Бинарные отношения

- **Основные понятия**
- **Операции над отношениями**
- **Типы отношений**

Основные понятия

<u>***Упорядоченной парой***</u> называется запись вида (a,b), где $a \in A, b \in B$. Множество таких упорядоченных пар называется <u>***декартовым***</u> или прямым произведением множеств A и B: $A \times B := \{(a,b) : a \in A \text{ **и** } b \in B\}$.

$$A = \{1,2\},\ B = \{a,b,c\}$$

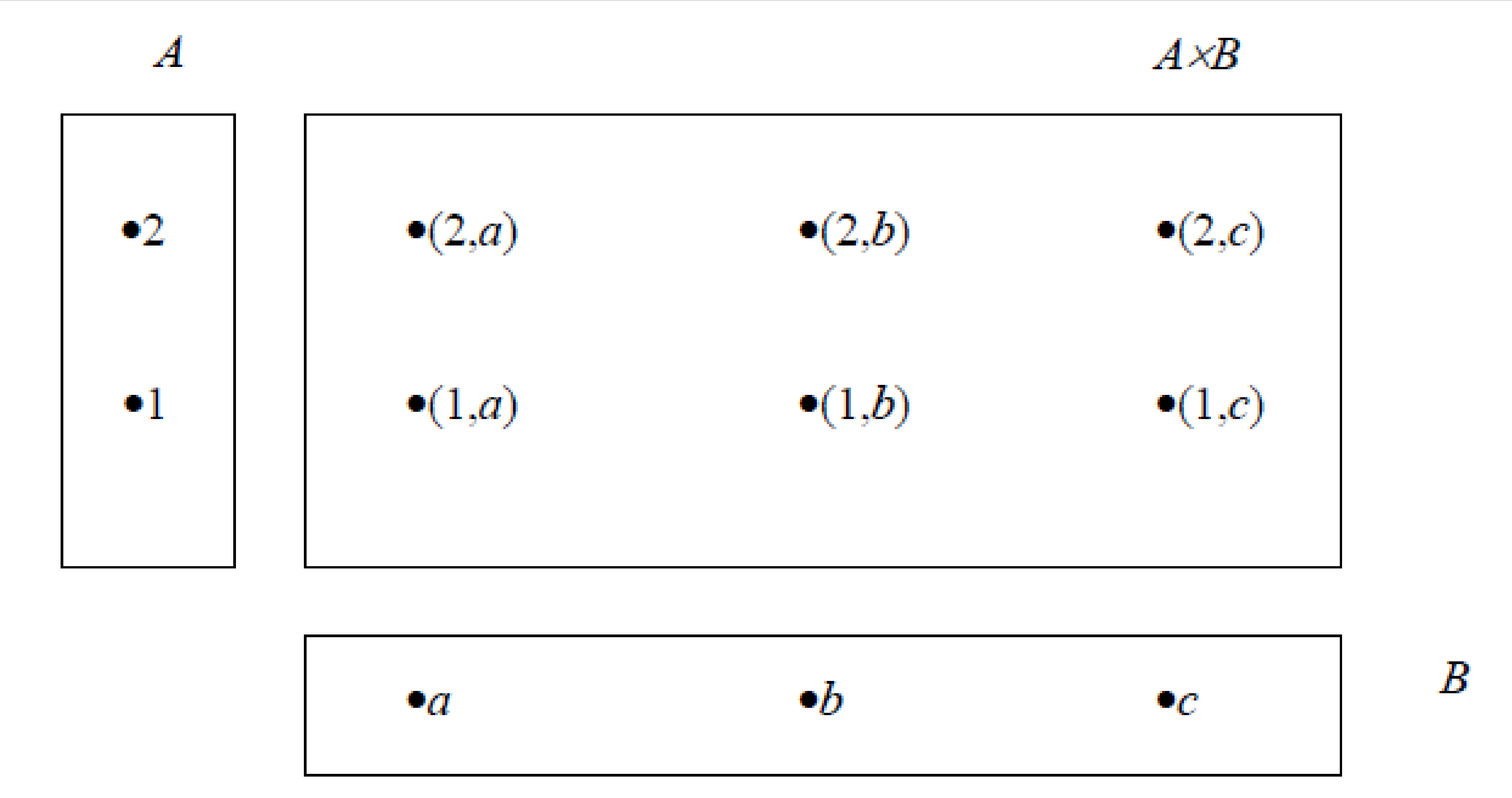
$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$B \times A = \{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$$

Мощность декартова произведения конечных множеств равна $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

$B \times B$

Диаграмма Венна для декартова произведения



Бинарные отношения

- ***<u>Бинарным отношением</u>*** между множествами А и В называется всякое подмножество их декартова произведения.

