

Electromagnetism

William Luciani

July 2021

Contents

1	Costanti	2
2	Strumenti matematici	2
2.1	Vettori	2
2.2	Analisi Vettoriale	2
2.2.1	Gradiente	3
2.2.2	Rotore	3
2.2.3	Divergenza	3
2.3	Derivate seconde	4
2.4	Derivate di prodotti	4
2.5	Derivate utili	5
3	Elettrostatica nel vuoto	5
3.1	Formule Sperimentali	5
3.2	Teorema di Gauss e prima equazione di Maxwell nel vuoto	5
3.3	Seconda equazione di Maxwell nel vuoto	6
3.4	Dipolo	7
3.5	Espansione multipoli	8
3.6	Conduttori	9
3.7	Energia e pressione	9
3.8	Equazione di Poisson	11
4	Elettrostatica nei materiali	13
4.1	Polarizzazione per deformazione	13
4.2	Polarizzazione per orientamento	13
4.3	Campo di un oggetto polarizzato	14
4.4	Dielettrici lineari	15
4.5	Energia	16
5	Correnti	16
6	Magnetostatica	17
6.1	Formule sperimentali	17
6.2	Terza equazione di Maxwell	18
6.3	Quarta equazione di Maxwell	19
6.3.1	Metodo mio	19

6.3.2	Metodo Griffiths	20
6.3.3	Metodo Colo'	20
6.4	Dipolo magnetico	20
6.5	Interazione tra correnti	21
7	Magnetostatica nei materiali	21
8	Elettrodinamica	21
9	Ottica	21

1 Costanti

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \quad (1.1)$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (1.2)$$

$$(1.3)$$

2 Strumenti matematici

2.1 Vettori

Prodotto misto:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (2.1)$$

è possibile ciclare i tre vettori

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (2.2)$$

e anche scambiare prodotto scalare e vettoriale

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (2.3)$$

Doppio prodotto vettore. Vale la regola del BAC-CAB:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.4)$$

Non è associativo ma vale l'identità di Jacobi:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (2.5)$$

2.2 Analisi Vettoriale

Derivazione in coordinate cartesiane. Operatore nabla:

$$\nabla = \partial_x \hat{\mathbf{x}} + \partial_y \hat{\mathbf{y}} + \partial_z \hat{\mathbf{z}} \quad (2.6)$$

Gradiente:

$$\nabla f = \partial_x f \hat{\mathbf{x}} + \partial_y f \hat{\mathbf{y}} + \partial_z f \hat{\mathbf{z}} \quad (2.7)$$

Rotore:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Divergenza:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \quad (2.9)$$

2.2.1 Gradiente

Il gradiente può anche essere definito nel seguente modo, indipendente dalle coordinate usate.

$$(\nabla f) \cdot \hat{\mathbf{t}} = \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{df}{dl} \quad (2.10)$$

Dove la variazione di f è presa lungo un tratto infinitesimo di lunghezza dl e direzione $\hat{\mathbf{t}}$.

Passando ad un percorso finito γ si ha

$$\int_{\gamma} (\nabla f) \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \Delta f$$

Questo è il teorema del gradiente (o teorema fondamentale del calcolo), che può esser scritto anche nel seguente modo.

$$\int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{l} = f(B) - f(A) \quad (2.11)$$

Per il gradiente c'è un modo più immediato di trovare la relazione sopra, ma il modo sopra è utile poichè è del tutto analogo al procedimento per il rotore e la divergenza.

Il modo più diretto è il seguente. Il differenziale di un campo vettoriale scalare può esser scritto nel seguente modo:

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{l} \quad (2.12)$$

Integrando segue direttamente il teorema del gradiente.

2.2.2 Rotore

Per il rotore vale la seguente definizione:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{1}{dS} \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dC}{dS} \quad (2.13)$$

Dove dS è un'area infinitesima e $\hat{\mathbf{n}}$ è la sua normale. γ è il bordo di S , ovvero un circuito infinitesimo. dC è la circuitazione attraverso questo circuito infinitesimo.

Passando ad una superficie S finita si ha quindi:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = C$$

Questo è il teorema di Stokes (o del rotore), che può esser scritto anche nel seguente modo. (∂S è il bordo di S)

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.14)$$

2.2.3 Divergenza

Per la divergenza vale la seguente definizione:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{1}{dV} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{d\Phi}{dV} \quad (2.15)$$

Dove dV è un volume infinitesimo, S è la sua superficie. $d\Phi$ è il flusso attraverso S .

Passando ad un volume finito si ha:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \Phi$$

Questo è il teorema della divergenza (o di Gauss), che può esser scritto anche nel seguente modo. (∂V è il bordo di V)

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.16)$$

2.3 Derivate seconde

Si possono fare le seguenti derivate seconde con l'operatore nabla:

1. $\nabla \times \nabla f = 0$
2. $\nabla \cdot \nabla f =: \nabla^2 f = \Delta f$ Definizione del Laplaciano
3. $\nabla \times \nabla \times A$
4. $\nabla \cdot \nabla \times A = 0$
5. $\nabla(\nabla \cdot A)$

La 5. non è di particolare interesse e per la 3 vale la seguente uguaglianza:

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \quad (2.17)$$

Per chiarezza esplicitiamo il laplaciano di un campo scalare e di un campo vettoriale:

$$\nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 A = \nabla^2 A_x \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{z}} \quad (2.19)$$

2.4 Derivate di prodotti

Ci sono sei regole per le derivate di prodotti di funzioni. Due per il gradiente:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (2.20)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (2.21)$$

due per la divergenza:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.23)$$

e due per il rotore:

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla f) \times \mathbf{A} \quad (2.24)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.25)$$

2.5 Derivate utili

$$\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = 4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot (r^n \hat{\mathbf{r}}) = (n+2)r^{n-1}, \quad n \neq -2 \quad (2.27)$$

$$\nabla r^n = nr^{n-1} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.28)$$

$$\nabla \times (r^n \hat{\mathbf{r}}) = 0 \quad (2.29)$$

Le stesse formule valgono anche sostituendo \mathbf{r} al posto di r . Nel caso di \mathbf{r} è possibile anche derivare rispetto alle coordinate primarie, in quel caso compare un $-$.

