Matematika pro informatiku

Souhrn látky

leden 2014

Obsah

Rejstřík

1 Množiny s jednou binární operací

1.1 Hierarchie množin

Obecně se jedná o dvojici **množina a binární operace** $\circ$ na ní, která vezme nějaké dva objekty z M a jednoznačně jim přiřadí jiný objekt.

$$(M, \circ)$$
$$M \circ M \to M$$

Grupoid M je *uzavřená* vůči operaci $\circ$.

$$\forall a, b \in M\ a \circ b \in M$$

Pologrupa Operace je nad M *asociativní*.

$$\forall a, b, c \in M\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

Monoid Existuje právě jeden (v každém monoidu)[1] *neutrální prvek*.

$$\exists e \in M\ \forall a \in M\ e \circ a = a \circ e = a$$

Grupa Všechny prvky (každý prvek) mají právě[2] jeden *inverzní prvek*.

$$\forall a \in M\ \exists a^{-1} \in M\ a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

Abelovská grupa Operace $\circ$ je *komutativní*.

$$\forall a, b \in M\ a \circ b = b \circ a$$

- Z definice plyne, že každá grupa je monoid, každý monoid je pologrupa a každá pologrupa je grupoid.

grupoid ⊃ pologrupa ⊃ monoid ⊃ grupa

Cayleyho tabulka

Pokud má množina M z dvojice $(M, \circ)$ konečný počet prvků, lze její strukturu (danou operací $\circ$) kompletně zachytit v tzv. *Cayleyho tabulce*.

- **Neutrální prvek** e se v Cayleyho tabulce pozná tak, že „jeho“ řádek i sloupec je stejný, jako první řádek a sloupec tabulky.
- **Inverzní prvek** k prvku najdeme, tak že v jeho sloupci a řádku nalezneme neutrální prvek e.
- **Uzavřenost** poznáme tak, že všechny buňky tabulky obsahují jen prvky z M.
- **Asociativitu** operace z tabulky poznáme těžko.

Cayleyho tabulka každé grupy tvoří *magický čtverec*. Magický čtverec pro n prvkovou množinu M je matice $n \times n$ taková, že v každém řádku i sloupci jsou vždy všechny prvky množiny M.

[1] Přednáška 3 – handout, věta 11.
[2] Přednáška 3 – handout, věta 12.

Příklad Cayleho tabulky

$$\mathbb{Z}_4^+ = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

$+_4$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

0 je neutrální prvek, její řádek i sloupec se rovnají záhlaví.

$$\begin{aligned} 1^{-1} &= 3 \\ 2^{-1} &= 2 \\ 3^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

Inverze

1.2 Základní pojmy

Řád (pod)grupy $G = (M, \circ)$ nazýváme počet prvků množiny M. Je-li M nekonečná množina, je i řád nekonečný. Podle řádu rozlišujeme konečné a nekonečné grupy. Řád (pod)grupy můžeme značit pomocí „#“.

Jednoznačné dělení V každé grupě $(G,\ \circ)$ mají pro libovolné $a,\ b \in G$ rovnice

$$a \circ x = b \text{ a } y \circ a = b \text{ jediné řešení.}$$

$\mathbb{Z}$ Celá čísla $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.

$\mathbb{N}$ Přirozená čísla $\{1,\ 2,\ 3\}$.

$\mathbb{N}^0$ Přirozená čísla **včetně** nuly.

Kleinova grupa Nejmenší necyklická grupa. Jedná se o direktní součin dvou kopií cyklické grupy řádu 2.

$$V = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ \circ)$$

2 Podgrupy

Buď $G = (M,\ \circ)$ grupa. Podgrupou grupy G nazveme libovolnou dvojici $H = (N,\ \circ)$ takovou, že

- $N \subset N$,
- $H = (N,\ \circ)$ je grupa.

- **Každý prvek** grupy **generuje podgrupu** (ty se však mohou překrývat).
- V každé grupě $G = (M, \circ)$ (s alespoň dvěma prvky) existují vždy alespoň dvě *triviální podgrupy*:
  - grupa obsahující pouze neutrální prvek: $(\{e\}, \circ)$
  - a grupa samotná: $G = (M, \circ)$.

- Ostatním podgrupám, které nejsou triviální, se říká netriviální nebo *vlastní podgrupa*.
- Analogie s lineárním prostorem a lineárním podprostorem.

Langrangeova věta

Buď H podgrupa konečné grupy G. Potom řád H dělí řád G. Grupa s prvočíselným řádem má pouze triviální podgrupy.

- Věta neříká, že existuje podgrupa takového řádu. Pokud však nějakou podgrupu nalezneme, musí mít právě řád dělitele.

Příklad

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{15}^{\times} &= \{1,\,2,\,4,\,7,\,8,\,11,\,13,\,14\}\ (G) \\ \#\mathbb{Z}_{15}^{\times} &= 8 \end{aligned}$$

Podgrupy G budou:

- Dvě triviální řádu $\#1 = e = \{1\}$ a $\#\left(\#\mathbb{Z}_{15}^{\times}\right) = \left\{\mathbb{Z}_{15}^{\times}\right\}$
- A další (*vlastní*) podgrupy řádů $\#4\,\text{a}\,\#2$, protože $(\#4\,\text{a}\,\#2)\,|8$:

$$\langle 7\rangle = \langle 13\rangle = \{1,\,4,\,7,\,13\}\,,\ \{1,\,2,\,4,\,8\}$$
$$\langle 2\rangle = \langle 3\rangle = \{1,\,14\}\,,\ \{1,\,11\}$$

Generátory podgrupy $\langle 7\rangle = \langle 13\rangle$ generují stejnou podgrupu a $\langle 2\rangle = \langle 3\rangle$ generují stejnou podgrupu.

