности второго порядка в декартовых координатах имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0.$$

Преобразованием системы координат оно приводится к одному из следующих канонических видов (таблица 5.1.).

Таблица 5.1.

Название поверхности	**Каноническое уравнение поверхности**
1. Эллипсоид	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1,\ a>b>c$
2. Однополостный гиперболоид	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$
3. Двуполостный гиперболоид:	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$
4. Конус	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$
5. Параболоид эллиптический	$\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z$
6. Параболоид гиперболический	$\frac{X^2}{p}-\frac{Y^2}{q}=2Z$
7. Цилиндр эллиптический	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$
8. Цилиндр гиперболический	$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$
9. Цилиндр параболический	$Y^2=2pX$

5.2. Исследование поверхностей методом сечений

1. **Эллипсоид**, $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$, $a>b>c$ (рис.5.1.) При сечении плоскостью XOY – в сечении эллипс $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, при $a=b$ - окружность.

Сечение плоскостью XOZ – в сечении эллипс $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$. Сечение плоскостью YOZ – в сечении эллипс $\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$.

При $a=b=c$ получим сферу с радиусом $R=a$.

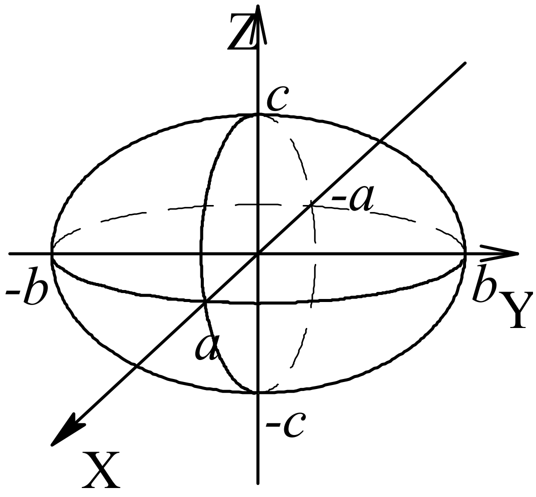


Рис. 5.1. Эллипсоид

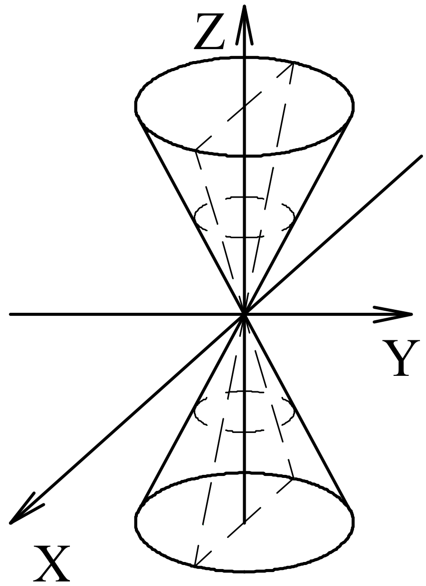


Рис.5.2. Конус.

2. **Гиперболоид однополостной**, $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$ (рис.5.3.а)

Сечение плоскостью XOY – в сечении эллипс $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, при $a=b$- окружность. При $a=b$ получим поверхность вращения с осью OZ.

Сечение плоскостями XOZ, YOZ – в сечениях получим гиперболы $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ и $\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$.

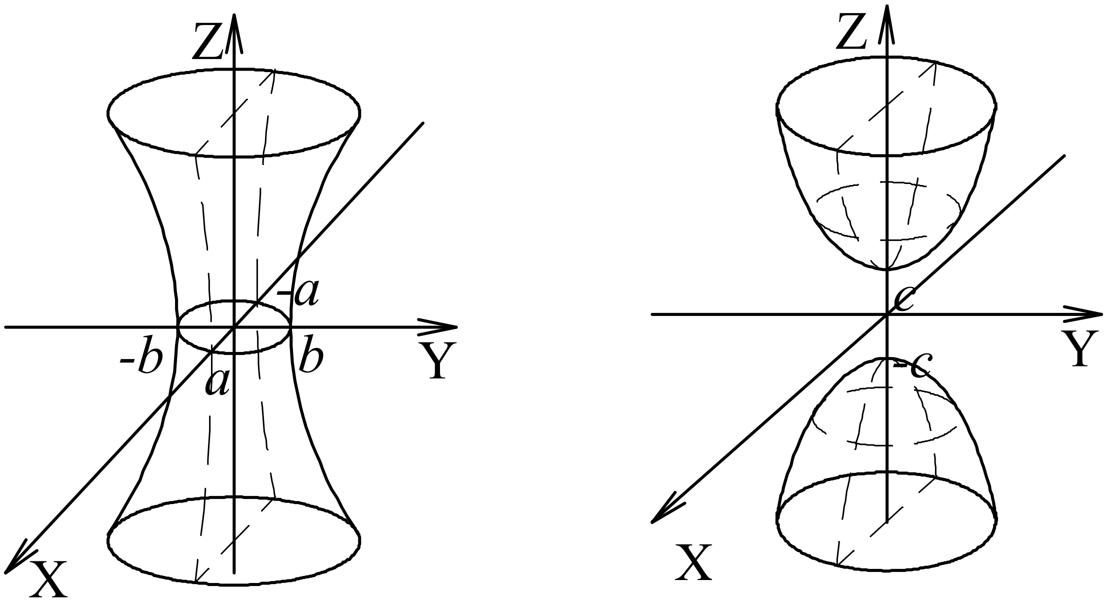
3. **Гиперболоид двуполостной**, $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$ (рис. 5.3. *б*)

