Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2

Amin Coja-Oghlan

June 10, 2022

Lehrstuhl Informatik 2
Fakultät für Informatik

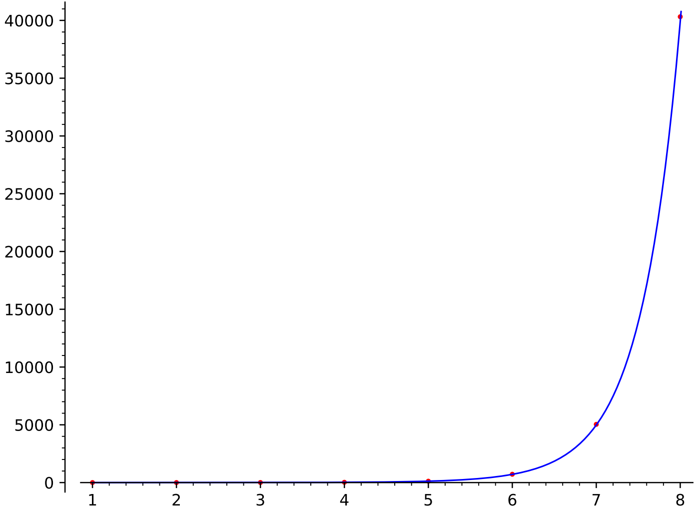
Die Stirlingformel

Satz

Es gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Die Stirlingformel



Die Stirlingformel

Erinnerung

- $n! = \prod_{i=1}^{n} i$
- $\pi = 3,14159(2)\ldots$ "Kreiszahl"
- $\mathrm{e} = 2,7182(8)\ldots$ "Eulerzahl"

Die Stirlingformel

Lemma **[Wallissches Produkt]**

Es gilt

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{4i^2 - 1}$$

Die Stirlingformel

Korollar

Es gilt

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} \sim \sqrt{\pi}$$

Die Stirlingformel

Binomialkoeffizienten

- der Binomialkoeffizient "n über k" ist definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad (n \geq k)$$

- für $k > n$ definieren wir $\binom{n}{k} = 0$

Die Stirlingformel

Pascalsches Dreieck

Für $0 < k < n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Die Stirlingformel

Teilmengen

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Zahl der k-elementigen Teilmengen von $[n]$ an.

Die Stirlingformel

Binomischer Lehrsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Die Stirlingformel

Korollar

Die Menge $[n]$ hat genau 2^n Teilmengen.

Die Stirlingformel

Zusammenfassung

- die Stirlingformel gibt eine Approximation für $n!$
- zusammen mit der informationstheoretischen unteren Schranke erhalten wir eine untere Schranke von $\Omega(n \log n)$ für vergleichsbasierte Sortieralgorithmen