КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Реферат

з дисципліни “Формальні методи розробки програмних систем”

на тему:

Визначення модальних та темпоральних логік

Виконав студент групи ШІ

СТЕЦЕНКО Ілля Валерійович

Київ 2025

Вступ

Модальні та темпоральні логіки – це розширення класичної логіки, що дозволяють висловлюванням враховувати додаткові *модальності* (такі як необхідність, можливість, час тощо). В узькому сенсі модальна логіка вивчає висновування, яке залучає оператори на кшталт «необхідно, що…» (□) та «можливо, що…» (◇).

У ширшому розумінні під модальною логікою мають на увазі ціле сімейство споріднених формальних систем, включно з логіками знання і віри (епістемічні), логіками часу (темпоральні або часові), деонтичними логіками (модальності норм і повинності) та багатьма іншими.

Темпоральна логіка – один із різновидів модальної логіки, що спеціально призначений для представлення часового аспекту істинності висловлювань. В останні роки модальні та темпоральні логіки набули особливого значення у зв'язку з розвитком сучасних інформаційних систем: їхній апарат успішно застосовується для моделювання складних динамічних систем і формальної специфікації програмного забезпечення.

Зокрема, на основі темпоральної логіки створено низку мов і методів специфікації та верифікації програм (наприклад, Temporal Logic, мережі Петрі, TLA+, StateCharts та ін.)

У даному рефераті представлено формальні означення модальної і темпоральної логік, їхній синтаксис і семантику, приклади логічних формул і застосувань, класифікацію різновидів та аналіз взаємозв'язку між ними.

Модальна логіка: означення, семантика та приклади

Означення модальної логіки. *Модальна логіка* – це логічна система, що розширює класичну пропозиційну (або предикатну) логіку за допомогою **модальних операторів**, які виражають певний «режим» істинності висловлювання. Найпоширеніші модальні оператори – це □ (читається «необхідно, що…») та ◇ («можливо, що…»). Наприклад, формула $\Box P$ означає, що висловлювання P є істинним у всіх можливих випадках (необхідно істинне), тоді як $\Diamond P$ стверджує, що P істинне в деякому можливому випадку (хоча б десь або колись може бути істинним). Формально мова модальної логіки будується рекурсивно: Якщо p — атомарна формула (пропозиційний символ), то p — формула. Ці оператори можна інтерпретувати різноманітно залежно від галузі: у класичній (*алетичній*) модальній логіці □ і ◇ означають «конче» та «можливо» відповідно, в епістемічній логіці аналогічні оператори трактуються як «відомо, що…» та «допустимо, що…» (в контексті знання/віри), у деонтичній – «обов’язково (нормативно)» та «дозволено» і т. д.

Таким чином, модальна логіка охоплює ціле сімейство логік, в яких додаються спеціальні символи для вираження необхідних або можливих аспектів висловлювань. Знання принципів модальної логіки є цінним для формального аналізу філософських аргументів (де часто фігурують модальні вирази типу «можливо» чи «обов’язково»), а також має важливі застосування в інформатиці.

Семантика модальної логіки (моделі Крипке). Формальна семантика модальної логіки зазвичай задається у термінах *можливих світів* та їхніх зв'язків. Основним семантичним об'єктом є *фрейм (каркас) Крипке* – структура $F = \langle W, R \rangle$ де W – непорожня множина можливих світів (або станів), а $R \subseteq W \times W$ – бінарне відношення доступності між світами.

Інтуїтивно, елементи W репрезентують різні ситуації або «світи», у яких можуть оцінюватися висловлювання, а відношення R пов'язує світ w з світом u (записується $(w, u) \in R$ або wRu), якщо u розглядається як можливий (досяжний) з w. Щоби перетворити фрейм на повноцінну *модель*, додають інтерпретацію пропозиційних символів: функцію $V : Prop -> 2^{W}$, що кожному атомарному висловленню ставить у відповідність підмножину тих світів, у яких це висловлення істинне. Таким чином утворюється модель Крипке $M = \langle W, R, V \rangle$, на якій визначається істинність формул. Відношення істинності для модальних формул визначають рекурсивно. Зокрема, для модальних операторів маємо такі умови істинності:

- $M, w \vDash \Box\varphi \Leftrightarrow \forall u \in W, (wRu => M, u \vDash \varphi)$. Тобто формула □φ істинна в світі w тоді й тільки тоді, коли для всіх світів u, які доступні зі світу w, формула φ істинна в u.

