Teorie systémů [MI-TES]

Souhrn látky

leden 2014

Obsah

1 Základní pojmy **2**

2 Základy matematické logiky **2**
2.1 Ekvivalence a De Morganovy zákony . . . 2
2.2 Volné a vázané proměnné . . . 2

3 Automatové modely **3**
3.1 Synchronizovaná paralelní kompozice systémů . . . 3
3.2 Kaskádní kompozice systémů $S_1 \rightsquigarrow S_2$ . . . 3

4 Linear temporal logic (LTL) **4**
4.1 Vlastnosti a cesty . . . 4
4.2 Převod do základní logiky . . . 5

5 Testování a ověřování modelů **5**
5.1 Bounded Model Checking . . . 5
5.2 Satisfiability (SAT) . . . 5
5.2.1 Základní pravidla při vyšetřování formule . . . 5
5.3 Davis-Putnam-Logemann-Loveland algoritmus (DPLL) . . . 6
5.4 Neomezené testování modelů . . . 6

6 Petriho sítě **6**
6.1 Základní vlastnosti . . . 6
6.2 Převod do automatu . . . 7

7 Časované automaty **7**

8 Probabilistické modely **8**

1 Základní pojmy

Interpretace Definice nějaké vlastnosti, značí se $\mathcal{I}\left(\right)$.

Arita Počet argumentů nebo operandů matematické funkce nebo operace.

Potenční množina Množina všech podmnožin, značí se $\mathcal{P}\left(x\right)$ a počet jejích prvků je $2^{|M|}$.

Uppaal Software.

2 Základy matematické logiky

2.1 Ekvivalence a De Morganovy zákony

- $A \wedge [B \vee C]$ je ekvivalentní s $[A \wedge B] \vee [A \wedge C]$
- $A \vee [B \wedge C]$ je ekvivalentní s $[A \vee B] \wedge [A \vee C]$
- $\neg [A \wedge B]$ je ekvivalentní s $\neg A \vee \neg B$
- $\neg [A \vee B]$ je ekvivalentní s $\neg A \wedge \neg B$
- $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní s $\neg A \vee B$
- $A \Leftrightarrow B$ je ekvivalentní s $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

2.2 Volné a vázané proměnné

Definice

Výskyt standardní proměnné x ve formuli nazýváme vázaným, pokud při cestě od tohoto listu ke kořeni syntaktického stromu narazíme na vrchol označkovaný buď $\forall x$ nebo $\exists x$. V opačném případě nazveme tento výskyt volným. Kvantifikátor $\forall x$ nebo $\exists x$ váže všechny výskyty proměnné x, které jsou v syntaktickém stromu pod tímto kvantifikátorem.7

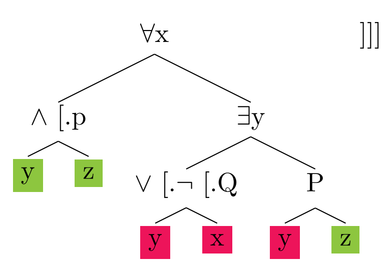
– J. Velebil

Příklad

Najděte volné a vázané proměnné ve výrazu

$$\forall x.\ \left[P\left(y,\ z\right) \wedge \exists y.\ \left[\neg Q\left(y,\ x\right) \vee P\left(y,\ z\right)\right]\right].$$

Sestavíme syntaktický strom:



3 Automatové modely

Formální definice

$$A = (S, S_0, I, O, R)$$

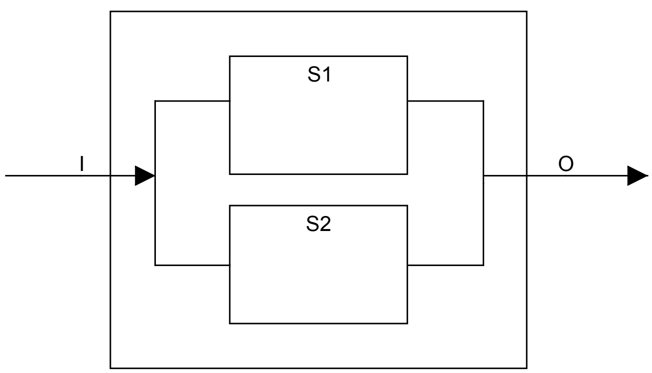
- S – množina stavů
- S_0 – počáteční stav
- I – množina vstupů
- O – množina výstupů
- R – přechodová funkce

Základní vlastnosti, které po automatovém modelu požadujeme.

