Лабораторная работа №4

In [9]:
```
# подключить модуль
import math as m
import cmath as cmath
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy
from pylab import *
from scipy.optimize import minimize
```

Решение задач на Python

Математический анализ, Производная

Пример 1: Найти дифференциал функции $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

Решение. По определению: $dy = y' \cdot dx$

Поэтому, чтобы найти дифференциал нужно найти производную и помножить на дифференциал аргумента.

$$d\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}dx$$

In [10]:
```
x = sympy.Symbol('x')
dx = sympy.Symbol('dx')
a = sympy.diff(atan(1/x), x )
print(dx*a)
```

```
-dx/(x**2*(1 + x**(-2)))
```

In [17]:
```
x = sympy.Symbol('x')
dx = sympy.Symbol('dx')
y = sympy.Symbol('y')
xx = sympy.diff( sp.sqrt(1+(sp.sin(x))**2), x )
y = print( xx*dx ) #Дифференциал y#
```

```
dx*sin(x)*cos(x)/sqrt(sin(x)**2 + 1)
```

Ответ: $-\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

Пример 2: Найти неопределенный интеграл. $\int 6x^5 dx$

In [4]:
```
x = sympy.symbols('x')
y = sympy.integrate(6*x**5, x)
print(y)
```

```
x**6
```

Пример 3: Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{x}{x+2} dx$

In [6]:
```
x = sympy.symbols('x')
y = sympy.integrate(x/(x+2), x)
print(y)
```

```
x - 2*log(x + 2)
```

Пример 4: Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

In [8]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(1/(x**2+1)**2)
```

Out[8]: $\frac{x}{2x^2+2} + \frac{\operatorname{atan}(x)}{2}$

Пример 5: Найти неопределенный интеграл. $\int xe^{2x} dx$

In [7]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(x*sympy.exp(2 *x),x)
```

Out[7]: $\frac{(2x-1)\,e^{2x}}{4}$

Пример 6: Найти определенный интеграл $\int_0^4 6x^5$

In [4]:
```
x = sympy.symbols('x')
y = sympy.integrate(6*x**5, (x,0,4))
print(y)
```

```
4096
```

Пример 7: Найти определенный интеграл $\int_1^3 \frac{x}{x+2} dx$

In [6]:
```
x = sympy.symbols('x')
y = sympy.integrate(x/(x+2), (x,1,3))
print(y)
```

```
-2*log(5) + 2 + 2*log(3)
```

Пример 8: Найти определенный интеграл $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

In [13]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(1/(x**2+1)**2, (x, -1, 1))
```

Out[13]: $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

Пример 9: Найти определенный интеграл $\int_0^{100} xe^{2x}dx$

In [12]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(x*sympy.exp(2 *x), (x, 0, 100))
```

Out[12]: $\frac{1}{4} + \frac{199e^{200}}{4}$

Пример 10: Найти определенный интеграл $\int_{-1}^{0} \sqrt{x+4}dx$

In [18]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(sympy.sqrt(x+4), (x, -1, 0))
```

Out[18]: $\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

Пример 11: Найти несобственный интеграл $\int_1^{\infty} x^{-4}dx$

In [19]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(x**(-4), (x, 1, sympy.oo))
```

Out[19]: $\frac{1}{3}$

Пример 12: Найти несобственный интеграл $\int_{-1}^{\infty} e^{-2x}dx$

In [20]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(sympy.exp(-2*x), (x, -1, sympy.oo))
```

Out[20]: $\frac{e^2}{2}$

Пример 13: Найти несобственный интеграл $\int_0^1 \ln xdx$

In [21]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(sympy.log(x), (x, 0, 1))
```

