Дифференциальные уравнения

In [3]:
```
from sympy import *
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{e^{\sqrt{x}-2}}{\sqrt{x}}.$$

In [4]:
```
x = symbols('x')
y = Function('y')
```

In [5]:
```
eq = diff(y(x),x) - (exp(sqrt(x)-2)/sqrt(x))
dsolve(eq,y(x)).simplify()
```

Out[5]: $y(x) = C_1 + 2e^{\sqrt{x}-2}$

Пример 2. Решить уравнение

$$xydx + (x+1)dy = 0.$$

Решение. После деления на dx, получаем

$$xy + (x+1)\frac{dy}{dx} = 0; \quad (x+1)y' = -xy.$$

In [4]:
```
eq = (x+1)*diff(y(x),x) + x*y(x)
dsolve(eq, y(x))
```

Out[4]: $y(x) = C_1 (x+1) e^{-x}$

Пример 3. Решить уравнение
$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

In [5]:
```
eq = x*diff(y(x),x) - y(x) - sqrt(y(x)**2-x**2)
dsolve(eq, y(x))
```

Out[5]: $y(x) = x \cosh(C_1 - \log(x))$

Пример 4. Решить уравнение

$$(x^2 + y^2)y' = xy.$$

Решение. Попытка решить это уравнение с помощью функции dsolve () приводит к ответу, содержащему неэлементарные функции. Выполним замену

$$\frac{y}{x} = z; \quad y = xz; \quad y' = z + xz'.$$

Новое уравнение после упрощений принимает вид:

$$x(1 + z^2)z' + z^3 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{(1+z^2)}{z^3} dz = -\frac{dx}{x}.$$

In [6]:
```
z = symbols('z')
fz = (1+z**2)/z**3
```

```
I1 = integrate(fz)
I1
```

Out[6]: $\log(z) - \frac{1}{2z^2}$

In [7]:
```
I2 = -integrate(1/x)
I2
```

Out[7]: $-\log(x)$

Пример 5. Решить уравнение

$$(2x-2)dy = (x+2y-3)dx.$$

In [8]:
```
u = symbols('u')
v = Function('v')
eq = diff(v(u), u) - v(u)/u - 1/2
dsolve(eq, v(u))
```

Out[8]: $v(u) = u\left(C_1 + 0.5\log(u)\right)$

Пример 6. Решить уравнение

$$xy' - y = x^3.$$

In [9]:
```
eq = x*diff(y(x),x) - y(x) - x**3
dsolve(eq, y(x))
```

Out[9]: $y(x) = x\left(C_1 + \frac{x^2}{2}\right)$

Пример 7. Решить линейное дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной.

$$y' + 4xy = 6xe^{-x^2}.$$

In [10]:
```
eq = diff(y(x),x)+4*x*y(x)
dsolve(eq,y(x))
```

Out[10]: $y(x) = C_1 e^{-2x^2}$

In [11]:
```
integrate(6*x*exp(x**2),x)
```

Out[11]: $3e^{x^2}$

Пример 8. Решить уравнение $y = (2x + y^3)y'$.

In [12]:
```
y = symbols('y')
x = Function('x')
eq = diff(x(y),y) - 2*x(y)/y - y**2
dsolve(eq, x(y))
```

Out[12]: $x(y) = y^2 (C_1 + y)$

Пример 9. Решить уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = x^4 y^2.$$

In [13]:
```
x = symbols('x')
y = Function('y')
```

```
eq = diff(y(x),x) - y(x)/x - (x**4)*(y(x)**2)
dsolve(eq,y(x))
```

Out[13]: $y(x) = \frac{6x}{C_1 - x^6}$

Пример 10. Решить уравнение

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}.$$

In [14]:

```
z = Function('z')
eq = diff(z(x),x)/4 + x*z(x) - x
dsolve(eq, z(x))
```

Out[14]: $z(x) = C_1 e^{-2x^2} + 1$

Пример 11. Решить уравнение $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$.

In [15]:

```
u = Function('u')
eq = diff(u(x),x) + 4*u(x)/x + u(x)**2
des = dsolve(eq, u(x))
des.simplify()
```

Out[15]: $u(x) = \frac{3}{C_1 x^4 - x}$

Пример 12. Решить уравнение

$$(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0.$$

In [16]:

```
eq = (2*x-3)*diff(y(x),x) + 3*x**2+2*y(x)
dsolve(eq,y(x))
```

Out[16]:

$$y(x) = \frac{C_1 - x^3}{2x - 3}$$

Пример 13. Решить уравнение $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

In [17]:

```
x,y = symbols('x y')
Q = x**2 - y**2
I2 = integrate(Q, (y,0,y))
I2
```

Out[17]:

$$x^2 y - \frac{y^3}{3}$$

Пример 14. Решить дифференциальное уравнение с заданным начальным условием

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

In [18]:

```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = (x**2-1)*diff(y(x), x) + 2*x*y(x)**2
dsolve(eq, y(x))
```

Out[18]:

$$y(x) = -\frac{1}{C_1 - \log(x^2 - 1)}$$

Пример 15. Решить задачу Коши

$$xy' - y + y^2(\ln x + 2)\ln x = 0, \quad y(1) = 1.$$

In [19]:

```
eq = x*diff(y(x),x) - y(x) + y(x)**2*(log(x)+2)*log(x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

Out[19]: $y(x) = \frac{x}{C_1 + x\log(x)^2}$

Пример 16. Решить задачу Коши

$$(1 + x^2)y' + y = 0, \quad y(+\infty) = 1.$$

In [20]:

```
eq = (1+x**2)*diff(y(x),x) + y(x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

Out[20]: $y(x) = C_1 e^{-\operatorname{atan}(x)}$

Пример 17. Найти общее решение уравнения $xy'' + 2y' - xy = 0$, если известно одно его частное решение $y_1 = \frac{e^x}{x}$.

In [24]:

```
def Lin_homogen_2(a,y1):
    x = symbols('x')
    u = Function('u')
    z = Function('z')

    y1d = diff(y1,x)

    eq = y1*diff(u(x),x)+(2*y1d+a*y1)*u(x)
    u0 = dsolve(eq,u(x))

    eq = diff(z(x),x)-u0.rhs
    z0 = dsolve(eq,z(x))

    y = y1*z0.rhs
    return y.simplify()
```

Пример 18. Найти общее решение уравнения

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,$$

In [25]:
```
a = -(2*x+1)/x
y1 = exp(x)
Lin_homogen_2(a,y1)
```

Out[25]: $\left(\frac{C_1 x^2}{2} + C_2\right) e^x$

Пример 19. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 1.$$

In [26]:
```
a = -2/x
y1 = x
Lin_homogen_2(a,y1)
```

Out[26]: $x\left(C_1 x + C_2\right)$

Пример 20. Решить уравнение $y''' = \frac{1}{x^2}$.

In [27]:
```
integrate(log(x),x)
```

Out[27]: $x \log(x) - x$

Пример 21. Решить уравнение $y^{(5)} = x\cos 2x$.

In [28]:
```
eq = diff(y(x),x,5) - x*cos(2*x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

Out[28]:
$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + \frac{x \sin(2x)}{32} + \frac{5 \cos(2x)}{64}$$

Пример 22. Решить уравнение

$$xy'' = 3y'.$$

In [30]:
```
eq = x*diff(y(x),x,2) - 3*diff(y(x),x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

Out[30]: $y(x) = C_1 + C_2 x^4$

Пример 23. Решить уравнение

$$2xy'y'' = (y')^2 - 1.$$

In [31]:
```
z = Function('z')
eq = 2*x*z(x)*diff(z(x),x)-z(x)**2+1
des = dsolve(eq, z(x))
des
```

Out[31]: `[Eq(z(x), -sqrt(C1*x + 1)), Eq(z(x), sqrt(C1*x + 1))]`

In [32]:
```
C1 = symbols('C1')
eq = diff(y(x),x)-sqrt(C1*x+1)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

Out[32]:

$$y(x) = C_2 + \frac{2(C_1 x + 1)^{\frac{3}{2}}}{3C_1}$$

Пример 24. Решить уравнение

$$yy'' = 2(y')^2.$$

In [33]:

```
u = Function('u')
eq = diff(u(x),x) + 4*u(x)/x + u(x)**2
des = dsolve(eq, u(x))
des
```

Out[33]:

$$u(x) = \frac{3}{x\left(C_1 x^3 - 1\right)}$$

Пример 25. Решить уравнение

$$(y')^2 + 2yy'' = 0.$$

In [34]:

```
y = symbols('y')
z = Function('z')
eq = 2*y*diff(z(y),y) + z(y)
des = dsolve(eq, z(y))
des
```

Out[34]:

$$z(y) = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$

Пример 26. Решить уравнение $y''' + y'' - 2y' = 0$.

In [35]:

```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x,3)+diff(y(x),x,2)-2*diff(y(x),x)
```

```
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

Out[35]: $y(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^x$

Пример 27. Решить уравнение $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 9y''' - 18y'' = 0$.

In [36]:
```
lamda=symbols('lamda')
roots(lamda**5-2*lamda**4+9*lamda**3-18*lamda**2)
```

Out[36]: `{2: 1, -3*I: 1, 3*I: 1, 0: 2}`

Пример 28. Решить уравнение

$$y^{(6)}+12y^{(5)} + 61y^{(4)} + 336y''' + 2016y'' + 6400y' + 7424y = 0.$$

In [37]:
```
roots(lamda**6+12*lamda**5+61*lamda**4+336*lamda**3 +2016*lamda**2+6400*lamda+7424)
```

Out[37]: `{-4: 4, 2 - 5*I: 1, 2 + 5*I: 1}`

Пример 29. Решить уравнение

$$y'' + 8y' + 16y = 4x^2 e^{3x}.$$

In [38]:
```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x,2)+8*diff(y(x),x)+16*y(x)-4*x**2*exp(3*x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

Out[38]: $y(x) = \frac{4x^2e^{3x}}{49} - \frac{16xe^{3x}}{343} + (C_1 + C_2x)\,e^{-4x} + \frac{24e^{3x}}{2401}$

Пример 30. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + 10y = e^{-x}\sin 2x.$$

In [39]:
```
x,C3,C4 = symbols('x C3 C4')
ych = exp(-x)*(C3*sin(2*x)+C4*cos(2*x))
ych1 = diff(ych,x)
ych1
```

Out[39]: $-\left(C_3\sin\left(2x\right)+C_4\cos\left(2x\right)\right)e^{-x}+\left(2C_3\cos\left(2x\right)-2C_4\sin\left(2x\right)\right)e^{-x}$

Пример 31. Решить уравнение

$$y''' - 5y'' + 6y' = 2^x.$$

In [40]:
```
lamda=symbols('lamda')
roots(lamda**3-5*lamda**2+6*lamda)
```

Out[40]: {3: 1, 2: 1, 0: 1}

In [41]:
```
x,C1d,C2d,C3d = symbols('x Cd C2d C3d')
y1 = 1
y2 = exp(2*x)
y3 = exp(3*x)

y1d = diff(y1,x)
y2d = diff(y2,x)
y3d = diff(y3,x)

y1dd = diff(y1,x,2)
y2dd = diff(y2,x,2)
y3dd = diff(y3,x,2)

eq1 = C1d*y1+C2d*y2+C3d*y3
eq2 = C1d*y1d+C2d*y2d+C3d*y3d
eq3 = C1d*y1dd+C2d*y2dd+C3d*y3dd
```

```
solve([eq1,eq2,eq3-2**x], [C1d,C2d,C3d])
```

