

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک اتمی و مولکولی

عنوان:

تعیین ناصافی سطوح و ضریب شکست مواد با یک سطح

ناصاف با استفاده از پراکندگی نور در محدوده فرنل

استاد راهنما:

دکتر معصومه دشتدار

دانشجو:

علی محمدزاده

شهریور ماه ۱۳۹۳

شکر و قدردانی

از استاد کرامت‌دورم سرکار خانم دکتر دشتدار که در تمام مراحل بار اهنایی‌های خود مرباری نمودند، پاس‌گزارم و همچنین از خانواده‌ی خویش که آرایش فکرم را فراهم کردند و از تمامی دوستان عزیزم که در تمامی مراحل این پیمان نامه، از ساخت وسایل آزمایش تا کمک در انجام آزمایش، مربارایی کردند، کمال شکر و قدردانی را دارم.

چکیده

زمانی که باریکه‌ی موازی نور همدوس، از توری پراش عبور می‌کند، در فواصل ثابتی که فاصله تالبوت نام دارد تصویر توری در فضا تشکیل می‌شود که به آن پدیده خودتصویر یا تالبوت گفته می‌شود. نمایانی شدت در فواصل تالبوت به همدوسی نور وابسته است. نشان می‌دهیم که اگر در مسیر نور عبوری از توری پراش، سطح ناصافی قرار دهیم، نور بازتابیده از سطح نیز در فواصل تالبوت تشکیل توری ولی با نمایانی پایین‌تر می‌دهد. به صورت تئوری نشان داده می‌شود که نمایانی تصاویر تالبوت به ناصافی سطح، طول هم‌بستگی، فاصله‌ی صفحه‌ی مشاهده از سطح ناصاف و گام توری بستگی دارد. همچنین به صورت تجربی نشان می‌دهیم، وقتی که گام توری بزرگتر از طول هم‌بستگی سطح است، می‌توان مقدار ناصافی سطح را با اندازه‌گیری نمایانی نور پراکنده شده از سطح ناصاف در فواصل تالبوت اندازه گرفت. در انتها نیز، رهیافتی جالب برای اندازه‌گیری ضریب شکست مواد که دارای یک سطح ناصاف هستند، (مانند فیلم‌های نازک) ارائه می‌دهیم.

فهرست مطالب

مقدمه	۱
قلمرو سطوح ناصاف	۲
اهمیت و کاربرد سطوح ناصاف	۳
تعریف و نکات مهم در مطالعه ناصافی سطوح	۴
دسته بندی سطوح ناصاف	۶
فصل اول	۷
بررسی آماری و روش های اندازه گیری سطوح ناصاف	۷
۱-۱: بررسی آماری سطوح ناصاف	۷
۱-۱-۱: آمار مرتبه اول (تابع ارتفاع توزیع سطح و تابع مشخصه)	۷
۱-۱-۲: آمار مرتبه دوم (تابع هم بستگی متقابل)	۱۲
۲-۱: انواع روش های اندازه گیری ناصافی سطوح	۱۷
۱-۲-۱: روش های تماسی	۱۷
۲-۲-۱: روش های غیر تماسی	۱۸
فصل دوم	۲۵
مطالعه ی نظری تاثیر ناصافی سطح بر نمایانی شدت نور در فاصله ی تالبوت	۲۵
۱-۲ محاسبه ی شدت نور پراکنده بازتابی از سطوح ناصاف بعد از عبور از توری پراش رانکی	۲۶
۲-۲: بدست آوردن توزیع شدت در حضور سطح صاف (مرجع):	۳۶
۳-۲ محاسبه نمایانی شدت در محل تالبوت	۳۷
۴-۲ محاسبه ناصافی سطح	۳۹
۵-۲ محاسبه ی شدت نور پراکنده بازتابی از سطوح ناصاف بعد از عبور از توری پراش سینوسی	۳۹
۶-۲ به دست آوردن ضریب شکست مواد با استفاده از روابط بازتابی و عبور	۴۴
فصل سوم	۴۴

۴۵.....	رهیافت تجربی
۴۶.....	۱-۳ چیدمان آزمایش
۴۷.....	۲-۳ ملاحظات عملی
۴۸.....	۳-۳ نتایج تجربی
۴۸.....	۱-۳-۳ نمایانی شدت بعد از توری بر حسب فاصله از سطح ناصاف
۵۲.....	۳-۳-۳ بدست آوردن ضریب شکست با استفاده از روابط بازتابی و عبور
۵۳.....	۴-۳-۳ بدست آوردن ضریب شکست با استفاده از یک روش اثبات شده و مقایسه نتایج
۵۷.....	نتیجه گیری
۵۸.....	مراجع
۶۱.....	پیوست ۱: فهرست اشکال
۶۳.....	واژه نامه فارسی به انگلیسی
۶۶.....	واژه نامه انگلیسی به فارسی

مقدمه

خواص آماری سطوح ناصاف نقش بسیار مهمی در حوزه‌های گوناگون، مانند تولید قطعات اپتیکی با کیفیت بالا، ساخت لایه‌های نازک، ذخیره‌ی داده بر روی سطوح و کنترل کیفیت سطوح و ... دارد [۱-۳]. روش‌های متعددی برای اندازه‌گیری پارامترهای سطوح ناصاف وجود دارند، مانند روش‌های نمایه‌سنجی مکانیکی^۱، روش‌های میکروسکوپی، تداخل سنجی، تداخل سنجی اسپیکل^۲، روش‌های پراکندگی و ... [۳-۱۱]

روش‌های پراکندگی دارای مزیت‌های ویژه‌ای نسبت به سایر روش‌ها هستند. به عنوان مثال، اکثر روش‌های موجود، کاملاً غیر مخرب نیستند، کالیبراسیون مشکل و دقیقی دارند، هزینه‌ی زیادی دارند و یا محدودیت در سایز و جنس نمونه دارند و ... در حالی که در روش‌های پراکندگی این قبیل مسائل یا وجود ندارند یا خیلی به صرفه تر نسبت به سایر روش‌ها هستند. همچنین روش‌های پراکندگی دارای کاربردهای ویژه نسبت به سایر روش‌ها نیز هستند. به عنوان نمونه در استخراج داده از بافت‌های بیولوژیکی، تصاویر ماهواره‌ای (اختر فیزیک و کنترل از راه دور^۳) دارای کاربرد ویژه هستند [۱۲-۱۴].

نظریه‌های پراکندگی عموماً از نظریه‌ی اختلال یا کیرشهف پیروی می‌کنند که بر پایه‌ی پراش میدان دور (پراش فرانیهوفر) استوارند [۱۵، ۱۶، ۱۷]. در این روش‌ها با اندازه‌گیری شدت نور پراکنده‌ی همدوس در راستای بازتاب هندسی (یا عبور در راستای شکست معمولی)، ناصافی سطح، و با اندازه‌گیری توزیع فضایی شدت نور پراکنده‌ی پخشی، طول همبستگی سطح تعیین می‌شود.

روش این پایان نامه نیز زیر مجموعه‌ی روش‌های پراکندگی است. در این روش نور موازی ابتدا به یک توری پراش که عمود بر راستای نور قرار گرفته، می‌تابد. مطابق با نظریه‌ی تالپوت، توزیع شدت توری در فواصل معینی که فاصله‌ی تالپوت نامیده می‌شود، در فضا تکرار می‌شود. نشان داده می‌شود که اگر در مسیر نور عبوری از توری پراش سطح ناصافی قرار گیرد، نور پراکنده از سطح نیز در فواصل تالپوت تشکیل توزیع شدت توری را می‌دهد، ولی با نمایانی کم‌تر نسبت به عدم حضور سطح ناصاف. به صورت تئوری نشان داده می‌شود که این کاهش نمایانی با ناصافی سطح، طول همبستگی، فاصله صفحه مشاهده از سطح ناصاف و گام توری وابسته است. همچنین مقدار ناصافی سطوح وقتی که گام توری بزرگ‌تر از طول همبستگی سطح است، به صورت تجربی مورد آزمایش قرار گرفته و نتایج آن گزارش شده است.

^۱ Mechanical Profilometry

^۲ Speckle Interferometry

^۳ Remote Sensing

این روش نسبت به سایر روش‌های پراکندگی دارای مزیت‌های ویژه‌ای است که می‌توان موارد زیر را نام برد:

در این روش اندازه‌گیری در ناحیه‌ی فرنل انجام می‌شود در حالی که در اکثر روش‌های پراکندگی اندازه‌گیری در محدوده‌ی فرانهوفر است. همچنین در این روش انتگرال فرنل به صورت صریح گرفته می‌شود (احتیاجی به تقریب روش‌های عددی نیست).

در این روش از نمایانی شدت استفاده می‌شود. در حالی که در اکثر روش‌های پراکندگی مستقیماً شدت را اندازه می‌گیرند که با توجه به نوسانات چشمه، خطای اندازه‌گیری افزایش می‌یابد. ولی با اندازه‌گیری نمایانی، خطای نوسانات چشمه از صورت و مخرج حذف می‌شود.

از دیگر مزیت‌های این روش می‌توان به سادگی چیدمان آزمایش نسبت به سایر روش‌ها اشاره کرد.

علاوه بر اندازه‌گیری ناصافی، در این پایان نامه روشی جذاب برای اندازه‌گیری ضریب شکست موادی که دارای یک سطح ناصاف هستند ارائه می‌دهیم. در این روش با استفاده از روابطی که از بازتاب از سطوح ناصاف بدست می‌آیند و مقایسه با روابط عبوری، می‌توان ضریب شکست را به سادگی تعیین کرد. در واقع با یک چیدمان آزمایش، هم ناصافی مواد و هم ضریب شکست آنان معلوم می‌شود. این روش اندازه‌گیری ضریب شکست، در لایه‌های نازک و نانو موادهای که عموماً دارای سطح ناصاف هستند، اهمیت قابل توجهی دارد.

در ادامه مقدمه کوتاهی جهت شناخت و اهمیت سطوح ناصاف ارائه می‌دهیم:

قلمرو سطوح ناصاف

اکثر سطوح در طبیعت ناصاف هستند، هیچ کس نمی‌تواند تعداد سطوح ناصاف موجود در جهان را بشمارد برای مثال کاغذی که در حال خواندن آن هستید، یک سطح ناصاف است. هر چند وقتی با انگشتان خود لمسش کنیم، صاف به نظر می‌آید. در زندگی روزمره می‌توانیم انواع سطوح ناصاف را پیدا کنیم، از پوست بدن خودمان گرفته، تا سطح میزها و اشیاء و حتی آینه‌های دیواری (هرچند که شاید آنها، خیلی صاف و شفاف و بسیار بازتاب دهنده به نظر آیند). در طبیعت نیز انواع گوناگونی از سطوح ناصاف وجود دارند. کوه‌ها، دریاچه‌ها، رودخانه‌ها و دره‌ها، همه و همه می‌توانند به عنوان سطوح ناصاف در نظر گرفته شوند. همچنین ساختار دو بعدی اتم‌ها در کریستال‌ها باعث ایجاد سطوح ناصاف، از منظر مقیاس اتمی می‌شود. در نتیجه سطوح ناصاف نقش پررنگی در همه ابعاد جهان دارند.

اهمیت و کاربرد سطوح ناصاف

در تجربه ممکن است ما احتیاج داشته باشیم تا از خواص سطوح ناصاف استفاده کنیم، یا اینکه بخواهیم ناصافی را حذف کنیم. به عنوان مثال، سرعت گیرهای موجود در بزرگراه‌ها را در نظر بگیرید. برای آنکه بتوانیم سرعت ماشین‌ها را به اندازه کافی کاهش دهیم، باید سطح این سرعت گیرها به اندازه کافی ناصاف باشند. اما کارخانه‌های تولید کننده خودرو، همیشه خواهان این هستند که سطح اتومبیل آنها در بالا ترین حد درخشندگی و صافی قرار بگیرد، تا بتوانند مشتریان را جذب خود کنند. در تحقیقات علمی مدرن، سطوح ناصاف، توجه زیادی را در قسمت عظیمی از شاخه‌های علمی، مثل ژئوفیزیک، آکوستیک، کنترل از راه دور و ... را به خود اختصاص داده اند.

ناصافی سطح^۴ از ویژگی‌های بسیار مهم جهت ساخت فیلم‌های نازک^۵ هستند، ناصافی این سطوح به طور مستقیم بسیاری از خواص فیزیکی و شیمیایی این فیلم‌ها را کنترل می‌کند. به عنوان مثال خاصیت مغناطیسی و یا مغناطیس زدایی این فیلم‌ها با تغییر ناصافی این سطوح تغییر می‌کند [۱۸، ۱۹]. همچنین خواص الکتریکی این فیلم‌ها هم، بستگی به ناصافی این سطوح دارد [۲۰].

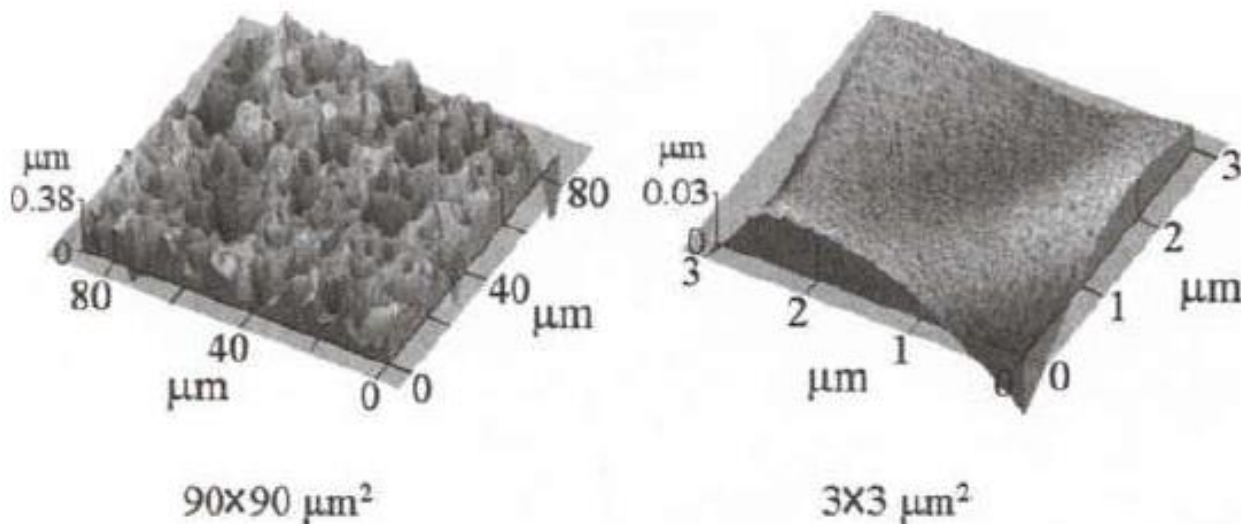
علاوه بر این موارد ناصافی تاثیرات زیادی در هارمونیک دوم سطح^۶ [۲۱، ۲۲]، نرخ واکنش‌های شیمیایی^۷ [۲۳]، شیفیت زاویه بروستر^۸ [۲۴، ۲۵]، و ... دارد.

کم کردن ناصافی سطح نیز، کاربردهای زیادی در فیلم‌های نازک به خصوص در ساخت قطعه‌های میکروالکترونیک و اپتوالکترونیک دارد. به عنوان مثال ناصافی لایه سیلیکون، می‌تواند در اکسید شدن آن تاثیر زیادی ایفا کند [۲۶]، ناصافی می‌تواند باعث افزایش پراکندگی در موج برها و همچنین باعث افزایش مسیر اپتیکی در توری‌ها شود [۲۷] و ...