Сечение плоскостью, параллельной XOY – при Z>*c*, в сечении эллипс $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=\frac{Z^2}{c^2}-1$, при $a=b$- окружность. При $a=b$ получим поверхность вращения с осью OZ. Сечение плоскостями XOZ, YOZ – в сечениях получим гиперболы $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$ и $\frac{Z^2}{c^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$.

4. **Конус**, $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$ (рис. 5.2.)

Сечение плоскостью, параллельной XOY – при Z≠0, в сечении эллипс $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=\frac{Z^2}{c^2}$; при $a=b$- окружность. При $a=b$ получим поверхность вращения с осью OZ.

Сечение плоскостями XOZ, YOZ – в сечениях получим пары пересекающихся прямых $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$ и $\frac{Z^2}{c^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$.



а) Гиперболоид однополостной *б*) Гиперболоид двуполостной

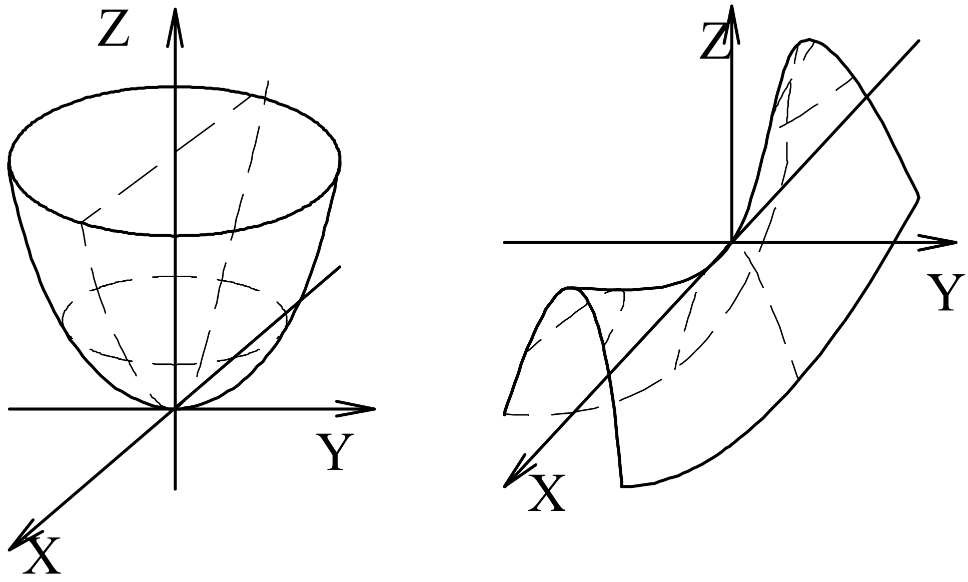
Рис. 5.3. *а*,*б*.

5. **Параболоид эллиптический**, $\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}=2Z$ (Рис.5.4.*а*).

Сечение плоскостью, параллельной XOY – при Z>0, в сечении эллипс $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$, при $a=b$- окружность.

При $a=b$ получим поверхность вращения с осью OZ.

Сечение плоскостями XOZ, YOZ – в сечениях получим параболы $X^2=2pZ$ и $Y^2=2qZ$.



а) Параболоид эллиптический *б*) Параболоид гиперболический
Рис.5.4. *а*,*б*.

6. **Параболоид гиперболический**, $\dfrac{X^2}{p} - \dfrac{Y^2}{q} = 2Z$ (Рис.5.4.*б*).

Сечение плоскостью, параллельной XOY – при Z>0, в сечении гипербола $\dfrac{X^2}{p} - \dfrac{Y^2}{q} = 2Z$.

Сечение плоскостью, параллельной XOY – при Z<0, в сечении гипербола $\dfrac{Y^2}{q} - \dfrac{X^2}{p} = 2Z$.

Сечение плоскостями XOZ, YOZ – в сечениях получим параболы $X^2 = 2pZ$ и $Y^2 = -2qZ$.