Out[41]: {Cd: 2**x/6, C2d: -2**x*exp(-2*x)/2, C3d: 2**x*exp(-3*x)/3}

Пример 32. Решить уравнение

$$y^{(4)} - 3y'' + 2y' = 36x^2 - 36x.$$

In [42]:

```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x,4)-3*diff(y(x),x,2)+2*diff(y(x),x)
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

Out[42]: $y(x) = C_1 + C_4 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x)\, e^x$

Пример 33. Решить дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями

$$y'' + 2y' = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

In [43]:

```
eq = diff(y(x),x,2) + 2*diff(y(x),x) - exp(x)
des = dsolve(eq,y(x))
des
```

Out[43]: $y(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{e^x}{3}$

Пример 34. Решить задачу Коши

$$xy'' + y' = \sqrt{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

In [44]:
```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = x*diff(y(x),x,2)+diff(y(x),x)-sqrt(x)
des = dsolve(eq,y(x))
des
```

Out[44]:

$$y(x) = C_1 + C_2 \log(x) + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}$$

Пример 35. Решить задачу Коши

$$y^{(4)} - 2y''' + y'' - 2y' = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 7, \quad y'''(0) = 8.$$

In [45]:
```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x,4)-2*diff(y(x),x,3)+diff(y(x),x,2)-2*diff(y(x),x)
des = dsolve(eq,y(x))
des
```

Out[45]:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 \sin(x) + C_4 \cos(x)$$

Пример 36. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$$

In [46]:
```
t = symbols('t')
x = Function('x')
```

```
eq = diff(x(t),t,4) - x(t)
des = dsolve(eq,x(t))
des
```

Out[46]: $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + C_3 \sin(t) + C_4 \cos(t)$

In [47]:

```
diff(des.rhs,t,2)
```

Out[47]: $C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - C_3 \sin(t) - C_4 \cos(t)$

Пример 37. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

In [48]:

```
C1 = symbols('C1')
eq = diff(x(t),t) - x(t)/(2*t+C1)
des = dsolve(eq,x(t))
des
```

Out[48]: $x(t) = C_2 \sqrt{C_1 + 2t}$

Пример 38. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1(x) - y_2(x) - y_3(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1(x) + y_2(x), \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 3y_1(x) + y_3(x). \end{cases}$$

In [49]:

```
x = symbols('x')
y1 = Function('y1')
eq = diff(y1(x),x,2)-2*diff(y1(x),x)+5*y1(x)
des = dsolve(eq,y1(x))
des
```

Out[49]: $y_1(x) = (C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)) e^x$

In [50]:

```
C1,C2 = symbols('C1,C2')
y3 = Function('y3')
eq = diff(y3(x), x)-y3(x)-3*exp(x)*(C1*sin(2*x)+C2*cos(2*x))
des = dsolve(eq,y3(x))
des
```

Out[50]: $y_3(x) = \left(-\frac{3C_1 \cos(2x)}{2} + \frac{3C_2 \sin(2x)}{2} + C_3\right) e^x$

Пример 39. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

In [51]:
```
A = Matrix([[1,2], [4,3]])
A.eigenvects()
```

Out[51]:
```
[(-1,
  1,
  [Matrix([
   [-1],
   [ 1]])]),
 (5,
  1,
  [Matrix([
   [1/2],
   [  1]])])]
```

In [52]:
```
x,C1,C2 = symbols('t Cl C2')
y1 = C1*exp(-x)+(C2/2)*exp(5*x)
y2 = -C1*exp(-x)+C2*exp(5*x)
print(diff(y1,x)-y1-2*y2, diff(y2,x)-4*y1-3*y2)
```

```
0 0
```

Пример 40. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

In [53]:
```
A = Matrix([[2,1], [-2,4]])
A.eigenvects()
```

Out[53]:
```
[(3 - I,
  1,
  [Matrix([
   [1/2 + I/2],
   [        1]])]),
 (3 + I,
  1,
  [Matrix([
   [1/2 - I/2],
   [        1]])])]
```

In [54]:
```
x,C1,C2 = symbols('x C1 C2')
y1 = exp(3*x)*((C1+C2)*cos(x)+(C1-C2)*sin(x))
y2 = exp(3*x)*(2*C1*cos(x)-2*C2*sin(x))
(diff(y1,x)-2*y1-y2).simplify()
```

Out[54]: 0

Пример 41. Решить неоднородную систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2(x) + x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1(x) + 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Решаем однородную систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

In [55]:

```
A = Matrix([[0,1], [-1,0]])
A.eigenvects()
```

Out[55]:

```
[(-I,
  1,
  [Matrix([
   [I],
   [1]])]),
 (I,
  1,
  [Matrix([
   [-I],
   [ 1]])])]
```

In [56]:

```
C1d,C2d,x = symbols('C1d,C2d x')
eq1 = C1d*sin(x)-C2d*cos(x)-x
eq2 = C1d*cos(x)+C2d*sin(x)-3
```

```
des = solve([eq1,eq2], [C1d,C2d])
des
```

Out[56]:
```
{C1d: x*sin(x)/(sin(x)**2 + cos(x)**2) + 3*cos(x)/(sin(x)**2 + cos(x)**2),
 C2d: -x*cos(x)/(sin(x)**2 + cos(x)**2) + 3*sin(x)/(sin(x)**2 + cos(x)**2)}
```

Пример 42. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) - y(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) + 3y(t). \end{cases}$$

In [57]:
```
t = symbols('t')
x = Function('x')
y = Function('y')
eq1 = diff(x(t),t) - x(t) + y(t)
eq2 = diff(y(t),t) - x(t) - 3*y(t)

dsolve((eq1,eq2))
```

Out[57]:
```
[Eq(x(t), -C2*t*exp(2*t) - (C1 - C2)*exp(2*t)),
 Eq(y(t), C1*exp(2*t) + C2*t*exp(2*t))]
```

Пример 43. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) + y(t) + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = y(t) - e^{2t}. \end{cases}$$

In [58]:
```
t = symbols('t')
x = Function('x')
y = Function('y')
eq1 = diff(x(t),t)-x(t)-y(t)
```