^۴ Interface Roughness
^۵ Thin Film
^۶ Surface Second Harmonic Generation
^۷ Chemical Reaction Rate
^۸ Brewster Angle Shifts

تعریف و نکات مهم در مطالعه ناصافی سطوح

سطح ناصاف را به این صورت تعریف می‌کنیم که ارتفاع سطح تمام نقاط آن، نسبت به یک سطح میانگین مرجع غیر صفر شود، مطابق با این تعریف معلوم می‌شود که همه سطوح فیزیکی بطور مطلق نمی‌توانند، صاف باشند (حداقل در مقیاس افت و خیزهای اتمی). دوقید مهم در مطالعه سطوح ناصاف وجود دارد که به بررسی آنها می‌پردازیم:

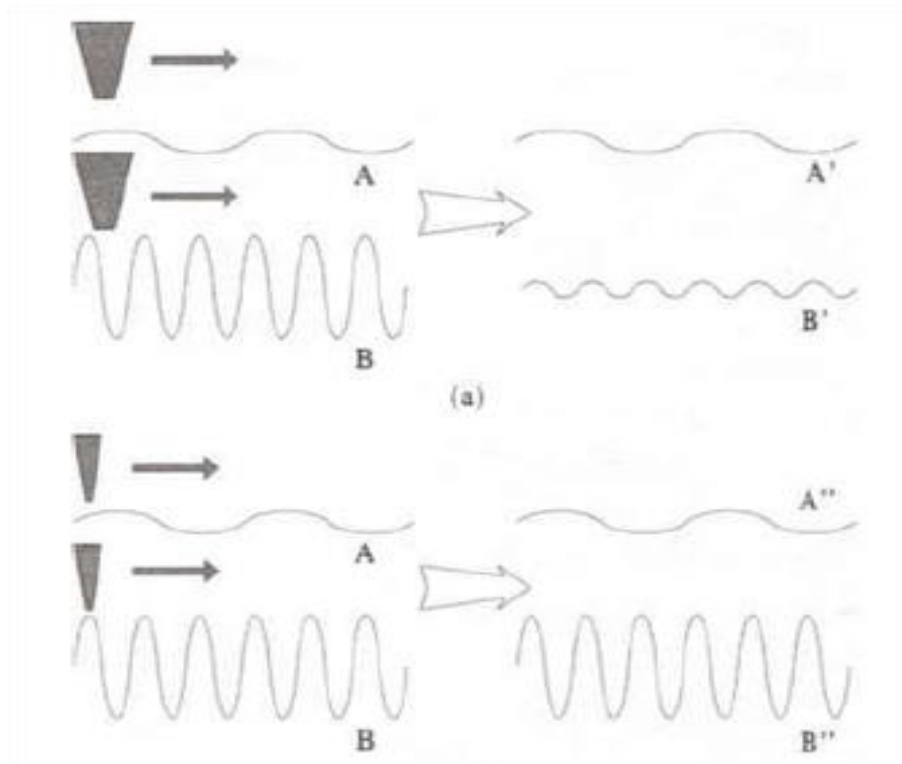


شکل ۱ تصویر AFM از سطح وافر سیلیکن با دو بزرگنمایی متفاوت

اولی اندازه سطح (مساحت) مورد مطالعه است. مقدار ناصافی بستگی زیادی به سطح نمونه مورد مطالعه دارد. برای مثال وقتی شما به روی زمین از سطح هواپیما نگاه می‌کنید و دره‌ها و کوه‌ها و دریاچه‌ها را مینگرید، زمین به شدت ناصاف به نظر می‌رسد. اما وقتی بر روی زمین هستید و به همان مناظر نگاه می‌کنید. ناصافی کمتری در مقایسه با آنچه که در هواپیما مشاهده کردید به نظر تان می‌آید. هم چنین اگر از منظر دید هواپیمایی، به یک فرودگاه بر روی زمین بنگرید سطح آن بسیار صاف بنظر تان می‌آید یعنی در هر محدوده اندازه گیری، نتایج بسیار متفاوتی بدست می‌آید. در هواپیما محدوده اندازه‌گیری در حدود ۱۰۰ ها کیلومتر مربع، در روی زمین در حد ده‌ها کیلومتر مربع و هنگام مشاهده فرودگاه در حد چند کیلومتر مربع می‌شود.

در واقع سطحی که در ابعاد بزرگ ناصاف به نظر می‌آید، ممکن است در ابعاد کوچک صاف به نظر رسد و بالعکس. شکل ۱ شکل ۱ سطح وافر سیلیکون، با دو بزرگنمایی مختلف را نشان می‌دهد. عکس با بزرگنمایی 90×90 میکرومتر مربع، کاملاً ناصاف به نظر می‌رسد. در حالی که عکس با سایز 90×90 میکرومتر مربع، به نظر صاف می‌آید. بنابراین وقتی می‌خواهیم در مورد سطوح ناصاف صحبت کنیم، باید محدوده سطح مورد مطالعه را برای اندازه‌گیری دقیق مشخص نماییم.

دومین نکته ای که باید در مطالعه سطوح ناصاف در نظر داشته باشیم، دقت وسیله اندازه‌گیری مورد استفاده در آزمایش است. ابزارهای مختلف با دقت اندازه‌گیری متفاوت، باعث به وجود آمدن نتایج مختلف برای یک سطح ناصاف مشخص می‌شوند برای این وضعیت شکل ۲ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۲ تاثیر دقت ابزار اندازه‌گیری در آزمایش

در این شکل از دو نوع ابزار مختلف جهت اندازه‌گیری سطوح ناصاف استفاده شده است. اولی دارای لبه پهن و دومی دارای لبه تیز است. سطح (A) دارای طول موج بزرگ است که این طول موج از لبه هر دو وسیله آزمایش بزرگتر است.

ولی سطح (B) دارای طول موج کوچکی است، که طول موج آن از وسیله آزمایش دارای لبه پهن، کوچک‌تر ولی از وسیله دارای لبه تیز، بزرگ‌تر است. در مطالعه سطح (A) هر دو وسیله نتایج مشابهی می‌دهند ولی در سطح (B) نتایج متفاوتی بدست می‌آید. وسیله آزمایش با لبه پهن نتایج کاملاً متفاوتی با ویژگی‌های سطح واقعی می‌دهد. ولی نتایج آزمایش با لبه تیز بسیار با حقیقت شباهت دارد، در نتیجه حتی برای یک سطح مشخص، آزمایش با ابزارهایی با دقت متفاوت، می‌تواند نتایج کاملاً متفاوتی را نشان دهد!

در حقیقت دقت ابزار مورد مطالعه باید دو شرط مهم داشته باشد، یک دقت عمودی (نسبت سیگنال به نویز) که مشخص کننده کمترین افت و خیزهای ارتفاع در سطح مورد مطالعه است که ابزار آزمایش می تواند شناسایی کند و دومی دقت فضایی که بیانگر کوچکترین ناحیه ای است که ابزار آزمایش می تواند به آن دسترسی پیدا کند.

دسته بندی سطوح ناصاف

سطوح ناصاف را می توان به روش های مختلفی طبقه بندی کرد. در اولین روش می توان آنها را براساس خواص آماریشان طبقه بندی کرد. در این حالت سطوح ناصاف به دو دسته تقسیم می شوند: سطوح ناصاف معین^۹ و سطوح ناصاف رندوم^{۱۰}. سطوح ناصاف معین به این صورت تعریف می شوند که در این سطوح می توانیم افت و خیزهای ارتفاع سطح را، به صورت تابعی مشخص از موقعیت سطح بیان کنیم. در این سطوح وقتی فرم توزیع ارتفاع سطح را داشته باشیم تمامی ویژگی های سطح مورد مطالعه مشخص می شود!

به عنوان مثال، سطح یک توری بازتابی را می توان براساس تابعی تناوبی بیان کرد. از نگاه آماری ارتفاع سطح بین دو نقطه دلخواه از سطح توری، کاملاً با هم تنیده هستند. برای سطوح رندوم افت و خیزهای ارتفاع سطح را نمی توان بصورت تابعی مشخص از موقعیت سطح بیان کرد و بهترین راه برای توصیف این سطوح استفاده از یک میدان رندومی است. بخش عمده ی سطوح ناصاف در این دسته قرار می گیرند.

روش دیگر تقسیم بندی مطالعه سطوح ناصاف بر اساس خواص پیوستگی و ناپیوستگی سطوح ناصاف است این طبقه بندی براساس ناحیه مورد مطالعه و یا دقت ابزار مورد استفاده است. وقتی با سطوحی سر و کار داریم که مساحت آنها بسیار بزرگتر از مقیاس اتمی است، یا دقت فضایی ابزاری که استفاده می کنیم، بسیار بزرگتر از مقیاس اتمی است می توانیم سطح مورد آزمایش را پیوسته در نظر بگیریم. در غیر این صورت سطح مورد آزمایش ناپیوسته است.

روش دیگر تقسیم بندی سطوح ناصاف براساس تقارن چرخشی سطح مورد آزمایش است و به دو دسته سطوح ناصاف همگن و ناهمگن تقسیم می شود. در صورتی که افت و خیز های سطح مستقل از جهت سطح مورد مطالعه توزیع یابند، سطح را همگن در نظر می گیریم، در غیر این صورت سطح ناهمگن است.

در این پایان نامه، سطوحی که ما مورد بررسی قرار می دهیم سطوح پیوسته، همگن، و با ناصافی رندوم هستند.

^۹ Deterministic Rough Surface
^{۱۰} Random Rough Surface

فصل اول

بررسی آماری و روش‌های اندازه‌گیری سطوح ناصاف

۱-۱: بررسی آماری سطوح ناصاف

یک سطح ناصاف رندوم از نظر ریاضی به صورت $h = h(\mathbf{r})$ که h ارتفاع سطح ناصاف نسبت به یک صفحه میانگین و \mathbf{r} بردار مکان بر روی سطح است. در دیدگاه آماری، افت و خیزهای ارتفاع سطح ناصاف، به صورت یک میدان رندوم نسبت به ارتفاع مشخص می‌شود. کلمه میدان بیانگر این است که پارامتر مکان چند بعدی است. به عنوان مثالی از یک میدان رندومی، تابع توزیع همبستگی n بعدی $\rho_n(h_1, h_2, \dots, h_n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ را در نظر بگیرید که $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ مجموعه‌ای از بردارهای مکان مختلف بر روی سطح، و h_1, h_2, \dots, h_n متغیرهای رندوم متناظر با آنها هستند. یک میدان رندومی همگن نامیده می‌شود، در صورتی که اگر مجموعه بردارهای $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ انتقال پیدا کنند (نه اینکه چرخیده شوند) میدان رندومی تغییری پیدا نکند. که این موضوع بیانگر این نکته است که تمامی احتمالات به مکان‌های مطلق بردارهای $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ بستگی ندارد بلکه به نسبت میان آنها وابسته است. همچنین میدانی همسانگرد تعریف می‌شود، در صورتی که میدان تحت چرخش بردارهای $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ ناوردا بماند. سطوح ناصافی که ما در این پایان نامه بررسی می‌کنیم با فرض همگن و همسانگرد بودن آنها بررسی می‌شوند. در نتیجه در این نوع میدان‌ها بردار \mathbf{r} را می‌توان معادل با اندازه بردار \mathbf{r} قرار داد.

۱-۱-۱: آمار مرتبه اول (تابع ارتفاع توزیع سطح و تابع مشخصه)

یکی از مهم‌ترین خواص سطوح ناصاف رندومی، خواص تابع توزیع ارتفاع آنها ($\rho(h)$) است. منظور از $\rho(h)$ احتمال این است که ارتفاع سطح بین h و $h + dh$ در هر نقطه‌ای از سطح، برابر $\rho(h)dh$ است. توزیع $\rho(h)$ به صورت یک تابع نامنفی و بهنجار شده به صورت زیر است:

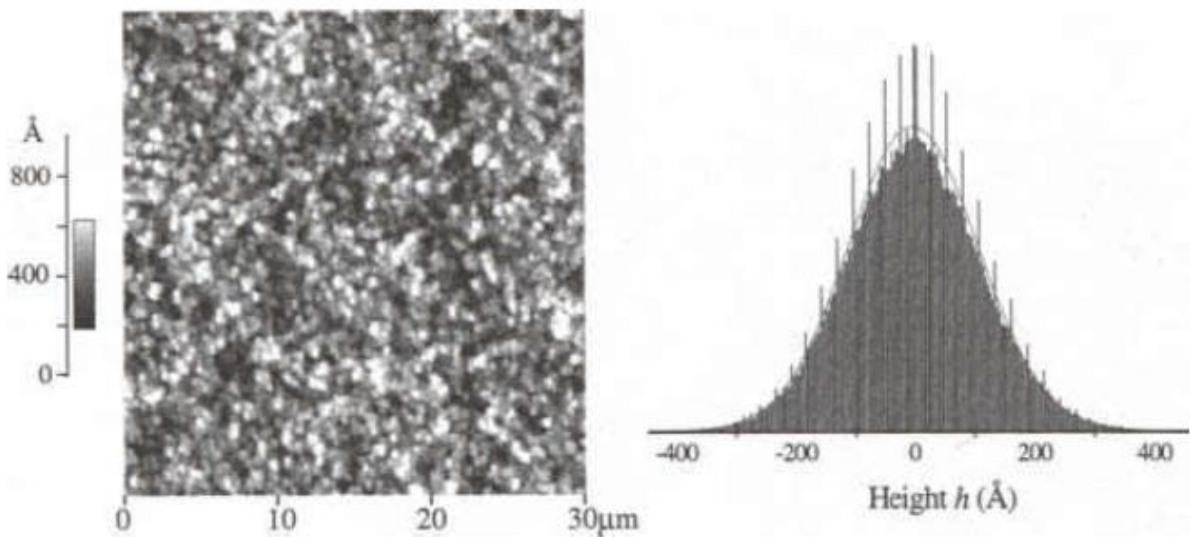
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(h) dh = 1 \quad (1-1)$$

اگرچه این طور به نظر می‌رسد که سطوح ناصاف مختلف دارای توابع توزیع ارتفاع متفاوتی هستند، اکثر سطوح ناصاف موجود در طبیعت (همچنین سطوح ناصاف استفاده شده در این پایان نامه) دارای توزیع ارتفاع گاوسی به شکل زیر هستند:

$$\rho(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (2-1)$$

که در اینجا σ به عنوان عرض تداخل تعریف می شود (هدف اصلی در این پایان نامه بدست آوردن همپن پارامتر σ است) که در ادامه اطلاعات بیشتری از آن ارائه می شود.

شکل ۱-۱ سطح ناصافی را به همراه تابع توزیع سطح آن نشان می دهد.



