共有 n关，每次挑战有 p 的概率通过, $1-p$ 的概率失败

抽象出一个二维平面,点 (i,j) 代表现在在关卡 i ,手上还有 j 枚金币的状态, $f_{i,j}$ 代表从该状态到达终点的期望步数

每步有p的概率走到点 $(i+1,j)$,有另 $1-p$ 的概率走到点 $(i,j-1)$,走到 $i=n$ 时停止;

特别地, $f_{i,-1}$ 即 $f_{0,0}$,代表失败且没有金币后回到原点

$p=1$ 时直接特判。

我们可以将全过程分为"第一次失败且没有金币"(事件 S)之前和之后(如果事件 S 没有发生,"之后"就不存在):

对于"之前",研究每个状态[点 $(i\in[0,n),j\in[0,m])$]被经过(事件 S 之后不算)的概率:

它们只会被经过一次,且总需要花1步走出去,则"之前"这部分的期望步数为所有点被经过概率的总和,设其为 $Ans1$

设 $g_{i,j}$ 为:点 B 比点 A 横坐标大 i ,纵坐标小 j 时,从点 A 开始按规则经过点 B 的概率,另设 $G_j=\sum_{i=0}^{n-1}g_{i,j}$

有 $Ans1=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}g_{i-0,m-j}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}g_{i,j}=\sum_{j=0}^{m}G_j$

对于"之后",研究在每个 $j=0$ 的点进入事件 S 的概率,有 $Ans2=G(i)*(1-p)*f_{0,0}$

需要的 $Ans=Ans1+Ans2$,以下研究如何计算 $f(0,0)$ 和各 $P(j)$

(a).计算 $f_{0,0}$:

另设 h_i 为从关卡 0 走到 i 的期望步数, $f_{0,0}=h_n$

$h_0=0$,考虑尝试从关卡 i 走到 $i+1$ 的期望步数,有:

$h_{i+1}-h_i=p*0(\text{成功})+(1-p)*h_{i+1}(\text{失败,从0开始走到}i+1)+1(\text{总得走一步的})$

得 $h_{i+1}=\frac{h_i+1}{p},\frac{h_{i+1}-1}{p-1}=\frac{1}{p}*\frac{h_i-1}{p-1},h_i=(h_0+\frac{1}{1-p})*(\frac{1}{p})^i-\frac{1}{1-p}=\frac{(\frac{1}{1-p})^i-1}{1-p}$

则 $F_{0,0}=h_n=\frac{(\frac{1}{1-p})^i-1}{1-p}$

(b).计算 G_j:

$g_{i,j}=C_{i+j}^{i}*p^i*(1-p)^j$,直接算 G_j 是困难的...

不过对于 $j=0$, $g_{i,0}=p^i,G_0=\frac{p^n-1}{p-1}$ 显然

考虑走到点 (i,j) 的前一步,有 $(i>0)$:

$g_{i,j}=p*g_{i-1,j}+(1-p)*g_{i,j-1}$

$\sum_{i=0}^{n-1} g_{i,j} = p * \sum_{i=0}^{n-1} g_{i-1,j} + (1-p) * \sum_{i=0}^{n-1} g_{i,j-1}$

$G_j = p * (G_j - g_{n-1,j} + g_{-1,j}) + (1-p) * G_{j-1}, G_j = G_{j-1} - \frac{p * g_{n-1,j}}{1-p}$

$g_{n-1,j}$ 之间的递推只需若干次乘除, G_j 也是。

把以上所有东西结合起来就可以算出结果了!

代码中的 A 即 $-\frac{p}{1-p}$, sp 即 $(1-p)F(0,0) = (\frac{1}{p})^n - 1$, $Ans2 = P(m) * sp$;

循环中 $i = j$ 时的 dot 即 $g_{n-1,j}$, sum 即 G_j , ans 即 $\sum_{j=0}^{m} G_j$ 。