```
eq2 = diff(y(t),t)-y(t)
dsolve((eq1,eq2))
```

Out[58]: [Eq(x(t), C1*exp(t) + C2*t*exp(t)), Eq(y(t), C2*exp(t))]

Пример 44. Решить задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x(t) + y(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) + 2y(t), \\ \dfrac{dz}{dt} = x(t) + y(t) + 2z(t), \end{cases}$$

$$x(0) = 2, y(0) = 4, z(0) = 3.$$

In [59]:

```
t = symbols('t')
x = Function('x')
y = Function('y')
z = Function('z')
eq1 = diff(x(t),t)-2*x(t)-y(t)
eq2 = diff(y(t),t)-x(t)-2*y(t)
eq3 = diff(z(t),t)-x(t)-y(t)-2*z(t)
des = dsolve((eq1,eq2,eq3))
des
```

Out[59]:

```
[Eq(x(t), -C1*exp(t) + C2*exp(3*t)/2),
 Eq(y(t), C1*exp(t) + C2*exp(3*t)/2),
 Eq(z(t), C2*exp(3*t) + C3*exp(2*t))]
```

Пример 45. Найти численное решение задачи Коши

$$y'(x) = -xy(x), \quad y(-3) = 1$$

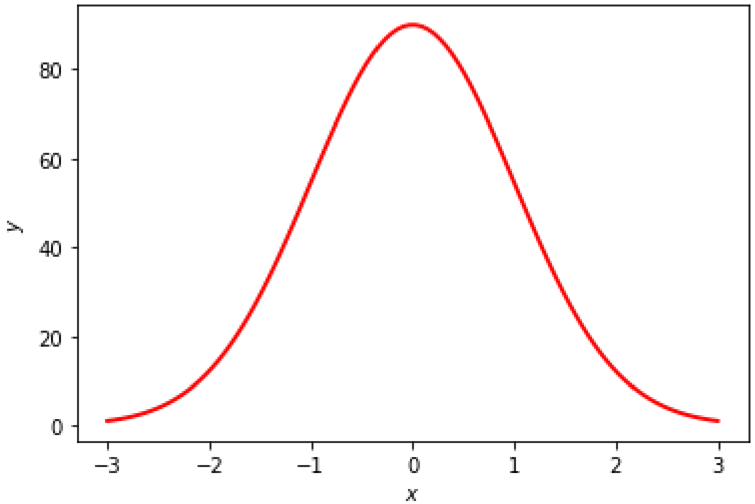
на отрезке $[-3;3]$.

In [60]:

```
def f(y,x):
    return -y*x

x = np.linspace(-3, 3, 100)
y0 = 1
y = odeint(f, y0, x)

plt.plot(x,y,c='r',linewidth=2)
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.show()
```



Пример 46. Найти численное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -y_1(x) - y_2(x), \end{cases} \quad y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1$$

на отрезке $[0;10]$.

In [61]:

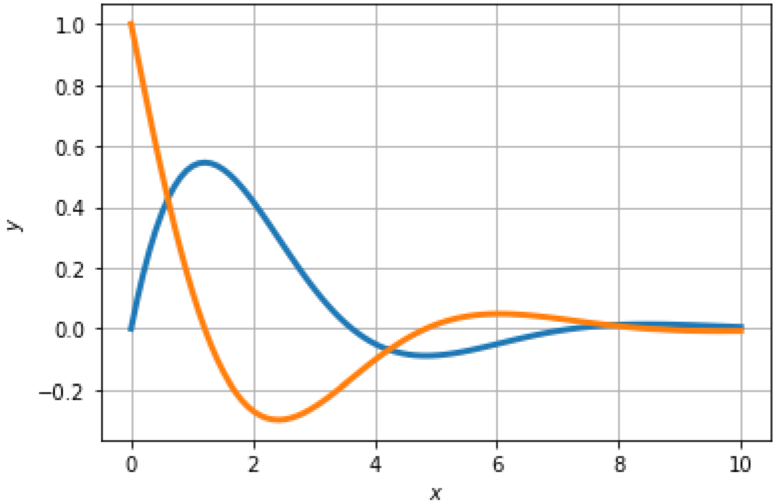
```
def f(y, x):
    y1, y2 = y
    return [y2, -y1-y2]

x = np.linspace(0,10,100)
y0 = [0, 1]
w = odeint(f, y0, x)

y1 = w[:,0]
y2 = w[:,1]
```

In [62]:

```
fig = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(x,y1,x,y2,linewidth=3)
plt.ylabel("$y$")
plt.xlabel("$x$")
plt.grid(True)
plt.show()
```



Пример 47. Найти численное решение задачи Коши

$$(x^2+1)y''=2xy', \quad y(-4)=-75, \; y'(-4)=51.$$

на отрезке $[-4;5]$.

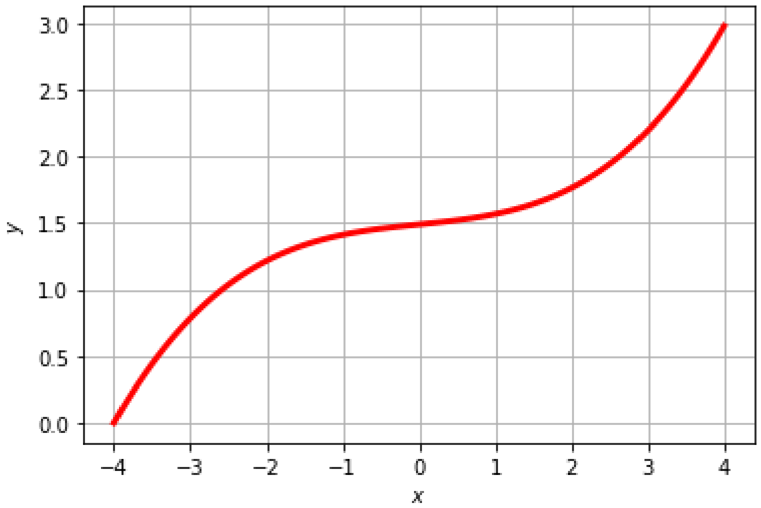
In [63]:

```
def f(y, x):
    y1, y2 = y
    return [y2, 2*x*y2/(x**2+1)]

x = np.linspace(-4, 4, 100)
y0 = [-75, 51]
w = odeint(f, y0, x)

y1 = w[:,0]

fig = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(x,y1,c='r',linewidth=3)
plt.ylabel("$y$")
plt.xlabel("$x$")
plt.grid(True)
plt.show()
```



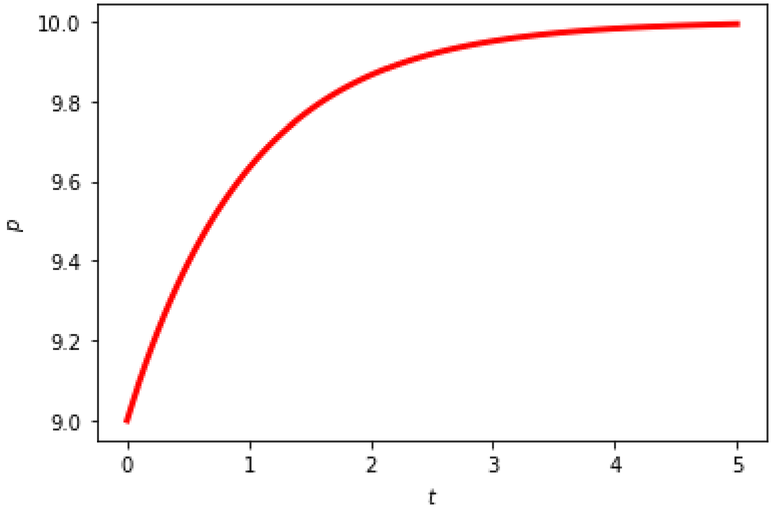
Пример 48. Через какое время объем реализованной продукции увеличится в три раза по сравнению с первоначальным, если известно значение коэффициента пропорциональности $k = l \cdot m \cdot P = 0{,}2$?

Решение. Имеем: $Q'(t) = k \cdot Q(t)$, $Q(t) = 3Q(0)$. Решением дифференциального уравнения является $Q(t) = Q(0)e^{kt}$. Значение t находим из условия $e^{0.2t} = 3$, $e^{kt}t = 5\ln 3 \approx 5.5$ ед. времени.

In [64]:
```
t = symbols('t')
p = Function('p')
eq = diff(p(t),t)+p(t)-10
des = dsolve(eq,p(t))
des
```

Out[64]: $p(t) = C_1 e^{-t} + 10$

In [65]:
```
t = np.linspace(0,5,100)
p = 10-np.exp(-t)
plt.plot(t,p,c='r',linewidth=3)
plt.ylabel('$p$')
plt.xlabel("$t$")
plt.show()
```



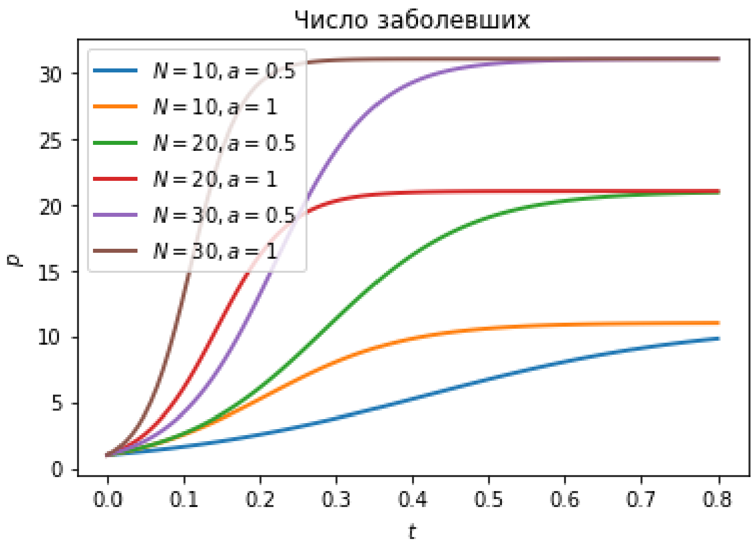
Пример 51. Рассмотрим модель естественного хода эпидемии (без какого-либо вмешательства).

In [66]:
```
u = symbols('u')
N = symbols('N')
integrate(1/((N+1)*u-1),u)
```

Out[66]:

$$\frac{\log\left(u\left(N+1\right)-1\right)}{N+1}$$

In [67]:
```
t = np.linspace(0,0.8,100)
for param in [[10, 0.5],[10,1],[20,0.5],[20,1],[30,0.5],[30,1]]:
    N = param[0]
    a = param[1]
    X = (N+1)/(N*np.exp(-(N+1)*a*t)+1)
    plt.plot(t, X, lw=2, label="$N=%s, a=%s$" % (N, a))
plt.legend()
plt.ylabel('$p$')
plt.xlabel("$t$")
plt.title("Число заболевших");
```



In [68]:

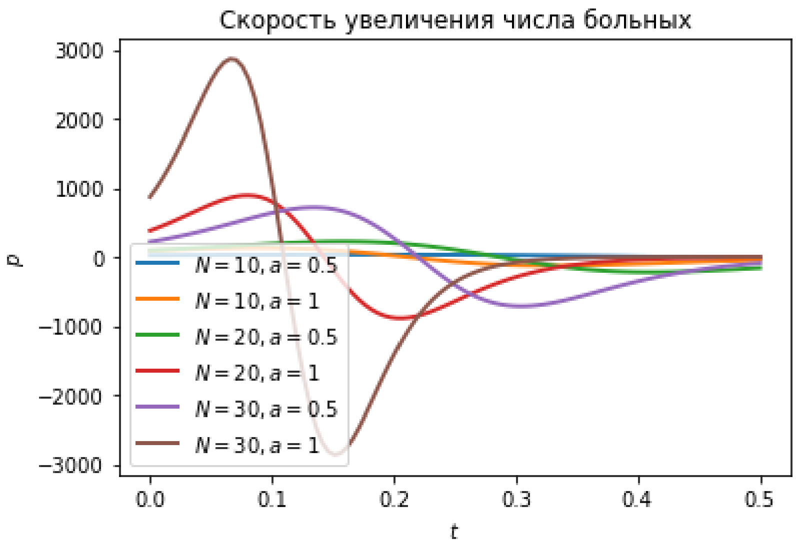
```
t,N,a = symbols('t N a')
X = (N+1)/(N*exp(-(N+1)*a*t)+1)
Xprim = diff(X,t,2)
Xprim.simplify()
```

Out[68]:

$$\frac{Na^2(N+1)^3\left(N-e^{at(N+1)}\right)e^{at(N+1)}}{\left(N+e^{at(N+1)}\right)^3}$$

In [69]:

```
t = np.linspace(0,0.5,100)
for param in [[10, 0.5],[10,1],[20,0.5],[20,1],[30,0.5],[30,1]]:
    N = param[0]
    a = param[1]
    Xprim = a**2*N*(N+1)**3*(N-np.exp((N+1)*a*t))*np.exp((N+1)*a*t) / (N+np.exp((N+1)*a*t))**3
    plt.plot(t, Xprim, lw=2, label = "$N=%s, a=%s$" % (N, a))
plt.legend()
plt.ylabel('$p$')
plt.xlabel("$t$")
plt.title("Скорость увеличения числа больных");
```



Примеры решения задач

Решить задачу Коши

$$y' = \frac{xy^2 - yx^2}{x^3}, \quad y(-1) = 1.$$

In [70]:

```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = diff(y(x),x) - (x*y(x)**2-y(x)*x**2)/x**3
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

Out[70]:

$$y(x) = \frac{2x}{C_1x^2 + 1}$$

Решить уравнение

$$(x+y-4)y' = 2x+y+3.$$

Решение. Имеем уравнение приводящееся к однородному.

1). Положим $x = u+a, y = v+b$, а числа a и b подберем, подставив формулы в исходное уравнение.

$$(u+v+a+b-4)y' = 2u+v+2a+b+3.$$

Подберем a и b так, чтобы

$$\begin{cases} a+b-4=0, \\ 2a+b+3=0, \end{cases} \quad a=-7, b=11.$$

2). Исходное уравнение принимает вид: $(u+v)v' = 2u+v$. Получили однородное уравнение. Выполняем замену: $z=\frac{v}{u}$, $v=uz$, $v' = z+uz'$.

3). После упрощений получаем уравнение с разделяющимися переменными: $u(1+z)z' = 2-z^2$. Его решение:

In [71]:
```
u = symbols('u')
z = Function('z')
eq = u*(1+z(u))*diff(z(u),u)-2+z(u)**2
des = dsolve(eq, z(u))
des.simplify()
```

Out[71]:

$$C_1 = \log(u) + \frac{\left(\sqrt{2}+2\right)\log\left(z(u)-\sqrt{2}\right)}{4} + \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\log\left(z(u)+\sqrt{2}\right)}{4}$$

Решить уравнение $xy' + y = y^2$.

In [72]:
```
eq = x*diff(y(x),x) + y(x) - y(x)**2
dsolve(eq, y(x))
```

Out[72]:

$$y(x) = -\frac{C_1}{-C_1 + x}$$

Найти общее решение уравнения $y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2 x)y = 0$, если известно одно его частное решение $y_1 = \mathrm{tg} x$.

In [73]:
```
a = 0
y1 = tan(x)
Lin_homogen_2(a,y1)
```

Out[73]:

$$\left(C_1 \int \frac{e^{-x}}{\tan^2(x)}\, dx + C_2\right) \tan(x)$$

Решить уравнение $\left(1 + x^2\right) y'' + 2xy' = x^3$.

In [74]:
```
x = symbols('x')
z = Function('z')
eq = (1+x**2)*diff(z(x),x)+2*x*z(x)-x**3
dsolve(eq,z(x))
```

Out[74]:

$$z(x) = \frac{C_1 + \frac{x^4}{4}}{x^2 + 1}$$

In [75]:
```
z2 = x**4/(4*(x**2+1))
integrate(z2,x)
```

Out[75]: $$\frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{atan}(x)}{4}$$

Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}\sin x.$$

In [76]:
```
eq = diff (y(x),x,2)-3*diff(y(x),x)+2*y(x)-exp(2*x)*sin(x)
dsolve(eq,y(x))
```

Out[76]: $$y(x) = \left(C_1 + \left(C_2 - \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}\right)e^x\right)e^x$$

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_2 - y_1 - 5e^x\sin x. \end{cases}$$

In [77]:
```
x = symbols('x')
y1 = Function('y1')
y2 = Function('y2')
eq1 = diff(y1(x),x)-2*y1(x)+y2(x)
eq2 = diff(y2(x),x)-2*y2(x)+y1(x)
des = dsolve((eq1,eq2))
des
```

Out[77]:
```
[Eq(y1(x), C1*exp(x) - C2*exp(3*x)), Eq(y2(x), C1*exp(x) + C2*exp(3*x))]
```