شکل ۱-۱ تصویر AFM یک ماده سیلیکونی لایه نشانی شده با مس و نمودار توزیع ارتفاع سطح متناظر با آن

برای آنکه بتوانیم خواص متغیر رندوم h را بدست آوریم از رابطه‌ی آماری زیر استفاده می کنیم:

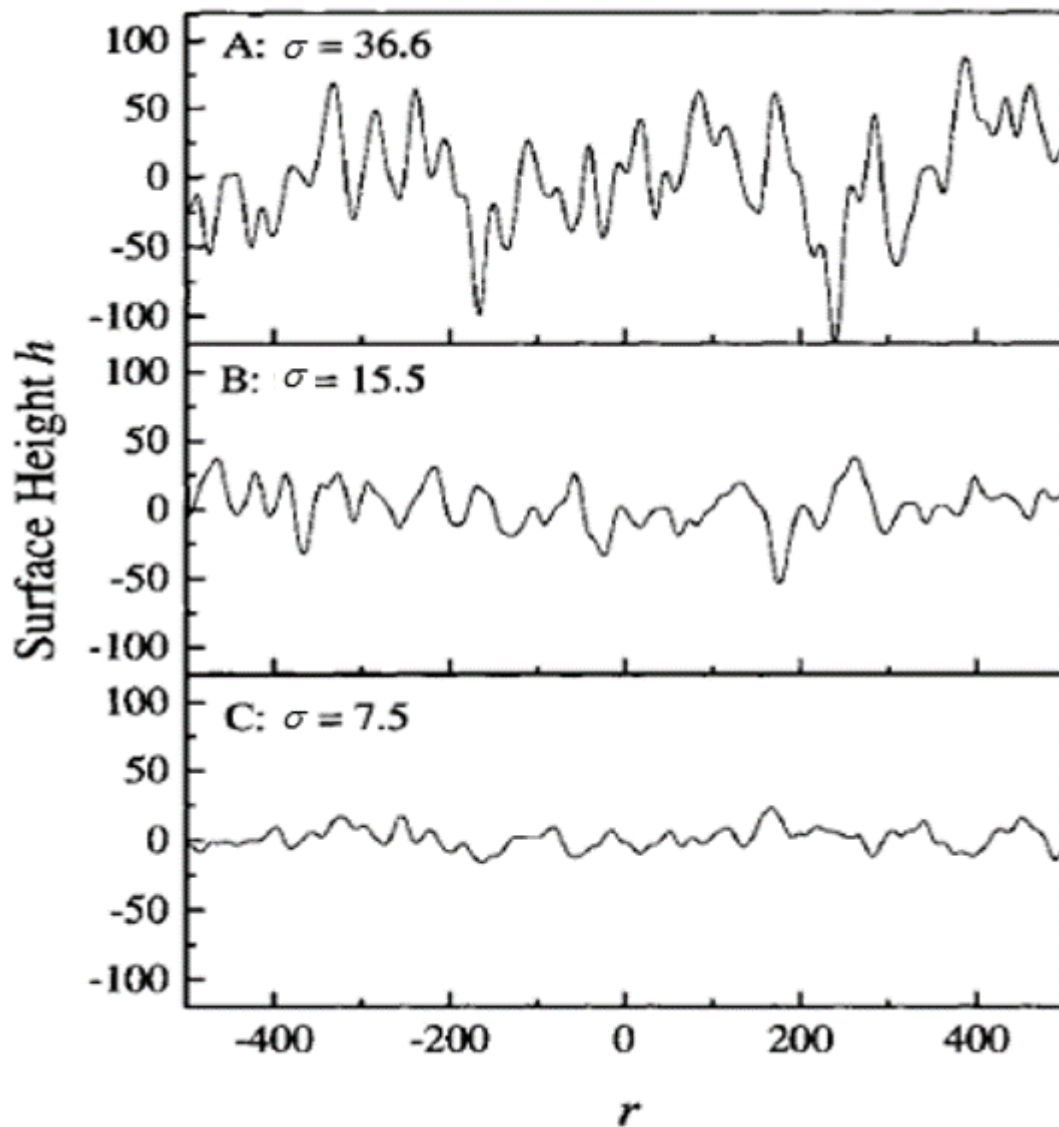
$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} h^n \rho(h) dh \quad (3-1)$$

با قرار دادن n مساوی یک، مقدار میانگین متغیر h بدست می آید درواقع سطح میانگین، سطحی فرض می شود که میانگین متغیر h برابر صفر گردد.

مرتبه‌ی دوم این رابطه یکی از مهم ترین روابطی است که جهت بیان کردن ناصافی سطح به کار می برند، که ما آن را با σ^2 نمایش می دهیم.

$$\sigma^2 = m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2 \rho(h) dh \quad (4-1)$$

که در آن σ ریشه مجذور میانگین سطح ناصاف (RMS) یا عرض تداخل نامیده می‌شود. σ نشان دهنده‌ی افت‌وخیزهای ارتفاع سطح، حول صفحه میانگین است. شکل ۲-۱ سه سطح ناصاف را با RMS های مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱ مقایسه‌ی سه سطح ناصاف با RMS های متفاوت. سطح A با RMS بزرگتر دارای ناصافی بیشتری نسبت به دو سطح دیگر است

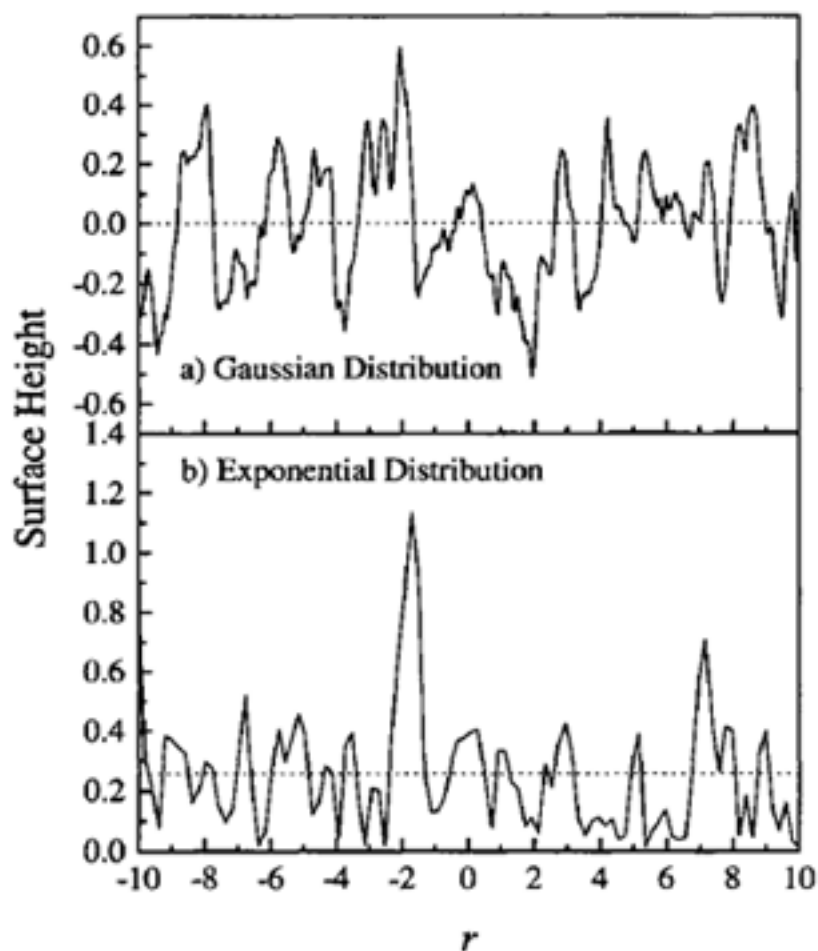
با توجه به شکل سطح ناصاف دارای σ بزرگتر، دارای ناصافی بیشتری نیز هست. هم‌چنین در بعضی موارد پارامتر دیگری با نام ناصافی میانگین (σ_{ave}) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{ave} = \int_{-\infty}^{+\infty} |h - \bar{h}| \rho(h) dh \quad (5-1)$$

که در آن منظور از $h - \bar{h}$ ارتفاع نسبت به صفحه میانگین است. همچنین رابطه بین σ و σ_{ave} به صورت $\sigma_{ave} = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ است.

از آنجایی که پارامتر RMS در بسیاری از کاربردهای ناصافی‌ها، کافی به نظر می‌رسد (از جمله در همین پایان نامه)، افراد معمولاً به مراتب بالاتر رابطه (۳-۱) نمی‌پردازند، با این وجود مراتب بالاتر اطلاعات و جزئیات بیشتری در مورد ناصافی سطح می‌دهند و ما در اینجا به بحث مختصری در مورد مرتبه سوم می‌پردازیم.

به عنوان مثال شکل ۳-۱ را در نظر می‌گیریم:



شکل ۳-۱ دو سطح با RMS یکسان ولی با توابع توزیع ارتفاع متفاوت

در این شکل دو سطح ناصاف با RMS یکسان نشان داده شده‌اند. یکی از آن‌ها دارای توزیع گاوسی (به این معنی که افت‌وخیز های ارتفاع دارای تقارن نسبت به سطح میانگین است.) و دیگری دارای توزیع نمایی است.

برای تشریح این موارد از مرتبه‌ی سوم رابطه‌ی (۳-۱) که بصورت زیر تعریف می‌شود و انحراف ارتفاع سطح را مشخص می‌کند، استفاده می‌کنیم:

$$\gamma_3 = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{+\infty} h^3 \rho(h) dh \quad (۶-۱)$$

انحراف ارتفاع سطح را با γ_3 نشان داده‌ایم، و به اختصار به آن انحراف می‌گوییم. دقت کنید که انحراف بی‌بعد است. انحراف ابزاری برای تعیین تقارن توزیع ارتفاع نسبت به صفحه‌ی میانگین است. علامت مثبت و یا منفی انحراف، به ما اطلاعاتی در مورد توزیع ارتفاع، یعنی اینکه توزیع ارتفاع بیش‌تر در سمت بالای صفحه میانگین است و یا در پایین آن، می‌دهد. به عبارت دیگر انحراف مثبت بیانگر توزیع بیش‌تر ارتفاع سطح، در بالای صفحه میانگین، و انحراف منفی بیانگر توزیع بیش‌تر ارتفاع سطح، در پایین صفحه میانگین است. در واقع این پارامتر، نحوه عدم تقارن توزیع ارتفاع نسبت به صفحه میانگین، را برای ما آشکار می‌سازد. برای توزیع‌های متقارن گاوسی، انحراف صفر می‌شود. به عنوان مثال در شکل نشان داده شده مقدار انحراف برای حالت (a) برابر 0.13 و برای حالت (b) برابر 1.58 است.

هم‌چنین رابطه دیگری در مرتبه یک رابطه (۳-۱)، به نام رابطه مشخصه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(h) e^{-(ikh)} dh \quad (۷-۱)$$

در حقیقت تابع مشخصه $\varphi(k)$ تبدیل فوریه‌ی تابع توزیع ارتفاع است یا به عبارت دیگر میانگین فاز رندوم (kh) را بیان می‌کند. به عنوان مثال تابع مشخصه برای تابع توزیع ارتفاع گاوسی، برابر است با:

$$\varphi(k) = e^{-\left(\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)} \quad (۸-۱)$$

تابع مشخصه دارای ویژگی‌های زیر است:

نخست این که تابع مشخصه تابعی یکتاست و تابع توزیع ارتفاع را مشخص می‌نماید. در نتیجه اگر دو سطح با آمار ارتفاعی رندوم، تابع مشخصه یکسان داشته باشند، دارای تابع توزیع ارتفاع یکسانی نیز هستند.

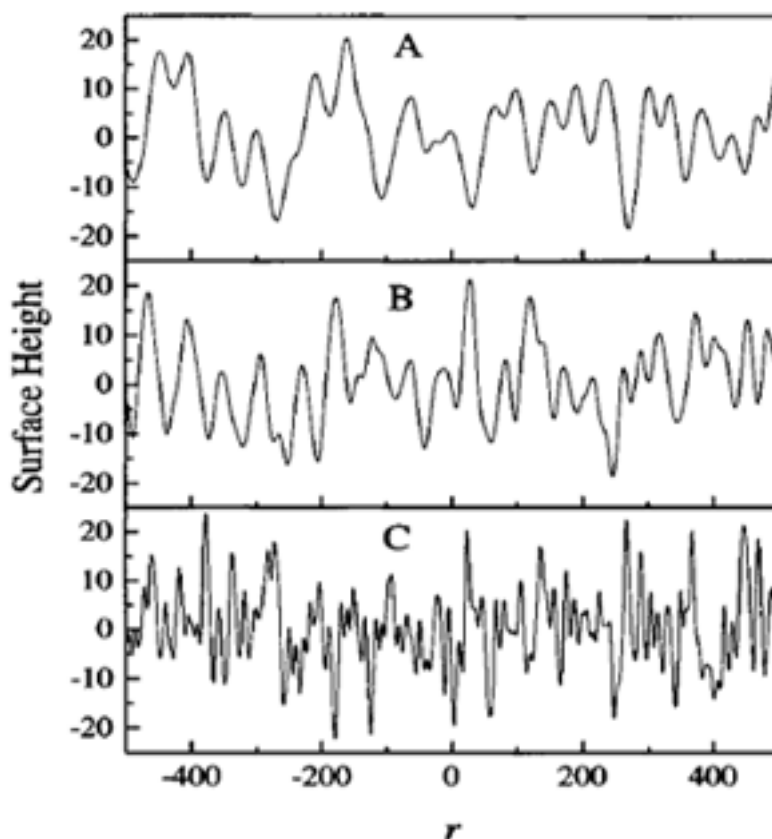
و دوم این که $\varphi(0) = 1$:

$$m_n = \frac{1}{i^n} \left[\frac{d^n \varphi(k)}{dk^n} \right]_{k=0} \quad (9-1)$$

در نتیجه مشتق (n) این رابطه، مرتبه (n) رابطه $(3-1)$ را بدست می دهد (تابع مشخصه نقش پرننگی در نظریه پراکندگی نور ایفا می کند).

۱-۲-۱: آمار مرتبه دوم (تابع همبستگی متقابل)

آمار مرتبه اول یا به عبارتی تابع توزیع ارتفاع، تنها می تواند خواص آماری متغیرهای رندوم یک میدان رندومی را در هر مکان بررسی کند. در نتیجه نمی تواند ارتباط بین متغیرهای رندوم در مکان های مختلف را توضیح دهد. سطوح ناصاف مختلف می توانند تابع توزیع ارتفاع $(\rho(h))$ و RMS یکسان داشته باشند. به عنوان مثال هر سه سطح نمونه رسم شده در شکل ۴-۱ ، دارای توزیع ارتفاع گاوسی و عرض تداخل یکسان σ هستند.



شکل ۴-۱ سه سطح ناصاف با RMS یکسان و طول همبستگی متفاوت

در حالی که آنها کاملاً متفاوت به نظر می‌رسند. به دلیل این که تغییرات در ارتفاع، در مقیاس‌های طولی متفاوتی نسبت به سطح پدیدار شده است. یا به عبارت دیگر افت‌وخیزهای ارتفاع دارای فرکانس‌های متفاوتی هستند. خیلی طبیعی است که سطح C بسیار ناصاف‌تر از سطح A به نظر آید.

برای درک این تفاوت‌های فضایی، نیازمند اطلاع از میدان رندومی $h(\mathbf{r})$ در نقاط مختلف \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 هستیم. برای این منظور تابع توزیع چگالی احتمال $\rho_j(h_1, h_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ با خواص زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(h_1, h_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) dh_1 dh_2 = 1 \quad (10-1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(h_1, h_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) dh_1 = \rho(h_2) \quad (11-1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(h_1, h_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) dh_2 = \rho(h_1) \quad (12-1)$$

که برای میدان رندوم همگن $\rho(h_1) = \rho(h_2) = \rho(h)$.

در حالت کلی $\rho_j(h_1, h_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ نه تنها به توزیع ارتفاع بلکه به هم‌بستگی ارتفاع بین دو نقطه‌ی مختلف مکان هم وابسته است.

یک حالت خاص برای این رابطه زمانی است که h_1 و h_2 از یکدیگر مستقل هستند. در این حالت $\rho_j(h_1, h_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ را می‌توان به صورت ساده زیر نوشت:

$$\rho_j(h_1, h_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \rho(h_1)\rho(h_2) \quad (13-1)$$

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های آماری $\rho_j(h_1, h_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ تابع هم‌بستگی متقابل $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1 h_2 \rho_j(h_1, h_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) dh_1 dh_2 \quad (14-1)$$

و یا تابع هم‌بستگی متقابل بهنجار $C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ که به صورت زیر است:

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sigma^2} \quad (15-1)$$

که هردوی این روابط هم‌بستگی ارتفاع در دو مکان مختلف، و وابستگی آن‌ها را به $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ نشان می‌دهند.

برای سطوح ناصاف همگن و هم‌سانگرد، این دو تابع تنها به اختلاف دو مکان $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ بستگی پیدا می‌کنند در نتیجه روابط زیر بدست می‌آیند:

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = G(\rho) \quad (۱۶-۱)$$

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = C(\rho) \quad (۱۷-۱)$$

که $\rho = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ است. بدیهی است که :

$$G(0) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \sigma^2 \quad (۱۸-۱)$$

یعنی مقدار تابع هم‌بستگی متقابل در $\rho = 0$ برابر واریانس تابع توزیع ارتفاع است.