- $M, w \vDash \Diamond\varphi \Leftrightarrow \exists u \in W$: $(wRu \wedge M, u \vDash \varphi)$. Формула ◊φ істинна в світі w тоді й тільки тоді, коли існує хоча б один доступний зі світу w світ u, в якому формула φ істинна.

Зауважимо також, що оператор можливості визначається через оператор необхідності таким чином $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$.

Ця семантична інтерпретація називається **семантикою можливих світів**. Необхідно зауважити, що конкретний зміст модальних операторів залежить від того, як саме інтерпретується множина W і відношення R. Наприклад, в алетичній логіці W трактується як множина усіх мислимих світів, а w R u – «світ u можливий відносно w»; в епістемічній логіці W може відповідати множині станів знання, а w R u читатися як «у стані w суб'єкт не виключає, що може настати стан u (світ u узгоджується з його знанням у w)» тощо. Незалежно від трактування, аксіоматично модальна логіка оперує абстрактними □ та ◇, а різниця між конкретними логіками полягає в додаткових принципах (аксіомах), які вони задовольняють.

Класифікація модальних логік

Існує два основних підходи до класифікації різних модальних логік: (1) за *аксіомами (правилами)*, яких дотримується дана логіка, або еквівалентно – за умовами на відношення R в моделях; (2) за *типом модальності*, тобто за смисловою інтерпретацією операторів (алетична, епістемічна, темпоральна, тощо). Розглянемо перший підхід.

Нормальна модальна логіка (базова система позначається K) включає всі класичні тавтології, правило необхідності $\frac{\varphi}{\Box\phi}$ та аксіому $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$. Різні вимоги до R породжують добре відомі системи модальної логіки: наприклад, якщо в усіх моделях R є *рефлексивним* (кожен світ бачить сам себе, wRw), то додатково виконується аксіома $\Box\varphi \rightarrow \varphi$) – така логіка називається системою **T** (або M). Якщо R транзитивне та рефлексивне, то маємо систему **S4**, яка задовольняє ще аксіому 4: $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$. Додавши до S4 вимогу *евклідовості* відношення (для всіх світів w,u,v, якщо wRu та wRv, то uRv), отримуємо систему **S5**, для якої R – відношення еквівалентності (рефлексивне, транзитивне, симетричне).

Усі вони поділяють спільний формальний апарат, відмінності полягають у додаткових аксіомах і трактуванні значення модальних операторів.

Приклади та застосування модальної логіки

Щоб проілюструвати модальну логіку, розглянемо кілька прикладів формул та їхній зміст:

Перша формула $(\Diamond P \land \Box Q)$ читається як «можливо P і необхідно Q». Ця формула є істинною в такому світі w, де:

1. Існує принаймні один світ, доступний із w, у якому істинне висловлювання P.
2. У всіх світах, доступних із w, є істинним висловлювання Q.

Інший приклад — формула: $\Box(P \to Q) \to (\Diamond P \to \Diamond Q)$ є теоремою (аксіомою K) у всіх нормальних модальних логіках. Вона відповідає інтуїтивному твердженню: «Якщо необхідно, що з P випливає Q, то з можливості P випливає можливість Q».

Додаткові аксіоми накладають на логіку певні обмеження. Наприклад, у системі **T** є істинною формула $\Box P \to P$.

Модальні логіки знайшли широке застосування в багатьох сферах:

- У філософії вони використовуються для аналізу модальних висловлювань (про необхідність і можливість), зокрема в метафізиці й епістемології (логіки знання).
- В інформатиці та штучному інтелекті модальні логіки застосовуються для формального представлення знань і невизначеності, а також для специфікації властивостей систем.

Темпоральна логіка: часові оператори, різновиди та застосування

Означення темпоральної логіки. *Темпоральна логіка* (або *логіка часу*) – це різновид модальної логіки, в якій модальними операторами служать вирази, що вказують на відношення у часі (теперішнє, майбутнє або минуле). У загальному (широкому) сенсі цей термін охоплює всі підходи до логічного моделювання часу.

Зазвичай же під темпоральною логікою мають на увазі особливу модальну логіку часу, започатковану Артуром Прайором у 1950-х роках під назвою *логіка часів* (англ. *Tense Logic*).

Прайор запропонував вводити два основних часових модальні оператори: один для майбутнього і один для минулого. У сучасній нотації такими базовими операторами є зазвичай G (від англ. *globally*, «завжди надалі») та H (*hitherto*, «завжди раніше»). Оператор $G\varphi$ означає «φ завжди буде істинним у всі наступні моменти часу», а $H\varphi$ – «φ завжди було істинним у всі попередні моменти часу».