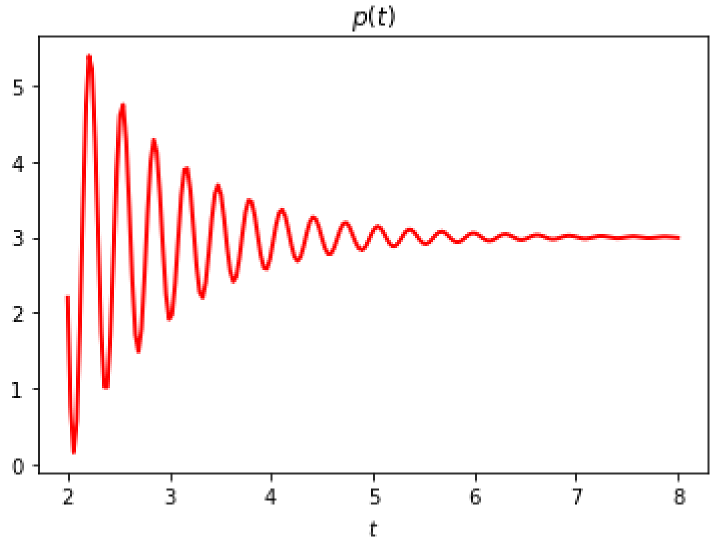
Функции спроса D и предложения S, выражающие зависимость от цены p и ее производных, имеют вид:

$$D(t) = 3p'' - p' - 200p + 600, \quad S(t) = 4p'' + p' + 201p - 603.$$

In [78]:
```
t = symbols('t')
p = Function('p')
eq = diff(p(t),t,2)+2*diff(p(t),t)+401*p(t)-1203
des = dsolve(eq,p(t))
des
```

Out[78]: $p(t) = (C_1 \sin(20t) + C_2 \cos(20t))\, e^{-t} + 3$

In [79]:
```
t = np.linspace(2,8,200)
y = 3 + np.exp(-t)*(10*np.sin(20*t)+20*np.cos(20*t))
plt.plot(t, y, c = 'r', lw=2)
plt.xlabel("$t$")
plt.title("$p(t)$")
plt.show()
```



Решить задачу Коши $\left(x^2y-y\right)^2y'=x^2y-y+x^2-1, \quad y(\infty)=0$

In [80]:
```
x = symbols('x')
y = Function('y')
eq = (x**2*y(x)-y(x))**2*diff(y(x),x)-x**2*y(x)+y(x)-x**2+1
des = dsolve(eq, y(x))
des
```

Out[80]:

$$-\frac{y^2(x)}{2}+y(x)+\frac{\log(x-1)}{2}-\frac{\log(x+1)}{2}-\log(y(x)+1)=C_1$$

Индивидуальное задание

In [10]:
```
import numpy as np # математика: косинусы и прочие
import pandas as pd # обработка данных
import seaborn as sns # графики
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as stats
%matplotlib inline
```

Дифференциальные уравнения

Сначала разберёмся как в питоне функции свои делать. Создаём новую функцию:

In [11]:
```
def my_fun(x):
    return x ** 2
```

Тестируем новую функцию:

In [12]:
```
my_fun(5)
```

Out[12]:

25

Система Лотка-Вольтера:

r — численность кроликов (rabbits)

f — численность лис (foxes)

$$\begin{cases} r'(t) = r - 0.1r \cdot f \\ f'(t) = -1.5f + 0.08r \cdot f \end{cases}$$

Задаём функцию, которая для заданных r и f и момента t находит производные:

In [13]:

```
def dydt(y, t):
    r, f = y
    return [r - 0.1 * r * f, -1.5 * f + 0.08 * r * f]
```

Тестируем функцию для подсчёта производных:

In [14]:

```
dydt([10, 7], 5)
```

Out[14]:

```
[3.0, -4.8999999999999995]
```

Начальные условия для дифференциального уравнения:

In [15]:

```
y0 = [10, 7]
```

Задаём ось времени:

In [16]:

```
time = np.arange(start=0, stop=10, step=0.5)
```

In [17]:

```
time
```

Out[17]:

```
array([0. , 0.5, 1. , 1.5, 2. , 2.5, 3. , 3.5, 4. , 4.5, 5. , 5.5, 6. ,
       6.5, 7. , 7.5, 8. , 8.5, 9. , 9.5])
```

Импортируем функцию для решения дифференциального уравнения:

In [18]:

```
from scipy.integrate import odeint
```

Решаем!

In [19]:
```
y = odeint(dydt, y0, time)
```

In [20]:
```
y
```

Out[20]:
```
array([[10.        ,  7.        ],
       [12.23004911,  5.13255168],
       [16.00919283,  4.2415852 ],
       [21.44606236,  4.21508486],
       [28.01569671,  5.34769501],
       [32.93782769,  8.67081381],
       [30.32052215, 15.01072824],
       [20.47146214, 19.73371781],
       [12.88170358, 17.85889809],
       [ 9.77249176, 13.11612549],
       [ 9.31672256,  9.01677012],
       [10.53139081,  6.30355742],
       [13.22221672,  4.76426992],
       [17.51140216,  4.13806343],
       [23.41502807,  4.41038027],
       [29.94120961,  6.06802599],
       [33.20018971, 10.35501561],
       [27.62081654, 17.03915497],
       [17.59437495, 19.79420357],
       [11.53216338, 16.46719223]])
```