در اینجا به برخی از خواص تابع هم‌بستگی متقابل بهنجار می‌پردازیم:

$$C(0) = 1 \quad (۱)$$

$$C(-\rho) = C(\rho) \quad \text{یعنی } C(\rho) \text{ زوج است.} \quad (۲)$$

$$|C(\rho)| \leq C(0) \quad \text{یعنی } C(0) \text{ ماکزیمم } C(\rho) \text{ است.} \quad (۳)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} C(\rho) = 0 \quad \text{وقتی } \rho \rightarrow \infty \text{ و } h(\mathbf{r}) \text{ و } h(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) \text{ از یکدیگر مستقل می‌شوند، در نتیجه:} \quad (۴)$$

برای یک سطح ناصاف واقعی، $C(\rho)$ به‌طور معمول با افزایش ρ کاهش می‌یابد. شکل این کاهش بستگی به نوع سطح ناصاف و

نرخ این کاهش، بستگی به فاصله‌ای از سطح دارد که در آن دو نقطه غیر هم‌بسته می‌شوند.

طول هم‌بستگی (ζ) فاصله‌ای است که در آن اختلاف بین دو نقطه سبب کاهش تابع هم‌بستگی بهنجار متقابل، به $(\frac{1}{e})$ مقدار

ماکزیمم آن می‌شود یعنی :

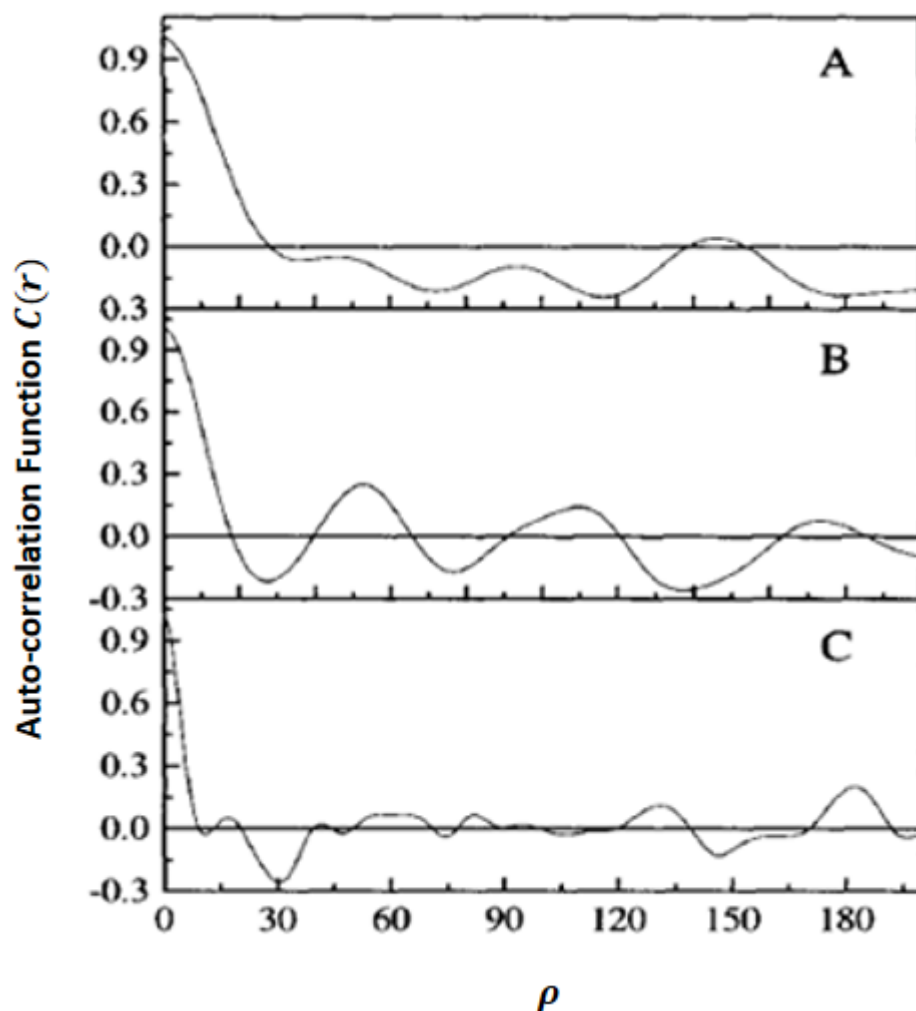
$$C(\zeta) = \frac{1}{e} \quad (۱۹-۱)$$

در واقع اگر فاصله بین دو نقطه مکان در گستره کوچکتر از ζ واقع شود، ارتفاع این دو نقطه هم‌بسته هستند و اگر فاصله بین دو

نقطه مکان، بسیار بیشتر از ζ گردد، ارتفاع دو نقطه غیر هم‌بسته می‌شود، در نتیجه می‌توانیم بگوییم آنها از هم مستقل هستند.

شکل زیر تابع هم‌بستگی متقابل سه سطح شکل ۴-۱ را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم سطح A دارای بزرگ‌ترین

طول هم‌بستگی، و سطح C دارای کوچکترین طول هم‌بستگی است. در نتیجه سطح C تا صاف‌تر بنظر می‌رسد.



شکل ۵-۱ تابع همبستگی متقابل سطوح متناظر با شکل ۴-۱

شکل تابع همبستگی نقش مهمی در توصیف سطح ایفا می کند. سطوح ناصاف متفاوت می توانند توابع همبستگی مختلفی داشته باشند. ولی در اکثر سطوح ناصاف رندومی (از جمله سطوح ناصاف ما در این پایان نامه)، تابع همبستگی متقابل بهنجار را به صورت تابع گاوسی به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$C(\rho) = e^{-\left(\frac{\rho^2}{\zeta^2}\right)} \quad (۲۰-۱)$$

که در آن $\zeta = \rho$ برابر طول همبستگی است.

در انتهای این قسمت دو تابع ریاضی دیگر که در مطالعات پراکندگی مورد استفاده قرار می گیرند را به طور اختصار معرفی می کنیم:

تابع ساختاری

یکی از خصوصیات آماری سطح که در بعضی موارد استفاده قرار می گیرد، تابع ساختاری سطح است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(\vec{R}) = \langle [h(\vec{r}) - h(\vec{r} + \vec{\rho})]^2 \rangle \quad (21-1)$$

برای سطوح پایا اطلاعات یکسانی از تابع ساختاری و همبستگی بدست می آید. این دو تابع با رابطه‌ی زیر به هم مرتبطند:

$$S(\vec{R}) = 2\sigma^2[1 - C(\vec{\rho})] \quad (22-1)$$

مزیت تابع ساختاری نسبت به تابع همبستگی مستقل بودن از انتخاب سطح مرجع است.

طیف توانی

روش دیگر برای توصیف سطح ناصاف طیف توانی است که به صورت تبدیل فوری از تابع همبستگی تعریف می شود:

$$P(\vec{k}) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\vec{\rho}) \exp(i\vec{k}, \vec{\rho}) d\vec{\rho} \quad (23-1)$$

برای سطوحی با ابعاد نامحدود تابع همبستگی با رابطه‌ی زیر داده می شود:

$$C(\vec{\rho}) = \lim_{A_m \rightarrow \infty} \frac{1}{A_M \sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vec{r}) h(\vec{r} + \vec{\rho}) d\vec{r} \quad (24-1)$$

که در آن A_M مساحت صفحه‌ی میانگین است. با جای گذاری $C(\vec{\rho})$ در رابطه‌ی (۲۳-۱) خواهیم داشت:

$$P(\vec{k}) = \lim_{A_m \rightarrow \infty} \frac{1}{A_M (2\pi)^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vec{r}) \exp(i\vec{k}, \vec{r}) d\vec{r} \right|^2 \quad (25-1)$$

بنابراین طیف توانی با تمام توابع تعریف شده‌ی قبلی برای سطح ناصاف تفاوت دارد. زیرا می تواند هر دو جنبه‌ی ناصافی سطح، ارتفاع از سطح میانگین و تغییرات ارتفاع در طول سطح را توصیف کند.

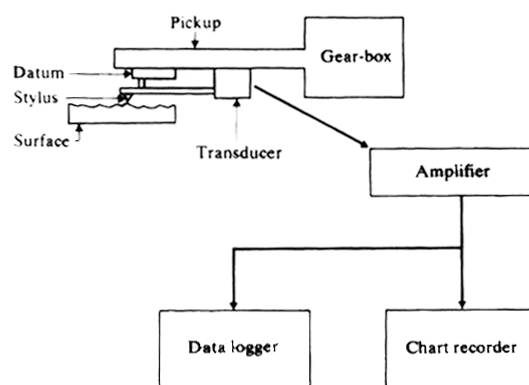
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{k}) d\vec{k} = \sigma^2 \quad (26-1)$$

۲-۱: انواع روش های اندازه گیری ناصافی سطوح

به طور کلی روش های اندازه گیری ناصافی سطوح به دو دسته تقسیم می شوند: روش های تماسی و غیرتماسی.

۱-۲-۱: روش های تماسی

از میان روش های تماسی، روش سوزنی عمومی ترین روش اندازه گیری پارامترهای ناصافی سطح است. در این روش، از ابزار سوزنی استفاده می شود، این ابزار می تواند به راحتی اطلاعات آماری سطح (rms و طول همبستگی) را در اختیار قرار دهد. استفاده از ابزار سوزنی برای اندازه گیری ناصافی، پس از اختراع گرامافون رواج یافت [۲۸]. در مدل های اولیه ای ابزار سوزنی، از مجموعه ای از اهرم ها برای حرکت عمودی سوزن استفاده می شد، پس از دود اندود کردن سطح شیشه، حرکات سوزن بر روی آن به صورت نوسانات نامنظم قابل مشاهده بود. در روش های جدیدتر، حرکت عمودی سوزن به نوسان الکتریکی تبدیل می شود. در این روش ها، با حرکت یکنواخت سوزن، سیگنال توسط مبدل تبدیل می شود و تقویت کننده الکتریکی، نوسانات سیگنال های دریافت شده از مبدل الکتریکی را تقویت می کند. شمای کلی این ابزار در شکل ۶-۱ دیده می شود.



شکل ۶-۱ شمای کلی ابزار سوزنی

محدوده ای حرکت عمودی ابزار سوزنی به محدوده ای دینامیکی مبدل بستگی دارد و در حدود ۱ میلی متر است. قدرت تفکیک عمودی بوسیله ی ارتعاشات مکانیکی زمینه و نویز های حرارتی قطعات الکتریکی محدود می شود. امروزه در حالتی که محدوده ای حرکت عمودی سوزن ۵۰ میکرومتر است، قدرت تفکیک عمودی معادل ۰,۳ نانومتر گزارش شده است [۳].

در ابزارهای اولیه که از روش تماسی سوزنی استفاده می کردند، بزرگی سوزن ها، علاوه بر نداشتن قدرت تفکیک افقی مناسب، باعث خرابی های ناخواسته روی سطح می شدند. امروزه از سوزن های الماسی استفاده می شود که شعاع سطح مقطع آنها بین ۴ تا ۱۲ میکرومتر است [۲۹]. کیفیت مبدل الکتریکی در این ابزارها مهم است، در مدل های ارزان تر از کریستال پیزوالکتریک استفاده می شود که به علت تغییر فشار، نویز در مجموعه ایجاد می شود.

حرکت یکنواخت افقی سوزن بر روی سطح بسیار مهم است، به این علت که سرعت سوزن با فواصل مکانی سطح رابطه پیدا می‌کند و هرگونه اختلال در یکنواختی حرکت، باعث استخراج داده‌های آماری نادرست در مورد ناصافی سطح خواهد شد. پس از استخراج اطلاعات به صورت سیگنال الکتریکی، این داده به رایانه یا به اسیلوسکوپ داده می‌شود تا بتواند مورد پردازش قرار گیرد.

مزیت روش سوزنی، دسترسی به سیگنال الکتریکی است که به کمک آن می‌توان داده‌های مربوط به ناصافی سطح را بدست آورد.

معایب روش سوزنی [۳، ۵، ۳۰]:

- در مواردی که ابعاد انتهای سوزن به ابعاد ناصافی‌ها نزدیک باشد، احتمال خطا در اندازه‌گیری ناصافی (ندیدن ناصافی توسط سوزن) وجود دارد.
- همچنین محدودیت در سائز نمونه‌ی قابل اندازه‌گیری وجود دارد.
- پاسخ فرکانسی محدود قطعات ابزار، باعث غیرقابل اندازه‌گیری بودن برخی پستی و بلندی‌ها می‌شود.
- هرچند سوزن وزن کمی دارد، ولی به علت سطح مقطع کوچک باعث اعمال فشار بالا به سطح می‌گردد و به سطح آسیب می‌رساند و همچنین در اندازه‌گیری هم خطا ایجاد می‌کند.
- اندازه‌گیری در این روش وقت گیر است و هزینه‌ی بالایی دارد.

روش‌های تماسی دیگری نظیر اندازه‌گیری اصطکاک بین سطح و یک شی متحرک وجود دارد. البته در این روش و نظیر این روش، این که چه پارامترهایی از ناصافی سطح اندازه‌گیری شده اند واضح نیست.

۲-۲-۱: روش‌های غیر تماسی

از مهم‌ترین روش‌های غیر تماسی برای اندازه‌گیری ناصافی سطوح، روش پراکندگی نور است که به دلیل غیر مخرب بودن، کاربرد ارزان و آسان، امکان مطالعه‌ی سطوح وسیع و توانایی اندازه‌گیری در لحظه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بنابراین ابتدا به طور خلاصه به نظریه‌های پراکندگی نور از سطوح ناصاف اشاره می‌شود و سپس انواع روش‌های تجربی غیر تماسی شرح داده می‌شود.

۱-۲-۲-۱: نظریه های پراکندگی از سطوح ناصاف: اختلال و کیرشهف

به طور کلی دو تقریب برای پراکندگی موج از سطوح ناصاف استفاده می شود، یکی نظریه ی اختلال و دیگری نظریه ی کیرشهف. روش مبتنی بر نظریه ی کیرشهف پایه ی فیزیکی ساده ای دارد که در آن با اعمال بعضی از محدودیت ها یک بیان تحلیلی برای میدان پراکنده از سطوح ناصاف ارائه می دهد. رفتار هر نقطه واقع بر سطح پراکنده را مانند حالتی در نظر می گیرند که این نقطه واقع بر صفحه ی بی نهایت موازی با تانژانت موضعی در آن نقطه از سطح است. بدیهی است این نظریه برای پراکندگی نور از سطح پراکنده ی صاف و تخت که نامحدود است، راه حل دقیقی دارد ولی برای سطوحی که اندازه ی محدود دارند و سطوحی با ناصافی زیاد، یک تقریب به حساب می آید. نتایج تجربی برای سطوحی که ناصافی آن ها در مقایسه با طول موج نور فرودی کوچک است با نظریه مطابقت دارد.

در نظریه ی اختلال، میدان پراکنده بر حسب سری توانی از انحراف ارتفاع بیان می شود و به وضوح فقط برای سطوح با ناصافی کوچک معتبر است. نظریه ی اختلال در صورتی قابل استفاده است که تابع ارتفاع سطح $h(x, y)$ در شروط زیر صدق کند:

$$k|h(x, y)| \ll 1$$

$$|\nabla h(x, y)| \ll 1 \quad (۲۷-۱)$$

میدان نهایی در حضور پراکنده به صورت جمع میدان فرودی و میدان پراکنده نوشته می شود:

$$\psi(\vec{r}) = \psi^{inc}(\vec{r}) + \psi^{sc}(\vec{r}) \quad (۲۸-۱)$$

می توان از نظریه ی اختلال برای مطالعه ی پراکندگی امواج استفاده کرد و کمیت هایی را که تابعی از ارتفاع سطح هستند، حول مقدارشان روی سطح میانگین، بسط تیلور داد. در این نظریه سطح میانگین، صفحه ای است که در $z = 0$ قرار دارد. بنابراین بسط تیلور به شکل زیر است:

$$f(x, y, h) = f(x, y, 0) + hf_z(x, y, 0) + \frac{h^2}{2}f_{zz}(x, y, 0) + \dots \quad (۲۹-۱)$$

که در آن $f_z = \partial f / \partial z$ است و برای مشتقات مرتبه های بعدی نیز روابط مشابهی وجود دارد.