3 Cyklické grupy a generátory

- V cyklické grupě $G = (M,\,\circ)$ řádu n platí pro všechny prvky $a \in M$, že $a^n = e$, kde e je neutrální prvek.
- Neutrální prvek $\neq$ generátor.
- Grupa prvočíselného řádu (počet prvků je prvočíslo) je cyklická.
- Libovolná podgrupa cyklické grupy je opět cyklická grupa.
- Je-li G **cyklická multiplikativní** grupa řádu n a a nějaký její generátor, potom a^k je také generátor tehdy, a jen tehdy, když k a n jsou nesoudělná (tj. $gcd\,(k,\,n) = 1$).
- V cyklické grupě řádu n je počet generátorů roven $\varphi\,(n)$.

Příklad – základní ukázka grupy

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_4^{+} &= \{0,\,1,\,2,\,3\} \\ \#\mathbb{Z}_4^{+} &= 4 \\ e &= 0 \\ 2^4 &= (16)_{MOD\,4} = 0 \end{aligned}$$

3.1 Aditivní grupy $\mathbb{Z}^+$

- **Všechny aditivní grupy jsou cyklické**
- Aditivní grupa modulo n je rovna $\langle k \rangle$ (generátoru) tehdy, a jen tehdy, když k a n jsou nesoudělná čísla.

Příklad

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{15}^{+} &= \{0, 1, 2, 3, \ldots, 14\} \\ \mathbb{Z}_{15}^{+} &= \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 7 \rangle, \langle 8 \rangle, \langle 9 \rangle, \langle 11 \rangle, \langle 12 \rangle, \langle 13 \rangle, \langle 14 \rangle\} \end{aligned}$$

Generátorem jsou všechna čísla nesoudělná s 15.

3.2 Multiplikativní grupy $\mathbb{Z}^\times$

Multiplikativní cyklická grupa

$\mathbb{Z}_n^\times$ je cyklická tehdy a jen tehdy, když $n = 2,\, 4,\, p^k,\, 2p^k$, kde p je liché prvočíslo a $k \in \mathbb{N}^+$.

- Multiplikativní grupa modulo p, kde p je prvočíslo, je množina $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ s operací násobení modulo p. Tuto grupu značíme $\mathbb{Z}_p^\times$.
  - Grupa $\mathbb{Z}_p^\times$ je vždy cyklická.
  - Řád této grupy $\mathbb{Z}_p^\times$ je $p-1$ a má tedy $\varphi(p-1)$ generátorů.
- Prvky multiplikativní grupy jsou nesoudělné s jejím modulem, platí tedy, že

$$\#\mathbb{Z}_{MOD}^\times = \varphi(MOD)$$

Příklad

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_3^\times &= \{1, 2\} \\ \mathbb{Z}_7^\times &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ & (6 * 6)_{MOD\,7} = 1 \\ & (6 * 5)_{MOD\,7} = 2 \\ & \ldots \end{aligned}$$

Příklad II.

Najděte podrupy následující multiplikativní grupy

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{22}^{\times} &= \{1,\, 3,\, 5,\, 7,\, 9,\, 13,\, 15,\, 17,\, 19,\, 21\}\ (G) \\ \#\mathbb{Z}_{22}^{\times} &= 10 \end{aligned}$$

Tato grupa je cyklická, protože

$$\begin{aligned} 22 &= 11 * 2\ \left(= 2 * \mathbb{P}^1\right) \\ \varphi(10) &= 4 \end{aligned}$$

Její podgrupy budou (triviální grupy vynecháme) řádů

$$10 = 2 * 5 \rightarrow \#2\,\mathrm{a}\,\#5$$

Podgrupy nalezneme pomocí generátorů podgrupy (každý prvek grupy G) postupným uzavíráním:

$$\begin{aligned} \langle 3 \rangle &= \{3\} \\ &= \{3,\, 3 * 3\} = \{3,\, 9\} \\ &= \{3,\, 9,\, (9 * 3)_{22}\} = \{3,\, 9,\, 5\} \\ &= \{3,\, 9,\, 5,\, 5 * 3\} = \{3,\, 9,\, 5,\, 15\} \\ &= \{3,\, 9,\, 5,\, 15,\, (15 * 3)_{22}\} = \left\{3,\, 9,\, 5,\, 15,\, \boxed{1}\right\} \end{aligned}$$

Vygenerovaná podgrupa je řádu 5, což je v pořádku.

Stejným způsobem pokračujeme pro všechny prvky z G. Zjistíme, že generátory podgrupy

$$\langle 7 \rangle\,,\ \langle 13 \rangle\,,\ \langle 17 \rangle\ \text{a}\ \langle 19 \rangle$$

vygenerují celou grupu G, jsou tedy jejími generátory (jejich počet sedí s $\varphi(10)$).

3.3 Eulerova funkce

Eulerova funkce $\varphi(n)$, kde $n \geq 2$, je definována jako počet kladných celých čísel, která jsou nižší než n a jsou s n nesoudělná.

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 1;\ \varphi(2) = 1 \\ \varphi(p) &= p - 1,\ p \in \mathbb{P} \\ \varphi\left(p^k\right) &= (p-1) * p^{k-1},\ p \in \mathbb{P} \\ \varphi(n * m) &= \varphi(n) * \varphi(m)\,,\ n,\ m \in \mathbb{N}\ \text{a}\ n,\ m\ \text{jsou nesoudělná} \end{aligned}$$

3.4 Řešený příklad z midtermu

Grupa $\mathbb{Z}_{26}^{\times}$ je cyklická. Pro jakou množinu A je následující výrok pravdivý: Prvek a je generátor grupy $\mathbb{Z}_{26}^{\times}$ jestliže $a^n \neq 1$ pro všechna $n \in A$.

(A) $A = \{2, 4, 7, 13\}$

(B) $A = \{4, 7\}$

(C) $A = \{4, 6\}$

(D) Ani pro jednu z nabízených možností.

(E) $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Poznámka k zadání: Hledáme taková čísla, na která když umocníme generátor, výsledek se nebude rovnat 1.

Při řešení vycházíme z následujících dvou vět:

- Řád podgrupy dělí řád grupy.
- V cyklické grupě platí $a^n = e$, kde n je řád grupy a e její neutrální prvek.