На основі цих базових операторів визначаються похідні оператори F (*finally* або *future*, «колись у майбутньому») та P (*past*, «колись у минулому»): $F\varphi \equiv \neg G \neg \varphi$ і читають «врешті-решт φ стане істинним у деякий момент у майбутньому», а P – як $P\varphi \equiv \neg H \neg \varphi$, «колись раніше φ було істинним у деякий момент у минулому».

Наприклад, якщо φ позначає «світло ввімкнене», то $G\varphi$ означає «світло відтепер завжди буде ввімкнене», а $F\varphi$ – «світло колись у майбутньому ввімкнеться». Темпоральна логіка таким чином дозволяє явно говорити про часове виконання умов. Важливо зазначити, що темпоральні оператори не прив'язують формулу до конкретного часу, а скоріше задають умову її істинності на часовій осі:Оператор **Gφ** вимагає, щоб φ було істинним у всіх майбутніх точках часу.

- Оператор **Fφ** вимагає істинності φ хоча б в одній майбутній точці.
- Оператор **Hφ** вимагає істинності φ у всіх минулих точках часу.
- Оператор **Pφ** вимагає істинності φ хоча б в одній минулій точці.

Завдяки цьому темпоральна логіка зручна для опису властивостей систем у часі, таких як «врешті-решт ресурс буде звільнено» або «ніколи не станеться конфлікту доступу».

Темпоральна логіка отримала значний розвиток завдяки зусиллям логіків і фахівців з комп'ютерних наук у другій половині XX століття. Зокрема, у 1977 році Амір Пнуелі запропонував використовувати логіку часу для специфікації та перевірки правильності програм, що стало поштовхом до активного застосування темпоральних логік у сфері інформаційних технологій та програмної інженерії.

Сьогодні темпоральні логіки широко застосовуються як у філософії (для формалізації міркувань про час і зміни), так і в інформатиці – зокрема, у **формальній верифікації**: за допомогою логік типу LTL і CTL інженери формально записують вимоги до апаратних чи програмних систем (наприклад, «запит завжди врешті-решт отримує відповідь, причому ніколи дві відповіді одночасно») і автоматизовані інструменти перевіряють, чи виконуються ці вимоги в моделі системи.

Семантика та різновиди темпоральної логіки. Семантично темпоральна логіка працює з моделлю часу. З точки зору Крипке-семантики, час можна розглядати як спеціальний вид множини можливих світів T із відношенням порядку «раніше–пізніше» (<). Формула інтерпретується відносно конкретного моменту t ∈ T.

Наприклад, якщо множина моментів часу T = N (тобто моменти часу є натуральними числами, які моделюють дискретні такти), то запис $M,\ t \vDash \varphi$ читається як «формула φ є істинною в моменті часу t».

Тоді умови істинності для часових операторів визначаються так:

- Для оператора майбутнього **G** («завжди в майбутньому»):

  M, t ⊨ Gφ, якщо для всіх t' > t виконується M, t' ⊨ φ

Існує багато різновидів темпоральних логік, що різняться припущеннями про структуру часу та доступними операторами. Основний поділ – на **лінійні** та **розгалужені** темпоральні логіки.

Лінійний час припускає, що для кожного моменту майбутнє визначено єдиним шляхом (кожен стан має щонайбільше один наступник); отже, всі можливі реалізації системи розглядаються як одна довга лінія (послідовність) станів. Натомість *розгалужений час* допускає, що від кожного стану може існувати декілька альтернативних варіантів розвитку (кілька наступників); таким чином, майбутнє не є детермінованим – його можна уявляти як дерево станів, що розгалужується у часі.

Відповідно, **лінійна темпоральна логіка** (Linear Temporal Logic, **LTL**) оперує моделями, де час – це лінійна послідовність моментів (наприклад, нескінченний шлях), і формули LTL інтерпретуються *на цілому шляху*. Натомість **розгалужена темпоральна логіка** – наприклад, логіка станів **CTL** (Computational Tree Logic) – інтерпретується на деревах виконання:

вона дозволяє кванторизацію за шляхами розвитку (модальності «існує шлях, на якому …» позначають E, та «на всіх шляхах …» – A).