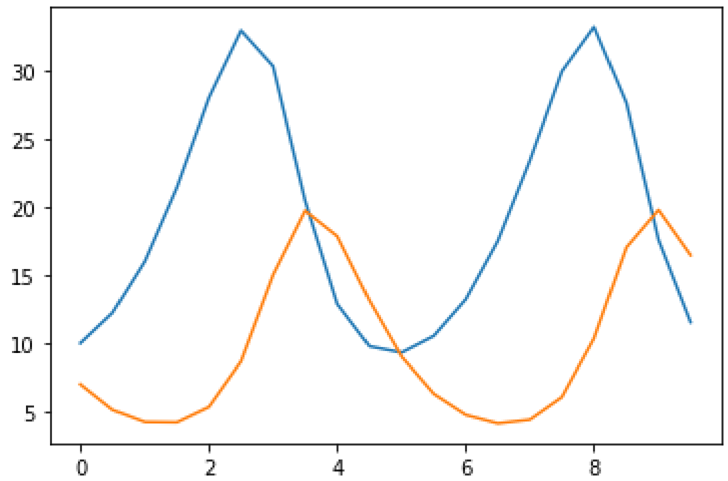
Выделяем два отдельных вектора: кроликов (r) и лис (f):

In [21]:
```
r = y[:, 0]
f = y[:, 1]
```

Даёшь график численности:

In [22]:
```
plt.plot(time, r)
plt.plot(time, f)
```

Out[22]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x12e30ea3670>]
```



А теперь приступим к построению фазового портрета. Сначала зададим числа на вертикальной и горизонтальной осях:

In [23]:
```
r_axis = np.arange(start=0, stop=30, step=3)
f_axis = np.arange(start=0, stop=30, step=3)
```

In [24]:
```
r_axis
```

Out[24]:
```
array([ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27])
```

Теперь для каждой точки решётки на плоскости посчитаем r и f координату:

In [25]:
```
all_y = np.meshgrid(r_axis, f_axis)
```

In [26]:
```
all_r, all_f = all_y
```

In [28]:
```
all_r
```

Out[28]:
```
array([[ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27],
       [ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27],
       [ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27],
       [ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27],
```

```
        [ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27],
        [ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27],
        [ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27],
        [ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27],
        [ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27],
        [ 0,  3,  6,  9, 12, 15, 18, 21, 24, 27]])
```

In [29]:

```
all_f
```

Out[29]:

```
array([[ 0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0],
       [ 3,  3,  3,  3,  3,  3,  3,  3,  3,  3],
       [ 6,  6,  6,  6,  6,  6,  6,  6,  6,  6],
       [ 9,  9,  9,  9,  9,  9,  9,  9,  9,  9],
       [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12],
       [15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15],
       [18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18],
       [21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21],
       [24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24],
       [27, 27, 27, 27, 27, 27, 27, 27, 27, 27]])
```

Одним махом находим производные во всех этих точках:

In [30]:

```
dr, df = dydt(all_y, 0)
```

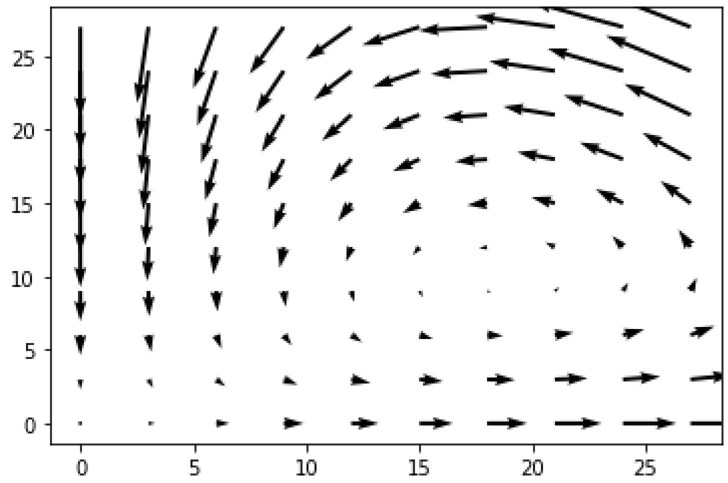
Изображаем:

In [31]:

```
plt.quiver(all_r, all_f, dr, df)
```

Out[31]:

```
<matplotlib.quiver.Quiver at 0x12e325e3a30>
```



У нас получились стрелочки разной длины. С одной стороны это несёт информацию о скорости изменения переменных, с другой — портит график. Сделаем стрелочки одинаковой длины!

Посчитаем длину стрелочек:

In [32]:
```
arrow_len = np.sqrt(dr ** 2 + df ** 2)
```

Заменяем нулевую длину на единичную, чтобы избежать проблем с делением на нулевую длину:

In [33]:
```
arrow_len[arrow_len == 0] = 1
```

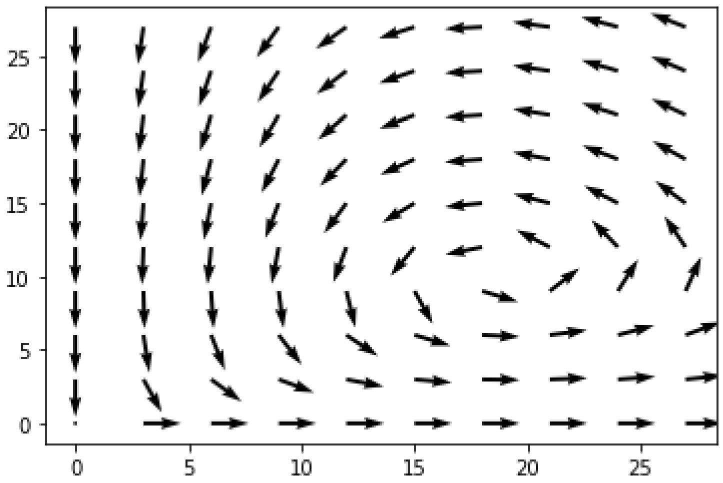
Нормируем на длину:

In [34]:
```
drn = dr / arrow_len
dfn = df / arrow_len
```

Рисуем фазовый портрет:

In [35]:
```
plt.quiver(all_r, all_f, drn, dfn)
```

Out[35]:
```
<matplotlib.quiver.Quiver at 0x12e32650d90>
```



0
5
10
15
20
25