3 Elettrostatica nel vuoto

3.1 Formule Sperimentali

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (3.1)$$

Dove \mathbf{r} è il punto in cui vogliamo calcolare il campo e \mathbf{r}' è la posizione della carica. (Se pensiamo alla forza, \mathbf{r} è la posizione della carica su cui calcoliamo la forza, \mathbf{r}' è l'altra).

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (3.3)$$

Limite non matematico ma fisico, pensiamo di avere una carica di prova molto piccola in modo che non alteri le cariche che generano il campo.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.4)$$

Principio di sovrapposizione:

$$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots \quad (3.5)$$

Distribuzioni di carica:

$$dq = \lambda dl = \sigma dS = \rho d\tau \quad (3.6)$$

Dal principio di sovrapposizione:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho d\tau}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.7)$$

3.2 Teorema di Gauss e prima equazione di Maxwell nel vuoto

Teorema di Gauss:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (3.8)$$

Proof. Pensiamo ad una singola carica q posta nell'origine. Questo non lede alla generalità poiché se non è nell'origine possiamo traslarla e se abbiamo più cariche vale il principio di sovrapposizione e quindi il flusso totale è la somma dei singoli flussi. Abbiamo quindi:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dS_r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

□

Per scrivere il teorema di Gauss in forma differenziale vogliamo mostrare che vale l'equazione 2.15

Proof. Pensiamo ad un cubetto infinitesimo con assi paralleli agli assi cartesiani. Esso ha un vertice in (x, y, z) e il vertice opposto in $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Pensiamo al flusso attraverso le due facce ortogonali all'asse x :

$$d\Phi_x = E_x(x + dx, y, z)dydz - E_x(x, y, z)dydz = \partial_x E_x dx dy dz = \partial_x E_x dV$$

E varranno formule analoghe per le altre facce. Il flusso totale è quindi:

$$d\Phi = (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) dV = (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV$$

quindi si ha:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{d\Phi}{dV}$$

che è la tesi. □

Applicando questo teorema alla 3.8 si ha:

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (3.9)$$

Ma il volume di integrazione è del tutto arbitrario, per cui si ha:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.10)$$

Che è il teorema di Gauss in forma differenziale ovvero la prima equazione di Maxwell nel vuoto.

3.3 Seconda equazione di Maxwell nel vuoto

Pensando al campo generato da una carica puntiforme si può vedere che il campo elettrico è conservativo, in quanto si trova:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V(A) - V(B) \quad (3.11)$$

Ovvero l'integrale di linea dipende solo dagli estremi e si può scrivere:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (3.12)$$

Ma ricordando che il rotore del gradiente è nullo si ha:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.13)$$

Un modo per mostrare che il rotore del gradiente è nullo è di applicare il teorema di Stokes ad una superficie qualsiasi:

$$\int_S (\nabla \times \nabla f) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = f(A) - f(A) = 0 \quad (3.14)$$

Per l'arbitrarietà di S si ha quindi che

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (3.15)$$

DIM STOKES BALZATA

Inoltre dall'equazione sopra si vede che il potenziale nel caso di una carica puntiforme nel punto \mathbf{r}' è dato dalla seguente formula:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (3.16)$$

Questa formula può poi essere generalizzata in modo analogo alla 3.7:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{\lambda dl}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho d\tau}{r} \quad (3.17)$$

C'è poi un modo istruttivo di trovare l'ultima di queste uguaglianze. Partiamo dal campo elettrico

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho d\tau}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.18)$$

e sfruttiamo come altre volte il fatto che

$$\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.19)$$

Quindi:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho d\tau \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} d\tau \right) = -\nabla V \quad (3.20)$$

Abbiamo quindi ritrovato il potenziale di una distribuzione volumica.

3.4 Dipolo

Carica $+q$ e carica $-q$ a distanza δ . Vettore $\boldsymbol{\delta}$ dalla carica negativa a quella positiva. \mathbf{p} momento di dipolo.

$$\mathbf{p} = q\boldsymbol{\delta} \quad (3.21)$$

Calcoliamo il potenziale ad $r \gg \delta$. r_+ distanza dalla carica positiva, r_- distanza dalla carica negativa.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (3.22)$$

Usando il teorema del coseno ed espandendo in serie di Taylor: (α è l'angolo tra il vettore posizione \mathbf{r} e \mathbf{p} , dove \mathbf{r} è preso dal centro del dipolo)

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + (\delta/2r)^2 \mp \frac{\delta}{r} \cos \alpha}} \sim \frac{1}{r\sqrt{1 \mp \frac{\delta}{r} \cos \alpha}} \sim \frac{1 \pm \frac{\delta}{2r} \cos \alpha}{r} \quad (3.23)$$