Out[21]: -1

Пример 14: Найти несобственный интеграл $\int_0^7 \frac{1}{x^{\frac{6}{7}}}dx$

In [11]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(1/x**(6/7), (x, 0, 7))
```

Out[11]: 9.24328473429286

Пример 15: Найти $\iint(y^2 \cdot x - 2 \cdot x \cdot y)dxdy$, где $x \leq y \leq 2$, $-1 \leq x \leq 2$

Решение. Сначала найдем интеграл по y от x до 2: integrate(f(x, y), (y, x, 2)), потом по x от -1 до 2

In [22]:
```
x, y = sympy.symbols('x y')
sympy.integrate(y**2*x-2*x*y,(y, x, 2))
```

Out[22]:

$$-\frac{x^4}{3} + x^3 - \frac{4x}{3}$$

In [23]:
```
x, y = sympy.symbols('x y')
sympy.integrate(-x**4/3 + x**3 - 4*x/3,(x,-1, 2))
```

Out[23]:

$$-\frac{9}{20}$$

Пример 16: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x$, $y = -x^2 + 7x - 6$

In [24]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(-x**2+7*x-6-2*x, (x,2,3))
```

Out[24]:

$$\frac{1}{6}$$

Пример 17: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2x$, $y = -x^2 + 5x - 10$

In [25]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(-x**2+5*x-10+2*x, (x,2,5))
```

Out[25]:

$$\frac{9}{2}$$

Пример 18: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2x$, $y = -x^2 + 3x - 6$

In [41]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(-x**2+3*x-6+2*x, (x,2,3))
```

Out[41]:

$$\frac{1}{6}$$

In [44]:
```
#### 1: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x$, $y=-x^{2}+7x-6$

x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(-x**2+7*x-6-2*x, (x,2,3))
```

```
#### 2: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-2x$, $y=-x^{2}+5x-10$

x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(-x**2+5*x-10+2*x, (x,2,5))

#### 3: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-2x$, $y=-x^{2}+3x-6$

x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(-x**2+3*x-6+2*x, (x,2,3))

x, y = sympy.symbols('x y')
sympy.integrate(y**2*x-2*x*y,(y, x, 2))
```

Out[44]: $-\frac{x^4}{3} + x^3 - \frac{4x}{3}$

In [45]:
```
x, y = sympy.symbols('x y')
sympy.integrate(-x**4/3 + x**3 - 4*x/3,(x,-1, 2))
```

Out[45]: $-\frac{9}{20}$

Пример 19: Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями: $y = x^2 - x$ и $y = 0$ при $x \in [2, 4]$.

In [ ]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.pi*sympy.integrate((x**2-x)**2, (x,2,4))
```

Пример 20: Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями: $y = \sqrt{3 - x}$ и $y = -x - 53$ при $x \in [-61, -53]$.

In [8]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.pi*sympy.integrate(((sympy.sqrt(3-x))**2-(-x-53)**2), (x,-61,-53))
```

Out[8]: $\frac{928\pi}{3}$

Пример 21: Вычислить длину дуги параболы $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$

Решение. Принимая во внимание первые, то есть «иксовые» координаты точек, определяем пределы интегрирования $a = 1$, $b = 2$ и используем формулу: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$

In [28]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(sympy.sqrt(1+sympy.diff(x**2)**2), (x,1,2))
```

Out[28]: $-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\operatorname{asinh}(2)}{4} + \frac{\operatorname{asinh}(4)}{4} + \sqrt{17}$

Пример 22: Вычислить длину дуги параболы $\mathrm{y}^2 = \mathrm{x}^3$ от точки $M(0,0)$ до точки $N(1,1)$

Решение. Принимая во внимание «иксовые» координаты точек, определяем пределы интегрирования $a = 0$, $b = 1$ и используем формулу:
$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$

In [29]:
```
x = sympy.symbols('x')
sympy.integrate(sympy.sqrt(1+sympy.diff(pow(x,3/2))**2), (x,0,1))
```

Out[29]: 1.43970987337155

Пример 23: Найдите функцию дохода R(x), если предельный доход при реализации единиц продукции определяется по формуле $MR = 6x^6 - 230$

In [30]:
```
x = sympy.symbols('x')
y = sympy.integrate(6*x**6-230,x)
print(y)
```

```
6*x**7/7 - 230*x
```

Пример 24: Найти функцию издержек $TC(q)$, если предельные издержки заданы функцией $\mathrm{MC} = 18g^5 + 20q^4 + 16q^3$, а начальные фиксированные затраты равны 790.

In [31]:
```
x = sympy.symbols('x')
y = sympy.integrate(18*x**5+20*x**4+17*x**3,x)
print(y)
```