Pokud je a generátor grupy (řečeno v zadání), musí dle předchozího platit, že $a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}$ se **nerovnají** e. Dále budeme vycházet z vlastnosti, že pokud prvek není generátorem grupy, je generátorem některé její podgrupy (viz sekce Podgrupy). Z čehož plyne, že a^h, kde h je řád podgrupy, by bylo 1. Řády podgrup grupy $\mathbb{Z}_{26}^{\times}$ mohou být $\{2, 3, \mathbf{4}, \mathbf{6}\}$ ($\varphi(26) = 12$).

Správná odpověď je tedy **C) A** $= \{\mathbf{4}, \mathbf{6}\}$ – jinými slovy jestliže $a^4 \neq 1 \wedge a^6 \neq 1$, pak a je generátorem (o obdobně pokud by $a^4 = 1$ ($1 = e$, a 4 není řádem grupy) a by bylo generátorem nějaké podgrupy).

4 Homomorfismus a izomorfismus

Homomorfismus Zobrazení, které zachovává operace. Buďte $G = (M, \circ_G)$ a $H = (N, \circ_H)$ dva grupoidy. Zobrazení $\varphi : M \to N$ nazveme homomorfismem G do H, jestliže

$$\forall x, y \in M \text{ platí } \varphi(x \circ_G y) = \varphi(x) \circ_H \varphi(y).$$

Slovy: Jestliže na libovolné dva prvky v grupě G aplikujeme operaci grupy G a pak je zobrazíme do grupy H, **dostaneme vždy stejný výsledek**, jako kdybychom je (prvky grupy G) nejdříve zobrazili do grupy H a **potom** aplikovali operaci grupy H.

Izomorfismus pokud je homomorfismus navíc *bijekcí*, tj.

$$a : G \to H \text{ a } b : H \to G, \; a \circ b = id_H \text{ a } b \circ a = id_G.$$

- Oba **zachovávají strukturu danou binární operací** – je jedno, jestli nejdříve aplikujeme operaci a pak zobrazíme. nebo nejdříve zobrazíme a pak aplikujeme operaci.
- Pro definici homomorfismu vyžadujeme **pouze uzavřenost množiny** vůči binární operaci. Homomorfismus je proto definován na nejobecnějších grupoidech. V kapitole Hierarchie množin jsme ukázali, že jednotlivé struktury od sebe dědí – definice homomorfismu se tedy přenáší i na grupy.

- Inverzní zobrazení k izomorfnímu zobrazení je izomorfní zobrazení.
- Grupy, mezi kterými existuje izomorfismus, se nazývají **izomorfní**.

4.1 Důležité vlastnosti

- Izomorfní grupy musí mít stejný řád.
- Neutrální prvek jedné grupy se homomorfizmem zobrazí vždy na neutrální prvek té druhé.
- Také inverze se zachovávají ve smyslu toho, že $\varphi\left(x^{-1}\right) = \varphi\left(x\right)^{-1}$.
- Je-li φ homomorfismus grupy G do H, pak $\varphi\left(G\right)$ je podgrupa v H.
- Všechny izomorfní grupy jsou totožné, mají jen jinak pojmenované prvky.

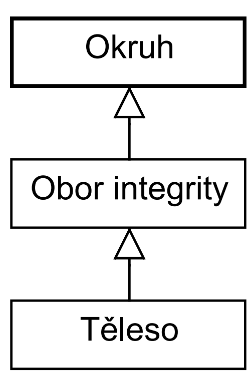
4.2 Věty

- Neutrální prvek jedné grupy se homomorfismem zobrazí vždy na neutrální prvek té druhé.
- Je-li φ homomorfismus grupy G do H, pak $\varphi\left(G\right)$ je podgrupa v H.
- Libovolné dvě nekonečné cyklické grupy jsou izomorfní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou libovolné dvě cyklické grupy řádu n izomorfní.
- **Cayleyova věta**: Libovolná konečná grupa je izomorfní s nějakou grupou permutací.
- Obecně platí pro kartézský součin dvou grup H a G řádů n a m toto: kartézský součin je cyklická grupa právě když G a H jsou cyklické a n a m nesoudělné

4.3 Skládání permutací

$$\begin{pmatrix} & & \downarrow [3] \\ & & 3 \\ \overset{1}{1} & \overset{2}{3} & \boxed{\mathbf{2}} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \downarrow [1] & & \\ 1 & & \\ 3 \leftarrow [2] & \overset{2}{2} & \overset{3}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{2}} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Okruhy a tělesa



Obrázek 1: Hierarchie okruhů, oborů integrity a těles

5.1 Okruh

Buďte M neprázdná množin a $+$ a $*$ binární operace. Řekněme, že $R = (M, +, *)$ je okruh, pokud platí:

- $(M, +)$ je Abelovská grupa (komutativita)
- $(M, *)$ je grupoid (uzavřené)
- Platí levý a pravý distributivní zákon:

$$(\forall a, b, c \in M) \left(a (b + c) = ab + ac \wedge (b + c) a = ba + ca\right)$$

5.2 Obor integrity

- Každý obor integrity je je zároveň okruh.

5.3 Těleso

Okruh $T = (M, +, *)$ se nazývá těleso, jestliže $(M \setminus \{0\}, *)$ je grupa. Tuto grupu nazýváme multiplikativní grupou tělesa T. Nulu musíme vyjmout, protože nemá inverzi:

$$0^{-1} =??$$

- Existují pouze tělesa řádu p^n, kde p je prvočíslo a n je přirozené číslo. Prvočíslo p se nazývá *charakteristika.*

5.4 Ireducibilní polynom

- K je okruh, $K[x]$ je komutativní okruh polynomů nad okruhem K.

Ireducibilní polynom

Buď $P(x) \in K[x]$ stupně alespoň 1. Řekněme, že $P(x)$ je ireducibilní nad K, jestliže pro každé dva polynomy $A(x)$ a $B(x)$ z $K[x]$ platí

$$A(x) * B(x) = P(x) \Rightarrow (\text{stupeň } A(x) = 0 \vee \text{stupeň } B(x) = 0).$$

- Ireducibilní polynomy jsou prvočísla mezi polynomy.

