Matematika pro informatiku

Ústní zkouška

leden 2014

Obsah

I Algebra, teorie čísel, teorie grafů **3**

1 Grupoidy, pologrupy, monoid a grupy, základní vlastnosti a definice **3**

2 Podgrupy, generátory a podgrupy generované množinami **3**

3 Cyklické grupy, generátory **3**

4 Homomorfizmus, izomorfizmus – vlastnosti a příklady izomorfních grupy **3**

5 Problém diskrétního logaritmu v různých grupách, Diffie-Hellman Key Exchange **4**

6 Tělesa, okruhy, obory integrity **7**

7 Konečná tělesa obecně, konečná tělesa s prvočíselným řádem **7**

8 Konečná tělesa neprvočíselného řádu, ireducibilní polynom, okruh polynomů **7**

9 Základní vlastnosti kongruence, Eulerova a Fermatova věta, čínská věta o zbytcích, efektivní mosnění **7**

10 Prvočísla a testování prvočíselnosti **7**

11 Bipartitní grafy, párování v bipartitním grafu **7**

12 Stabilní párování **7**

13 Bioinformatika: problémy spojené se sekvencováním DNA **7**

II Numerika, optimalizace, fuzzy matematika 7

14 Limity a derivace funkcí více proměnných, gradient, Jacobiho matice, Hessián 7

15 Lokální a globální extrémy funkcí více proměnných 7

16 Konstrukce Riemannova integrálu funkce jedné a více proměnných 7

17 Výpočet Riemannova integrálu funkce jedné a více proměnných 7

18 Výpočet Riemannova integrálu funkce více proměnných 7

19 Strojová čísla a reprezentace s pohyblivou řádovou čárkou 7

20 Chyby vznikající při výpočtech s pohyblivou řádovou čárkou 7

21 Numerické metody řešení soustav lineárních rovnic 7

22 Vlastní čísla a mocninná metoda 7

23 Typy optimalizačních úloh a optimalizačních metod 7

24 Optimalizační metody pro spojité funkce 7

25 Optimalizace s omezeními 7

26 Vzdálenost a další míry podobnosti 7

27 Fuzzy množiny a operace s nimi 7

28 Přístupy k neurčitosti založené na pravděpodobnostních rozděleních: kopule, entropie 7

29 Kombinování neurčitosti pomocí fuzzy pravidlových systémů a fuzzy integrálů 7

Část I

Algebra, teorie čísel, teorie grafů

1 Grupoidy, pologrupy, monoid a grupy, základní vlastnosti a definice

- Všechny mají společnou strukturu – neprázdnou množinu objektu a binární operaci
- Značíme $G = (M, \circ)$
- Důvod, proč se tímto zabýváme: pokud dokážeme nějaké tvrzení pro obecnou strukturu, bude toto tvrzení platit i pro všechny konkrétní struktury, které od ní „dědí“
  - Jedná se tedy o triviální důkaz asociativity

Hierarchie struktur:

- Grupoid – uzavřenost nad operací
- Pologrupa – asociativita $((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z))$
- Monoid – neutrální prvek
  - $(\exists e \in M)(\forall a \in M)(a \circ e = a \circ e = a)$
- Grupa – inverzní prvek
  - $(\forall a \in M)(\exists a^{-1} \in M)(a \circ a^{-1} = e)$
- Abelovská grupa – komutativita $(x \circ y = y \circ x)$

Tyto struktury od sebe skutečně „dědí“, tj. každá pologrupa je grupoid, každý monoid je pologrupa atp.

Pokud máme zadanou dvojici „množina a operace“ zjistíme, o co se jedná, jen postupným testováním.

Klíčová slova: Binární operace, neutrální prvek, inverzní prvek, Abelovská grupa, Cayleho tabulka, jednoznačné dělení, podgrupa.

2 Podgrupy, generátory a podgrupy generované množinami

3 Cyklické grupy, generátory

4 Homomorfizmus, izomorfizmus – vlastnosti a příklady izomorfních grupy

- Homomorfismus – zobrazení z jedné struktury do jiné stejného typu, které zachovává veškerou důležitou strukturu.

- Izomorfismus – bijektivní (prostý a na) homomorfismus.