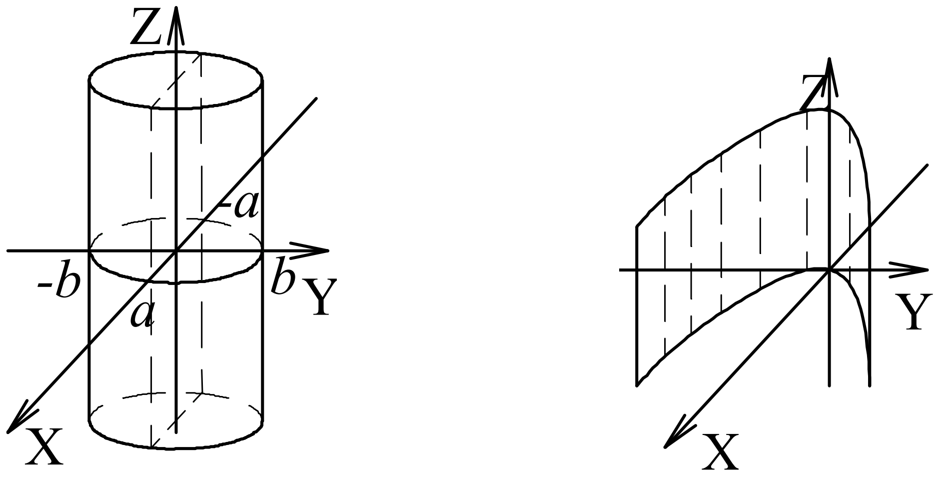
7. **Цилиндр эллиптический**, $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ (Рис. 5.5.*а*).

Так как все цилиндрические поверхности состоят их кривых – направляющих поверхности и прямых – образующих поверхности, то в сечениях этих поверхностей будем получать либо прямые, либо соответствующие кривые.

В сечении плоскостью XOY – эллипс, который является направляющей данной поверхности. В сечениях плоскостями XOZ и YOZ – прямые, которые образуют поверхность.

8. **Цилиндр параболический**, $Y^2 = 2pX$ (Рис.5.5.*б*).

В сечении плоскостью XOY – парабола, который является направляющей данной поверхности. В сечениях плоскостями, параллельными оси Z – прямые, которые образуют поверхность.



а) Цилиндр эллиптический *б*) Цилиндр параболический

Рис. 5.5. *а*,*б*.

9. **Цилиндр гиперболический**, $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ (рис.5.6.)

В сечении плоскостью XOY – гипербола, которая является направляющей данной поверхности. В сечениях плоскостями, параллельными оси Z – прямые – образующие поверхности.

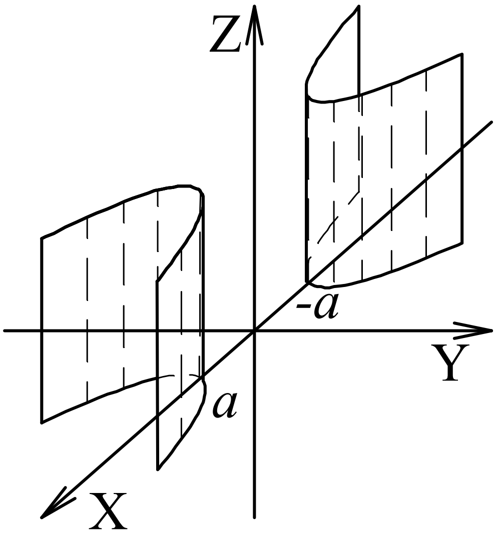


Рис.5.6. Цилиндр гиперболический.

Пример контрольной работы и образец ее выполнения

Вариант №0

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

б) Методом Гаусса.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 6, \\ 4x + 2y - 3z = 3, \\ x + y + 2z = -1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -2, \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a}(-1,\ 1,\ 4),\ \bar{b}(2, -2,\ 5).$$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1, 5)$, $M_2(3, 3)$ и найти расстояние от точки P(1,-2) до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми:

$$L_1:\ 2x + 4y - 3 = 0, \quad L_2:\ -3x + 4y + 23 = 0.$$

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(-2,\ 3,\ 2),\ \ M_2(4,\ 1,-2),\ \ M_3(1,\ 2,-1).$$

8. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$$M(1,\ 2,-2),\ \ \pi:\ 2x-3y-z+4=0.$$

9. Найти проекцию точки М на плоскость π:

$$M(1,-1,\ 1),\ \ \pi:\ 2x-3y+4z-7=0.$$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$$x^2+2y^2+4x-4y-1=0.$$

Решение варианта №0

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Умножение матриц можно произвести только в том случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В данном случае это условие выполняется, поэтому произведение матриц можно вычислить. По правилу умножения матриц «строка на столбец» находим

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+3\cdot 1+3\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+3\cdot 1+3\cdot 1 & 2\cdot 3+3\cdot 1+3\cdot 1 \\ -3\cdot(-1)+4\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & -3\cdot(-1)+4\cdot 1+(-1)\cdot 1 & -3\cdot 3+4\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ 4\cdot(-1)+1\cdot 1+6\cdot(-2) & 4\cdot(-1)+1\cdot 1+6\cdot 1 & 4\cdot 3+1\cdot 1+6\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+3-6 & -2+3+3 & 6+3+3 \\ 3+4+2 & 3+4-1 & -9+4-1 \\ -4+1-12 & -4+1+6 & 12+1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 12 \\ 9 & 6 & -6 \\ -15 & 3 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 12 \\ 9 & 6 & -6 \\ -15 & 3 & 19 \end{pmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^V\right)^T,$$

где $|A|$ - определитель исходной матрицы А, $|A| \neq 0$.