Крім лінійності vs. розгалуженості, моделі часу можуть розрізнятися за іншими ознаками. **Дискретний** чи **неперервний** час (наприклад, цілочисельні vs. дійсні моменти); часова структура на основі **точок** (миттєвостей) чи **інтервалів** (інтервальні логіки розглядають істинність формул на інтервалах часу, а не в окремих точках); спрямованість урахування часу – тільки **майбутнє** (як, наприклад, LTL, де є лише операції на майбутнє і поточний момент) чи і **минуле** (багато логік включають оператори минулого на додачу до майбутнього). Наприклад, класична логіка Прайора оперує і минулим, і майбутнім (H та G і похідні), а популярна в комп'ютерних науках LTL зазвичай використовує тільки майбутні часові модальності (X, F, G, U) відносно поточного стану. Темпоральні логіки можуть розширюватися також додатковими можливостями: наприклад, **мультимодальні** темпоральні логіки вводять кілька різних відношень часу (наприклад, для моделювання часових вимірів з різними масштабами або паралельних процесів часу); **арифметичні** розширення дозволяють накладати чисельні обмеження (так звані *логіки з відліком часу*, що можуть виражати «φ станеться протягом 5 тактів» тощо). Для багатьох таких логік відомі результати про їх обчислювальну складність, наявність ефективних алгоритмів перевірки виконуваності (SAT) чи перевірки моделей (model checking).

Приклади і застосування темпоральної логіки. Розглянемо формулу $G(P \rightarrow FQ) \land G\neg(Q \land XQ)$. Перша частина цієї формули $G(P \rightarrow FQ)$ читається так: «Завжди (у кожному стані) якщо зараз істинне P (наприклад, надійшов запит), то колись у майбутньому (оператор F) обов'язково стане істинним Q (наприклад, запит отримає відповідь)». Тобто, формула гарантує, що жоден запит не залишиться назавжди без відповіді.

Друга частина формули $G\neg(Q \land XQ)$, означає «Завжди не істинно, що Q є істинним у поточному стані й водночас у наступному стані (оператор X)».

Це гарантує, що два запити не будуть оброблятися одночасно або не буде накладання обробки одного й того ж ресурсу.

Таким чином, ця формула формулює властивості типу:

- «кожен запит зрештою отримує відповідь»,
- «одночасна обробка двох запитів заборонена».

У галузі штучного інтелекту темпоральна логіка застосовується для представлення знань, які змінюються з часом, і для керування плануванням дій (action planning). У лінгвістиці логіки часу використовують для формального опису значення часових конструкцій природної мови (наприклад, логічний аналіз речень з дієслівними часами і аспектами). Проте найбільшого поширення темпоральні логіки набули в **верифікації програм і апаратних систем**. Після роботи А. Пнуелі (1977) темпоральні логіки, зокрема LTL та CTL, стали ключовим інструментом у методах автоматичної перевірки моделей (model checking).

Інженери описують бажані властивості системи у вигляді темпоральних формул (як наведено вище), а спеціалізовані програми (перевіряльники моделей, такі як SPIN, NuSMV та ін.) перевіряють, чи виконуються ці формули на всіх можливих шляхах моделі системи. За допомогою темпоральних логік успішно виявлено та виправлено численні помилки в складних протоколах та апаратних конструкціях. Базові ідеї темпоральної логіки також були покладені в основу інших формальних мов, таких як згадані мережі Петрі, мова TLA+ (Temporal Logic of Actions) Лампорта, StateCharts Харела та інші засоби моделювання динамічних поведінок

Взаємозв'язок модальної та темпоральної логік

Темпоральна логіка історично постала як окремий випадок модальної логіки, де модальності інтерпретуються часово. Формально кожна темпоральна логіка є модальною: її оператори (G, F, H, P тощо) задовольняють усі аксіоми базової модальної логіки K і додаткові властиві лише часу аксіоми (наприклад, аксіоми взаємозв'язку минулого і майбутнього).

У загальному випадку будь-яку модель часу можна розглядати як модель Крипке: моменти часу грають роль «світів», а відношення порядку часу – роль відношення доступності. Таким чином, семантика темпоральної логіки вписується в схему можливо-світової семантики. Не дивно, що багато темпоральних логік були запропоновані як модальні системи з певними специфічними аксіомами. Наприклад, якщо в модальній логіці взяти базові оператори модальності саме такими, що відповідають часовим поняттям – «завжди буде» (G), «завжди було» (H), «колись буде» (F) і «колись було» (P) – то отримаємо власне темпоральну логіку часу.

