

Алгебра логики

- **Основные понятия**
- **Логические операции**
- **Законы алгебры логики**

Основные понятия

Определение 1. Высказывание – это повествовательное предложение, в отношении которого можно судить о его истинности либо ложности.

Определение 2. Высказывание называется простым, если никакая его часть сама по себе не является высказыванием.

Определение 3. Переменной в алгебре логики называется объект, имеющий уникальное имя, и значением которого может являться любое простое высказывание.

Определение 4. Логическим выражением называется объект, состоящий из логических переменных и логических операций и имеющий значение *истина*, либо *ложь*. Процесс построения логического выражения по сложному высказыванию называется *формализацией* высказывания.

Логические операции

Названия операции	Возможные обозначения
Отрицание, инверсия.	$\neg, \bar{}, \neg$
Конъюнкция, логическое умножение, операция И, операция AND.	$\&, \wedge, \cdot$, по аналогии с алгебраическим умножением может никак не обозначаться
Дизъюнкция, нестрогая дизъюнкция, логическое сложение, операция ИЛИ, операция OR.	$\vee, \vee, +$
Строгая дизъюнкция, разделительная дизъюнкция, исключающее ИЛИ, сложение по модулю 2.	\oplus, Δ
Эквивалентность, эквиваленция, равенство, равнозначность.	\Leftrightarrow, \equiv
Импликация, следование, следствие	\Rightarrow, \rightarrow

Таблицы истинности

Таблица истинности для конъюнкции

Первый операнд	Второй операнд	Значение операции
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности для дизъюнкции

Первый операнд	Второй операнд	Значение операции
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица истинности для строгой дизъюнкции

Первый операнд	Второй операнд	Значение операции
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Таблицы истинности

Таблица истинности для эквивалентности

Первый операнд	Второй операнд	Значение операции
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности для импликации.

Первый операнд	Второй операнд	Значение операции
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности для отрицания

Значение операнда	Значение операции
0	1
1	0

Формализация

Логическая операция	Логические связки в русском языке
Отрицание	Неверно что...
Конъюнкция	и, а, но, а также, при этом, одновременно с этим, хотя
Дизъюнкция	Или
Строгая дизъюнкция	или, либо
Эквивалентность	Тогда и только тогда когда, необходимо и достаточно чтобы
Импликация	если то, необходимо чтобы, достаточно чтобы

Законы алгебры логики

Определение 5. Логические выражения, зависящие от одних и тех же логических переменных, называются *равносильными*, если на любом наборе значений переменных они принимают одинаковое значение

- 1) Отрицание
- 2) Конъюнкция
- 3) Дизъюнкция, строгая дизъюнкция, эквивалентность
- 4) Импликация

1) Законы поглощения констант

$$x \vee 0 = x, \quad x \& 1 = x ;$$

2) Законы поглощения переменных

$$x \vee 1 = 1, \quad x \& 0 = 0 ;$$

3) Законы идемпотентности

$$x \& x = x, \quad x \vee x = x ;$$

4) Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{x}} = x ;$$

5) Закон противоречия

$$x \& \overline{x} = 0 ;$$

6) Закон исключённого третьего

$$x \vee \overline{x} = 1 ;$$

7) Законы коммутативности

$$x \& y = y \& x,$$

$$x \vee y = y \vee x;$$

8) Законы ассоциативности

$$(x \& y) \& z = x \& (y \& z),$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z);$$

9) Законы дистрибутивности

$$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z),$$

$$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z);$$

10) Законы де Моргана

$$\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y},$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y};$$

11) Законы поглощения (не путать с аксиомами поглощения переменных нулём или единицей)

$$x \vee (x \& y) = x;$$

$$x \& (x \vee y) = x.$$

12) Закон преобразования импликации

$$x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$$

Задание

Доказать законы алгебры логики,
построив таблицы истинности

1. Упростите логические выражения:

а) $A \cdot B \cdot \bar{A} \cdot B + B$;

б) $(A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$;

в) $A + A \cdot B + A \cdot C$;

г) $A + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot C$;

д) $A \cdot (A + B + C)$;

е) $A \cdot B + \bar{B} + \bar{A} \cdot B$;

ж) $(\bar{A} + B) \cdot \bar{C} \cdot (C + A \cdot \bar{B})$;

з) $\bar{A} \cdot \bar{C} + A \cdot B + \bar{A} \cdot C + A \cdot \bar{B}$;

и) $A \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C} + B \cdot C) + A \cdot (B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C)$.

2. Упростите логические выражения:

а) $A \cdot \overline{(\overline{B} + C)}$;

д) $\overline{(A + B)} \cdot A \cdot \overline{B}$;

б) $\overline{(A + \overline{B})} + \overline{(A + B)} + A \cdot B$;

е) $A + \overline{B \cdot \overline{C}} + \overline{(\overline{A} + B + \overline{C})}$;

в) $A + \overline{(A + B)} + \overline{A} \cdot B$;

ж) $(A + B + C) \cdot \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B})} + C$;

г) $\overline{(A + \overline{B} + \overline{C})}$;

з) $A \cdot \overline{(\overline{C} + \overline{B})} + \overline{(\overline{A} + B)} \cdot C + A \cdot C$;

и) $(A + B) \cdot (\overline{A} + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$.

3. Упростите логические выражения:

а) $\overline{(\overline{A} \rightarrow \overline{C})} \cdot C$;

г) $\overline{(\overline{\overline{A}} \rightarrow (B \rightarrow \overline{\overline{C}}))}$;

б) $\overline{(\overline{\overline{A}} \rightarrow \overline{\overline{B}})} + \overline{(\overline{\overline{A}} \rightarrow B)} + A \cdot B$;

д) $\overline{(\overline{\overline{A}} \rightarrow B)} \cdot \overline{(A \rightarrow B)}$;

в) $A + \overline{(\overline{\overline{A}} \rightarrow B)} + \overline{(A + \overline{\overline{B}})}$;

е) $A + \overline{B \cdot \overline{\overline{C}}} + \overline{(A \rightarrow \overline{\overline{B \cdot C}})}$.