$A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ - матрица алгебраических дополнений для исходной матрицы A.

Вычислим определитель исходной матрицы по правилу «треугольников», он не должен быть равен 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 10 + (-1)\cdot(-1)\cdot 4 + 1\cdot(-3)\cdot(-2) - (-2)\cdot 4\cdot 4 - 1\cdot(-1)\cdot(-3) -$$

$$-10\cdot 1\cdot(-1) = 40 + 4 + 6 + 32 - 3 + 10 = 89 \neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов исходной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 4\cdot 10 - (-3)\cdot(-1) = 40 - 3 = 37,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = -(1\cdot 10 - (-1)\cdot 4) = -(10 + 4) = -14,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3) - 4\cdot 4 = -3 - 16 = -19,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot 10 - (-2)\cdot(-3)) = -(-10 - 6) = 16,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot 10 - (-2)\cdot 4 = 10 + 8 = 18,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(1\cdot(-3) - (-1)\cdot 4) = -(-3 + 4) = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) - (-2)\cdot 4 = 1 + 8 = 9,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(1\cdot(-1) - (-2)\cdot 1) = -(-1 + 2) = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - (-1)\cdot 1 = 4 + 1 = 5.$$

Составляем матрицу из алгебраических дополнений и транспонируем ее:

$$A^V = \begin{pmatrix} 37 & -14 & -19 \\ 16 & 18 & -1 \\ 9 & -1 & 5 \end{pmatrix},\ \left(A^V\right)^T = \begin{pmatrix} 37 & 16 & 9 \\ -14 & 18 & -1 \\ -19 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Подставляем полученные выражения в формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{89}\cdot\begin{pmatrix} 37 & 16 & 9 \\ -14 & 18 & -1 \\ -19 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \frac{1}{89} \cdot \begin{pmatrix} 37 & 16 & 9 \\ -14 & 18 & -1 \\ -19 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

2. Решить системы линейных уравнений.

А) Методом Крамера.

Б) Методом Гаусса.

А) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ 3x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -2, \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \end{cases}$

Решение:

а) Метод Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ 3x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 13. \end{cases}$$

Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то решение системы можно найти по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ_1, Δ_2, Δ_3 – определители, полученные путем замены соответствующего столбца на столбец свободных членов.

Вычислим определители по правилу «треугольников»:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot 12 - (-1) \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 12 \cdot 2 =$$

$$= -16 + 9 - 36 - 6 - 36 - 24 = -109 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -9 & -2 & 1 \\ 13 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 13 + (-9) \cdot (-1) \cdot 12 - (-1) \cdot (-2) \cdot 13 - 3 \cdot (-9) \cdot 4 -$$

$$-1 \cdot 12 \cdot 6 = -48 + 39 + 108 - 26 + 108 - 72 = 109.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 3 & -9 & 1 \\ 3 & 13 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-9)\cdot 4 + 6\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot(-1)\cdot 13 - (-1)\cdot(-9)\cdot 3 - 3\cdot 6\cdot 4 - 1\cdot 13\cdot 2 =$$

$$= -72 + 18 - 39 - 27 - 72 - 26 = -218.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -9 \\ 3 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 13 + 3\cdot(-9)\cdot 3 + 3\cdot 6\cdot 12 - 6\cdot(-2)\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 13 -$$

$$-(-9)\cdot 12\cdot 2 = -52 - 81 + 216 + 36 - 117 + 216 = 218.$$

Подставляем полученные значения в формулы Крамера, и находим решения системы:

$$x_1 = \frac{109}{-109} = -1,\ \ x_2 = \frac{-218}{-109} = 2,\ \ x_3 = \frac{218}{-109} = -2.$$

Ответ: $x_1 = -1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = -2$.

б) Метод Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -2, \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу коэффициентов системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Приведем её путем элементарных преобразований к трапециевидному виду: 1) к элементам 2-ой строки прибавим элементы 1-ой строки, умноженные на -2, 2) к элементам 3-ей строки прибавим элементы 1-ой строки, 3) умножим элементы 3-ей строки на -4, 4) к элементам 3-ей строки прибавим элементы 2-ой строки, умноженные на 3.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 & -4 \\ -2 & -6 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{2}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{3}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 12 & -4 & 12 & -20 \end{array}\right) \overset{4}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -19 & 24 & -32 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы, значит, система совместна. При этом ранг матрицы коэффициентов меньше числа неизвестных, поэтому система имеет множество решений.