$$\rho \subseteq A \times B$$

- ***<u>Пустое</u>*** отношение не содержит ни одной пары.

$$\varnothing \subseteq \rho \subseteq A \times B$$

- ***<u>Универсальное</u>*** отношение содержит все упорядоченные пары из А и В.
- Отношения между элементами одного и того же множества называются ***<u>отношениями в множестве</u>***.

$$\rho \subseteq A \times A$$

Операции над отношениями

- *Пересечение* $\rho \cap \sigma := \{(a,b) \in A \times B : (a,b) \in \rho \text{ И } (a,b) \in \sigma\}$
- *Объединение* $\rho \cup \sigma := \{(a,b) \in A \times B : (a,b) \in \rho \text{ ИЛИ } (a,b) \in \sigma\}$
- *Дополнение* $\bar{\rho} := \{(a,b) \in A \times B : (a,b) \notin \rho\}$
- *Обращение* $\rho^{-1} := \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in \rho\}$
- *Умножение* $\sigma \circ \rho := \{(a,c) \in A \times C : \exists b \in B : (a,b) \in \rho \text{ И } (b,c) \in \sigma\}$

Типы отношений

- ***Рефлексивность*** $\forall x \in A : (x, x) \in \rho$
- ***Антирефлексивность*** $\forall x \in A : (x, x) \notin \rho$
- ***Симметричность*** $\forall x, y \in A : (x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$
- ***Антисимметричность*** $\forall x, y \in A :$ $(x, y) \in \rho \,\&\, (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y$
- ***Транзитивность*** $\forall x, y, z \in A :$ $(x, y) \in \rho \,\&\, (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$

Отношения на множестве

- ***<u>Отношение эквивалентности</u>*** на множестве - одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- Отношение эквивалентности разбивает любое множество на непересекающиеся подмножества – ***<u>классы эквивалентности</u>***.
- ***<u>Отношение частичного порядка</u>*** - одновременно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
- ***<u>Отношение (строгого) порядка</u>*** - одновременно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

$$\varepsilon \subseteq A \times A$$

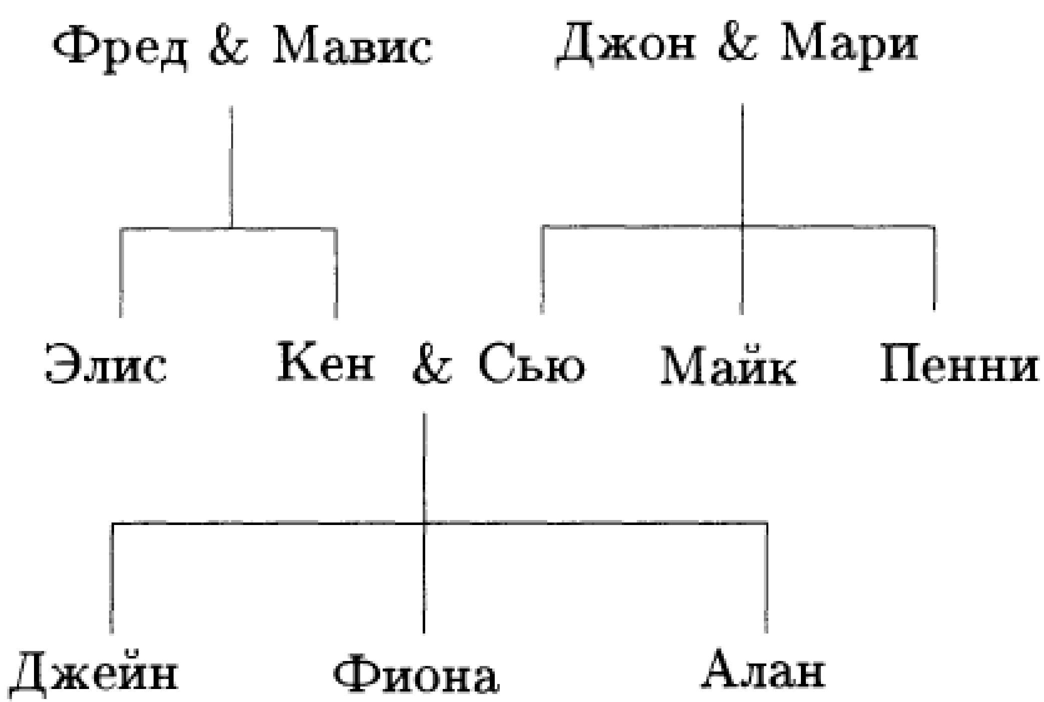
$$x \leq y$$

$$x < y$$

Упражнение 1

(а) $R = \{(x, y):\ x$ — дедушка $y\}$;

(б) $S = \{(x, y):\ x$ — сестра $y\}$.