- Deterministický
- Receptivní – pro každý vstup existuje výstup
- S pamětí

3.1 Synchronizovaná paralelní kompozice systémů

- „Hodiny" jdou na každý přechod do každého z automatů, automat se tedy nachází vždy ve více stavech najednou.
- Pokud chceme výsledný systém zakreslit jako jeden automat, sestrojíme *kartézský součin vstupů a výstupů.*

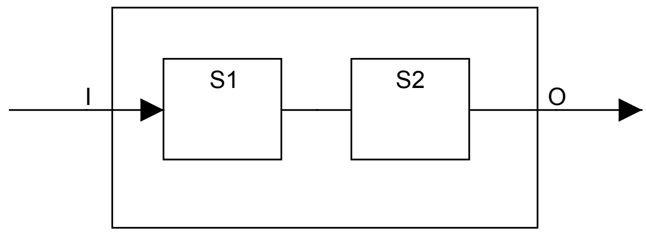


Obrázek 1: Synchronizovaná paralelní kompozice systémů

3.2 Kaskádní kompozice systémů $S_1 \rightsquigarrow S_2$

Kaskádní kompozici dvou automatů vytvoříme následovně:

- Vytvoříme kartézský součin všech stavů.
- Výstup jednoho automatu ($S1$) je vstupem automatu druhého ($S2$).



Obrázek 2: Kaskádní kompozice systémů

4 Linear temporal logic (LTL)

- Pokud chceme nějakou vlastnost dokazovat, snažíme se najít protipříklad. V případě automatového modelu např. hledáme cykly.

4.1 Vlastnosti a cesty

- První element cesty

$$\pi(0) \models p$$

$$\bullet \circ \circ \circ \dots$$

- Další element cesty („ne**X**t“)

$$\pi^1 \models p$$

$$\circ \bullet \circ \circ \circ \dots$$

- Časem („**F**uture“)

$$\exists k \geq 0,\, \pi^k \models p$$

$$\circ \circ \circ \bullet \bullet \bullet \circ \circ \circ \dots$$

- Vždy („**G**lobally“)

$$\forall k \geq 0,\, \pi^k \models p$$

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \dots$$

- Do té doby („**U**ntil“)

$$\exists i,\, \pi^i \models q \text{ a } \forall j < i,\, \pi^j \models p$$

$$p : \bullet \bullet \bullet \circ \circ \circ \circ \circ \dots$$
$$q : \circ \circ \circ \bullet \circ \circ \circ \circ \dots$$

- Pokud ještě („**R**elease“)

$$p : \bullet \bullet \bullet \bullet \circ \circ \circ \circ \dots$$
$$q : \bullet \bullet \bullet \underset{!}{\bullet} \circ \circ \circ \circ \dots$$

Speciální případy:

- FGg: Časem bude nějaká vlastnost platit navždy, tzn. jakmile začne platit, nikdy už neskončí.
- GFg: Vždy se lze časem vlastnosti g dočkat. Tento případ se od „samotného časem“ liší tak, že „samotné časem“ může a nemusí nastat pouze jednou.

Upozornění

Styl zápisu

$$red \rightarrow G\text{green}$$

říká, že v prvním stavu musí platit vlastnost „red“.

4.2 Převod do základní logiky

$$\neg(Fp) = G\neg p$$

5 Testování a ověřování modelů

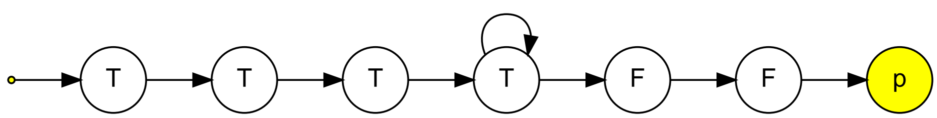
Pozor v této kapitole se používá namísto „automatového modelu“ nový termín „*přechodový systém*“, který se skládá z

- Množiny stavů S (stavový prostor),
- Neprázdné množiny $S_0 \subseteq S$ počátečních stavů,
- Přechodové relace $R \subseteq S \times S$ tak, že pro každé $s \in S$ existuje $s' \in S$ tak, že $(s, s') \in R$.