Три неизвестных примем за базисные (т.к. ранг матрицы коэффициентов равен 3), одна неизвестная будет свободной.
Выделим минор третьего порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -19 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot(-19) = 152 \neq 0$$

Тогда x_1, x_2, x_3 будут базисными переменными, $x_4 = c$ - свободной переменной.
Составим систему уравнений, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = c + 1, \\ -4x_2 - 5x_3 = -4c - 4, \\ -19x_3 = -24c - 32. \end{cases}$$

Теперь вычислим значения неизвестных.
Из третьего уравнения получаем x_3:

$$x_3 = \frac{-24}{-19}c - \frac{32}{-19} = \frac{24}{19}c + \frac{32}{19},$$

Из второго уравнения находим x_2:

$$-4x_2 = 5x_3 - 4c - 4,$$

$$x_2 = \frac{5}{-4}x_3 - \frac{4}{-4}c - \frac{4}{-4} = -\frac{5}{4}x_3 + c + 1 = -\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{24}{19}c + \frac{32}{19}\right) + c + 1 = -\frac{30}{19}c - \frac{40}{19} + c + 1 =$$

$$= -\frac{11}{19}c - \frac{21}{19}.$$

Из первого уравнения находим x_1:

$$2x_1 = -3x_2 + x_3 + c + 1,$$

$$x_1 = \frac{-3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{11}{19}c - \frac{21}{19}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{24}{19}c + \frac{32}{19}\right) + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{33}{38}c + \frac{63}{38} + \frac{24}{38}c + \frac{32}{38} + \frac{19}{38}c + \frac{19}{38} = \frac{76}{38}c + \frac{114}{38} = 2c + \frac{57}{38}.$$

Ответ: $x_1 = 2c + \frac{57}{38}$, $x_2 = -\frac{11}{19}c - \frac{21}{19}$, $x_3 = \frac{24}{19}c + \frac{32}{19}$, $x_4 = c$.

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a}(-1,\ 1,\ 4)$, $\bar{b}(2, -2,\ 5)$.

Решение:

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, численно равна модулю векторного произведения данных векторов, и вычисляется по формуле:

$$S = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|.$$

Найдем векторное произведение данных векторов, вычисляя определитель разложением по элементам 1-го столбца:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 1 & 4\\ 2 & -2 & 5\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\left(1\cdot5-4\cdot(-2)\right)-\bar{j}\cdot\left(-1\cdot5-4\cdot2\right)+\bar{k}\cdot\left((-1)\cdot(-2)-1\cdot2\right)=$$

$$=13\cdot\bar{i}+13\cdot\bar{j}+0\cdot\bar{k}.$$

Найдем площадь искомого параллелограмма, вычислив модуль вектора $\bar{a}\times\bar{b}=13\cdot\bar{i}+13\cdot\bar{j}+0\cdot\bar{k}$:

$$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{13^2+13^2+0^2}=\sqrt{338}=13\sqrt{2}\,.$$

Ответ: $S=13\sqrt{2}$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1,5)$, $M_2(3,3)$ и найти расстояние от точки $P(1,-2)$ до полученной прямой.

Решение:

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, записывается в виде:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\,.$$

В данном случае имеем $x_1=1,\ x_2=3,\ y_1=5,\ y_2=3$, подставим эти значения в уравнение:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-5}{3-5}\,,$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{-2}\,,\Rightarrow\quad -2\cdot(x-1)=2\cdot(y-5),\quad -x+1=y-5\,,$$

$$x+y-6=0\,.$$

Получили общее уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(1,5)$, $M_2(3,3)$.

Найдем расстояние от точки $P(1,-2)$ до полученной прямой.

Расстояние от точки $P(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

В данном случае $x_0=1,\ y_0=-2,\ A=1,\ B=1,\ C=-6$. Подставляем эти значения в формулу:

$$d=\frac{\left|1\cdot1+1\cdot(-2)+(-6)\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|1-2-6\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|-7\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}\,.$$

Ответ: $x+y-6=0$, $d=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

6. Найти угол между прямыми:

$$L_1: \ 2x + 4y - 3 = 0, \quad L_2: \ -3x + 4y + 23 = 0.$$

Решение:

Угол между прямыми равен углу между их нормальными векторами.
Косинус угла между векторами можно вычислить по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|},$$

где $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}$ - скалярное произведение векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$,
$\left|\overline{n_1}\right|$, $\left|\overline{n_2}\right|$ - модули векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$.

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$, то ее нормальный вектор имеет координаты $\overline{n} = (A, B)$. Поэтому для прямой L_1 нормальный вектор будет иметь вид $\overline{n_1} = (2, 4)$, для прямой L_2 нормальный вектор будет иметь вид $\overline{n_2} = (-3, 4)$.