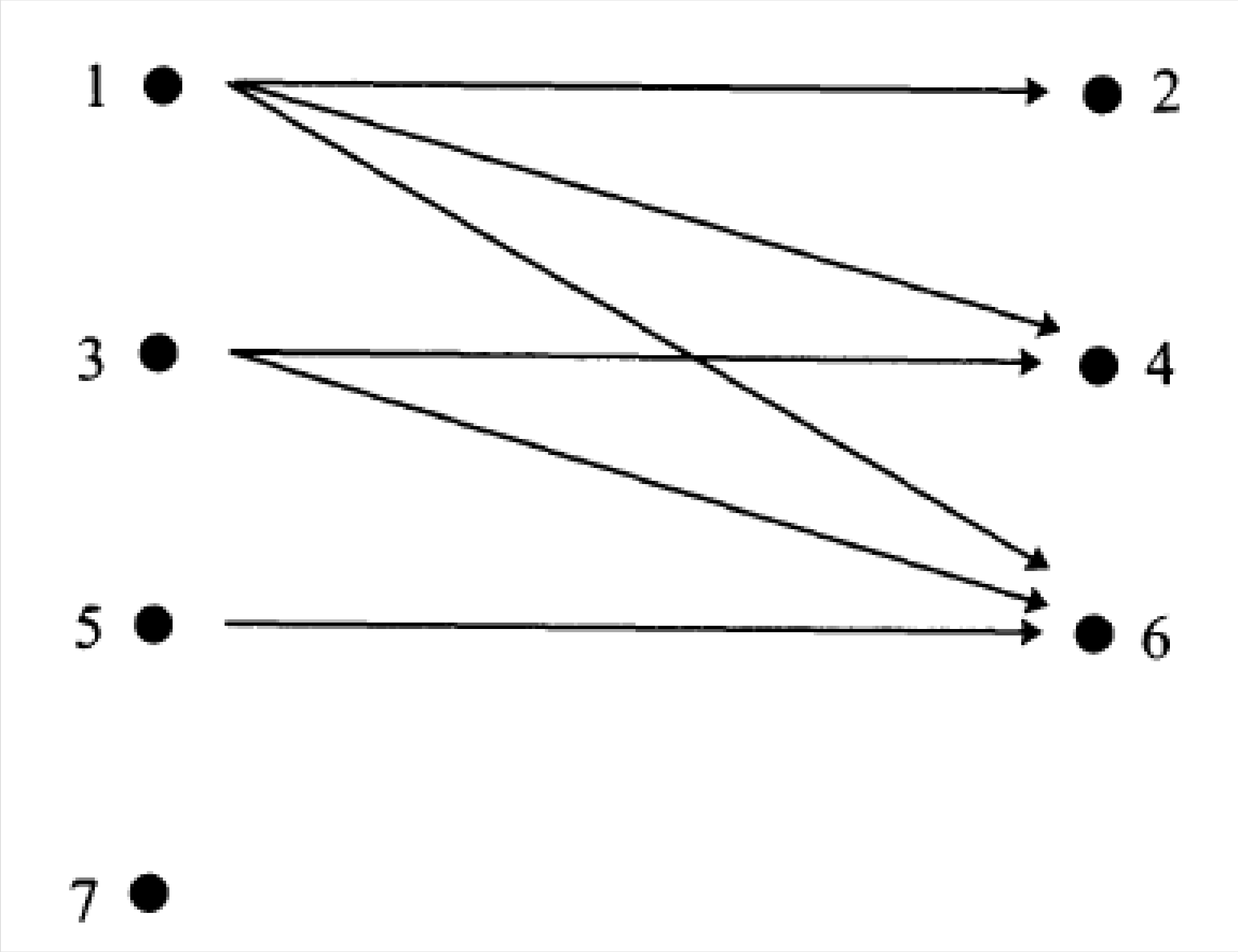


Упражнение 2

Выпишите упорядоченные пары, принадлежащие следующим бинарным отношениям на множествах $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$:

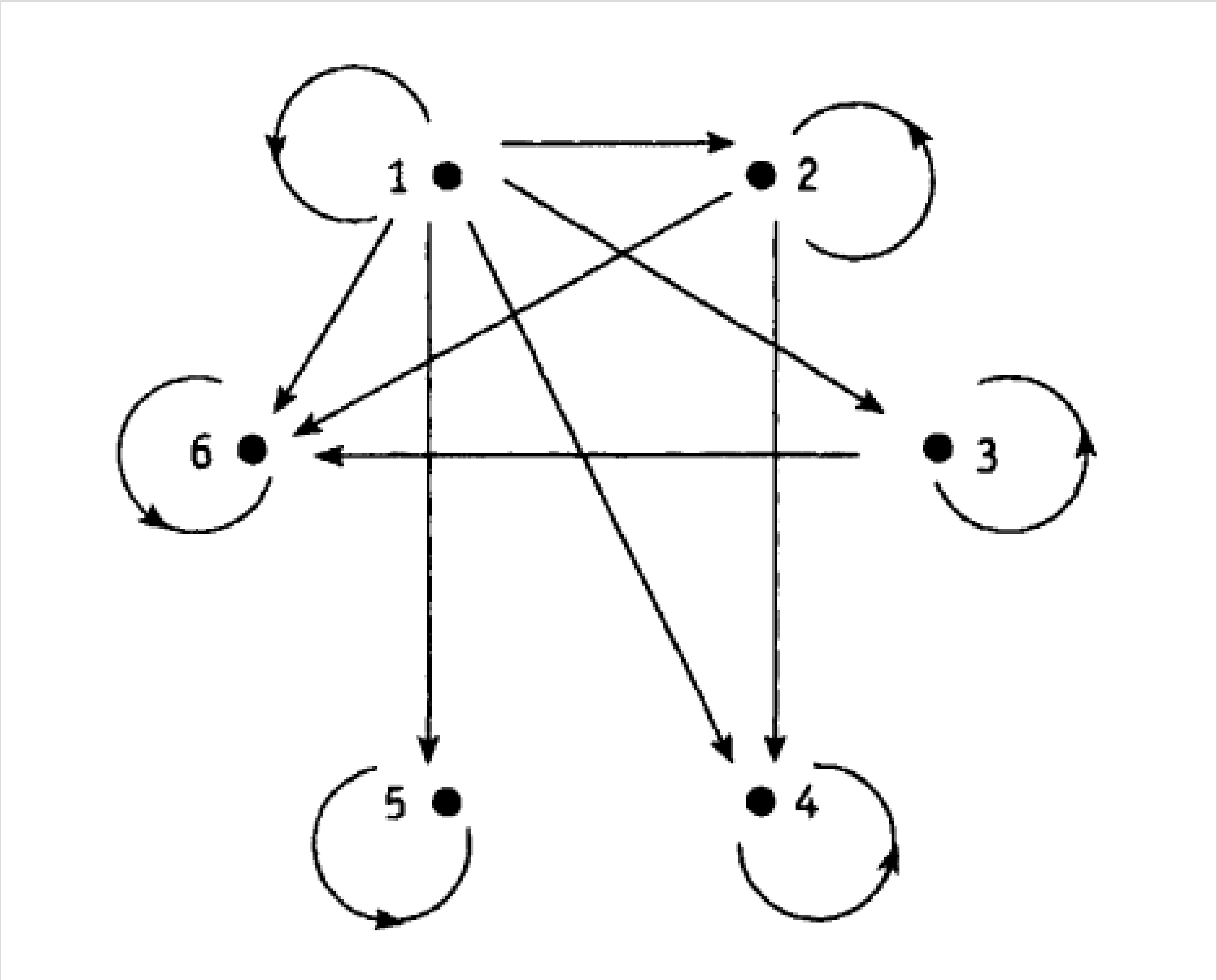
(а) $U = \{(x, y) : \ x + y = 9\}$;

(б) $V = \{(x, y) : \ x < y\}$.


1
2
3
4
5
6
7

Упражнение 3

Множество $R = \{(x, y) : \ x$ — делитель $y\}$ определяет отношение на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Найдите все упорядоченные пары, ему принадлежащие.


1
2
6
3
5
4

Упражнение 4

Определите, какие из следующих отношений на множестве людей рефлексивны, симметричны или транзитивны:

(а) «... имеет тех же родителей, что и ...»;

(б) «... является братом ...»;

(в) «... старше или младше, чем ...»;

(г) «... не выше, чем ...».

Упражнение 5

Определите, какие из приведенных ниже отношений на $\mathbb{Z}$ являются рефлексивными, симметричными, а какие транзитивными?

(а) «$x + y$ — нечетное число»;

(б) «$x + y$ — четное число»;

(в) «xy — нечетное число»;

(г) «$x + xy$ — четное число».

Задача 8

Отношение R на множестве $X = \{a, в, c, d\}$ задано матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Каковы свойства отношения R? Как выглядят матрицы отношений R^{-1}, $R \circ R$?