5.4.1 Ireducibilní polynomy v $\mathbb{Z}_2$

Tip

V $\mathbb{Z}_2$ testujeme ireducibilitu pro polynomy, které končí $\boxed{\ldots + 1}$, v $\mathbb{Z}_3$ testujeme polynomy, které končí $\boxed{\ldots + 1}$ nebo $\boxed{\ldots + 2}$ atd. Toto pravidlo neplatí pro polynomy stupně 1.

Stupeň 0

$$\left.\begin{array}{ll} 0 & \text{NE} \\ 1 & \text{NE} \end{array}\right\} \text{Nevyhovují definici}$$

Stupeň 1

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x} & \textbf{ANO} \\ \mathbf{x+1} & \textbf{ANO} \end{array}\right\} \text{Všechny jejich násobky již nebudeme brát v úvahu}$$

Stupeň 2

x^2	NE (násobek x)
x^2+1	NE
x^2+x	NE (násobek x)
$\mathbf{x^2+x+1}$	**ANO**

Stupeň 3

x^3	NE
x^3+1	NE
$\mathbf{x^3+x+1}$	**ANO**
x^3+x^2	NE
$\mathbf{x^3+x^2+1}$	**ANO**
x^3+x^2+x	NE
x^3+x^2+x+1	NE
x^3+x	NE

Stupeň 4

$\mathbf{x^4+x+1}$	**ANO**
$\mathbf{x^4+x^3+1}$	**ANO**
$\mathbf{x^4+x^3+x^2+x+1}$	**ANO**

5.5 Rozšířený Euklidův algoritmus

		X	**ireduc.**
	ireduc.	☐	☐
	X	☐	☐
÷	zbytek	☐	☐
☐	*GCD*	☐	✔

Příklad

Hledáme $5 * x \equiv 1\, MOD\, 17$ tj. inverzi 5.

		5	**17**
	17	0_A	1_C
	5	1_B	0_D
$\frac{17}{5} = 3$	zb. 2	-3_X	1_Y
$\frac{5}{2} = 2$	zb. 1	7	-2

$$
\begin{aligned}
-3_X &= 0_A - (3 * 1_B) \\
1_Y &= 1_C - (3 * 0_D) \\
-2 &= 0_D - (2 * 1_Y)
\end{aligned}
$$

$7 = 1_B - [2 * (-3_X)]$ (výsledná inverze)

5.6 Zápis těles

$$\begin{aligned} 101 &= x^2 + 0x + 1 \\ 202 &= 2x^2 + 0x + 2 \end{aligned}$$

$$(-1)_3 = 2$$

(O kolik čísel se musíme posunout doleva, abychom získali 3.)

$$GF\left(M^{\#}\right) = \left(2^4\right)$$

je řád:

$$\begin{aligned} \# &= 4 \rightarrow a,\, b,\, c,\, d \\ y &= ax^{\#-1} + bx^{\#-\cdots} \ldots = ax^3 + bx^2 + cx + d \end{aligned}$$

M je modulo, ve kterém počítáme:

$$M = 2 \rightarrow a,\, b,\, c,\, d = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

5.7 Výpočet nad tělesem s ireducibilním polynomem

5.7.1 A – Dělením polynomu

V tělese

$$GF\left(2^4\right)$$

vyřešte rovnici

$$1111y = 0110 + 0101y,$$

kde se počítá modulo ireducibilní polynom

$$P\left(x\right) = x^4 + x^3 + 1.$$

$$\begin{aligned} 1111y - 0101y &= 0101 \\ y\left(1111 - 0101\right) &= 0101 \end{aligned}$$

Počítáme v modulo 2, proto:

$$\begin{aligned} 1 + 1 &=_{MOD\,2} 0 \\ - &=_{MOD\,2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y1010 &= 0101 \\ y &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) * \left(x^3 + 0x^2 + x + 0 * 1\right) &= 0x^3 + x^2 + 0x + 1 \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

Rovnici roznásobíme a vydělíme (běžné dělení polynomu polynomem) ireducibilním polynomem:

$$\left(ax^6 + bx^5 + ax^4 + \cdots\right) \div \left(P\left(x\right) = x^4 + x^3 + 1\right) = 0$$

Ve zbytku po dělení odhadneme koeficienty a, b, c, d, aby rovnice vycházela. V našem případě:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Koeficienty dosadíme do předpisu y, čímž získáme finální výsledek:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 = \mathbf{1000}$$

5.7.2 B – Rozšířeným Euklidovým algoritmem

Nejprve osamostatníme v původní rovnici y, zde nám nutně vyjde dělení (resp. násobení inverzí):

$$\begin{aligned} y\left(1010\right) &= 0110 \\ y &= 0110 * \left(1010\right)^{-1} \end{aligned}$$

Nyní vypočítáme inverzi 1010 $\left(= x^3 + x\right)$:

		$\mathbf{x^3+x}$	$\mathbf{x^4+x^3+1}$
	$\mathbf{x^4+x^3+1}$	0	1
	$\mathbf{x^3+x}$	1	0
$\frac{x^4+x^3+1}{x^3+x} = x+1$	x^2+x+1	$0 - \left[1 * \left(x+1\right)\right] = \boxed{\mathbf{x+1}}$	$1 - \left[0 * \left(x+1\right)\right] = \boxed{\mathbf{1}}$
$\frac{x^3+x}{x^2+x+1} = x+1$	$x+1$	$1 - \left(x+1\right)^2 = \boxed{\mathbf{x^2}}$	$0 - 1 * \left(x+1\right) = \boxed{\mathbf{x+1}}$
$\frac{x^2+x+1}{x+1} = x$	$\boxed{\mathbf{1}}$	$\left(x+1\right) - \left(x * x^2\right) = \boxed{\mathbf{x^3+x+1}}$	

S inverzí dopočítáme x:

$$y = \left(x^2 + x\right) * \left(x^3 + x + 1\right) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x$$