Найдем скалярное произведение данных векторов в координатной форме:

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 = -6 + 16 = 10.$$

Теперь вычислим модули данных векторов:

$$\left|\overline{n_1}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$\left|\overline{n_2}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Вычисляем косинус угла между нормальными векторами прямых:

$$\cos\alpha = \frac{10}{2\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Отсюда искомый угол между прямыми будет равен $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(-2,\ 3,\ 2),\ M_2(4,\ 1, -2),\ M_3(1,\ 2, -1).$$

Решение:

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим координаты точек в уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & y-3 & z-2 \\ 4-(-2) & 1-3 & -2-2 \\ 1-(-2) & 2-3 & -1-2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-2 \\ 6 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель слева разложением по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-2 \\ 6 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (x+2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (y-3)\cdot\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+2)\cdot(-2\cdot(-3)-(-1)\cdot(-4)) - (y-3)\cdot(6\cdot(-3)-3\cdot(-4)) +$$

$$+ (z-2)\cdot(6\cdot(-1)-3\cdot(-2)) = (x+2)\cdot 2 - (y-3)\cdot(-6) + (z-2)\cdot 0 =$$

$$= 2x+4+6y-18 = 2x+6y-14.$$

Получаем уравнение искомой плоскости:

$$2x+6y-14=0,$$

$$x+3y-7=0.$$

Ответ: $x+3y-7=0$.

8. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$$M(1,\ 2, -2),\ \ \pi:\ 2x-3y-z+4=0.$$

Решение:

Расстояние от точки $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В нашем случае $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ z_0 = -2,\ \ A = 2,\ B = -3,\ C = -1,\ \ D = 4$.

Подставляем эти значения в формулу и получаем:

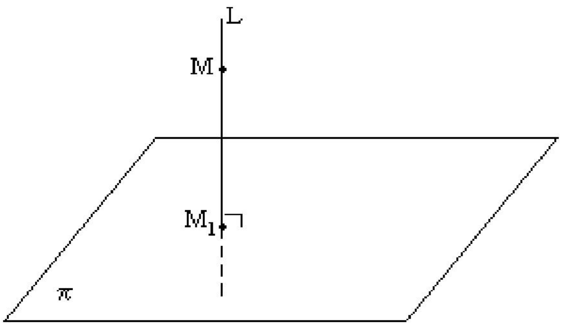
$$d = \frac{|2\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{|2-6+2|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|-2|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

Ответ: $d = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

9. Найти проекцию точки М на плоскость π:

$$M(1, -1,\ 1),\ \ \pi:\ 2x-3y+4z-7=0.$$

Решение:



Составим уравнение прямой L, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости π, тогда искомая проекция есть точка пересечения прямой L и плоскости π.

Из общего уравнения плоскости определим нормальный вектор $\overline{n}=(2,-3,\ 4)$, он перпендикулярен плоскости и, значит, параллелен прямой L, т.е. является направляющим вектором для прямой L: $\overline{q}=\overline{n}=(2,-3,\ 4)$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\overline{q}=(l,\ m,\ n)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

В нашем случае для точки $M(1,-1,\ 1)$ и вектора $\overline{q}=(2,-3,\ 4)$ получаем:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-(-1)}{-3}=\frac{z-1}{4},$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{4}.$$

Найдем точку пересечения прямой и плоскости. Для этого запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=t\\ \dfrac{y+1}{-3}=t,\\ \dfrac{z-1}{4}=t\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}x-1=2t\\ y+1=-3t,\\ z-1=4t\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}x=2t+1\\ y=-3t-1.\\ z=4t+1\end{cases}$$

Подставим полученные выражения для x, y, z в уравнение плоскости:

$$2\cdot(2t+1)-3\cdot(-3t-1)+4\cdot(4t+1)-7=0,$$

$$4t+2+9t+3+16t+4-7=0,\ 29t+2=0,$$

$$t=-\frac{2}{29}.$$

Подставим полученное значение t в параметрическое уравнение прямой, и, тем самым, найдем координаты точки M_1 пересечения прямой L и плоскости π, т.е. координаты проекции точки M на плоскость π:

$$\begin{cases} x = 2\cdot\left(-\dfrac{2}{29}\right)+1 = -\dfrac{4}{29}+1 = \dfrac{-4+29}{29} = \dfrac{25}{29}, \\ y = -3\cdot\left(-\dfrac{2}{29}\right)-1 = \dfrac{6}{29}-1 = \dfrac{6-29}{29} = -\dfrac{23}{29}, \\ z = 4\cdot\left(-\dfrac{2}{29}\right)+1 = -\dfrac{8}{29}+1 = \dfrac{-8+29}{29} = \dfrac{21}{29}, \end{cases}$$

$$M_1\left(\frac{25}{29}, -\frac{23}{29}, \frac{21}{29}\right).$$

Ответ: $M_1\left(\dfrac{25}{29}, -\dfrac{23}{29}, \dfrac{21}{29}\right)$.