```
3*x**6 + 4*x**5 + 17*x**4/4
```

Пример 25: Найти общую себестоимость выпуска q единицпродукции $TC(q)$, если предельная себестоимость производства q единиц продукции задана функцией $MC = e^{7,8q}$, а начальные фиксированные затраты равны 21.

Вычисляем:
$TC(q) = \int MC(q) = \int e^{7,8q} dq = [d(7,8q) = 7,8dq] = \frac{10}{78} \int e^{7,8q} d(7,8q) = \frac{5}{39} e^{7,8q} + C$

In [32]:
```
x = sympy.symbols('x')
y = sympy.integrate(sympy.exp(7.8*x), x)
print(y)
```

```
0.128205128205128*exp(7.8*x)
```

Пример 26: Количество потребляемой предприятием электроэнергии меняется в течение суток в зависимости от времени t со скоростью $v(t) = 8 + 4\sin\left(\frac{\pi}{4}(t+7)\right)$, где время t измеряется в часах. Найти суммарный расход электроэнергии за сутки.

Решение. Обозначим суммарный расход электроэнергии за сутки V. Тогда вычисляем:

```
In [33]: x = sympy.symbols('x')
         y = sympy.integrate(8+4*sympy.sin(sympy.pi/4*(x+7)), (x, 0, 24))
         print(y)
```

```
192
```

Пример 27: Найти объем продукции, произведений за 6 лет, если функция Кобба-Дугласа имеет вид: $F(t) = (1+t)e^{2t}$

Решение. Объем K(t) произведенной продукции вычисляется по формуле: $V(t) = \int_0^6 (1+t)e^{2t}dt$

```
In [13]: x = sympy.symbols('x')
         y = sympy.integrate((1+x)*sympy.exp(2*x) , (x, 0, 6))
         print(y)
```

```
-1/4 + 13*exp(12)/4
```

Примеры решения задач

1: Найдите неопределенный интеграл: $\int \frac{(x-4)^2}{x}dx$

```
In [7]: x = sp.symbols('x')
        y = sp.integrate(((x-4)**2)/x, x)
        print(y)
```

```
x**2/2 - 8*x + 16*log(x)
```

6: Вычислите интеграл: $\int (4x+3)^2 dx$

```
In [8]: x = sp.symbols('x')
        y = sp.integrate((4*x+3)**2, x)
        print(y)
```

```
16*x**3/3 + 12*x**2 + 9*x
```

8: Найдите неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{7x-2}$

In [9]:
```python
x = sp.symbols('x')
y = sp.integrate(1/(7*x-2), x)
print(y)
```

```
log(7*x - 2)/7
```

12: Найдите неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{-x^2-8x-12}$

In [10]:
```python
x = sp.symbols('x')
y = sp.integrate(1/(-x**2-8*x-12) , x)
print(y)
```

```
-log(x + 2)/4 + log(x + 6)/4
```

14: Найдите неопределенный интеграл: $\int (6x-4)(3x^2-4x+2)^4 dx$

In [11]:
```python
x = sp.symbols('x')
y = sp.integrate((3*x**2-4*x+2)**4*(6*x-4) , x)
print(y)
```

```
243*x**10/5 - 324*x**9 + 1026*x**8 - 2016*x**7 + 2712*x**6 - 13024*x**5/5 + 1808*
x**4 - 896*x**3 + 304*x**2 - 64*x
```

20: Найдите определенный интеграл: $\int_2^3 x(28-3x^2)^{\frac{1}{5}} dx$

In [13]:
```python
x = sp.symbols('x')
y = sp.integrate(x*(28-3*x**2)**(1/5), (x, 2, 3))
print(y)
```

```
Integral(Piecewise((-0.999999999999999*x*(3*x**2 - 28)**0.2*exp(1.2*I*pi), 3*x**
2/28 > 1), (0.999999999999999*x*(28 - 3*x**2)**0.2, True)), (x, 2, 3))
```

26: Найдите определенный интеграл: $\int_2^4 \frac{2^{2x}}{(2^{2x}+2)^{\frac{1}{4}}} dx$

In [15]:
```python
x = sp.symbols('x')
y = sp.integrate(2**(2*x)/(2**(2*x)+2)**(1/4), (x, 2, 4))
print(y)
```