Quindi si ha:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta \cos \alpha}{r^2} = \frac{q\delta \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (3.24)$$

Applicando il gradiente a questa espressione si può poi trovare il campo elettrico. Si ha

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) &= \frac{\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \\ \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) &= \mathbf{p} \\ \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) &= -3 \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^4} \\ \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) &= \frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}}{r^3} \end{aligned}$$

Da cui si ha

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}) \quad (3.25)$$

Si può poi mostrare che un dipolo in un campo elettrico \mathbf{E} è sottoposto alla seguente forza:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \quad (3.26)$$

Dove la seconda formula vale solo nel caso in cui \mathbf{p} sia indipendente dalla posizione. Cosa che non sarà vera nei dielettrici. Ha la seguente energia potenziale:

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (3.27)$$

Subisce il seguente momento torcente:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (3.28)$$

DIM BALZATE

3.5 Espansione multipoli

Riprendiamo la 3.17.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho d\tau}{\mathcal{Z}} \quad (3.29)$$

Cerchiamo ora di scrivere questa equazione in una forma più significativa. Stiamo pensando al caso in cui la distribuzione di carica sia localizzata in un certo volume limitato e vogliamo valutare il campo da questa generato a grande distanza. Per fare questo espandiamo la funzione $f(\mathbf{r}') = \frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}$ intorno a $\mathbf{r}' = 0$:

$$f(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}' = 0) + \nabla' f|_{\mathbf{r}'=0} \cdot \mathbf{r}' + \dots \quad (3.30)$$

Dalla 2.28 abbiamo che:

$$\nabla' f = \nabla' \frac{1}{\mathcal{Z}} = -\nabla \frac{1}{\mathcal{Z}} = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\mathcal{Z}^2} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (3.31)$$

In cui nell'ultima uguaglianza è stato posto $\mathbf{r}' = 0$. Per cui l'espansione di f è data da:

$$f(\mathbf{r}') = \frac{1}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \mathbf{r}' + \dots \quad (3.32)$$

Il potenziale può quindi esser scritto nel seguente modo:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho \left(\frac{1}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \mathbf{r}' + \dots \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int_V \rho + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \int_V \rho \mathbf{r}' + \dots \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} Q + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \mathbf{p} + \dots \right] \quad (3.33)$$

Dove naturalmente si ha:

$$Q = \int_V \rho d\tau' \quad (3.34)$$

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{r}' d\tau' \quad (3.35)$$

Qui \mathbf{p} è la generalizzazione della quantità introdotta nel paragrafo precedente. Per ricondursi a quel caso specifico bisogna pensare ad una ρ che abbia una delta di Dirac in corrispondenza delle cariche puntiformi.

3.6 Conduttori

I conduttori hanno le seguenti proprietà:

1. All'interno $\mathbf{E} = 0$
2. Vicino alla superficie il campo elettrico è ortogonale alla superficie
3. Il volume è tutto allo stesso potenziale
4. Non vi è carica all'interno, ma è interamente distribuita sulla superficie
5. Vicino alla superficie si ha $\mathbf{E} = \sigma/\epsilon_0$

Poiché ogni conduttore è un volume equipotenziale, ha senso chiedersi quanto sia la differenza di potenziale V tra due conduttori. Pensiamo al caso in cui sul primo conduttore venga posta una carica $+Q$ e sull'altro una carica $-Q$. Allora il campo elettrico tra i due è dovuto ai soli conduttori ed è proporzionale alla carica Q , ma allora anche V è proporzionale a Q . Chiamiamo capacità la costante di proporzionalità:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (3.36)$$

3.7 Energia e pressione

Pensiamo all'energia di una configurazione di cariche. Per calcolarla possiamo pensare al lavoro esterno fatto su ogni singola carica per portarla nella sua posizione dall'infinito. Chiamiamo q_i le cariche. Per posizionare in \mathbf{r}_1 la carica q_1 il lavoro è nullo poiché se non c'è ancora nessuna carica il campo è nullo. Per portare la carica q_2 dall'infinito a \mathbf{r}_2 il lavoro svolto è dato da:

$$L = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} \quad (3.37)$$

Per portare una terza carica si ha poi:

$$L = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{23}} \quad (3.38)$$

Quindi per N cariche avremo:

$$U = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}} \quad (3.39)$$

Che può anche esser scritta come

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}} \quad (3.40)$$

Tuttavia qui possiamo riconoscere il campo di una carica puntiforme, per cui si può scrivere:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (3.41)$$

Dove V_i è il campo in posizione \mathbf{r}_i dovuto a tutte le ALTRE cariche.

Ma allora per una distribuzione continua si avrà:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho V d\tau \quad (3.42)$$

e altre formule analoghe per distribuzioni superficiali o lineari.