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$$x^2 + 2y^2 + 4x - 4y - 1 = 0.$$

Решение:

Выделим в правой части уравнения полные квадраты относительно x и y:

$$x^2 + 2y^2 + 4x - 4y - 1 = 0,$$

$$\left(x^2 + 4x\right) + \left(2y^2 - 4y\right) - 1 = 0,$$

$$\left(x^2 + 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 - 2^2\right) + 2\cdot\left(y^2 - 2\cdot y\cdot 1 + 1^2 - 1^2\right) - 1 = 0,$$

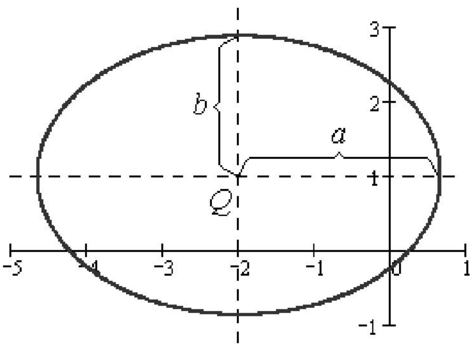
$$\left(x^2 + 2\cdot x\cdot 2 + 2^2\right) + 2\cdot\left(y^2 - 2\cdot y\cdot 1 + 1^2\right) - 4 - 2 - 1 = 0,$$

$$(x+2)^2 + 2\cdot(y-1)^2 = 7,$$

$$\frac{(x+2)^2}{7} + \frac{(y-1)^2}{7/2} = 1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса с центром в точке $Q(-2, 1)$ и полуосями $a = \sqrt{7} \approx 2{,}6$ и $b = \sqrt{7/2} \approx 1{,}9$.

Построим эллипс с данными параметрами.



Вариант 1

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$$

б) Методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}(1,\ 2,\ 1),\quad \overline{b}(1, -1,\ 2).$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2,-3)$, $M_2(3,\ 4)$ и найти расстояние от точки $P(0,\ 2)$ до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми

$L_1:\ \sqrt{2}x - \sqrt{3}y - 5 = 0,\quad L_2:\ \left(3 + \sqrt{2}\right)x + \left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)y + 7 = 0.$

7. От общего уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

перейти к каноническому уравнению.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(1,\ 0,\ 2),\ M_2(1,\ 1,-1),\ M_3(2,\ 0,\ 1).$$

9. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$$M(1,\ 1,\ 1),\quad \pi: -2x + y - z + 1 = 0.$$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$$x^2 - y^2 - 2x + 4y + 12 = 0.$$

Вариант 2

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}^2.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

б) Методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 30x_4 + 15x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}(3,\ 0,\ 1)$, $\overline{b}(1, -1,\ 1)$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1,-2)$, $M_2(-2,\ 2)$ и найти расстояние от точки $P(3,\ 1)$ до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми

L_1: $5x + 3y - 4 = 0$, L_2: $3x + 8y + 13 = 0$.

7. От общего уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x - y - z + 2 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

перейти к каноническому уравнению.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(2, -1,\ 1),\ M_2(2,\ 0,\ 1),\ M_3(3,\ 0,\ 1).$$

9. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$$M(1,\ 1,\ 2), \quad \pi: x - y - 1 = 0.$$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$$7x^2 + 7y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$$

Вариант 3

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

б) Методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}(2,\ 1, -1)$, $\overline{b}(1,\ 3,\ 1)$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-2,-2)$, $M_2(0,\ 4)$ и найти расстояние от точки P(-2, 1) до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми

$L_1:\ 4x - 3y + 1 = 0,\quad L_2:\ 7x + 2y - 22 = 0.$

7. От общего уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

перейти к каноническому уравнению.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$M_1(1,\ 0, -1)$, $M_2(2,\ 3,\ 0)$, $M_3(1, -1,\ 1)$.

9. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$M(1,\ 2,\ 0)$, $\pi:\ -x + y - 1 = 0.$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$x^2 + 4y^2 + 6x - 3y - 15 = 0$.

Вариант 4

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 = -8. \end{cases}$$

б) Методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}(2,\ 1,\ 5),\quad \overline{b}(1, -3,\ 2).$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(3,-2)$, $M_2(5,\ 4)$ и найти расстояние от точки P(-1, 1) до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми

$L_1:\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 2 = 0,\quad L_2:\ \sqrt{6}x - 3y + 3 = 0.$

7. От общего уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 3y + z + 2 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

перейти к каноническому уравнению.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$M_1(-1,\ 0,\ 2),\ M_2(0,\ 1,\ 0),\ M_3(3,\ 1, -1)$.

9. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$M(2,\ 1,\ 1),\quad \pi:\ -x + y - 1 = 0.$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$4x^2 - y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$.