Водночас, якщо взяти базові модальні оператори «необхідно» та «можливо» (□ і ◇) та дозволити довільне відношення доступності, то отримаємо звичайну алетичну модальну логіку. Таким чином, вибір конкретної інтерпретації модальності визначає вид логіки: темпоральна логіка – це модальна логіка, орієнтована на відношення «раніше–пізніше» між станами. В літературі підкреслюють цю єдність: темпоральні логіки часто називають *логіками часу* або *тензорами* і включають до сімейства модальних логік.

З точки зору формальних систем, темпоральні логіки – це модальні логіки з двома або більше модальними операторами, що задовольняють певні аксіоми лінійності чи розгалуженості часу. Наприклад, згадана вище система Kt Прайора – це ніщо інше як модальна логіка K з двома незалежними відношеннями доступності:

- R_F— задає порядок для майбутнього (тобто для моментів часу після поточного),
- R_P— задає порядок для минулого (для моментів часу перед поточним),

а також із додатковими аксіомами, які пов'язують ці відношення, щоб коректно відобразити властивості часу

У межах композиційно-номінативного підходу, що застосовується у джерелі [Шкільняк, 2008], темпоральні логіки визначено як окремий випадок так званих транзиційних модальних систем – тобто модальних логік, що моделюють перехідні процеси між станами. Іншими словами, додаючи до модальної логіки аспект зміни станів у часі, ми отримуємо темпоральну логіку як її підклас.

Варто зазначити, що темпоральні і модальні логіки не є конкуруючими, а доповнюють одна одну в різних застосуваннях. Темпоральна логіка фокусується на динаміці у часі, тоді як модальна логіка загалом охоплює ширший спектр «можливих ситуацій» (не обов'язково часових). Тим не менше, математично і концептуально обидві побудовані на спільній основі. Темпоральні оператори можна розглядати як окремі види модальних операторів. Це дозволяє, наприклад, використовувати комбіновані логіки: у системах штучного інтелекту часто застосовують мульти-модальні логіки знання і часу (де є модальності типу K_{ag} «агент ag знає, що…» та одночасно часові G, F і т.д.). Подібні комбіновані підходи стали можливими завдяки єдиному апарату модальної логіки, спільному і для темпоральних логік. Отже, розуміння принципів модальної логіки дає міцне підґрунтя для опанування різних її спеціалізованих варіантів, зокрема логік часу.

Висновок

Модальні та темпоральні логіки є важливими розділами сучасної логіки і теорії обчислень, що розширюють виразні можливості класичної логіки. Модальна логіка вводить поняття можливих світів і модальних операторів, дозволяючи формалізувати міркування про необхідність, можливість, знання, норми та інші «режими» істинності. Її формальна семантика базується на моделях Крипке, а різні аксіоматичні системи (K, T, S4, S5 тощо) відповідають різним властивостям цих моделей. Темпоральна логіка, будучи різновидом модальної, спеціалізується на часі: вона вводить оператори, що враховують розташування подій у часі (майбутніх чи минулих). Темпоральні логіки мають особливе значення для комп’ютерних наук, де вони використовуються для специфікації та перевірки поведінки систем у часі. У роботі розглянуто формальні визначення обох видів логік, наведено приклади їх формул, описано основні види і аксіоми, а також підкреслено, що темпоральна логіка концептуально є підмножиною модальних логік. Обидві галузі продовжують активно розвиватися – як теоретично (узагальнення семантик, дослідження виразних можливостей і обчислювальних властивостей), так і прикладно (нові домени застосування, такі як семантика мов програмування, верифікація розподілених систем, онтології в штучному інтелекті). Розуміння того, «як визначаються темпоральні та модальні логіки», є фундаментом для подальшого дослідження логічних систем, що моделюють різноманітні аспекти складних систем і процесів.

Список використаної літератури

1. **Шкільняк, О. С. (2008).** Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки: семантичні властивості, секвенційні числення. *Наукові записки Національного університету "Києво-Могилянська академія". Комп'ютерні науки*, **86**, 24–33.

2. **Garson, J. (2024).** *Modal Logic*. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2024 ed.). Retrieved from https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/

3. **Goranko, V., & Rumberg, A. (2024).** *Temporal Logic*. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2024 ed.). Retrieved from https://plato.stanford.edu/entries/logic-temporal/

4. **Wikipedia. (2025, March 23).** *Modal logic*. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved March 23, 2025, from https://en.wikipedia.org/wiki/Modal_logic

5. **Wikipedia. (2025, March 23).** *Temporal logic*. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved March 23, 2025, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Temporal_logic&oldid=1281919864