Da questa possiamo poi ricavare una formula generale per l'energia associata ad un campo elettrico. Ricordiamo infatti che $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, quindi:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} V d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot (V\mathbf{E}) - \int_V \mathbf{E} \cdot (\nabla V) \quad (3.43)$$

Dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato:

$$V(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \cdot (V\mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla V) \quad (3.44)$$

che è semplicemente la 2.22. Possiamo poi sfruttare il fatto che $\mathbf{E} = -\nabla V$ e il teorema della divergenza:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_S (V\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V E^2 d\tau \right) \quad (3.45)$$

Originariamente il dominio di integrazione era la regione che conteneva la carica ρ . Tuttavia è possibile espandere la regione di integrazione con $\rho = 0$ al di fuori del dominio originale. Espandendo il dominio la quantità a destra continua ad aumentare, mentre la parte a sinistra tende a zero, poiché il prodotto tra V ed \mathbf{E} andrà come $1/r^3$, mentre il contributo dovuto all'integrale di superficie a come r^2 . Quindi passando all'integrale su tutto lo spazio si ha:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 d\tau \quad (3.46)$$

Possiamo quindi dire che in tutto lo spazio vi è una densità di energia elettrica:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (3.47)$$

Pensando ad un conduttore, si vede che le cariche sulla superficie sentono una spinta verso l'esterno del conduttore. Infatti sulla superficie il campo complessivo è ancora zero, ma se pensiamo ad un quadratino sulla superficie, anche questo contribuisce al campo elettrico, tuttavia non può

subire il suo stesso campo. è quindi sottoposto ad un campo che è dovuto al contributo del resto del conduttore. Per calcolarlo osserviamo che appena fuori si ha:

$$\mathbf{E}_{quadr} + \mathbf{E}_{resto} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (3.48)$$

Ma $\mathbf{E}_{quadr} = \sigma/2\varepsilon_0$ poiché possiamo approssimarlo ad una superficie infinita. Quindi il campo a cui è sottoposto è $E_{resto} = \sigma/2\varepsilon_0$. Si ha quindi:

$$F = qE = \sigma dS \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (3.49)$$

$$p = \frac{F}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{(\varepsilon_0 E)^2}{2\varepsilon_0} = u \quad (3.50)$$

Ovvero la pressione subita dalle cariche sulla superficie è pari alla densità di energia elettrostatica appena fuori dal conduttore.

3.8 Equazione di Poisson

Con il potenziale la prima equazione di Maxwell può esser scritta come:

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.51)$$

Questa è l'equazione di Poisson. Tuttavia se noi risolviamo questa troviamo V e prendendo il gradiente troviamo \mathbf{E} . Ma quindi la seconda equazione di Maxwell era inutile? NO, è proprio grazie a quella che possiamo scrivere $\mathbf{E} = -\nabla V$.

L'equazione di Poisson da sola ha infinite soluzioni. Tuttavia con opportune condizioni al contorno si ha invece una soluzione unica. Possiamo ad esempio prendere come condizione al contorno il valore di V sul bordo del dominio considerato (ad esempio che V vada a 0 all'infinito). Mostriamo che in questo caso la soluzione è unica.

Proof. Supponiamo per assurdo che ci siano due soluzioni, ovvero due funzioni f_1 e f_2 che entrambe soddisfano l'equazione di Poisson e hanno lo stesso valore sul bordo S . Consideriamo allora la funzione $f = f_1 - f_2$. Si ha:

$$\nabla^2 f = \nabla^2 f_1 - \nabla^2 f_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad (3.52)$$

Inoltre $f = 0$ su S . Mostriamo che allora dev'essere $f = 0$ ovunque. Consideriamo l'espressione: $\nabla \cdot (f \nabla f)$. Questa è utile poiché può essere integrata in due modi. Usando il teorema della divergenza:

$$\int_V \nabla \cdot (f \nabla f) = \int_S f \nabla f = 0 \quad (3.53)$$

poiché $f = 0$ su S . Oppure integrando per parti:

$$\nabla \cdot (f \nabla f) = (\nabla f)^2 + f \nabla^2 f \quad (3.54)$$

$$\int_V \nabla \cdot (f \nabla f) = \int_V (\nabla f)^2 + \int_V f \nabla^2 f = \int_V (\nabla f)^2 \quad (3.55)$$

Ma come abbiamo visto con l'altro metodo questo deve fare 0. Poiché l'integranda è non negativa, l'unico modo in cui l'integrale può essere 0 è che ∇f sia 0 ovunque. Ma allora f è costante sul dominio, ma poiché vale 0 sul bordo, deve valere 0 ovunque. Di conseguenza $f_1 = f_2$. \square

Come conseguenza di questo, l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.56)$$

ha anch'essa un'unica soluzione se il potenziale è definito sul bordo del dominio di integrazione. Infatti è un caso particolare di quanto appena mostrato, con $\rho = 0$. Quindi se cerchiamo la soluzione dell'equazione di Laplace in un dominio vuoto contenente anche n conduttori, con potenziali V_i , allora la soluzione è unica. Questo è il problema di Dirichlet. Al contrario, se anziché essere fissati i potenziali sui conduttori, sono fissate le cariche su di esse, abbiamo il problema di Von Neumann che ha anch'esso una soluzione unica.

Questo segue dall'unicità della soluzione del problema di Dirichlet, perché tra le cariche sui conduttori e i potenziali vale una relazione analoga a quella del paragrafo precedente:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Dove C adesso è una matrice e non più solo un numero. Si può poi mostrare che C è simmetrica e definita positiva, per cui è invertibile. Quindi noti i V_i i Q_i sono univocamente determinati e viceversa.

Per le soluzioni dell'equazione di Laplace, dette funzioni armoniche, vale poi il teorema della media: il valor medio che la funzione assume su una sfera è pari al valore che assume nel centro.

Proof. Abbiamo $\nabla^2 f = 0$. Definiamo:

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{S} \int_S f(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S f(\mathbf{r}) dS \quad (3.58)$$

Ma possiamo poi passare dall'integrale su S all'integrale sull'angolo solido, poiché $d\Omega = dS/r^2$.