Вариант 5

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

б) Методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}(1,\ 2,\ 2),\quad \overline{b}(3, -1,\ 0).$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2,-2)$, $M_2(0,\ 3)$ и найти расстояние от точки P(-1, 1) до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми

$L_1:\ 3x - y + 5 = 0,\quad L_2:\ 2x + y - 7 = 0.$

7. От общего уравнения прямой

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

перейти к каноническому уравнению.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$M_1(2,\ 1, -1),\ M_2(1, -1,\ 1),\ M_3(0,\ 1,\ 1)$.

9. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$M(0,\ 1,\ 1),\quad \pi:\ 2x - y + z + 1 = 0.$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$64y^2 - 32x - 176y + 121 = 0$.

Вариант 6

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

б) Методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$\bar{a}(1,\ 2,\ 0),\quad \bar{b}(0,\ 1,\ 3).$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(3,-2)$, $M_2(1,-3)$ и найти расстояние от точки P(-1, 0) до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми

$L_1:\ \ 5x - 7y + 3 = 0,\quad L_2:\ \ 3x + 2y - 5 = 0.$

7. От общего уравнения прямой

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

перейти к каноническому уравнению.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$M_1(1,\ 0, -1),\ M_2(2,\ 1,\ 0),\ M_3(1, -2,\ 0)$.

9. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$M(2,\ 1,\ 0),\quad \pi:\ 2x - y + z + 1 = 0.$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$3x^2 + 3y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$.

Вариант 7

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$$

б) Методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0, \\ 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}(1,\ 1, -1), \quad \overline{b}(1, -1,\ 1).$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(4,-2)$, $M_2(2,-3)$ и найти расстояние от точки P(-1, 1) до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми

L_1: $7x - 2y + 1 = 0, \quad L_2$: $4x + 6y + 17 = 0.$

7. От общего уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

перейти к каноническому уравнению.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$M_1(3,\ 0,\ 2),\ M_2(1,-1,\ 2),\ M_3(3,\ 0,-1)$.

9. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$M(-2,\ 7,\ 3), \quad \pi:\ x - 4y + 5z + 1 = 0.$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$16x^2 - 8x - 16y + 1 = 0$.

Вариант 8

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

б) Методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 79, \\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 = 263, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 = 146, \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 92. \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$\bar{a}(2,\ 1,\ 0)$, $\bar{b}(1, -1,\ 2)$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1,\ 5)$, $M_2(2,\ 2)$ и найти расстояние от точки $P(1,\ 1)$ до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми

$L_1:\ 9x - 12y + 5 = 0,\quad L_2:\ 8x + 6y - 13 = 0.$

7. От общего уравнения прямой

$$\begin{cases} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

перейти к каноническому уравнению.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$M_1(1, -1,\ 2)$, $M_2(0,\ 1,\ 0)$, $M_3(2, -1,\ 1)$.

9. Найти проекцию точки M на плоскость π:

$M(2,\ 1, -1)$, $\pi:\ 2x + 2y - z - 2 = 0.$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$16x^2 + 9y^2 - 7x + 26y - 34 = 0$.

Вариант 9

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

б) Методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$\bar{a}(0,\ 1,\ 0)$, $\bar{b}(1,\ 0,\ 1)$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2,\ 5)$, $M_2(-2,\ 2)$ и найти расстояние от точки $P(1,\ 1)$ до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми

$L_1:\ 6x - 15y + 7 = 0,\quad L_2:\ 10x + 4y - 3 = 0.$

7. От общего уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

перейти к каноническому уравнению.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$M_1(1, -1,\ 1)$, $M_2(0,\ 2,\ 0)$, $M_3(1,\ 0,\ 1)$.

9. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$M(2,\ 2, -2)$, $\pi:\ x - y - z = 0.$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$2x^2 - 2y^2 + 2x - 2y + 3 = 0.$

Вариант 10

1. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений.

а) Методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

б) Методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}(3,\ 0,\ 1)$, $\overline{b}(1,\ 3,\ 0)$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(0, 5)$, $M_2(-2, 2)$ и найти расстояние от точки P(2, 0) до полученной прямой.

6. Найти угол между прямыми

$L_1\colon\ 3x - 4y + 1 = 0,\quad L_2\colon\ 4x - 3y + 7 = 0.$

7. От общего уравнения прямой

$$\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

перейти к каноническому уравнению.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$M_1(2,\ 0,\ 1),\ M_2(1, -2,\ 0),\ M_3(1,\ 0, -1)$.

9. Найти расстояние от точки M до плоскости π:

$M(2,\ 3, -1),\quad \pi:\ 3x - y + 3z + 15 = 0.$

10. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и изобразить графически

$2x^2 + 2y^2 - 2x + y = 0$.

Рекомендуемая литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

2. Беклемишева Л.А. и др. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.

3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.

4. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы.

5. Ефимов Н.В.Аналитическая геометрия.

6. Данко В. Высшая математика в упражнениях и задачах.