# Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2

Amin Coja-Oghlan

**June 10, 2022**

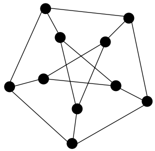
Lehrstuhl Informatik 2
Fakultät für Informatik

# Graphen

## Worum geht es?

- Graphen sind ein Grundbaustein der Algorithmik
- …und der Diskreten Mathematik.
- Unzähligen Anwendungen sind als Graphen modellierbar, z.B.
  - ein Straßen– oder Schienennetz
  - ein Kontaktnetzwerk
  - Abhängigkeiten zwischen Prozessen
  - der Verdrahtungsplan eines Chips
  - das Gehirn
- dabei treten dieselben grundlegenden Problemstellungen auf
- Graphenalgorithmen sind also extrem vielseitig einsetzbar

## Graphen



### Definition

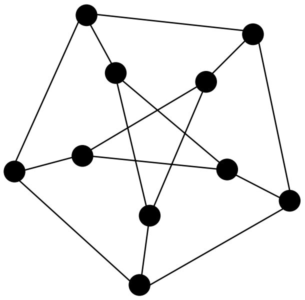
Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus

- einer Menge $V$ von Knoten und
- einer Menge $E$ von Kanten,

so daß jede Kante $e \in E$ eine zweielementige Teilmenge von $V$ ist.

*Graphisch stellen wir die Knoten als Punkte dar und die Kanten als ungerichtete Verbindungslinien.*

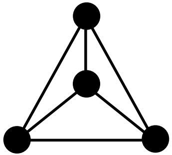
## Graphen



### Beispiel: der Petersen-Graph

- 10 Knoten
- 15 Kanten

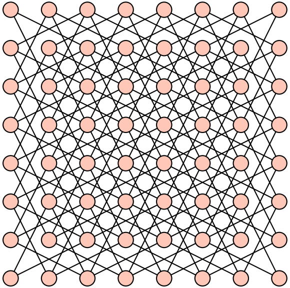
## Graphen



### Beispiel: der vollständige Graph $K_4$

- 4 Knoten
- jeder der $\binom{4}{2} = 6$ möglichen Kanten ist vorhanden

## Graphen



### Beispiel: das Springerproblem

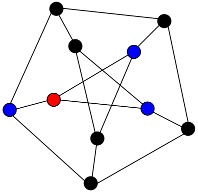
- *Ist es möglich, mit einem Springer alle 64 Felder eines Schachbrettes in einem Zug genau einmal zu besuchen?*
- Die Knoten entsprechen den Feldern, die Kanten den möglichen Zügen

# Graphen

## Konvention

- angenommen $G = (V, E)$ ist ein Graph
- sofern nicht ausdrücklich anders angegeben, nehmen wir stets an, daß die Knotenmenge endlich ist.
- mit $V(G) = V$ und $E(G) = E$ werden Knoten- und Kantenmenge eines Graphen bezeichnet.
- für eine Kante $\{u, v\}$ verwenden wir die Kurzschreibweise $uv$.
- per Definition enthalten Graphen keine Mehrfachkanten und keine Schleifen.

# Graphen



## Definition

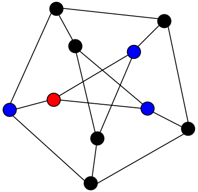
Angenommen $G = (V, E)$ ist ein Graph.

- die Nachbarschaft von $v \in V$ ist

$$\partial_G v = \{u \in V : uv \in E\}\,.$$

- der Grad von $v$ ist $d_G(v) = |\partial_G v|$.

## Graphen

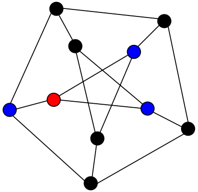


### Definition

Angenommen $G = (V, E)$ ist ein Graph.

- die Knoten $v, w \in V$ sind adjazent oder benachbart, falls $vw \in E$.
- der Knoten $v$ und die Kante $e \in E$ sind inzident, falls $v \in e$.

## Graphen

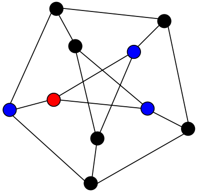


### Definition

Angenommen $G = (V, E)$ ist ein Graph.

- der Maximalgrad von $G$ ist $\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$.
- der Minimalgrad von $G$ ist $\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$.
- der Graph ist $k$-regulär, falls $\Delta(G) = \delta(G) = k$.

