technische universität
dortmund

Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2

Amin Coja-Oghlan

June 10, 2022

Lehrstuhl Informatik 2
Fakultät für Informatik

Der $\mathcal{O}$-Kalkül

Ziel

- es gilt, die Laufzeit von Algorithmen auf *großen* Eingaben zu analysieren
- wir interessieren uns als für “Größenordnungen”
- dazu führen wir einen geeigneten Formalismus ein

Der O-Kalkül

Definition $O(\,\cdot\,)$

- angenommen $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sind zwei Funktionen.
- wir schreiben $f(n)=O(g(n))$, falls es eine natürliche Zahl $n_0\in\mathbb{N}$ und eine reelle Zahl $C>0$ gibt, so daß

$$|f(n)|\leq C|g(n)| \qquad \text{für alle } n>n_0.$$

Der $\mathcal{O}$-Kalkül

Definition $\Omega(\,\cdot\,)$

- angenommen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sind zwei Funktionen.
- wir schreiben $f(n) = \Omega(g(n))$, falls es eine natürliche Zahl $n_0 > 0$ und eine reelle Zahl $c > 0$ gibt, so daß

$$f(n) \geq c \cdot g(n) \geq 0 \qquad \text{für alle } n > n_0.$$

Der O-Kalkül

Definition $\Theta(\,\cdot\,)$

- angenommen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sind zwei Funktionen.
- wir schreiben $f(n) = \Theta(g(n))$, falls $f(n) = \Omega(g(n))$ und $g(n) = \Omega(f(n))$.

Der O-Kalkül

Definition $o(\,\cdot\,)$

- angenommen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sind zwei Funktionen.
- wir schreiben $f(n) = o(g(n))$, falls zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 > 0$ existiert, so daß

$$|f(n)| \leq \varepsilon |g(n)| \qquad \text{für alle } n > n_0.$$

Der O-Kalkül

Idiomatische Spezialfälle

- $O(1)$: ein beschränkter Ausdruck
- $o(1)$: ein Ausdruck, der für $n \to \infty$ gegen Null geht
- $\Omega(1)$: ein Ausdruck, der für $n \to \infty$ von der Null weg beschränkt bleibt
- $\Theta(1)$: ein Ausdruck, der beschränkt und von der Null weg beschränkt bleibt

Der O-Kalkül

Definition $\cdot \sim \cdot$

Für zwei Funktionen $f(n), g(n)$ schreiben wir $f(n) \sim g(n)$, falls

$$f(n) = (1 + o(1))g(n).$$

Der O-Kalkül

Zusammenfassung

- der O-Kalkül ermöglicht uns, über Größenordnungen zu sprechen
- wir haben die verschiedenen Symbole $O(\,\cdot\,), o(\,\cdot\,), \Omega(\,\cdot\,), \Theta(\,\cdot\,), \,\cdot\, \sim \,\cdot\,$ kennengelernt
- (Übung macht den Meister)