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(\mathbf{r}) d\Omega \quad (3.59)$$

Possiamo ora derivare in r per capire l'andamento di $\bar{f}(r)$.

$$\frac{d}{dr} \bar{f}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{d}{dr} f(\mathbf{r}) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla f \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \cdot (\nabla f) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla^2 f dV = 0 \quad (3.60)$$

Ma allora $\bar{f}(r) = \text{cost} = \bar{f}(0) = f(0)$ □

Come conseguenza diretta di questo, si ha che le funzioni armoniche non ammettono massimi o minimi, in quanto se ci fosse un massimo, questo dovrebbe essere la media dei valori su ogni sfera centrata in quel punto. Quindi o la funzione assume il valore massimo su tutte le sfere, per cui in realtà non è un massimo. Oppure su ogni sfera vengono assunti sia maggiori che minori di questo, ma anche questo è assurdo.

Quanto detto in questo paragrafo giustifica il metodo delle cariche immagini. Se vogliamo risolvere il problema di Dirichlet e riusciamo a trovare una configurazione di cariche all'esterno del dominio di integrazione per cui le condizioni al contorno siano le stesse del problema, allora queste ci danno direttamente la soluzione che per quanto detto prima è unica. Ad esempio si può pensare ad un piano conduttore infinito con $V = 0$ e cercare la soluzione da un lato di questo, con una carica $+q$ ad una distanza d dal piano. Osserviamo che una carica $-q$ a distanza d dal piano, dal lato opposto della carica $+$, è tale che il potenziale dovuto a queste due cariche sia nullo sul piano. Quindi, dal lato della carica $+$, la configurazione è uguale identica a quella del problema, quindi il potenziale da questo lato può essere trovato banalmente sommando i potenziali delle due cariche.

4 Elettrostatica nei materiali

Studiamo ora cosa succede al campo elettrico in materiali isolanti, chiamati dielettrici, in cui gli atomi sono legati ai propri atomi. Succede un fenomeno simile a quello che avviene nei conduttori, ma poiché gli elettroni non sono liberi, il dielettrico non riesce a schermare completamente il campo elettrico esterno. Il campo viene quindi ridotto ma non eliminato. Quello che succede è che mettendo il dielettrico in un campo elettrico si formano molti dipoli che creano un campo opposto a quello esterno. Questo processo, la polarizzazione, può avvenire in due modi: per deformazione o per orientamento.

4.1 Polarizzazione per deformazione

Pensiamo ad esempio ad un gas nobile in condizioni di gas ideale, per cui le interazioni tra i diversi atomi possono essere trascurate. Possiamo pensare all'atomo come ad un nucleo di carica positiva $+Ze$ ed una nube elettronica di carica complessiva $-Ze$. Normalmente immaginiamo che l'atomo sia in equilibrio se i baricentri delle due configurazioni coincidono. Se in queste condizioni c'è un minimo allora possiamo pensare che la forza che tiene unito l'atomo sia una forza armonica: $\mathbf{F}_{int} \propto \mathbf{r}$, dove \mathbf{r} è il vettore dal baricentro della carica negativa a quello della carica positiva. L'atomo nel campo elettrico sarà allora in equilibrio quando la forza elettrica è uguale e opposta a questa forza interna. Quindi la forza elettrica, e di conseguenza il campo elettrico, è anch'essa proporzionale a \mathbf{r} . Tuttavia se i baricentri delle cariche non coincidono allora si forma un momento di dipolo: $\mathbf{p} = Ze\mathbf{r}$, ovvero il momento di dipolo, come il campo elettrico è proporzionale ad \mathbf{r} . Ma allora sono proporzionali tra loro:

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \quad (4.1)$$

Dove α è la polarizzabilità. Nel caso di molecole lo studio è più complicato, ma vale comunque una relazione analoga a quella sopra, tuttavia α non è più un numero ma diventa un tensore.

Calcoliamo quanto potrebbe essere α . Supponiamo la carica $+$ sia puntiforme e la carica $-$ sia invece distribuita uniformemente dentro una sfera. Il campo dovuto a questa distribuzione è dato da:

$$\mathbf{E}_{int} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3} \quad (4.2)$$

Per avere l'equilibrio il campo esterno dovrà avere lo stesso valore:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{int} = \frac{R^3}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \quad (4.3)$$

Quindi si ha:

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3 \sim 10^{-40} \quad (4.4)$$

4.2 Polarizzazione per orientamento

Spesso si ha a che fare con molecole già polarizzate. Quello che succede in questi materiali è che i dipoli già presenti cercano di allinearsi al campo elettrico esterno, ma così facendo producono un campo opposto che riduce il campo esterno. I dipoli tendono ad allinearsi al campo elettrico poiché si ha $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, quindi l'energia è minima quando il dipolo è allineato al campo. Tuttavia l'allineamento non è completo poiché la forza elettrostatica deve competere con l'agitazione termica delle molecole. Per mettere queste due insieme usiamo la distribuzione di Boltzmann:

$$P(\theta) = Ne^{-\frac{U}{kT}} = Ne^{-\frac{pE \cos \theta}{kT}} \quad (4.5)$$

La probabilità che l'angolo tra il dipolo e il campo sia tra θ e $\theta + d\theta$ è data da:

$$dP = P(\theta)d\Omega = P(\theta)\sin\theta d\theta d\phi \quad (4.6)$$

Integrando questa, sfruttando il fatto che $\frac{pE}{kT} \ll 1$ si trova $N = 1/4\pi$. Calcoliamo quindi la media del momento di dipolo nella direzione di \mathbf{E} . Le altre componenti in media saranno nulle per simmetria.