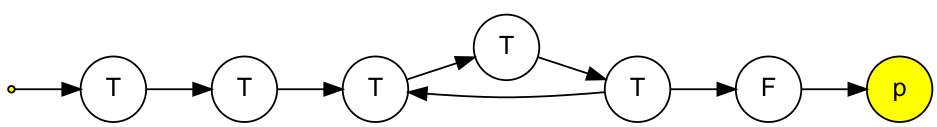
tl;dr: Přechodový systém je zjednodušený konečný automat – neřeší vstupy I ani výstupy O.

5.1 Bounded Model Checking

- Ověřujeme pro cestu určité délky
- Pro cesty délky 0 (ještě jsme nevstoupili do cyklu) platí **všechny vlastnosti triviálně**.
- Při dokazování „F“ pomocí metody BNC je vlastnost pravdivá do té doby, **než narazíme na cyklus** (viz obrázky níže). Důvodem je, že „nevidíme“ do budoucnosti a dokud žádný cyklus nepotkáme, předpokládáme, že ho ani nepotkáme. Pozor – stav, ve ze kterého cyklus začíná se stále považuje za pravdivý.



Obrázek 3: BNC a dokazování „Future“



Obrázek 4: BNC a dokazování „Future“

5.2 Satisfiability (SAT)

- Ověřování splnitelnosti Booleovské formule.

5.2.1 Základní pravidla při vyšetřování formule

- **Simplifikace** – pokud je proměnná `TRUE`, můžeme škrtnou celou závorku (klauzuli).
- **Eliminace** – pokud je proměnná `FALSE`, můžeme ji vyjmout.

5.3 Davis-Putnam-Logemann-Loveland algoritmus (DPLL)

Rozšíření SAT modelu o:

- **Unit Propagation** – pokud nějaká klauzule obsahuje jen jeden literál, ihned do tohoto literálu dosadíme hodnotu.
- **Pure Literal Elimination** – pokud se proměnná v celém výrazu vyskytuje buď jen pozitivně nebo jen negativně, dosadíme do této proměnné hned hodnotu, aby vyšla `TRUE`.

5.4 Neomezené testování modelů

Invariant Podmínka, která musí být splněna před a po každém průchodu. Musí tedy platit na cestě libovolné délky nebo-li musí platit na všech dosažitelných stavech.

Induktivní invariant Invariant, který splňuje induktivní podmínky.

Triviální invariant Invariant je triviální, pokud obsahuje všechny stavy přechodového systému.

Induktivní podmínky:

1. Každý počáteční stav splňuje p, tj.
$$S_0 \subseteq \mathcal{I}(p)$$
2. Důkaz, že pokud x splňuje p, a x' je výsledkem přechodu z x, pak x' také splňuje p, tj.
$$\{x' | x \in \mathcal{I}(p), (x, x') \in T\} \subseteq \mathcal{I}(p)$$

6 Petriho sítě

6.1 Základní vlastnosti

Definice:

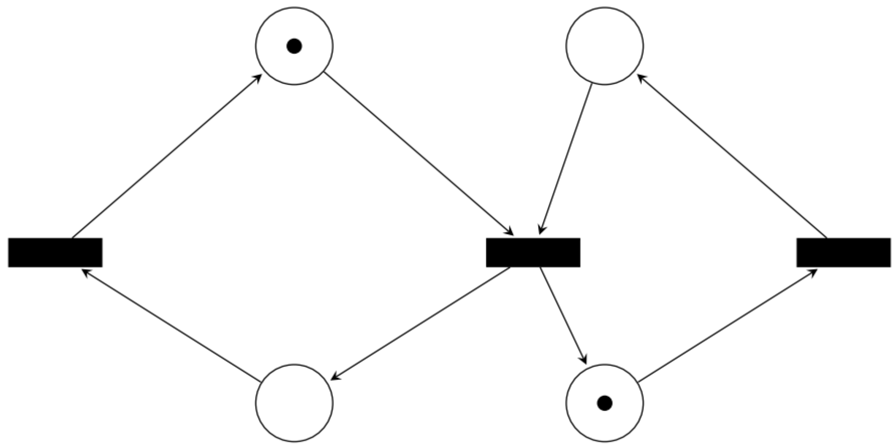
$$(P, T, F, w, M_0).$$

- P = places
- T = transitions
- F = hrany
- w - váhová funkce (implicitně je jedna jinak se ohodnocují hrany)
- M_0 - počáteční značení

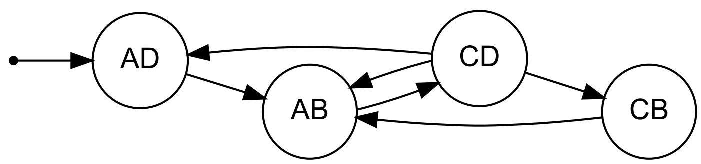
Petriho síť se skládá z míst, přechodů a hran.