Výsledek vydělíme ireducibilním polynomem:

$$\left(x^5 + x^4 + x^3 + x\right) \div \left(x^4 + x^3 + 1\right) = x, \text{ zb.} \boxed{\mathbf{x^3 = 1000}}$$

5.7.3 „Klasická“ metoda nalezení inverzního prvku

Zadání: „V tělese $GF\left(3^2\right)$, kde se násobí modulo polynom x^2+1, najděte inverzní prvek k prvku 12.“

- Budeme počítat v modulo 3.
- Polynom bude maximálně prvního stupně, tzn. $ax + b$.

$$12 = x + 2$$

Musíme nalézt takové koeficienty polynomu, aby platil výraz

$$\left(x + 2\right) * \left(ax + b\right) = 1 \text{ (pozn.: 1 je neutrální prvek).}$$

Výraz roznásobíme a vydělíme ireducibilním polynomem

$$\left(ax^2 + bx + 2ax + 2b\right) \div \left(x^2 + 1\right) = a, \text{ zbytek: } x(2a + b) + 2b - a.$$

Nyní budeme ve zbytku hledat taková a a b, aby se výraz rovnal původní 1, resp. $0x + 1$. Řešením je tedy soustava dvou rovnic o dvou neznámých

$$x\left(\underbrace{2a + b}_{=0}\right) + \underbrace{2b - a}_{1} = 0x + 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 2a + b &= 0 \quad (1) \\ 2b - a &= 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme a, nezapomínejme, že počítáme v $GF(3)$

$$\begin{aligned} 2a &= -b \\ |-b|_3 &= 2b \Rightarrow \\ 2a &= 2b \\ a &= b, \end{aligned}$$

dosadíme a do druhé rovnice

$$\begin{aligned} 2a - a &= 1 \\ \mathbf{a} &= \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Tyto koeficienty dosadíme do polynomu $ax + b$

$$ax + b;\ a = b = 1.$$

Výsledná inverze k prvku 12 je

$$\underline{\underline{x + 1\ (= 11)}}.$$

6 Teorie čísel

6.1 Bézoutovy koeficienty

Bézoutovy koeficienty α a β

$$\alpha * \mathbb{N}_1^+ + \beta * \mathbb{N}_2^+ = GCD\left(\mathbb{N}_1^+, \mathbb{N}_2^+\right)$$

- Koeficienty je možné vypočítat pomocí Rozšířený Euklidův algoritmus
- GCD je možné vypočítat pomocí Euklidova algoritmu

Příklad výpočtu GCD

$$GCD\,(27,\,45) = ?$$

$$\begin{aligned} 45 &= 1 * 27 + 18 \\ 27 &= 1 * 18 + 9 \\ 18 &= 2 * \boxed{\mathbf{9}} + 0 \ (\rightarrow \perp) \end{aligned}$$

$$GCD\,(27,\,45) = \underline{\underline{9}}$$

Pokud $gcd\,(m,\,n) = 1$, pak říkáme, že m a n jsou nesoudělná.

7 Modulární aritmetika

Algoritmus 1 Výpočet modula ze záporného čísla

```
int mod(int x, int m)
{
    return (x%m + m)%m;
}
```

Ukázka použití:

```
>>> mod(-6, 5)
4
>>> mod(-2, 3)
1
>>> mod(-1, 3)
2
```

7.1 Inverzní modulo

- Inverzi lze nalézt, jen když jsou základ a modulo nesoudělné.

Příklad

Nalezněte

$$\left|5^{-1}\right|_{11} \quad = \quad ?.$$

Musí tedy platit

$$(5 * x) \bmod 11 = 1.$$

Řešení

$$x = 9, \text{ protože } 5 * 9 = 45 \text{ a } (45)_{11} = 1.$$

Příklad II.

V $Z^{\times}_{223}$ nalezněte inverzi k číslu 63.

- Inverzi nalezneme pomocí Rozšířeného Euklidova algoritmu.

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & & \mathbf{223} & \mathbf{63} \\
 & \mathbf{223} & 1 & 0 \\
 & \mathbf{63} & 0 & 1 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & \boxed{-46} & -9
\end{array}
$$

$$inv. = -46$$

Výsledek převedeme do kladného modula

$$inv. = -46 + 223 = \underline{\underline{177}}.$$

7.2 Lineární kongruentní rovnice

Rovnice

$$\boxed{a * x \equiv b\,(\mathrm{mod} M)}$$

má řešení, jestliže („|“ – dělí)

$$GCD\,(a,\,M)\,|b.$$

Řešení:

$$\textbf{Najdi}\, \alpha \in \mathbb{Z}\, \textbf{tak, že}\; \alpha * a + \beta * M = GCD\,(a,\,M)\,\textbf{, pak}$$

$$x \equiv \frac{\alpha * b}{GCD\,(a,\,M)} \left(\mathrm{mod} \frac{M}{GCD\,(a,\,M)}\right)$$

7.3 Malá Fermatova věta

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

$$p \in \mathbb{P},\, GCD\,(a,\,p) = 1$$

Příklad

Spočítejte

$$381^{152} \bmod 13$$

$$GCD\,(381,\,13) = 1,\; \mathbf{p} \in \mathbb{P}.$$

Modulo je prvočíslo, MFV tedy můžeme použít

$$\begin{aligned}
381^{12} &\equiv 1 \pmod{13} \\
152 &= 12 * 12 + 8 \\
\left|381^{12*12+8}\right|_{13} &= \cancel{\left|381^{12*12}\right|_{13}} * \left|381^{8}\right|_{13} \\
|381|_{13} &= 4 \\
4^{8} &= \left(\left(4^{2}\right)^{2}\right)^{2} \\
\left|4^{2}\right|_{13} &= 3 \\
\left|\left(3^{2}\right)^{2}\right|_{13} &= |81|_{13} = \underline{\underline{3}}.
\end{aligned}$$