در نظریه های پراکندگی نور از سطوح ناصاف، با اندازه گیری شدت نور پراکنده ی همدوس در راستای بازتاب آینه ای یا عبور نور در راستای شکست معمولی، ناصافی سطح و با اندازه گیری توزیع فضایی شدت نور پراکنده ی پخشی طول همبستگی سطوح را تعیین می کنند.

۱-۲-۲: انواع روش های تجربی غیرتماسی

۱-۲-۲-۱: روش های الکتریکی:

در این روش ها، با اندازه گیری و مقایسه ی ظرفیت، مقاومت و القا در سطح مرجع و سطوح ناصاف، پارامترهای ناصافی را اندازه گیری می کنند.

به عنوان مثال، می دانیم ظرفیت بین دو عنصر رسانا رابطه ی مستقیم با مساحت رساناها و ثابت دی الکتریک ماده بین آن ها و رابطه ی عکس با فاصله ی بین دو عنصر رسانا دارد. در یکی از روش های الکتریکی، سطح صافی را بالای یک سطح ناصاف قرار داده و ظرفیت خازن ایجاد شده را به عنوان مرجع اندازه گیری می کنند. با حرکت دادن سطح صاف، و ثابت بودن باقی عوامل، نمایه ی سطح ناصاف محاسبه می شود. (توضیحات بیشتر در مرجع) [۳۱،۳۰]

در القا نیز، افزایش فاصله ی بین دو سطح باعث کاهش القا می شود، بنابراین ناصافی سطوح مغناطیسی تابعی از میزان القای آن ها است.

مزیت استفاده از این روش ها هزینه ی کم و سرعت آن ها است، و عیب آن ها محدودیت در جنس سطوح است (مغناطیسی، رسانا، ...)

۱-۲-۲-۲: روش های میکروسکوپی (SPM^{11}):

به تکنیک هایی گفته می شود که در آن یک جاروب کننده حرکت های عمودی کوچک ناشی از ناصافی نمونه را تشخیص می دهد. با حرکت جاروب کننده، مبدل پیزو الکتریک برهم کنش با سطح را تبدیل به سیگنال می کند. از میان این روش ها، دو روش SEM^{12} و AFM^{13} را بررسی می کنیم. [۳۲،۳]

الف) میکروسکوپ روبش الکترونی، SEM :

اساس کار میکروسکوپ روبش الکترونی به برهم کنش الکترون با سطح و تولید الکترون های ثانویه استوار است. در این روش از یک فیلمان، که معمولاً از جنس تنگستن است، به منظور تولید الکترون استفاده می شود. باریکه ی الکترونی پس از موازی شدن به باریکه ای به عرض حدود چند نانومتر تبدیل می شود. عرض باریکه عامل تعیین کننده ی قدرت تفکیک این میکروسکوپ ها

¹¹Scanning Probe Microscopy

¹²Scanning Electron Microscopy

¹³Atomic Force Microscopy

است که امروزه با توسعه *SEM* به حدود $5/7\text{ nm}$ رسیده است. الکترون ها تحت تاثیر میدان الکتریکی شتاب می گیرند و به انرژی حدود 20 keV می رسند. سپس این الکترون ها روی سطح تابش می شوند. در اثر برخورد با سطح، ساز و کارهای مختلفی به وجود می آید که یکی از آن ها تولید الکترون های ثانویه است. الکترون های ثانویه از برخورد باریکه ی الکترونی مقید ضعیف که در باند رسانایی نمونه هستند ایجاد می شوند. سپس این الکترون های ثانویه آشکار سازی می شوند، نکته ی قابل توجه این است که الکترون ها در هوا، دارای طول پیمایش حدود 30 cm هستند و خیلی زود انرژی خود را از دست می دهند. بنابراین تمامی سیستم در محیط خلاء قرار می گیرد. فشار درون محفظه حدود 10^{-3} torr است. سطح مورد نظر به وسیله ی باریکه ی الکترونی جاروب می شود. الکترون های ثانویه، الکترون هایی با انرژی کم هستند بنابراین فقط آن هایی که در چند نانومتر اولیه ی سطح نمونه تشکیل می شوند انرژی کافی دارند که از سطح فرار کنند و آشکار سازی شوند. شکلی که توسط *SEM* تشکیل می شود نتیجه ی شدت گسیل الکترون های ثانویه از هر نقطه x, y نمونه است. این روش یکی از کامل ترین روش های بررسی سطح است. از عیب های این روش می توان گرانی و غیر قابل حمل بودن را نام برد.

همچنین این روش تنها برای سطوح رسانا کاربرد دارد. در موارد دیگر باید روی سطح پوشش رسانا داده شود در نتیجه زمان نهایی مورد نیاز، بسیار زیاد است.

ب) میکروسکوپ روبش تونلی، *STM*:

STM در ابتدا به عنوان روشی برای اندازه گیری نیرو های بین ذراتی به کوچکی اتم پیشنهاد شد. این روش شبیه روش سوزنی است که در آن یک سوزن سطح را جاروب می کند. تفاوت اصلی در این است که کاوشگر با سطح تماس ندارد و بر اساس اعمال پتانسیل بر سطح نمونه و در نتیجه، ایجاد امکان تونل زنی برای الکترون های موجود در سطح کار می کند. پتانسیل بین سطح نمونه و سوزنی با ابعاد بسیار کوچک اعمال می شود. این سوزن از جنس فلزات سخت مثل تنگستن و پلاتین است. برای بدست آوردن نمایه ی سطح در حالی که ارتفاع سوزن را ثابت نگه داشته اند، پتانسیل ثابتی را اعمال می کنند. وقتی ارتفاع ثابت باشد به علت پستی و بلندی های سطح جریان تونلی بین سوزن و سطح متغیر است، هر چه سوزن به سطح نزدیک تر باشد، جریان تونلی بیشتر و هر چه دور تر باشد این جریان کمتر است. بنابراین می توان از تغییرات جریان، نمایه ی سطح و شکل اتم ها را جاروب کرد. همچنین می توان جریان را ثابت گرفت و از تغییرات ارتفاع سوزن، نمایه ی سطح را بدست آورد. در این روش ابعاد نوک سوزن کاوشگر یکی از عوامل محدود کننده است. امروزه مقادیری از مرتبه ی ابعاد اتم امکان پذیر است. این روش به نمونه های رسانا و نیمه رسانا محدود می شود و برای سطوح با ابعاد کوچک مناسب است. [۲۸،۳].

ج) میکروسکوپ نیرو- اتمی، AFM :

اختراع AFM به خاطر توسعه ای بود که در STM رخ داد. AFM به عنوان بسط و ترکیبی از اصول STM و ابزار سوزنی توسعه یافت. توانایی این دستگاه در مشاهده ی شبکه ی اتمی سطح یک نمونه، برای مخترعانش جایزه نوبل سال ۱۹۸۶ را به ارمغان آورد. کاربرد AFM روز به روز در آزمایشگاه ها بیشتر و عمومی تر می شود. اگر چه STM قدرت تفکیک زیر نانومتر در سه بعد را دارد اما به نمونه های رسانا و نیمه رسانا محدود می شود. برای بدست آوردن تصاویری از عایق ها همانند رساناها، AFM توسعه پیدا کرد. AFM نمایه ی سه بعدی سطح را با دقت جانبی در حدود نانومتر و دقت عمودی زیر آنگستروم برای رساناها، نیمه رساناها و عایق ها تعیین می کند.

AFM شامل یک سوزن نوک تیز است که روی انتهای پایه ای انعطاف پذیر قرار دارد و سطح نمونه را جاروب می کند. این سوزن در مجاورت سطح نمونه قرار داده می شود، نیروی بین سوزن و سطح مورد بررسی موجب انحراف نگه دارنده می شود. میزان خمیدگی نگه دارنده توسط تابش لیزر بر آن اندازه گیری می شود. نگه دارنده در جابه جایی های کوچک از قانون هوک پیروی می کند. اگر سوزن در ارتفاع ثابتی باشد در اثر برخورد سوزن با سطح روی سطح خراش ایجاد می شود. بنابراین با استفاده از یک سیستم پشتیبان، سوزن و سطح به گونه ای نسبت به هم حرکت می کنند که فاصله بین آن ها ثابت باشد. سیستم پشتیبان پیزو الکتریکی است که نسبت به تغییرات نیروی اتمی بین سوزن و سطح حساس است و با تغییر فاصله بین سوزن و سطح، این نیرو را همواره ثابت نگه می دارد. در این حالت با جابجایی سوزن در راستای عمودی می توان نقشه ی توپو گرافی سطح را به صورت $S(x, y)$ رسم کرد. [۳، ۳۳].

قدرت تفکیک در AFM به عوامل زیر بستگی دارد:

حساسیت آشکارسازی: در AFM با استفاده از روش های اپتیکی می توان میزان خمیدگی عمودی نگه دارنده را از مرتبه ی پیکومتر اندازه گرفت. پرتو لیزری به نگه دارنده تابانده شده و انحراف نگه دارنده باعث انحراف پرتوی بازتابی از آن می شود. این پرتو به آشکار ساز حساس به مکان، که آرایه ای از فوتودیود ها تشکیل شده است، برخورد می کند.

انعطاف پذیری نگه دارنده: جنس نگه دارنده ها معمولاً از جنس سیلیکون، اکسید سیلیکون یا نیتريد سیلیکون، با یک لایه ی بسیار نازک طلا برای افزایش ضریب بازتاب آن ها ساخته می شوند. ثابت ارتعاش آن ها بین ۰.۱ تا ۵۰ نیوتن بر متر و طول آن ها حدود $100 \mu m$ است.

تیزی نوک سوزن: برای این که سوزن AFM بتواند به اندازه کافی به سطح نمونه نزدیک شود باید کاملاً نوک تیز باشد. بنابراین شعاع انحنای نوک سوزن پارامتر مهمی به شمار می رود و اغلب جزء محدودیت های بالا بردن قدرت تفکیک AFM است. معمولاً طول این سوزن ها در حدود $3 \mu m$ و شعاع انحنای نوک آن ها بین $2 nm$ تا $20 nm$ است.

۱-۲-۳-۳: روش های اپتیکی:

روش های اپتیکی به دلیل غیر مخرب بودن، ارزان بودن و سرعت بالای آن ها از اهمیت ویژه ای برخوردارند. اسمالتز در سال ۱۹۲۷ اولین شخصی بود که از روش اپتیکی برای بررسی ناصافی سطح استفاده کرد. او نور موازی را پس از گذشتن از لبه ی چاقو با زاویه به سطح ناصاف تاباند و نمایه ی سطح را با دیدن سایه ی چاقو روی سطح مشاهده کرد [۳].

در حالت کلی روش های اپتیکی را می توان به سه دسته ی اصلی تقسیم کرد:

روش پراکندگی، روش نمایه سنجی اپتیکی و روش تداخل سنجی.

الف) روش پراکندگی:

اکثر روش های پراکندگی برای تعیین ناصافی سطوح، روش های تجربی اند و به عنوان نوعی مقایسه گر استفاده می شوند. در این میان می توان به روش های براق سنجی که در آن نور پراکنده به وسیله یک یا دو آشکارساز اندازه گیری می شود، اشاره کرد. یکی از آشکارسازها معمولاً در جهت بازتاب آینه ای و آشکار ساز دوم در زاویه ای دیگر برای اندازه گیری نور پراکنده پخشی استفاده می شود. ناصافی سطح از روی نسبت شدت های اندازه گیری شده به وسیله دو آشکار ساز تخمین زده می شود. در روش های دیگر پراکندگی اندازه ی شدت در جهت بازتاب آینه ای نسبت به شدت بازتابی از یک سطح صاف و یا پخش شدگی زاویه ای نور در اطراف بازتاب آینه ای برای تخمین ناصافی سطح مورد استفاده قرار می گیرد. مزیت اصلی روش های پراکندگی سرعت بالای آن ها و امکان اندازه گیری در لحظه است و دیگر این که امکان جاروب مساحت بزرگی از سطح ناصاف وجود دارد.

ب) روش نمایه سنجی اپتیکی:

این روش اندازه گیری اپتیکی غیر تماسی روی خواص کانونی کردن نور به وسیله ی قطعات اپتیکی پایه گذاری شده است [۶].

ج) روش تداخل سنجی:

در این روش ها از تداخل نور پراکنده ی همدوس از سطح ناصاف و نور بازتابی از سطح مرجع صاف فریزهای تداخلی به وجود می آید و نمایانی فریزها را مورد بررسی قرار می گیرد [۳]. می توان از تداخل سنج تویمن-گرین برای مطالعه ی سطح استفاده کرد، ولی این روش تنها محدود به سطح هایی با ناصافی کم است.

۱-۲-۲-۴-۶ جمع بندی در مورد روش های مختلف:

نوع روش به کار رفته برای تعیین ناصافی، توسط طبیعت ناصافی سطح مورد آزمون، تعیین می شود. انتخاب هر کدام از این روش ها به جنس و مشخصات سطح، کاربرد روش و دقت اندازه گیری بستگی دارد.

اگر پهنای نوک سوزن در مقایسه با جدایی جانبی ناهمواری ها کوچک باشد، ابزار سوزنی می تواند نمایه ی سطح را به درستی تعیین کند. این ابزار برای سطوح سخت با قدرت تفکیک کمتر از ۱ نانومتر در ارتفاع و قدرت تفکیک جانبی کوچک تر از ۰/۱ میکرومتر مناسب است.

یک تکنیک دقیق و ایده آل برای اندازه گیری پارامترهای سطح، باید تکرار پذیر و سریع باشد، در هر بار آزمایش بتواند منطقه ی زیادی از سطح را پوشش دهد و همچنین نباید به سطح آسیب برساند. روش های اپتیکی به دلیل داشتن این خصوصیات به روش سوزنی ترجیح داده می شوند.

روش های پراکندگی نور برای تعیین کمیت های آماری ناصافی سطح، σ و λ_0 به کار می روند و توانایی تعیین نمایه ی سطح را ندارند.

AFM احتمالاً عمومی ترین روش اندازه گیری است که هم تصویری از سطح می دهد و هم ناصافی را به صورت کمی اندازه گیری می کند. اما برای سطوح بزرگ نیاز به یک اپراتور ماهر دارد. این روش نسبتاً یک روش مخرب محسوب می شود و پرهزینه و وقت گیر است. همچنین مشکل کالیبراسیون، یک مشکل عمومی برای میکروسکوپ های روبشی است.

فصل دوم

مطالعه‌ی نظری تاثیر ناصافی سطح بر نمایانی شدت نور در فاصله‌ی تالبوت

در این فصل، روشی جدید برای اندازه گیری سطوح ناصاف ارائه می شود، که در آن از نظریه‌ی تالبوت برای محاسبه‌ی ناصافی استفاده شده است. اثر تالبوت، یک اثر تداخلی است که اولین بار توسط هنری تالبوت در سال ۱۸۳۶ مشاهده شد. هنگامی که موج تخت همدوس از توری پراش عبور می کند، تصویر پراش در فواصل مشخصی متناوباً تکرار می شود. فاصله ای که در آن تصاویر توری تکرار می شود، فاصله‌ی تالبوت نام دارد و تصاویر تشکیل شده از پراش، تصویر تالبوت^{۱۴}، فوریه^{۱۵} و یا خودتصویر^{۱۶} نامیده می شوند. در نصف فاصله‌ی تالبوت، تصویر تالبوت با اختلاف فاز π تشکیل می گردد و همچنین در نسبت های کوچک تر از فاصله‌ی تالبوت، تصاویری از تداخل امواج به وجود می آید که از نظر پهنای شیارها، با تناوب توری متناسبند.