- **Značení** = rozmístění tokenů.
- **Dosažitelnost =** značení M je dosažitelné právě když existuje posloupnost odpálení z M0 do M.
- **(k-)Omezenost** = maximální počet značek v jednom místě (globálně).
- **Živost** = Přechod je živý, pokud z každého dosažitelného značení je možné tento přechod odpálit.
  - Petriho síť je živá, právě když je každý přechod živý.

6.2 Převod do automatu



Obrázek 5: Petriho síť, značení míst dle hodinových ručiček: A, B, C, D



Obrázek 6: Petriho síť převedená do konečného automatu

7 Časované automaty

Základní pojmy

Lokace Místo v automatu (stav).

Invariant Časové omezení v lokaci. Pozor nejedná se o tentýž pojem jako v případě induktivního invariantu.

Stav Konkrétní stav definovaný stavem a jeho časem.

Guard Časové omezení na přechodech.

Časovaný přechod Zůstáváme na jednom místě, ale čas plyne (navyšuje se).

Akční přechod Přechod do jiného místa.

Formální definice časovaného automatu (pětice)

$$A = (S, S_0, X, \mathcal{I}, T)\,.$$

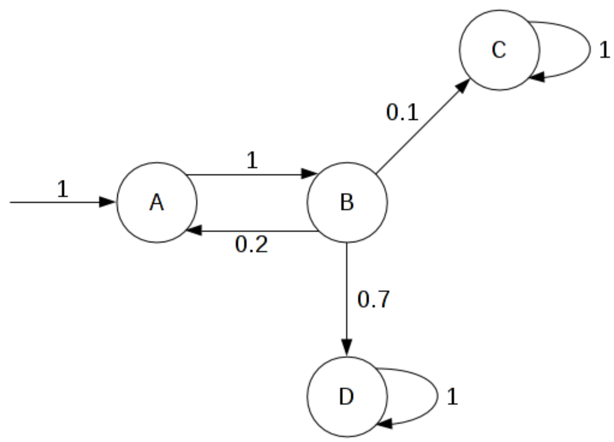
- S je konečná množina lokací
- $S_0 \subseteq S$ je množina počáteční lokace
- X je konečná množina hodin

- $\mathcal{I} : S \to \mathcal{C}(X)$ jsou invarianty lokací
- $\mathcal{T} \subset S \times \mathcal{C}(X) \times \mathcal{P}(X) \times S$ (přechody, guard, reset)

- Pokud nemá stav invariant, můžeme v něm setrvat neomezeně dlouho

8 Probabilistické modely

- Přechody jsou ohodnoceny pravděpodobnostmi.
- Součet pravděpodobností v každém stavu (všech přechodů z toho stavu) se musí rovnat 1.
- Pokud chceme v probabilistickém modelu spočítat pravděpodobnost, že se dostaneme z místa A do místa B, musíme sestavit lineární soustavu rovnic.



Obrázek 7: Probabilistický model

Ve výše zobrazeném modelu chceme spočíst pravděpodobnost cesty z bodu A do bodu D. Sestavíme tedy pro každý stav rovnici s pravděpodobností cesty do cílového bodu D.

$$x_A = 1 * x_B \tag{1}$$
$$x_B = 0,2 * x_A + 0,1 * x_C + 0,7 * x_D \tag{2}$$
$$x_C = 0 \tag{3}$$
$$x_D = 1 \tag{4}$$

- (1) Ze stavu vede jen jedna cesta.
- (2) Ze stavu vedou tři cesty.
- (3) Ze stavu C se do stavu D nikdy nedostaneme, pravděpodobnost je tedy 0.
- (4) V D již jsme, pravděpodobnost je tedy 1.