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{E}} dP = \int p \cos\theta dP = \dots = \frac{p^2 E}{kT} \quad (4.7)$$

4.3 Campo di un oggetto polarizzato

La conseguenza in entrambi i casi è che si ha $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$. Che campo genera questo oggetto contenente moltissimi dipoli? Introduciamo il vettore polarizzazione per calcolare il campo.

$$\mathbf{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{V} \quad (4.8)$$

Dove \mathbf{p}_i sono i momenti dei dipoli nel volume V . Per un volumetto dV si ha allora un piccolo momento di dipolo: $d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r}')d\tau'$. Ricordiamo la formula 3.24 per il campo di un dipolo:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.9)$$

Per tanti dipoli infinitesimi:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{p} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' \quad (4.10)$$

Tuttavia questa formula non è molto utile nella pratica. Può invece essere scritta in una forma molto più interessante. Ricordiamo da 2.28 che si ha:

$$\nabla' \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} = -\nabla' \cdot \frac{1}{r} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (4.11)$$

e la regola del prodotto 2.22:

$$\nabla' \cdot \left(\frac{1}{r} \mathbf{P} \right) = \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) + \mathbf{P} \cdot \left(\nabla' \frac{1}{r} \right) \quad (4.12)$$

Quindi l'integrando può esser scritto come:

$$\mathbf{P} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \mathbf{P} \cdot \left(\nabla' \frac{1}{r} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{1}{r} \mathbf{P} \right) - \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) \quad (4.13)$$

E il potenziale:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{1}{r} \mathbf{P} \right) d\tau' - \int_V \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau' \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{r} dS' - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} d\tau' \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p}{r} dS' + \int_V \frac{\rho_p}{r} d\tau' \quad (4.16)$$

Dove nell'ultima uguaglianza abbiamo osservato che i due integrali avevano esattamente la stessa forma del potenziale di una carica superficiale e di quello di una carica volumica. Abbiamo chiamato le due quantità a numeratore densità di carica di polarizzazione, rispettivamente superficiale e volumica:

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (4.17)$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4.18)$$

Inoltre queste quantità non sono solo strumenti matematici, ma sono proprio delle densità di carica che compaiono all'interno del dielettrico. Ad esempio se pensiamo ad un'asta dielettrica parallela al campo elettrico, allora si formano dei dipoli lungo tutta l'asta nella direzione dell'asta. Quindi agli estremi c'è un accumulo di carica che è appunto la σ_p definita sopra. Lo stesso ragionamento vale per la carica volumica. Osserviamo infatti che nel caso in cui \mathbf{P} sia uniforme allora la densità volumica è nulla. Questo ha senso poiché all'interno del dielettrico gli accumuli di carica ad un estremo del dipolo sono annullati da accumuli di carica di segno opposto dei dipoli adiacenti.

4.4 Dielettrici lineari

Vediamo ora come \mathbf{P} è collegato al campo esterno \mathbf{E} e com'è il campo elettrico complessivo nel dielettrico. Partiamo dalla definizione di \mathbf{P} .

$$\mathbf{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{V} \quad (4.19)$$

Pensiamo al caso semplificato in cui tutti i \mathbf{p}_i sono uguali e pari a \mathbf{p} . Allora si ha

$$\mathbf{P} = \frac{N\mathbf{p}}{V} = n\mathbf{p} = n\alpha\mathbf{E} \quad (4.20)$$

Si ha quindi che \mathbf{P} è proporzionale a \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (4.21)$$

L'ipotesi sopra è forte, tuttavia questa formula vale per un insieme di dielettrici chiamati dielettrici lineari. Nel caso più generale \mathbf{P} ed \mathbf{E} non sono nella stessa direzione, per cui χ è un campo tensoriale (campo poiché dipende dalla posizione). Tuttavia considereremo il caso più semplice di dielettrici omogenei (per cui χ non dipende dalla posizione) e isotropi (per cui $\mathbf{E} \parallel \mathbf{P}$). In questo caso χ è un numero.

Vogliamo ora riscrivere la prima equazione di Maxwell, poiché nella forma attuale $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ la densità di carica include tutte le cariche, anche quelle di polarizzazione. Tuttavia poiché non possiamo controllare le cariche di polarizzazione, sarebbe più comodo avere una formula con le sole cariche libere:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_p + \rho_l}{\varepsilon_0} \quad (4.22)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} - \rho_p = \rho_l \quad (4.23)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_l \quad (4.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l \quad (4.25)$$

Dove

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.26)$$

è il campo di spostamento elettrico, che nel nostro caso può esser scritto come:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (4.27)$$

Con $\varepsilon_r = 1 + \chi$.

4.5 Energia

Vediamo ora come cambia la formula dell'energia nel caso dei dielettrici. Vale ancora la 3.42, tuttavia ora si ha $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \rho V d\tau = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) V d\tau = \frac{1}{2} \left[\int_V \nabla \cdot (\mathbf{D}V) d\tau - \int_V \mathbf{D} \cdot (\nabla V) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_S \mathbf{D}V \cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \right] = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \end{aligned}$$

Dove, analogamente alla 3.46, l'ultima uguaglianza vale nel caso in cui si integra su tutto lo spazio.