ریلی نشان داد اثر تالبوت بر اساس فرمول مقابل محاسبه می شود:

$$z_{talbot} = \frac{2d^2}{\lambda}$$

که در آن d دوره‌ی تناوب توری پراش و λ طول موج عبوری از توری است.

با تاباندن لیزر به یک توری پراش، تصاویر تالبوت این توری در فواصل معین تشکیل می شود. در این روش از میزان نمایانی تصاویر تالبوت توری برای محاسبه‌ی پارامترهای ناصافی استفاده شده است. با مقایسه‌ی نمایانی در حالت بازتاب از شیشه‌ی مرجع و نمایانی در حالت بازتاب از شیشه‌ی ناصاف، می توان میزان ناصافی را محاسبه کرد. در این روش، سرعت اندازه گیری بالا است و در زمان کمی می توان سطح زیادی از جسم ناصاف را بررسی کرد.

در ابتدای این فصل رابطه‌ی نمایانی توزیع شدت نور همدوس بازتابی از سطح ناصاف در فاصله‌ی تالبوت محاسبه می شود. سپس تاثیر ناصافی سطح بر این نمایانی مورد مطالعه قرار می گیرد و نشان داده می شود که رابطه‌ی نمایانی در فواصل تالبوت، به طول همبستگی سطح و میزان نا همدوسی نور مربوط است که نا همدوسی نور نیز متناسب با ناصافی سطح است. در نهایت، پارامتر ناصافی سطح از روی نسبت نمایانی در حضور سطح ناصاف، و نمایانی سطح صاف مرجع به طور نظری محاسبه خواهد شد.

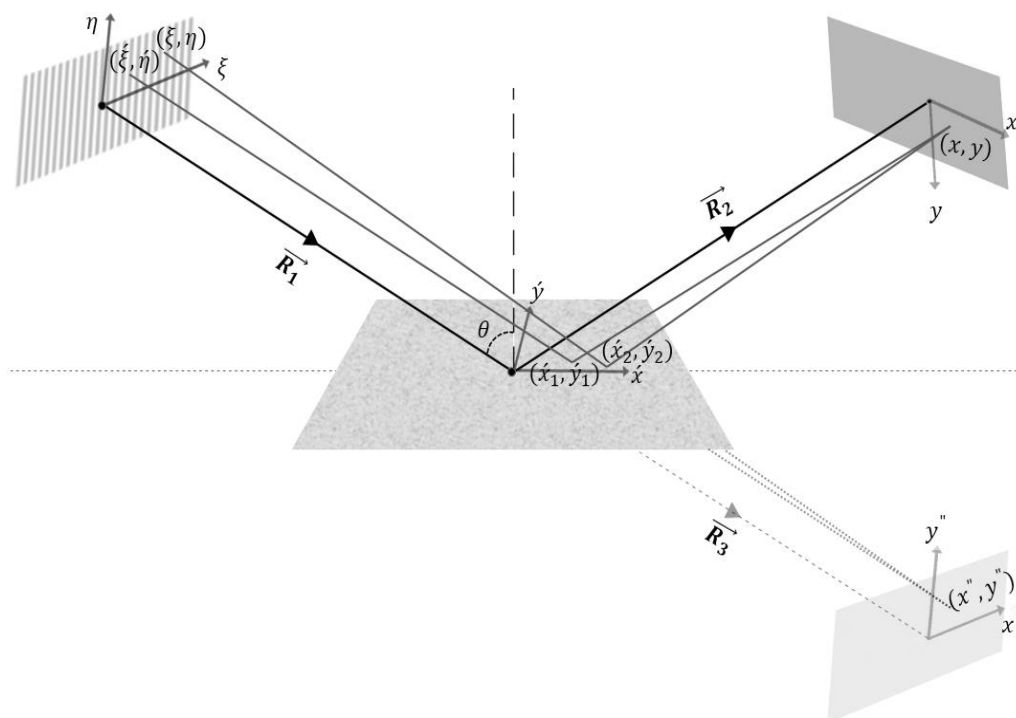
^{۱۴}Talbot Image

^{۱۵}Fourier Image

^{۱۶}Self Image

برای این منظور ابتدا محاسبات را از توری پراش رانکی (که در آزمایشگاه نیز به طور تجربی از این توری استفاده شده است) شروع می‌کنیم، سپس از منظر تئوری به بررسی توری پراش سینوسی می‌پردازیم و بعد یک رهیافت جالب برای بدست آوردن ضریب شکست مواد ارائه می‌دهیم.

۱-۲ محاسبه‌ی شدت نور پراکنده بازتابی از سطوح ناصاف بعد از عبور از توری پراش رانکی



شکل ۱-۲ باریکه‌ی نور موازی، هم‌دوس و تکفام، که با سطح ناصاف زاویه‌ی θ دارد، به توری پراش رانکی که عمود به باریکه در صفحه $\xi - \eta$ قرار گرفته است، می‌تابد و بعد از بازتاب از سطح ناصاف (صفحه $\xi' - \eta'$) به نقطه (x, y) در صفحه‌ی $x - y$ می‌رسد.

مطابق با شکل ۱-۲ باریکه‌ی نور موازی، هم‌دوس و تکفام که با سطح ناصاف زاویه‌ی θ دارد، به توری پراش رانکی که عمود به باریکه در صفحه $\xi - \eta$ قرار گرفته، می‌تابد و مطابق با نظریه پراش در محدوده فرنل، انتشار می‌یابد. باریکه‌ی نور از سطح ناصاف (صفحه $\xi' - \eta'$) پراکنده می‌شود. صفحه‌ی $x - y$ نیز صفحه‌ی مشاهده است همان‌طور که در شکل مشخص است، فاصله‌ی طولی بین مراکز دو صفحه‌ی $\xi - \eta$ و $x - y$ مطابق شکل برابر است با: $|\vec{R}_1| + |\vec{R}_2|$.

برای این که حس مشهودتری داشته باشیم می‌توانیم رهیافت زیر را در نظر بگیریم:

مطابق با شکل ۱-۲ صفحه‌ی فرضی $x'' - y''$ را که معادل با بازتاب آینه‌ای صفحه‌ی $x - y$ نسبت به صفحه‌ی $\xi' - \eta'$ (صفحه‌ی سطح ناصاف) است را در نظر می‌گیریم. پس هر نقطه‌ی دلخواه مثل (x, y) در صفحه‌ی $x - y$ ، معادل با نقطه‌ی

(x'', y'') در صفحه‌ی $x'' - y''$ است. در واقع تمامی پرتوهایی که از صفحه‌ی $x' - y'$ بازتاب می‌یابند و به نقطه‌ی (x, y) می‌رسند، معادل با عبور همان پرتوها از صفحه‌ی $x' - y'$ و نقطه‌ی (x'', y'') هستند. به عنوان مثال همان‌طور که در شکل ۲-۱ مشاهده می‌شود دو پرتو که از نقطه‌های (x'_1, y'_1) و (x'_p, y'_p) از سطح ناصاف بازتاب می‌یابند و به نقطه‌ی (x, y) می‌رسند، در عبور نقطه‌ی (x'', y'') را تشکیل می‌دهند. در واقع می‌توان گفت تصویری که در نقطه‌ی (x, y) تشکیل می‌شود معادل با بازتاب آینه‌ای این نقطه نسبت به صفحه‌ی $x' - y'$ است با این تفاوت که در نقطه‌های (x'_1, y'_1) و (x'_p, y'_p) به جای این که در عبور، دامنه‌های پرتو فرودی ضرب در اختلاف فاز عبوری شوند، در اختلاف فاز بازتابی معادل با بازتاب پرتوها ضرب گردند، یعنی در هر نقطه از سطح مانند (x'_1, y'_1) ، دامنه پرتو فرودی ضرب در اختلاف فاز بازتابی شود و پرتو در عبور بررسی گردد.

هم‌چنین مطابق شکل ۲-۱ فاصله‌ی مراکز دو صفحه‌ی $\xi - \eta$ و $x'' - y''$ برابر است با: $|\vec{R}_1| + |\vec{R}_3|$ که با توجه به توضیحات داده شده $|\vec{R}_2| = |\vec{R}_3|$.

با این مقدمه و قرار دادن عبارت $|\vec{R}_1| + |\vec{R}_2| = z$ انتگرال فرنل را حل می‌کنیم:

دامنه‌ی نور بازتابی در نقطه‌ی (x, y) که می‌توانیم آنرا به صورت معادل در نقطه‌ی (x'', y'') فرض کنیم (شکل ۲-۱)، بدین صورت محاسبه می‌شود:

دامنه‌ی باریکه‌ی نور همدوس، موازی و تکفام پس از عبور از توری به صورت زیر درمی‌آید:

$$\psi(\xi, \eta) = A_0 g(\xi, \eta) \quad (1-2)$$

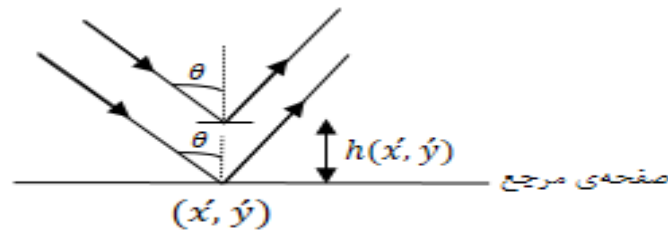
که در آن A_0 دامنه‌ی نور فرودی و

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[1 + c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \cos\left(\frac{n2\pi\xi}{d}\right) \right) \right] \quad (2-2)$$

بسط فوریه‌ی تابع گذردهی دامنه‌ی نور از توری رانکی (مربعی) با ضریب گذردهی دامنه c است.

هم‌چنین برای تشکیل تصویر در نقطه‌ی (x, y) {معادل با نقطه‌ی (x'', y'') در عبور} نور در هنگام بازتاب از سطح ناصاف باید در اختلاف فاز بازتابی ضرب گردد که این اختلاف فاز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

در صورتی که پرتویی با زاویه‌ی θ به سطح ناصاف برخورد کند، اختلاف فاز نسبت صفحه‌ی مرجع (صفحه‌ای که میانگین افت‌وخیزهای ارتفاع نسبت به آن برابر صفر است) مطابق شکل (۲-۲) با رهیافتی که در ادامه بررسی می‌شود، بدست می‌آید:



شکل ۲-۲ پرتویی با زاویه θ از سطح بازتابیده می‌شود. وقتی که سطح صاف است، پرتو در نقطه (x', y') از صفحه مرجع بازتابیده می‌شود. ولی وقتی که سطح ناصاف است، پرتو در نقطه (x', y') از ارتفاع $h(x', y')$ بازتابیده می‌شود.

وقتی که سطح صاف است پرتو در نقطه‌ی (x', y') از صفحه‌ی مرجع بازتابیده می‌شود. ولی وقتی که سطح ناصاف است، پرتو در نقطه‌ی (x', y') از ارتفاع $h(x', y')$ بازتابیده می‌شود. اختلاف راه نوری پرتو بازتابیده از سطح ناصاف و پرتو بازتابیده از سطح مرجع برابر با $\Delta = 2h(x', y') \cos \theta$ است.

با بدست آوردن اختلاف فاز، دامنه در نقطه‌ی (x, y) {معادل با نقطه‌ی (x'', y'') جهت درک بهتر} برابر می‌شود با [۳۴]:

$$\psi(x, y) =$$

$$\frac{A_0}{2i\lambda} \iint t(x', y') \left[1 + c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n2\pi\xi}{d}\right) \right) \right] \times \frac{\exp(-ik/2z [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2])}{z} d\xi d\eta \quad (۳-۲)$$

که در آن

$$t(x', y') = \exp(ik2 \cos(\theta) h) \quad (۴-۲)$$

دامنه‌ی نور بازتابی از سطح ناصاف را نشان می‌دهد و θ زاویه نور فرودی بر سطح ناصاف و $h = h(x', y')$ ارتفاع هر نقطه‌ی سطح از صفحه‌ی میانگین است.

شدت متناظر با $\psi(x, y)$ برابر است با:

$$\langle I(x, y) \rangle = \langle \psi(x, y)^* \psi(x, y) \rangle \quad (۵-۲)$$

در نتیجه داریم:

$$\langle I(x, y) \rangle =$$

$$\begin{aligned} \frac{A_0^2}{4(\lambda z)^2} \iint \iint & \langle t(x'_2, y'_2)^* t(x'_1, y'_1) \times \left\{ 1 + c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n2\pi\xi}{d}\right) \right) \right\} \\ & \times \left\{ 1 + c \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m2\pi\xi'}{d}\right) \right) \right\} \\ & \times \exp(-ik/2z [(x - \xi')^2 + (y - \eta')^2]) \\ & \times \exp(ik/2z [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]) \rangle d\xi' d\eta' d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6-2)$$

با بسط رابطه فوق و جای گذاری $I_0 = A_0^2$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle I(x, y) \rangle &= \frac{I_0}{4(\lambda z)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \iint \iint \\ & \langle t(x, y)^* t(x, y) \\ & \times \left\{ 1 + c^2 \frac{16}{mn\pi^2} \left(\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \cos\left(\frac{2n\pi}{d}\xi\right) \cos\left(\frac{2m\pi}{d}\xi'\right) \right. \\ & \left. + c \left(\frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n2\pi\xi}{d}\right) \right) + c \left(\frac{4}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m2\pi\xi'}{d}\right) \right) \right\} \\ & \times \exp(-ik/2z [(x - \xi')^2 + (y - \eta')^2]) \\ & \times \exp(ik/2z [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]) \rangle d\xi' d\eta' d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7-2)$$

تا این جا تابعیت همه‌ی اجزای انتگرال (۶-۲) غیر از $\langle t(x'_2, y'_2)^* t(x'_1, y'_1) \rangle$ مشخص است. بنا بر این ابتدا باید تابعیت این تابع مشخص شود.

از رابطه (۴-۲) داریم:

$$\langle t(x'_2, y'_2)^* t(x'_1, y'_1) \rangle = \langle \exp[ik2 \cos(\theta) (h(x'_2, y'_2) - h(x'_1, y'_1))] \rangle \quad (8-2)$$

برای تابع توزیع ارتفاع گاوسی،

$$P(h) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right], \quad (9-2)$$

در آن σ ریشه‌ی میانگین مجذور ارتفاع یا ناصافی سطح است، خواهیم داشت: [۳۵]

$$\langle t(\xi, \eta)^* t(\xi', \eta') \rangle = \exp[-k^2(2 \cos(\theta))^2 \sigma^2 \times (1 - C(x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1))] \quad (10-2)$$

که در آن $C(x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1)$ تابع همبستگی بین دو نقطه از سطح ناصاف است که تنها تابع تفاضل مختصات دو نقطه از سطح است. بنابراین تابع $\langle t(\xi, \eta)^* t(\xi', \eta') \rangle$ نیز فقط به تفاضل مختصات دو نقطه مربوط می شود.