7.4 Eulerova věta

- Zobecnění Malé Fermatovy věty

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$$

$$n \in \mathbb{N},\, GCD\,(a,\,n) = 1$$

Příklad

Spočítejte

$$3^{15} \bmod 28.$$

Modulo není prvočíslo, můžeme tedy použít Eulerovu větu

$$GCD\,(3,\,28) = 1,\; p \notin \mathbb{P}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\,(28) &= \varphi\left(2^{2} * 7\right) = (2-1) * 2 * \varphi\,(7) = 2 * 6 = \mathbf{12} \\
3^{15} &= 3^{\mathbf{12}} * 3^{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|3^{\varphi(28)}\right|_{28} &\equiv 1\,(\mathrm{mod}28) \\
\left|3^{12} * 3^{3}\right|_{28} &\equiv 1\,(\mathrm{mod}28) \\
\left|\cancel{3^{12}} * 3^{3}\right|_{28} &\equiv 1\,(\mathrm{mod}28) \\
&\equiv 3^{3} \equiv \underline{\underline{27}}.
\end{aligned}$$

7.5 Čínská věta o zbytcích

Jsou dána přirozená čísla $m_1, m_2, \ldots, m_k$ po dvou nesoudělná. Pak pro libovolná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$ existuje celé číslo x takové, že

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \pmod{m_k}. \end{aligned}$$

Tato soustava rovnic má řešení x a toto řešení je určeno jednoznačně v modulo

$$M = m_1 * m_2 * \ldots * m_k.$$

Příklad[a]

Řešte následující soustavu:

$$\begin{aligned} x &= 2 \pmod{3} \\ x &= 1 \pmod{8} \\ x &= 7 \pmod{13} \end{aligned}$$

Řešení bude ve tvaru:

$$x = 2 * q_1 + 1 * q_2 + 7 * q_3 \ (\mathrm{mod}\ (3 * 8 * 13))\,;\, 3 * 8 * 13 = 312$$

První koeficient:

$$\begin{aligned} s_1 &= \prod_{j \neq 1} m_j = 8 * 13 = 104 \\ t_1 &= (s_1)^{-1} = (104)^{-1} = (2)^{-1} = 2 \pmod{3} \\ q_1 &= s_1 * t_1 = 104 * 2 = 208 \mathrm{mod}\ (312) \end{aligned}$$

Druhý koeficient:

$$\begin{aligned} s_2 &= \prod_{j \neq 2} m_j = 3 * 13 = 39 \\ t_2 &= (s_2)^{-1} = (39)^{-1} = (7)^{-1} = 7 \pmod{8} \\ q_2 &= s_2 * t_2 = 39 * 7 = 273 \mathrm{mod}\ (312) \end{aligned}$$

Třetí koeficient:

$$\begin{aligned} s_3 &= \prod_{j \neq 3} m_j = 3 * 8 = 24 \\ t_3 &= (s_3)^{-1} = (24)^{-1} = (11)^{-1} = 6 \pmod{13} \\ q_3 &= s_3 * t_3 = 24 * 6 = 144 \mathrm{mod}\ (312) \end{aligned}$$

Celkový výsledek:

$$x = 2 * 208 + 1 * 273 + 7 * 144 = 1697 = 137 \mathrm{mod}\ (312)$$

Soustavu rovnic tedy řeší tato celá čísla:

$$x = 137 + k * 312,\ k \in \mathbb{Z}$$

[a] http://voho.cz/wiki/matematika/cinska-veta-o-zbytcich/

8 Numerická matematika a strojová čísla

Struktura strojově zapsaného čísla

$$\underbrace{\boxed{1b}}_{\text{znaménko}}\ 1,\underbrace{\boxed{\quad 23b \quad}}_{\text{mantisa}}\underbrace{\boxed{\quad 8b \quad}}_{\text{exponent}}$$

$$\text{resp.: } (-1)^z * (1,m)_2 * 2^{e-b}$$

- Obsahuje skrytou 1,
- V jednoduché přesnosti má exponent rozsah $-127, +127$
  - Př.: „Číslo jsme normalizovali posunem o 9 míst doleva:“

$$\begin{aligned} e - 127 &= 9 \\ e &= (136)_{10} = (10001000)_2 \end{aligned}$$

- Do strojového formátu je možné zapsat pouze zlomky ve tvaru $\frac{x}{2^y}$, kde x a y jsou celá čísla
  - Všechna ostatní čísla, mají binární reprezentaci nekonečnou a periodickou

„Pravítko“ na převod z a do binární soustavy

$$\begin{array}{ccccccccccc} \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ 1024 & 512 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

Zápis čísel ve tvaru 2^n

Číslo ve tvaru

$$2^{-n}$$

má binární reprezentaci

$$0,\underbrace{000\ldots000}_{(n-1)\times 0}1.$$

Číslo ve tvaru

$$2^{n}$$

má binární reprezentaci

$$1\underbrace{000\ldots000}_{n\times 0}.$$

Odčítání binárních čísel

$$\begin{aligned} 1-1 &= 0 \\ 1-0 &= 1 \\ 0-1 &= 1\ (+\,\text{přenos}) \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ - & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}$$

8.1 Hladový algoritmus

- Slouží pro získání binární reprezentace čísel

Příklad

$$\left(\frac{1}{13}\right)_{10} = (?)_2$$

Zvolíme l, tak aby platilo

$$\begin{aligned} 2^l &\leq \frac{1}{13} < 2^{l+1} \\ l &= -4 \\ \frac{1}{16} &\leq \frac{1}{13} < \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Protože $l = -4$, bude výsledné číslo ve tvaru

$$0,\underline{000}\underbrace{?}_{\#4}\underbrace{?}_{\#5}\underbrace{?}_{\#\ldots}$$