## Graphen

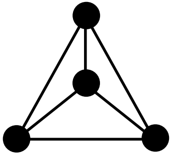


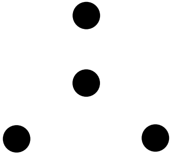
### Definition

Angenommen $G = (V, E)$ ist ein Graph. Das Komplement $\bar{G}$ von $G$ ist der Graph mit Knotenmenge $V(\bar{G}) = V$ und Kantenmenge

$$E(\bar{G}) = \{uv : u, v \in V, u \neq v, uv \notin E\}.$$

## Graphen





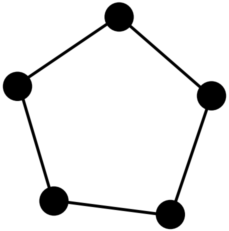
### Beispiel: der vollständige und der leere Graph

- sei $\ell \geq 1$.
- mit $K_\ell$ wird der vollständige Graph auf $\ell$ Knoten bezeichnet:

$$V(K_\ell) = \{1, 2, \ldots, \ell\} \qquad E(K_\ell) = \{vw : 1 \leq v < w \leq \ell\}$$

- das Komplement $\bar{K}_\ell$ ist der leere Graph.

## Graphen

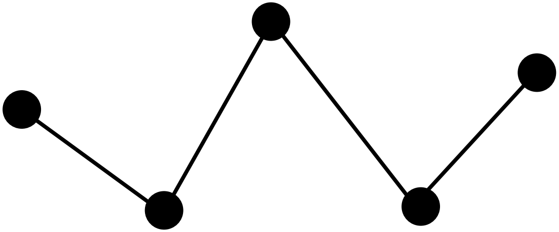


### Beispiel: Kreise

- sei $\ell \geq 1$.
- mit $C_\ell$ wird der Kreis auf $\ell$ Knoten bezeichnet:

$$V(C_\ell) = \{1, 2, \ldots, \ell\}$$
$$E(C_\ell) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \ldots, \{\ell, 1\}\}$$

## Graphen



### Beispiel: Pfade

- sei $\ell \geq 1$.
- mit $P_\ell$ wird der Pfad auf $\ell$ Knoten bezeichnet:

$$V(P_\ell) = \{1, 2, \ldots, \ell\}$$
$$E(P_\ell) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \ldots, \{\ell - 1, \ell\}\}$$

## Graphen

**Lemma**

Für einen Graphen $G$ gilt stets $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$.

## Graphen

### Beweis

- Wir führen Induktion nach der Anzahl der Kanten.
- In einem leeren Graphen haben wir

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 0 = |E(G)|.$$

- Wenn wir jetzt $G$ aus $G'$ erhalten, indem wir eine Kanten hinzufügen, dann gilt nach Induktion

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 + \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2 + 2|E(G')| = 2|E(G)|.$$

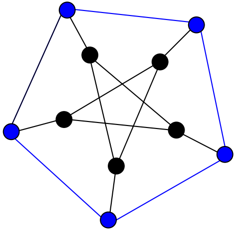
## Graphen

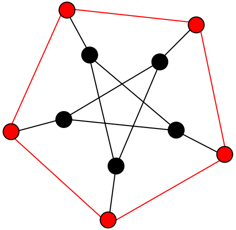
### Definition

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ sind *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $\phi : V \to V'$ gibt, so daß

$$vw \in E \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi(v)\phi(w) \in E' \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

## Graphen



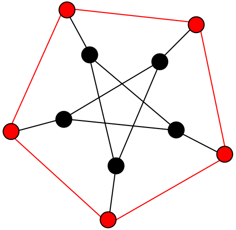


### Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ enthält einen Graphen $G' = (V', E')$

- als Untergraph, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- als induzierten Untergraphen, falls $V' \subseteq V$ und $E' = \{vw : v, w \in V', vw \in E\}$.

## Graphen



### Definition

Der von $G = (V, E)$ auf $S \subseteq V$ induzierte Untergraph ist der Graph $G[S] = (S, E(G[S]))$ mit Kantenmenge

$$E(G[S]) = \{vw : v, w \in S,\ vw \in E\}.$$

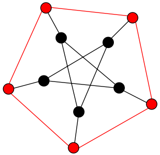
## Graphen

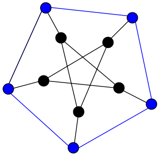
### Löschen von Knoten und Kanten

Angenommen $G = (V, E)$ ist ein Graph.

- Wenn $U \subseteq V$ eine Menge von Knoten ist, definiere $G - U = G[V \setminus U]$.
- Wenn $F \subseteq E$ eine Menge von Kanten ist, definiere $G - F = (V, E \setminus F)$.

## Graphen



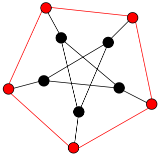


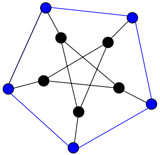
### Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ enthält

- eine induzierte Kopie eines Graph $G' = (V', E')$, wenn es eine Menge $S \subseteq V$ gibt, so daß $G[S]$ isomorph ist zu $G'$.
- eine Kopie von $G'$, wenn $G$ einen Untergraphen $H$ besitzt, der eine induzierte Kopie von $G'$ enthält.