با توجه به شکل ۱-۲ با استفاده از قوانین ساده هندسه می توان روابط زیر را بدست آورد

$$x'_2 - x'_1 = \alpha (\xi - \xi') \quad (11-2)$$

$$y'_2 - y'_1 = \beta (\eta - \eta') \quad (12-2)$$

که $\alpha \cong \frac{|\vec{R}_3|}{(|\vec{R}_3| + |\vec{R}_1|) \cos \theta}$ و $\beta \cong \frac{|\vec{R}_3|}{(|\vec{R}_3| + |\vec{R}_1|)}$ می دانیم که: $|\vec{R}_3| = |\vec{R}_2|$ در نتیجه :

$$\begin{aligned} \langle t(\xi, \eta)^* t(\xi', \eta') \rangle &= \exp \left[-k^2 (2 \cos(\theta))^2 \sigma^2 \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - C(\alpha (\xi - \xi'), \beta (\eta - \eta')) \right) \right] \end{aligned} \quad (13-2)$$

با توجه به این که تابع همبستگی تنها به تفاضل دو نقطه از سطح بستگی دارد بنابراین تابع $\langle t(\xi, \eta)^* t(\xi', \eta') \rangle$ نیز فقط به تفاضل مختصات دو نقطه مربوط می شود. با معادل قرار دادن $\langle t(\xi, \eta)^* t(\xi', \eta') \rangle$ با $T(\alpha (\xi - \xi'), \beta (\eta - \eta'))$ و اعمال تغییر متغیرهای

$$\xi - \xi' = X \quad \xi + \xi' = Y \quad \eta - \eta' = X' \quad \eta + \eta' = Y' \quad (14-2)$$

، معادله (۱۴-۲) به انتگرال زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}
\langle I(x, y) \rangle = & \frac{I_0}{16(\lambda z)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \iint \iint \langle T(\alpha X, \beta X') \left\{ 1 + c^2 \frac{16}{mn\pi^2} \left(\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \right. \\
& \times \cos\left(\frac{n\pi}{d}(X+Y)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{d}(X-Y)\right) \\
& + c \left(\frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{d}(X+Y)\right) \right) \\
& \left. + c \left(\frac{4}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{d}(X-Y)\right) \right) \right\} \\
& \times \exp(ik/2z [XY + X'Y' - 2Xx - 2X'y]) \rangle dXdYdX'dY' \quad (15-2)
\end{aligned}$$

با توجه به این که سطح انتگرال گیری به اندازه کافی بزرگ است، می توان کران انتگرال را به بی نهایت میل داد و از رابطه ی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia(X-X')k} dk = \frac{2\pi}{a} \delta(X - X') \quad (16-2)$$

که از خواص مهم دلتای دیراک است در حل مسئله کمک گرفت.

برای ساده تر شدن حل مسئله، انتگرال (15-2) را به چهار جمله ی تشکیل دهنده اش تقسیم می کنیم و جملات را یک به یک محاسبه می کنیم.

$$\langle I(x, y) \rangle = \frac{I_0}{16(\lambda z)^2} \langle (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \rangle \quad (17-2)$$

محاسبه ی جمله اول:

$$\begin{aligned}
I_1 = & \iint \iint T(\alpha X, \beta X') \times \exp(ik/2z [XY + X'Y' - 2Xx - 2X'y]) \\
& \times dXdYdX'dY' \quad (18-2)
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن انتگرال (16-2) خواهیم داشت:

$$I_1 = 2\lambda z \iiint \delta(X') T(\alpha X, \beta X') \times \exp(ik/2z [XY - 2Xx - 2X'y]) dXdYdX' \quad (19-2)$$

با انتگرال گیری روی dX' ، I می شود:

$$I_1 = 2\lambda z \iint T(\alpha X, 0) \exp(ik/2z [XY - 2Xx]) dXdY \quad (20-2)$$

با توجه به روابط (۲-۱۶) و (۲-۱۷) داریم:

$$I_1 = (2\lambda z)^2 \int \delta(X) T(\alpha X, 0) \times \exp(ik/2z [-2Xx]) dX \quad (2-21)$$

با انتگرال گیری روی dX ، I می شود:

$$I_1 = (2\lambda z)^2 T(0,0) \quad (2-22)$$

جمله ی دوم:

$$\begin{aligned} I_2 = & \iint \iint T(\alpha X, \beta X') \left\{ c^2 \frac{16}{mn\pi^2} \left(\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \right. \\ & \times \cos\left(\frac{n\pi}{d}(X+Y)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{d}(X-Y)\right) \Big\} \\ & \times \exp(ik/2z [XY + X'Y' - 2Xx - 2X'y]) dXdYdX'dY' \end{aligned} \quad (2-23)$$

با در نظر گرفتن انتگرال (۲-۱۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I_2 = & c^2 \frac{16}{mn\pi^2} \left(\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) 2\lambda z \iiint \delta(X') T(\alpha X, \beta X') \\ & \times \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{d}(X+Y)\right) \times \cos\left(\frac{m\pi}{d}(X-Y)\right) \right\} \\ & \times \exp(ik/2z [XY - 2Xx - 2X'y]) dXdYdX' \end{aligned} \quad (2-24)$$

با انتگرال گیری روی dX' ، I می شود:

$$\begin{aligned} I_2 = & c^2 \frac{16}{mn\pi^2} \left(\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) 2\lambda z \iint T(\alpha X, 0) \\ & \times \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{d}(X+Y)\right) \times \cos\left(\frac{m\pi}{d}(X-Y)\right) \right\} \\ & \times \exp(ik/2z [XY - 2Xx]) dXdY \end{aligned} \quad (2-25)$$

با نوشتن $\cos(x)$ به صورت نمایی، بعد از مرتب سازی توان ها داریم:

$$\begin{aligned}
I_2 = c^2 \frac{8}{mn\pi^2} & \left(\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \lambda z \iint \delta(X) T(\alpha X, 0) \\
& \times \left\{ \exp\left(-i\pi\left(\frac{m+n}{d} + \frac{2x}{\lambda z}\right)X\right) \times \exp\left(-i\pi\left(\frac{m-n}{d} - \frac{X}{\lambda z}\right)Y\right) \right. \\
& + \exp\left(-i\pi\left(\frac{m-n}{d} + \frac{2x}{\lambda z}\right)X\right) \times \exp\left(-i\pi\left(\frac{m+n}{d} - \frac{X}{\lambda z}\right)Y\right) \\
& + \exp\left(i\pi\left(\frac{m-n}{d} - \frac{2x}{\lambda z}\right)X\right) \times \exp\left(-i\pi\left(\frac{m+n}{d} - \frac{X}{\lambda z}\right)Y\right) \\
& + \exp\left(i\pi\left(\frac{m+n}{d} - \frac{2x}{\lambda z}\right)X\right) \\
& \left. \times \exp\left(i\pi\left(\frac{m-n}{d} + \frac{X}{\lambda z}\right)Y\right) \right\} dXdY
\end{aligned} \tag{۱-۲}$$

با توجه با رابطه‌ی (۱۶-۲) داریم:

$$\begin{aligned}
I_2 = c^2 \frac{16}{mn\pi^2} & \left(\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) (\lambda z)^2 \\
& \times \left\{ T\left(\frac{\lambda z \alpha(m-n)}{d}, 0\right) \right. \\
& \times \exp\left(-i\pi\left(\frac{m+n}{d} + \frac{2x}{\lambda z}\right)\left(\frac{m-n}{d}\right)\lambda z\right) + T\left(\frac{\lambda z \alpha(m+n)}{d}, 0\right) \\
& \times \exp\left(-i\pi\left(\frac{m-n}{d} + \frac{2x}{\lambda z}\right)\left(\frac{m+n}{d}\right)\lambda z\right) \\
& + T\left(\frac{-\lambda z \alpha(m-n)}{d}, 0\right) \\
& \times \exp\left(-i\pi\left(\frac{m+n}{d} - \frac{2x}{\lambda z}\right)\left(\frac{m-n}{d}\right)\lambda z\right) \\
& + T\left(\frac{-\lambda z \alpha(m+n)}{d}, 0\right) \\
& \left. \times \exp\left(-i\pi\left(\frac{m-n}{d} - \frac{2x}{\lambda z}\right)\left(\frac{m+n}{d}\right)\lambda z\right) \right\}
\end{aligned} \tag{۲۶-۲}$$

جمله‌ی سوم:

$$\begin{aligned}
I_3 = \frac{4c}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \iint \iint T(\alpha X, \beta X') \left(\cos\left(\frac{n\pi}{d}(X+Y)\right) \right) \\
& \times \exp\left(\frac{ik}{2z} [XY + X'Y' - 2Xx - 2X'y]\right) dXdYdX'dY'
\end{aligned} \tag{۲۷-۲}$$

با در نظر گرفتن انتگرال (۱۶-۲) خواهیم داشت:

$$I_3 = \frac{4c}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) 2\lambda z \iint T(\alpha X, 0) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{d}(X+Y)\right) \right) \\ \times \exp(ik/2z [XY - 2Xx]) dXdY$$

با نوشتن $\cos(x)$ به صورت نمایی و مرتب سازی توان ها داریم:

$$I_3 = \frac{4c}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \lambda z \iint T(\alpha X, 0) \left\{ \left(\exp\left(i\pi\left(\frac{n}{d} - \frac{2x}{\lambda z}\right)X\right) \right) \right. \\ \times \left(\exp\left(i\pi\left(\frac{n}{d} + \frac{X}{\lambda z}\right)Y\right) \right) + \left(\exp\left(-i\pi\left(\frac{n}{d} + \frac{2x}{\lambda z}\right)X\right) \right) \\ \times \left. \left(\exp\left(-i\pi\left(\frac{n}{d} - \frac{X}{\lambda z}\right)Y\right) \right) \right\} dXdY$$

و باز هم با استفاده از (۲-۱۶) و انتگرال گیری روی dX داریم:

$$I_3 = \frac{8c(\lambda z)^2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \times \left\{ T\left(\frac{\alpha n \lambda z}{d}, 0\right) \exp\left(i\frac{n^2 \pi \lambda z}{d^2}\right) \exp\left(-i\frac{2n\pi x}{d}\right) \right. \\ \left. + T\left(-\frac{\alpha n \lambda z}{d}, 0\right) \exp\left(i\frac{n^2 \pi \lambda z}{d^2}\right) \exp\left(i\frac{2n\pi x}{d}\right) \right\} \quad (2-28)$$

و جمله ی چهارم نیز به طور مشابه محاسبه می شود:

$$I_4 = \frac{8c(\lambda z)^2}{m\pi} \\ \times \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \left\{ T\left(-\frac{\alpha m \lambda z}{d}, 0\right) \exp\left(-i\frac{m^2 \pi \lambda z}{d^2}\right) \exp\left(i\frac{2m\pi x}{d}\right) \right. \\ \left. + T\left(\frac{\alpha m \lambda z}{d}, 0\right) \exp\left(-i\frac{m^2 \pi \lambda z}{d^2}\right) \exp\left(-i\frac{2m\pi x}{d}\right) \right\} \quad (2-29)$$

با توجه به این که تابع T نسبت به هر کدام از متغیرهایش متقارن است، یعنی $T(-X, -Y) = T(X, Y)$ ، با مقداری ساده سازی

میانگین شدت نور برابر می شود با:

$$\begin{aligned}
\langle I(x, y) \rangle = & \frac{I_0}{4} T(0,0) + \frac{cI_0}{\pi} \\
& \times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \left\{ T\left(\frac{\alpha m \lambda z}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{2m\pi x}{d}\right) \exp\left(-i \frac{m^2 \pi \lambda z}{d^2}\right) \right\} \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left\{ T\left(\frac{\alpha n \lambda z}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) \exp\left(i \frac{n^2 \pi \lambda z}{d^2}\right) \right\} \\
& + \frac{2c^2 I_0}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \exp\left(-i \pi \lambda z \left(\frac{m^2 - n^2}{d^2}\right)\right) \\
& \times \left[T\left(\frac{\alpha \lambda z(m-n)}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{2\pi x(m-n)}{d}\right) \right. \\
& \left. \left. + T\left(\frac{\alpha \lambda z(m+n)}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{2\pi x(m+n)}{d}\right) \right] \right\} > \quad (30-2)
\end{aligned}$$

چون میانگین شدت $\langle I(x, y) \rangle$ ، مشاهده پذیر فیزیکی و حقیقی است، بنابراین قسمت موهومی جمله‌ی سوم قابل قبول نیست. در نتیجه:

$$\begin{aligned}
\langle I(x, y) \rangle &= \frac{I_0}{4} \left\{ T(0,0) \right. \\
&+ \frac{8c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) T\left(\frac{\alpha n \lambda z}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) \cos\left(\frac{n^2 \pi \lambda z}{d^2}\right) \\
&+ \frac{8c^2}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \\
&\times \cos\left(\pi \lambda z \left(\frac{m^2 - n^2}{d^2}\right)\right) \left[T\left(\frac{\alpha \lambda z(m-n)}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{2\pi x(m-n)}{d}\right) \right. \\
&\left. \left. + T\left(\frac{\alpha \lambda z(m+n)}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{2\pi x(m+n)}{d}\right) \right] \right\} \quad (31-2)
\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (31-2) می‌توان شدت حاصل از بازتاب نور همدوس تکفام از سطح ناصاف را در هر فاصله‌ی z از صفحه‌ی (ξ, η) و در هر نقطه از صفحه‌ی (x, y) بدست آورد.

۲-۲: بدست آوردن توزیع شدت در حضور سطح صاف (مرجع):

اگر بعد از توری، سطح صاف (مرجع) قرار گیرد، تابع همبستگی $C(\alpha(\xi - \xi'), \beta(\eta - \eta'))$ برابر با ۱ خواهد بود، در نتیجه داریم: $T(X, Y) = 1$. پس میانگین شدت نور بعد از سطح ناصاف با استفاده از رابطه‌ی (۳۱-۲) می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle I(x, y) \rangle = & \frac{I_0}{4} \left\{ 1 \right. \\ & + \frac{8c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) \cos\left(\frac{n^2\pi\lambda z}{d^2}\right) \\ & + \frac{8c^2}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\pi\lambda z \left(\frac{m^2 - n^2}{d^2}\right)\right) \\ & \left. \times \left[\cos\left(\frac{2\pi x(m-n)}{d}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x(m+n)}{d}\right) \right] \right\} \quad (32-2) \end{aligned}$$

در فواصل $Z = N \frac{d^2}{\lambda}$ (که N در آن عدد صحیح است)، رابطه‌ی (۳۲-۲) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle I(x, y) \rangle = & \frac{I_0}{4} \left\{ 1 \right. \\ & + \frac{8c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) \cos(n^2\pi N) \\ & + \frac{8c^2}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \times \cos(\pi N(m^2 - n^2)) \\ & \left. \times \left[\cos\left(\frac{2\pi x(m-n)}{d}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x(m+n)}{d}\right) \right] \right\} \quad (33-2) \end{aligned}$$

توجه شود که در N های زوج رابطه‌ی (۳۳-۲) دقیقاً تبدیل به همان تابع شدت اولیه‌ی بعد از توری می‌شود و در نتیجه تصویر توری با بالاترین نمایانی تشکیل خواهد شد که به این تصویر، تصویر تالوت^{۱۷}، خودتصویر^{۱۸}، و یا تصویر فوریه^{۱۹} گفته می‌شود. در N های فرد نیز تصویر نیم تالوت ها با جابجایی عرضی به اندازه‌ی نصف دوره تناوب توری نسبت به تصویر تالوت‌ها ایجاد می‌شوند.

^{۱۷}Talbot Image
^{۱۸}SelfImage
^{۱۹}Fourier Image

۳-۲ محاسبه نمایانی شدت در محل تالپوت

برای محاسبه‌ی نمایانی، ابتدا باید بیشینه و کمینه‌ی شدت را در یک تناوب تصویر بباییم.

با قرار دادن Nd به جای $\frac{\lambda z}{d}$ ، رابطه‌ی (۳۱-۲)، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم (به ازای مقادیر زوج n, m Σ صفر می‌شود).

$$\begin{aligned} \langle I(x, y) \rangle = & \frac{I_0}{4} \left\{ T(0,0) \right. \\ & + \frac{8c}{\pi} \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} T(\alpha n N d, 0) \cos\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) \\ & + \frac{8c^2}{\pi^2} \sum_{n,m=odd}^{\infty} \frac{1}{nm} (-1)^{\left(\frac{n+m}{2} + N-1\right)} \\ & \times \left[T(\alpha N d(m-n), 0) \cos\left(\frac{2\pi x(m-n)}{d}\right) \right. \\ & \left. \left. + T(\alpha N d(m+n), 0) \cos\left(\frac{2\pi x(m+n)}{d}\right) \right] \right\} \quad (34-2) \end{aligned}$$

برای توری رانگی (۳-۲) در N های زوج (تالپوت های اصلی) بیشینه در x ی اتفاق می افتد که $\cos\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) = 1$ و کمینه در

جایی است که $\cos\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) = -1$ در N های فرد (نیم تالپوت ها) بیشینه و کمینه‌ی N های زوج با هم جابه‌جا می‌شوند.