```
37.0905220568076/log(2)
```

34: Найдите определенный интеграл: $\int_{e^2}^{e^5} (2x^2+3) \ln x dx$

In [17]:
```python
x = sp.symbols('x')
y = sp.integrate((2*x**2+3)*sp.log(x) , (x, sp.exp(2), sp.exp(5)))
print(y)
```

```
-10*exp(6)/9 - 3*exp(2) + 12*exp(5) + 28*exp(15)/9
```

40: Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_0^4 \frac{dx}{x^4}$

In [19]:
```
x = sp.symbols('x')
y = sp.integrate(1/x**4, (x,0,4))
print(y)
```

```
oo
```

46: Найдите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_{-\infty}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

In [23]:
```
x = sp.symbols('x')
y = sp.integrate(1/(1+x**2),(x,-sp.oo, sp.sqrt(3)) )
print(y)
```

```
5*pi/6
```

47: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 5x$, $y = 3x^2 - 9x + 15$

In [25]:
```
sp.solve(5*x-(3*x**2-9*x+15),x)
```

Out[25]: [5/3, 3]

In [26]:
```
abs(sp.integrate(5*x-(3*x**2-9*x+15), (x, 5/3,3)))
```

Out[26]: 1.18518518518518

50: Вычислить кратный интеграл $\iint(5x^2 - xy + 5y + 5)dxdy$ по области $D = (x, y) \in \mathbb{R}| - 4 \leq y \leq 2$

In [27]:
```
x, y = sp.symbols('x y')
z = sp.integrate( (5*x ** 2-x*y+5*y+5), (y, -4, 2), (x, -4, 1) )
print(z)
```

```
605
```

Задачи для самостоятельного решения

1: Вычислить интеграл $\int \frac{6^3\sqrt{x}-x^2\sin x+3x}{x^2}dx$

In [35]:
```
x = sp.symbols('x')
y = sp.integrate( (6**3*sp.sqrt(x)-x**2*sp.sin(x)+3*x)/(x**2) , x)
print(y)
```

```
3*log(x) + cos(x) - 432/sqrt(x)
```

Ответ:

$$\frac{-9}{\sqrt[3]{x^2}} + \cos x + 3\ln|x| + C$$

Индивидуальное задание

In [39]:

```
# Методы интеграции
from scipy.integrate import quad
from pylab import loglog, show, xlabel, ylabel, legend
from sympy import integrate, symbols
from math import sin, cos
from numpy import sum, linspace


def trapezoid(a, b, N):
    h = (b-a)/N
    sum = 0.5*(f(a)+f(b))
    x = a
    for i in range(1, N):
        x += h
        sum += f(x)
    return sum*h


def simpson(a, b, f, N):
    h = (b-a)/N
    x = linspace(a, b, N+1)
    y = f(x)
    return h/3.*sum(y[0:-1:2] + 4*y[1::2] + y[2::2])


def f(x):
    return x**4 - 2*x + 1


a = 0.
b = 2.
x = symbols('x')

TrapezoidResiduals = []
SimpsonResiduals = []
Nsteps = []

IntAnalytic = integrate(x**4 - 2*x + 1, (x, a, b))
integr = integrate(x**4 - 2*x + 1)
print(integr.subs(x, b))

IntScipy = quad(f, a, b)[0]
for i in range(10):
    N = 2**i
    Nsteps.append(N)
    TrapezoidResiduals.append(abs(trapezoid(a, b, N)-IntScipy))
    SimpsonResiduals.append(abs(simpson(a, b, f, N)-IntScipy))

print(SimpsonResiduals)
```

```
loglog(Nsteps, TrapezoidResiduals, '-r', label='трапециевидный')
loglog(Nsteps, SimpsonResiduals, '-b', label='симпсон')
xlabel('N')
ylabel('ошибка')
legend()
show()
```

```
4.40000000000000
[4.3999999999999995, 0.2666666666666666, 0.016666666666666607, 0.0010416666666666
075, 6.510416666660745e-05, 4.069010416607455e-06, 2.5431315098245477e-07, 1.5894
571880892272e-08, 9.934106870446158e-10, 6.208811242913725e-11]
```