5 Correnti

Definiamo la fem ("forza" elettromotrice):

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.1)$$

Dove $\mathbf{f} = \mathbf{F}/q$ è la forza elettromotrice per unità di carica. Questa forza può essere di tipi diversi, due esempi sono il caso di una batteria ed il caso della fem indotta. Nel primo caso la \mathbf{f} è presente solo nella batteria (con estremi A positivo e B negativo). Inoltre, quando questa è a morsetti staccati si ha $\mathbf{f} = -\mathbf{E}$ affinché ci sia l'equilibrio. Quindi si ha:

$$\mathcal{E} = \int_B^A \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V(A) - V(B) \quad (5.2)$$

Invece nel caso di una fem indotta abbiamo che l'unica forza in gioco è quella di Lorentz. Per cui si ha:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.3)$$

Dove l'ultima uguaglianza è la legge di Faraday.

Vale poi la legge di Ohm:

$$V = RI \quad (5.4)$$

Che può anche esser scritta in forma differenziale:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.5)$$

La resistenza R , nel caso di un cilindro di lunghezza l e sezione uniforme S è data da:

$$R = \frac{\rho l}{S} \quad (5.6)$$

Nel caso di geometrie più complicate vale localmente una formula analoga a questa:

$$dR = \frac{\rho dl}{S} \quad (5.7)$$

che dev'essere poi integrata.

Inoltre vale poi la conservazione della carica che può esser scritta in forma integrale:

$$\frac{dQ}{dt} + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.8)$$

o in forma differenziale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.9)$$

Da questa poi segue direttamente la legge dei nodi di Kirchoff:

$$\sum_i I_i = 0 \quad (5.10)$$

Invece dalla seconda equazione di Maxwell, ovvero dal fatto che la circuitazione del campo elettrico è nulla, segue la legge delle maglie di kirchoff:

$$\sum_i \Delta V_i = 0 \quad (5.11)$$

Che nel caso siano presenti delle fem può esser scritta come:

$$\sum_j \mathcal{E}_j = \sum_i \Delta V_i \quad (5.12)$$

Infine in generale in un circuito può esser complicato capire quante e quali maglie prendere. Tuttavia perlomeno vale la seguente formula: detti N i nodi, L i rami e M le maglie indipendenti, si ha:

$$M = L - N + 1 \quad (5.13)$$

CARICA E SCARICA DEL CONDENSATORE BALZATI MA EASY.

6 Magnetostatica

6.1 Formule sperimentali

Un piccolo tratto di circuito $d\mathbf{l}$ percorso da una corrente I posto in un campo magnetico, subisce una forza data da:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (6.1)$$

Questa è la seconda legge di Laplace che, integrata, ci dà la forza sul circuito intero. Da questa si può ricavare la componente magnetica della forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.2)$$

Mentre la forza di Lorentz "complessiva" è:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.3)$$

Ora, come viene generato un campo magnetico? Per un circuito vale la prima legge di Laplace, anche detta legge di Biot-Savart:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6.4)$$

Il campo complessivo, ancora, viene trovato integrando. Anche per le correnti poi valgono delle formule analoghe alle 3.6. Si possono infatti avere correnti di diverso tipo: una carica in moto, una corrente lineare, una corrente superficiale e una corrente volumica. Vale quindi il seguente "dizionario" per passare da una all'altra

$$\mathbf{v}dq = Id\mathbf{l} = \mathbf{K}dS = \mathbf{J}d\tau \quad (6.5)$$

Valgono quindi le seguenti formule per il campo magnetico:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint Id\mathbf{l}' \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{K} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dS' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' \quad (6.6)$$

6.2 Terza equazione di Maxwell

Vogliamo ora trovare le equazioni di Maxwell per la magnetostatica, ovvero trovare la divergenza e il rotore del campo magnetico.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \nabla \cdot \left(\frac{Id\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint -d\mathbf{l}' \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 0 \quad (6.7)$$

Dove nella seconda disuguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che $d\mathbf{l}'$ era indipendente da \mathbf{r} e nella terza abbiamo sfruttato la 2.29. Per cui abbiamo la terza equazione di Maxwell, che sarà vera anche passando ai materiali e al caso dinamico:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.8)$$

Infatti questa equazione contiene il fatto che non esistono monopoli magnetici, che è un fatto universale.

Questa equazione, analogamente alla seconda, ci dice che \mathbf{B} ammette un potenziale, tuttavia poiché è la divergenza ad annullarsi anziché il rotore, avremo un potenziale vettore \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.9)$$

A partire dalla formula del campo, possiamo trovare un'espressione per \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J} \times \nabla \frac{1}{r} d\tau' \quad (6.10)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int \frac{1}{r} \nabla \times \mathbf{J} d\tau' - \int \nabla \times \left(\frac{1}{r} \mathbf{J} \right) d\tau' \right) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau' \right) \quad (6.11)$$

Quindi si ha:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau' \quad (6.12)$$

e analogamente al campo magnetico, nel caso di correnti di altro tipo:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Id\mathbf{l}'}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}dS'}{r} \quad (6.13)$$

C'è poi un altro modo di ricavare la 6.12, utilizzando la quarta equazione di Maxwell. Infatti si ha:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (6.14)$$

e \mathbf{A} può sempre esser preso con divergenza 0, per cui si può scrivere:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (6.15)$$

Quindi analogamente all'equazione di Poisson si avrà appunto la 6.12.