Kleinova grupa – nejmenší necyklická grupa. Jedná se o direktní součin dvou kopií cyklické grupy řádu 2.

$$V = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \circ)$$

Klíčová slova: Izomorfní grupa, bijekce, Kleinova grupa, symetrická grupa, grupa permutací

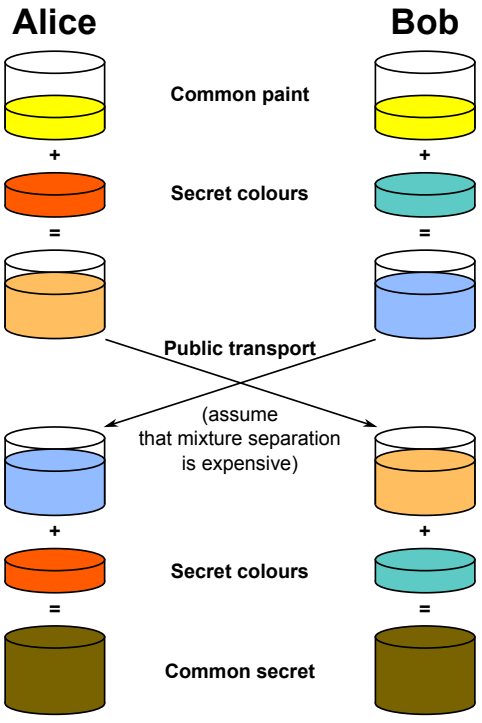
5 Problém diskrétního logaritmu v různých grupách, Diffie-Hellman Key Exchange

- **Diskrétní** – celá čísla a konečné objekty. Diskrétní objekty jsou prezentovány pomocí konečných grafů a množin. „Diskrétní“ je opak „spojitého“.
- **Logaritmus** – matematická funkce, která je inverzní k exponenciální funkci.

Neexistuje žádný rychlý algoritmus řešící problém diskrétního logaritmu, používá se proto v asymetrické kryptografii.

Def: Máme grupu $\mathbb{Z}_p^\times$ řádu $p-1$, α je nějaký její generátor a β je její prvek. Řešit problém diskrétního logaritmu znamená najít celé číslo $1 \leq x \leq p-1$ takové, že

$$\alpha^x \equiv \beta \pmod{p}$$



Obrázek 1: Diffie-Hellman Key Exchange Schema

- Díky této vlastnosti máme jednosměrnou (one-way) funkci pro asymetrickou kryptografii. Protože najít

$$\beta \equiv \alpha^x \pmod{p}$$

je jednoduché, pokud známe x, α a p. Najít však x pokud známe β a α je velmi obtížné. (Jinak řečeno: násobení a mocnění prvočísel je velmi rychlé a snadné).

  - **Inverzní operace k mocnění** je diskrétní logaritmus.
  - Na tomto principu je založena **RSA** (Rivest, Shamir, Adleman).

6 Tělesa, okruhy, obory integrity

7 Konečná tělesa obecně, konečná tělesa s prvočíselným řádem

8 Konečná tělesa neprvočíselného řádu, ireducibilní polynom, okruh polynomů

9 Základní vlastnosti kongruence, Eulerova a Fermatova věta, čínská věta o zbytcích, efektivní mosnění

10 Prvočísla a testování prvočíselnosti

11 Bipartitní grafy, párování v bipartitním grafu

12 Stabilní párování

13 Bioinformatika: problémy spojené se sekvencováním DNA

Část II

Numerika, optimalizace, fuzzy matematika

14 Limity a derivace funkcí více proměnných, gradient, Jacobiho matice, Hessián

15 Lokální a globální extrémy funkcí více proměnných

16 Konstrukce Riemannova integrálu funkce jedné a více proměnných

17 Výpočet Riemannova integrálu funkce jedné a více proměnných

18 Výpočet Riemannova integrálu funkce více proměnných

19 Strojová čísla a reprezentace s pohyblivou řádovou čárkou

20 Chyby vznikající při výpočtech s pohyblivou řádovou čárkou

21 Numerické metody řešení soustav lineárních rovnic

22 Vlastní čísla a mocninná metoda

23 Typy optimalizačních úloh a optimalizačních metod

24 Optimalizační metody pro spojité funkce