Algoritmus:

$$l' = |l| = \mathbf{4}$$

$*$	$(> 1 \text{ or } < 1)$	Výsledek	Do dalšího kroku	Výsledné číslo
$\frac{1}{13} * 2^4$	$\frac{16}{13}$	$> 1 \rightarrow \#4 = 1$	$\frac{16}{13} - 1 = \mathbf{\frac{3}{13}}$	$0,\underline{000}\boxed{\mathbf{1}}$
$\frac{3}{13} * 2$	$\frac{6}{13}$	$< 1 \rightarrow \#5 = 0$	$\times$	$0,\underline{0001}\boxed{\mathbf{0}}$
$\frac{6}{13} * 2$	$\frac{12}{13}$	$< 1 \rightarrow \#6 = 0$	$\times$	$0,\underline{00010}\boxed{\mathbf{0}}$
$\frac{12}{13} * 2$	$\frac{24}{13}$	$> 1 \rightarrow \#7 = 1$	$\frac{24}{13} - 1 = \mathbf{\frac{11}{13}}$	$0,\underline{000}100\boxed{\mathbf{1}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
				$0,\underline{000}10011101100\boxed{\mathbf{0}}$
$\frac{8}{13} * 2$	$\boxed{res = \mathbf{\frac{16}{13}} \rightarrow \perp}$	$\times$	$\times$	$\times$

9 Stabilní párování

- Pár (z, p), $z \in P$, $p \in P$ je **nestabilní** v M, jestliže
  - z a p nejsou spárovaní v M,
  - spárováním z a p by si polepšil jak zaměstnanec z, tak zaměstnavatel nabízející pozici p,
- M je stabilní, jestliže v M neexistuje nestabilní pár.
- **Stabilní** párování vždy alespoň jedno existuje

Dvořící algoritmus

Dokud není splněna ukončovací podmínka, probíhá každý den takto:

- **Ráno**: každá žena stojí na svém balkóně. Každý muž stojí pod balkónem ženy, která je nejvýše v jeho seznamu, a dvoří se jí. Muži s prázdným seznamem jsou doma.
- **Odpoledne**: každá žena, pod jejíž balkónem jsou alespoň dva muži, řekne tomu v seznamu nejvýše položenému, aby přišel zítra a ostatním, ať už nechodí.
- **Večer**: každý odehnaný muž si škrtne ze svého seznamu ženu, která ho dnes odehnala.

Ukončovací podmínka: každé ženě se dvoří nejvýše jeden muž.

- Párování, nalezená pomocí dvořícího algoritmu, jsou extrémní. neb pro ty na balkóně dopadnou nejhůře (mohou si vybírat jen z těch, kteří za nimi přijdou) a pro ty pod balkónem nejlépe (jdou za tím nejlepším partnerem).

10 Vyšetření průběhu funkce

- Určíme **definiční obor** funkce.
- **Průsečíky** s:
  - **osou** x získáme dosazením $y = 0$ do f
  - **osou** y získáme dosazení $x = 0$ do f.
- *Body podezřelé z extrémů* získáme pomocí rovnice

$$f'(x) = 0 \rightarrow x_1 = A, x_2 = B, \ldots$$

  - jejich y souřadnice získáme dosazením kořenů z předchozí rovnice do původní funkce f.
- Pro ověření, zda body podezřelé z extrémů jsou maximum nebo minimum, dosadíme do vztahu

$$f''(x \leftarrow A, x \leftarrow B, \ldots).$$

  - Pokud je tento výsledek **menší než nula** (< 0), jedná se o **lokální maximum**,
  - pokud je tento výsledek **větší než nula** (> 0), jedná se o **lokální minimum**.

11 Derivace a parciální derivace

11.1 Definice

Definice parciální derivace v bodě a

$$a = (a_1, \dots, a_k) \in D_f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1, a_2, \dots, a_k) - f(a)}{x_1 - a_1}$$

a podobně pro $x_2, \dots, x_k$.

Pozn.:

- „∂“ je „*partial*“ nebo také „*old-style Greek delta*“, značí parciální derivaci

11.2 Přehled základních derivací

Přehled základních derivací

$$
\begin{aligned}
C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
x^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= n * x^{n-1} \\
\sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \cos x \\
\cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= -\sin x \\
\tan x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\cot x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\
e^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= e^x \\
\ln a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x} \\
\log_a x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x \ln a} \\
a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= a^x \ln a \\
\arcsin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arccos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(u * v)' &= u' * v + u * v' \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' * v - u * v'}{v^2}
\end{aligned}
$$

11.3 Gradient

- Vektor značící směr nejrychlejšího růstu funkce f.
- Gradient v bodě je vektor nejrychlejšího růstu funkce f z tohoto bodu.
- Gradient skalárně vynásobený vektorem je derivace funkce f v tomto bodě ve směru tohoto vektoru.

Definice gradientu

$$\nabla f\,(b) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,(b)\,;\,\frac{\partial}{\partial x_2}\,(b)\,;\,\ldots\,;\,\frac{\partial}{\partial x_n}\,(b)\right)$$

Pozn.:

- „∇“ je „*nabla*“, značí gradient

11.4 Jacobiho matice

- Matice parciálních derivací
- Determinant Jacobiho matice se nazývá *jakobián*

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

11.5 Parciální derivace vyšších řádů

- 2. parciální derivace = parciální derivace parciálních derivací
- Značení:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2} &= \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_i}\,[\,= \text{derivuj parciální derivaci podle x podle x}] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}\,[\,= \text{derivuj parciální derivaci podle x podle y}] \end{aligned}$$

11.6 Derivace ve směru v bodě

Velikost vektoru

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

Normalizace vektoru

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|} = \left(\frac{a_1}{\|\overrightarrow{a}\|};\,\frac{a_2}{\|\overrightarrow{a}\|};\,\cdots\,;\,\frac{a_n}{\|\overrightarrow{a}\|};\right)$$

- Mějme funkci $f\,(x,\,y)$, směr $\overrightarrow{s}$ a bod $B\,[a,\,b]$
- **Derivace v bodě:** Spočteme ∇f v bodě B, tedy $\nabla f\,(x \leftarrow a,\,y \leftarrow b)$
  - Další možný zápis derivace v bodě: $\frac{\partial f}{\partial x}\,(a,\,b) = \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,\,b) = \ldots,$
- Výsledná derivace ve směru v bodě je („$*$“ je skalární součin):

$$\nabla f\,(B) * \overrightarrow{n}$$

12 Funkce více proměnných

- **Kritický bod** – Bod, ve kterém je gradient (všechny derivace) roven nulovému vektoru $\nabla f = (0,\, 0,\, 0)$.
  - Nalezneme vyřešením soustavy lineárních rovnic.
- Body grafu funkce $f(x,\, y) = z$ mají souřadnice

$$(x,\, y,\, f(x,\, y)).$$

- Eukleidovská vzdálenost bodů je

$$|AB| = \sqrt{(A-B)^2}$$

12.1 Hessova matice

- Hesseovu maticí zjistíme, zda je kritický bod extrém a případně jaký.