## Graphen

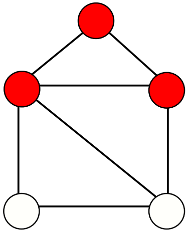




### Beispiel

- der Petersengraph enthält eine induzierte Kopie von $C_5$,
- sowie eine Kopie von $P_5$.

## Graphen



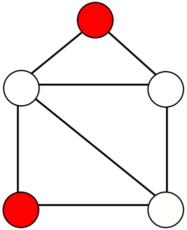
### Definition

Eine $\ell$-Clique in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$ von $|S| = \ell$ Knoten, so daß

$$uv \in E \qquad \text{für alle } u, v \in S,\ u \neq v.$$

*Mit anderen Worten: eine $\ell$-Clique ist eine Kopie von $K_\ell$ in $G$.*

## Graphen



### Definition

Eine $\ell$-stabile Menge in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$ von $|S| = \ell$ Knoten, so daß

$$uv \notin E \qquad \text{für alle } u, v \in S.$$

*Mit anderen Worten: eine $\ell$-stabile Menge ist eine induzierte Kopie von $\bar{K}_\ell$ in $G$.*

## Graphen

### Definition

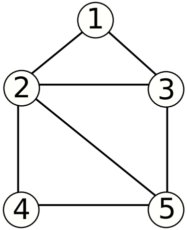
- Die Cliquenzahl von $G$ ist definiert als

$$\omega(G) = \max\left\{|S| : S \text{ ist eine Clique in } G\right\}.$$

- Die Stabilitätszahl von $G$ ist definiert als

$$\alpha(G) = \max\left\{|S| : S \text{ ist eine stabile Menge in } G\right\}.$$

## Graphen




$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

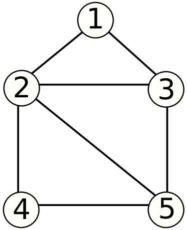
## Datenstruktur Adjazenzmatrix

- die Adjazenzmatrix $A(G)$ ist ene $n \times n$-Matrix mit Einträgen

$$A(G)_{uv} = \mathbb{1}\{uv \in E\} \qquad\qquad (u, v \in V).$$

- die Zeilen/Spalten der Matrix sind durch die Knoten indiziert.
- die Matrix ist symmetrisch

## Graphen

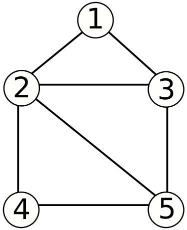



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Datenstruktur Adjazenzmatrix

- mittels der Adjazenzmatrix kann in $O(1)$ Zeit geprüft, ob zwei Knoten benachbart sind
- alle Nachbarn eines Knoten zu finden, benötigt $O(n)$ Zeit
- Speicherbedarf $\Theta(n^2)$

## Graphen

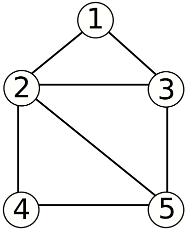



$$
\begin{array}{lllllllll}
1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 3 & & & & \\
2 & \mapsto & 1 & \mapsto & 3 & \mapsto & 4 & \mapsto & 5 \\
3 & \mapsto & 1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 5 & & \\
4 & \mapsto & 2 & \mapsto & 5 & & & & \\
5 & \mapsto & 2 & \mapsto & 3 & \mapsto & 4 & &
\end{array}
$$

## Datenstruktur Adjazenzliste

- jeder Knoten wird durch eine Liste repräsentiert
- die Liste enthält seine Nachbarn
- die Reihenfolge ist beliebig

## Graphen




| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\mapsto$ | 2 | $\mapsto$ | 3 | | | | |
| 2 | $\mapsto$ | 1 | $\mapsto$ | 3 | $\mapsto$ | 4 | $\mapsto$ | 5 |
| 3 | $\mapsto$ | 1 | $\mapsto$ | 2 | $\mapsto$ | 5 | | |
| 4 | $\mapsto$ | 2 | $\mapsto$ | 5 | | | | |
| 5 | $\mapsto$ | 2 | $\mapsto$ | 3 | $\mapsto$ | 4 | | |

## Datenstruktur Adjazenzliste

- Speicherbedarf $O(n+m)$
- um herauszufinden, ob $uv \in E$, benötigen wir Zeit $O(\min\{d_G(u), d_G(v)\})$
- *Sofern nicht anders angegeben, werden Graphen immer durch Adjazenzlisten dargestellt!*

# Graphen

## Zusammenfassung

- wir haben Grundbegriffe der Graphentheorie kennengelernt/wiederholt
- Adjazenzlisten sind eine geeignete Datenstruktur zur Darstellung von Graphen