Mostriamo che si può sempre prendere $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Per la definizione di \mathbf{A} data, un'altra funzione:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \quad (6.16)$$

sarà anch'essa un potenziale ammissibile, poiché il rotore del gradiente è nullo, per cui $\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Mostriamo quindi che se $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$ allora posso prendere un altro potenziale \mathbf{A}' a divergenza nulla:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 f = 0 \quad (6.17)$$

Quindi è sufficiente trovare una funzione f che soddisfa:

$$\nabla^2 f = -\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (6.18)$$

Che è banalmente l'equazione di Poisson, che ammette una soluzione unica.

6.3 Quarta equazione di Maxwell

6.3.1 Metodo mio

Cerchiamo ora di calcolare il rotore:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J} (\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}) d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') 4\pi \delta(\mathbf{r}) d\tau' \quad (6.19)$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo usato la 2.25 nel caso in cui il primo termine sia indipendente dalla variabile di derivazione:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (6.20)$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \mathbf{J} (\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}) \quad (6.21)$$

Si può mostrare che il primo termine non contribuisce, mentre il secondo è appunto una delta come scritto sopra. Quindi l'ultima equazione di Maxwell, nel vuoto nel caso statico è data da:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.22)$$

Mostriamo ora che il primo termine non contribuisce. Per comodità usiamo la funzione $f = 1/r$.

$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla' f = -\nabla' (\mathbf{J} \cdot \nabla f) \quad (6.23)$$

Sfruttiamo poi il fatto che:

$$\int_V \nabla T d\tau = \oint_S T d\mathbf{S} \quad (6.24)$$

Nel nostro caso:

$$-\int_V \nabla' (\mathbf{J} \cdot \nabla f) = \oint_S \mathbf{J} \cdot \nabla' f d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{J} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\mathbf{S} \quad (6.25)$$

Ora, la superficie S sarebbe il bordo di V , tuttavia possiamo allargare il dominio di integrazione, prendendo $\mathbf{J} = 0$ fuori dal dominio originale. Ma allora sulla superficie S adesso $\mathbf{J} = 0$ e questo integrale è nullo. DIMOSTRAZIONE MIA MA SUPER LUNGA E TOSTA DA RICORDARE.

6.3.2 Metodo Griffiths

Griffiths fa uguale ma dimostra diversamente che il primo termine si annulla. Ripartiamo da:

$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6.26)$$

E pensiamo alla componente x :

$$(\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{r_x}{r^3} = \mathbf{J} \cdot \nabla' \left(\frac{r_x}{r^3} \right) = \nabla' \cdot \left(\mathbf{J} \frac{r_x}{r^3} \right) - \frac{r_x}{r^3} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \quad (6.27)$$

Osserviamo poi che nel caso di correnti stazionarie $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$. Possiamo poi applicare il teorema della divergenza e fare gli stessi ragionamenti di sopra per dire che si annulla.

6.3.3 Metodo Colo'

Per quanto detto sopra

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{A} \quad (6.28)$$

Si può quindi sostituire l'espressione di \mathbf{A} trovata e il laplaciano entra sotto integrale e \mathbf{J} è indipendente dalle coordinate non primarie. Quindi resta $\nabla^2 \frac{1}{r}$ che è una delta, per cui si ottiene la quarta equazione di Maxwell.

6.4 Dipolo magnetico

Integrare la 6.1 per trovare la forza su un circuito spesso non è agevole. In prima approssimazione però il circuito può essere approssimato ad un dipolo magnetico di momento:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = I \int_S d\mathbf{S} = IS\hat{\mathbf{n}} \quad (6.29)$$

Dove l'ultima formula vale nel caso il circuito sia su un piano, con normale $\hat{\mathbf{n}}$. Si hanno quindi formule analoghe a quelle di un dipolo in campo elettrico. Potenziale e campo di un dipolo:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}) \quad (6.31)$$

La prima segue dalla seconda calcolando il rotore e sfruttando le seguenti uguaglianze:

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \quad (6.32)$$

$$\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{m} \quad (6.33)$$

$$\nabla \frac{1}{r^3} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = -\frac{3\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}})}{r^3} \quad (6.34)$$

$$= \frac{3}{r^3} (\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}) \quad (6.35)$$

Dipolo in campo magnetico:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (6.36)$$

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (6.37)$$

$$F = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (6.38)$$

6.5 Interazione tra correnti

Pensiamo a due circuiti 1 e 2 e cerchiamo di calcolare la forza esercitata da 1 su 2. In questo paragrafo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6.39)$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}})}{r^2} \quad (6.40)$$

Tuttavia questa formula è inutilizzabile e non è neanche apparente il principio di azione e reazione. La riscriviamo in un'altra forma. Sviluppiamo prima il doppio prodotto vettore:

$$d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}) = d\mathbf{l}_1 (d\mathbf{l}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \hat{\mathbf{r}} (d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1) \quad (6.41)$$

Inoltre il primo termine non contribuisce poiché:

$$\oint d\mathbf{l}_2 \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \oint d\mathbf{l}_2 \cdot \nabla \frac{1}{r} = 0 \quad (6.42)$$

Quindi la forza è data da:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint \oint \frac{\hat{\mathbf{r}} (d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1)}{r^2} \quad (6.43)$$

Ora, invertendo 1 e 2 cambia solo il segno di $\hat{\mathbf{r}}$, per cui si ottiene una forza uguale e opposta.

7 Magnetostatica nei materiali

8 Elettrodinamica

9 Ottica