Definice Hessovy matice

$$\nabla^2 f(x_1,\, \ldots,\, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix} \left[= \begin{pmatrix} \text{x podle x} & \text{x podle y} & \text{x podle z} \\ \text{y podle x} & \text{y podle y} & \text{y podle z} \\ \text{z podle x} & \text{z podle y} & \text{z podle z} \end{pmatrix} \right]$$

- *Hessián* je zkrácené pojmenování pro Hessovu matici.

12.2 Definitnost

- Vlastnost regulárních[3] matic, která je definována jako

$$(v) * (A) * (v)^T \text{ např.: } \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} * (A) * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Pokud je výsledek po vynásobení libovolným vektorem
  - vždy > 0 je matice pozitivně definitní,
  - vždy < 0 je matice negativně definitní.
- Pokud má výsledek po vynásobení různými vektory různá znaménka, je matice indefinitní.

[3] Čtvercová matice, jejíž determinant je různý od nuly, tzn. $det(A) \neq 0$

12.2.1 Sylvestrovo kritérium

- Můžeme použít pouze pro *symetrické matice.*
- Spočítáme *rohové subdeterminanty*:

$$\nabla^2 f = \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}\boxed{M1} & \cdots \\ \cdots & M2\end{matrix}} & \cdots \\ \cdots & M3\end{matrix}}}_{\text{Hasseova matice}}\right)$$

Vyhodnocení výsledků

- Pokud $\forall i : det\,(M_i) > 0 \Leftrightarrow$ matice M je pozitivně definitní.
- Pokud $\forall j : det\,(M_{2j+1}) < 0$ a $det\,(M_{2j}) > 0 \Leftrightarrow$ matice M je negativně definitní
  - tj.: „−“ (levý horní roh) → „+“ → „−“ → ... (pravý dolní roh).
- Pokud má matice na diagonále dva prvky, kde je jeden kladný a druhý záporný, je matice indefinitní
- Pokud neplatí ani jedno, není možné touto metodou definitnost určit (přesněji řečeno: Hesseova matice není pozitivně ani negativně definitní) a musíme použít jinou metodu.

Determinant matice pomocí Sarussova pravidla

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

12.2.2 Kvadratická forma matice

$$\vec{v} = (x, y, z):$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{\text{Hessova matice}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,(a+d+g) & y\,(b+e+h) & z\,(c+f+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dots$$

- Do výsledku dosazujeme libovolné vektory a zjišťujeme, zda je celý výraz kladný nebo záporný:
  - Je výraz vždy kladný → Hesseova matice je **pozitivně definitní** → bod je lokální minimum
  - Je výraz vždy záporný → Hesseova matice je **negativně definitní** → bod je lokální maximum
  - Je výraz kladný i záporný → Hesseova matice je **indefinitní** → bod je *sedlový bod*
  - Matice může být i „semidefinitní“ a to tehdy, když pro nenulový vektor je výsledek nulový

12.3 Tečná rovina

- **Obecná rovnice roviny**:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(a - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(b - y) - z + f(a, b) = 0$$

Jedná se tedy o rovinu s normálovým vektorem

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right).$$

13 Integrály

13.1 Tabulkové integrály

Přehled tabulkových integrálů

$$\begin{aligned}
\int 0 \,\mathrm{d}x &= c \\
\int a \,\mathrm{d}x &= ax + c \\
\int x^n \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \,\text{pro}\; x > 0,\, n \in R \text{ a } n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \ln|x| + c \text{ pro } x \neq 0 \\
\int e^x \,\mathrm{d}x &= e^x + c \\
\int a^x \,\mathrm{d}x &= \frac{a^x}{\ln(a)} + c \text{ pro } a > 0, \text{ a } a \neq 1 \\
\int \sin x \,\mathrm{d}x &= -\cos x + c \\
\int \cos x \,\mathrm{d}x &= \sin x + c
\end{aligned}$$

$$\int u * v' = uv - \int u' * v$$

13.2 Newtonova formule

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

13.3 Integrály přes obdélníkovou oblast

$$\iint_D f(x,\, y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,\, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

13.4 Integrály přes obecnou oblast

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

14 Fuzzy matematika

14.1 Fuzzy množiny

- Fuzzy logika může operovat se všemi hodnotami z intervalu $< 0; 1 >$, kterých je nekonečně mnoho.

14.1.1 T-normy

- Gödelova konorma

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\,(\mu_A(x)\,;\, \mu_B(x))$$

- Łukasiewiczova konorma

$$\mu_{A \cup B}(x) = min\,(\mu_A(x) + \mu_B(x)\,;\, 1)$$

- Součinová konorma

$$\mu_{A \cup B}(x) = (\mu_A(x) + \mu_B(x)\,;\, 1) - (\mu_A(x) * \mu_B(x)\,;\, 1)$$

14.1.2 De Morganovy zákony a T-konormy

- Komutativita

$$\perp(a,\, b) = \perp(b,\, a)$$

- Monotonie

$$\perp(a,\, b) \leq \perp(c,\, d) \text{ když } a \leq c \text{ a } b \leq d$$

- Asociativita

$$\perp(a,\, \perp(b,\, c)) = \perp(\perp(a,\, b)\,,\, c)$$

- Identický element

$$\perp(a,\, 0) = a$$