برای N های زوج:

$$\begin{aligned} I_{max}(x, y) = & \frac{I_0}{4} \left\{ T(0,0) \right. \\ & + \frac{8c}{\pi} \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} T(\alpha n N d, 0) \\ & + \frac{8c^2}{\pi^2} \sum_{n,m=odd}^{\infty} \frac{1}{nm} (-1)^{\left(\frac{n+m}{2} + N-1\right)} \\ & \left. \times [T(\alpha N d(m-n), 0) + T(\alpha N d(m+n), 0)] \right\} \quad (35-2) \end{aligned}$$

$$I_{min}(x, y) = \frac{I_0}{4} \left\{ T(0,0) - \frac{8c}{\pi} \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} T(\alpha n d, 0) + \frac{8c^2}{\pi^2} \sum_{n,m=odd}^{\infty} \frac{1}{nm} (-1)^{\left(\frac{n+m}{2} + N-1\right)} \times [T(\alpha n d(m-n), 0) + T(\alpha n d(m+n), 0)] \right\} \quad (۳۶-۲)$$

در نتیجه نمایشی شدت توری پراش رانگی $(v = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min}))$ برابر است با:

$$v = \frac{\frac{8c}{\pi} \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} T(\alpha n d, 0)}{T(0,0) + \frac{8c^2}{\pi^2} \sum_{n=m:odd}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times [T(0,0) + T(2\alpha n d, 0)] + \frac{16c^2}{\pi^2} \sum_{n<m:odd}^{\infty} \frac{1}{nm} (-1)^{\left(\frac{n+m}{2}-1\right)} \times [T(\alpha n d(m-n), 0) + T(\alpha n d(m+n), 0)]}$$

اگر $N d \alpha \gg \lambda_0$ پس توابع T از زیر سیگما بیرون می آیند و جملات بالا ساده تر می شوند:

$$v = \frac{\frac{16c}{\pi} T(\alpha n d, 0) \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{2T(0,0) + \frac{16c^2}{\pi^2} [T(0,0) + T(2\alpha n d, 0)] \left(\sum_{n,m=odd}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) + \frac{32c^2}{\pi^2} \times [2T(2\alpha n d, 0)] \left(\sum_{n<m:odd}^{\infty} \frac{1}{nm} (-1)^{\left(\frac{n+m}{2}-1\right)} \right)} \quad (۳۸-۲)$$

و نهایتاً به صورت زیر در می آید:

$$v = \frac{4cT(\alpha n d, 0)}{2 + 2c^2 + 2c^2T(2\alpha n d, 0) - 2c^2T(2\alpha n d, 0)} = \frac{4cT(\alpha n d, 0)}{2 + 2c^2} \quad (۳۹-۲)$$

پس نمایشی شدت توری با سطح صاف مرجع، $T(\alpha n d, 0) = T(2\alpha n d, 0) = 1$ ، برابر است با:

$$v_{ref} = \frac{2c}{1 + c^2} \quad (۴۰-۲)$$

برای تابع همبستگی سطح نمایشی:

$$C(\alpha Nd) = \exp\left[-\frac{\alpha Nd}{\lambda_0}\right], \quad (41-2)$$

و یا گاوسی (λ_0 طول همبستگی سطح است):

$$C(\alpha Nd) = \exp\left[-\frac{(\alpha Nd)^2}{\lambda_0^2}\right], \quad (42-2)$$

در صورتی که $\lambda_0 \gg \alpha Nd$ باشد، داریم $C(\alpha Nd) = 0$. بنابر این:

$$T(\alpha Nd) = T(2\alpha Nd) = \exp[-k^2(2 \cos(\theta))^2 \sigma^2] \quad (43-2)$$

در نتیجه نمایانی در حضور سطح ناصاف به دست می آید:

$$v_{surface} = \frac{2c \exp[-k^2(2 \cos(\theta))^2 \sigma^2]}{1 + c^2} \quad (44-2)$$

بنابراین با داشتن ضریب عبور دامنه‌ی توری C نمایانی مربوط به سطح ناصاف v_s ، ناصافی سطح σ ، به دست خواهد آمد.

۴-۲ محاسبه ناصافی سطح

برای به دست آوردن ناصافی سطح σ ، باید از معادلات (۴۰-۲) و (۴۴-۲) استفاده کنیم:

پس:

$$\exp[-k^2(2 \cos(\theta))^2 \sigma^2] = \frac{(1 + c^2)v_s}{2c}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{4\pi(\cos(\theta))} \sqrt{\ln\left(\frac{(2c)}{(1 + c^2)v_s}\right)} \quad (45-2)$$

بنابراین با داشتن ضریب عبور دامنه‌ی توری C نمایانی مربوط به سطح ناصاف v_s ، ناصافی سطح σ ، به دست خواهد آمد

۵-۲ محاسبه‌ی شدت نور پراکنده بازتابی از سطوح ناصاف بعد از عبور از توری پراش سینوسی

در اینجا رهیافت همان حالت قبل هست فقط در شکل ۱-۲ به جای توری رانکی توری سینوسی قرار می‌دهیم. در نتیجه به جای رابطه‌ی (۲-۲) خواهیم داشت:

$$g(\xi, \eta) = 1/2 \left[1 + c \cos\left(\frac{2\pi\xi}{d}\right) \right] \quad (46-2)$$

در نتیجه داریم:

$$\langle I(x, y) \rangle =$$

$$\begin{aligned} \frac{A_0^2}{4(\lambda z)^2} \iint \iint & \langle t^*(x_2', y_2') t(x_1', y_1') \times \left[1 + c \cos\left(\frac{2\pi\xi}{d}\right) \right] \\ & \times \left[1 + c \cos\left(\frac{2\pi\xi'}{d}\right) \right] \times \exp(-ik/2z [(x - \xi')^2 + (y - \eta')^2]) \\ & \times \exp(ik/2z [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]) \rangle d\xi' d\eta' d\xi d\eta \end{aligned} \quad (47-2)$$

با بسط حاصل ضرب داخل کروشه و جای گذاری $I_0 = A_0^2$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle I(x, y) \rangle = \frac{I_0}{4(\lambda z)^2} \iint \iint & \langle t^*(x_2', y_2') t(x_1', y_1') \\ & \times \left\{ 1 + c^2 \cos\left(\frac{2\pi}{d}\xi\right) \cos\left(\frac{2\pi}{d}\xi'\right) + c \cos\left(\frac{2\pi\xi}{d}\right) + c \cos\left(\frac{2\pi\xi'}{d}\right) \right\} \\ & \times \exp(-ik/2z [(x - \xi')^2 + (y - \eta')^2]) \\ & \times \exp(ik/2z [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]) \rangle d\xi' d\eta' d\xi d\eta \end{aligned} \quad (48-2)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۸-۲) مجدداً خواهیم داشت:

$$\langle t(\xi, \eta)^* t(\xi', \eta') \rangle = \exp[-k^2 (2 \cos(\theta))^2 \sigma^2 \times (1 - C(x_2 - x_1', y_2 - y_1'))] \quad (49-2)$$

با استفاده از روابط (۱۱-۲)، (۱۲-۲)، (۱۳-۲) و (۱۴-۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle I(x, y) \rangle = \frac{I_0}{16(\lambda z)^2} \iint \iint & T(\alpha X, \beta X') \\ & \times \left\{ 1 + c^2 \cos\left(\frac{\pi}{d}(X + Y)\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{d}(X - Y)\right) \right. \\ & \left. + c \cos\left(\frac{\pi}{d}(X + Y)\right) + c \cos\left(\frac{\pi}{d}(X - Y)\right) \right\} \\ & \times \exp(ik/2z [XY + X'Y' - 2Xx - 2X'y]) \rangle dXdYdX'dY' \end{aligned} \quad (50-2)$$

در نتیجه مجدداً داریم:

$$\langle I(x, y) \rangle = \frac{I_0}{16(\lambda z)^2} \langle (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \rangle \quad (51-2)$$

که با رهیافتی مشابه با رهیافت قبل بدست می‌آوریم:

$$I_1 = (2\lambda z)^2 T(0,0) \text{ و} \quad (52-2)$$

$$I_2 = c^2(\lambda z)^2 \times \left\{ T(0,0) + T\left(\frac{\alpha 2\lambda z}{d}, 0\right) \exp\left(-i\frac{4\pi x}{d}\right) + T(0,0) \right. \\ \left. + T\left(\frac{-\alpha 2\lambda z}{d}, 0\right) \exp\left(i\frac{4\pi x}{d}\right) \right\} \quad (53-2)$$

$$I_3 = 2c(\lambda z)^2 \left\{ T\left(\frac{\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \exp\left(i\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) \exp\left(-i\frac{2\pi x}{d}\right) \right. \\ \left. + T\left(-\frac{\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \exp\left(i\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) \exp\left(i\frac{2\pi x}{d}\right) \right\} \quad (54-2)$$

$$I_4 = 2c(\lambda z)^2 \left\{ T\left(-\frac{\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \exp\left(-i\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) \exp\left(i\frac{2\pi x}{d}\right) \right. \\ \left. + T\left(\frac{\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \exp\left(-i\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) \exp\left(-i\frac{2\pi x}{d}\right) \right\} \quad (55-2)$$

بار دیگر توجه به این که تابع T نسبت به هر کدام از متغیرهایش متقارن است، یعنی $T(-X, -Y) = T(X, Y)$ ، با مقداری ساده سازی میانگین شدت نور برابر می شود با:

$$\begin{aligned} \langle I(x, y) \rangle = & \frac{I_0}{4} T(0,0) + \frac{cI_0}{4} \\ & \times \left\{ T\left(\frac{\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \exp\left(-i\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) \right\} \\ & + \left\{ T\left(\frac{\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \exp\left(i\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) \right\} + \frac{c^2}{8} I_0 \\ & \times \left[T(0,0) + T\left(\frac{2\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{4\pi x}{d}\right) \right] \end{aligned} \quad (56-2)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \langle I(x, y) \rangle = & \frac{I_0}{4} \left\{ T(0,0) + 2cT\left(\frac{\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \cos\left(\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{c^2}{2} \left[T(0,0) + T\left(\frac{2\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \cos\left(\frac{4\pi x}{d}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (57-2)$$

بنابراین با استفاده از رابطه ی (57-2) می توان شدت حاصل از عبور نور همدوس تکفام از توری پراش سینوسی را در هر فاصله ی z از صفحه ی (ξ, η) و در هر نقطه از صفحه ی (x, y) بدست آورد.

اگر بعد از توری، سطح صاف (مرجع) قرار گیرد، تابع همبستگی $C(\alpha(\xi - \xi'), \beta(\eta - \eta'))$ برابر با ۱ خواهد بود، در نتیجه داریم: $T(X, Y) = 1$. پس میانگین شدت نور بعد از توری با استفاده از رابطه ی (57-2) می شود:

$$\langle I(x, y) \rangle = \frac{I_0}{4} \left\{ 1 + 2c \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \cos\left(\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) + \frac{c^2}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi x}{d}\right) \right] \right\} \quad (58-2)$$

در فواصل $z = N \frac{d^2}{\lambda}$ ، (که N در آن عدد صحیح است)، رابطه‌ی (۵۷-۲) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$\langle I(x, y) \rangle = \frac{I_0}{4} \left\{ 1 + 2c \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \cos(\pi N) + \frac{c^2}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi x}{d}\right) \right] \right\} \quad (59-2)$$

توجه شود که در N های زوج رابطه‌ی (۵۹-۲) دقیقاً تبدیل به همان تابع شدت اولیه‌ی بعد از توری می‌شود که درواقع مجدداً به تعریف فاصله‌ی تالوت رسیدیم.

برای محاسبه‌ی نمایانی ناشی از توری سینوسی نیز، ابتدا باید بیشینه و کمینه‌ی شدت را در یک تناوب تصویر بیابیم.

با قرار دادن Nd به جای $\frac{\lambda z}{d}$ در رابطه‌ی (۵۷-۲)، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\langle I(x, y) \rangle = \frac{I_0}{4} \left\{ T(0,0) + 2c \left[T(\alpha Nd, 0) \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \cos(\pi N) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c^2}{2} \left[T(0,0) + T(2\alpha Nd, 0) \cos\left(\frac{4\pi x}{d}\right) \right] \right] \right\} \quad (60-2)$$

برای توری سینوسی، رابطه‌ی (۶۰-۲) در N های زوج (تالوت‌های اصلی)، بیشینه در x ی اتفاق می‌افتد که $\cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) = 1$.

و کمینه در جایی است که $\cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) = -1$. در N های فرد (نیم تالوت‌ها) بیشینه و کمینه‌ی N های زوج با هم جابه‌جا می‌شوند. برای N های زوج:

$$I_{max}(x, y) = \frac{I_0}{4} \left\{ T(0,0) + 2c T\left(\frac{\alpha \lambda z}{d}, 0\right) + \frac{c^2}{2} \left[T(0,0) + T\left(\frac{2\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \right] \right\} \quad (61-2)$$

و

$$I_{min}(x, y) = \frac{I_0}{4} \left\{ T(0,0) - 2c T\left(\frac{\alpha \lambda z}{d}, 0\right) + \frac{c^2}{2} \left[T(0,0) + T\left(\frac{2\alpha \lambda z}{d}, 0\right) \right] \right\} \quad (62-2)$$

در

نتیجه نمایانی شدت توری پراش سینوسی $(v = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min}))$ برابر است با:

$$v = \frac{4c T(\alpha Nd, 0)}{(2 + c^2)T(0,0) + c^2[T(2\alpha Nd, 0)]} \quad (۶۳-۲)$$

نمایانی شدت توری با سطح صاف مرجع، $T(\alpha Nd, 0) = T(2\alpha Nd, 0) = 1$ ، برابر است با:

$$v_{ref} = \frac{2c}{1 + c^2} \quad (۶۴-۲)$$

برای تابع همبستگی سطح نمایی،

$$C(Nd) = \exp\left[-\frac{\alpha Nd}{\lambda_0}\right], \quad (۶۵-۲)$$

و یا گاوسی (λ_0 طول همبستگی سطح است)،

$$C(Nd) = \exp\left[-\frac{(\alpha Nd)^2}{\lambda_0^2}\right], \quad (۶۶-۲)$$

با جای گذاری $C(Nd)$ در رابطه‌ی (۴۹-۲) و در نظر گرفتن $T(0,0) = 1$ در رابطه‌ی (۶۳-۲) با اندازه گیری نمایانی در فواصل $Nd \gg \lambda_0 \alpha$ و $\alpha Nd \sim \lambda_0$ می توان طول همبستگی سطح را تعیین کرد.

در صورتی که $\alpha Nd \gg \lambda_0$ باشد، داریم $C(\alpha Nd) = 0$. بنابر این:

$$T(\alpha Nd, 0) = T(2\alpha Nd, 0) = \exp[-k^2(2 \cos(\theta))^2 \sigma^2] \quad (۶۷-۲)$$

در نتیجه نمایانی در حضور سطح ناصاف به دست می آید:

$$v_{surface} = \frac{4c \exp[-k^2(2 \cos(\theta))^2 \sigma^2]}{2 + c^2 + c^2 \exp[-k^2(2 \cos(\theta))^2 \sigma^2]} \quad (۶۸-۲)$$

برای به دست آوردن ناصافی سطح σ ناشی از توری سینوسی نیز، باید از معادلات (۶۴-۲) و (۶۸-۲) استفاده کنیم:

$$\exp[-k^2(2 \cos(\theta))^2 \sigma^2] = \frac{(2 + c^2)v_s}{(4c - c^2 v_s)} \quad (۶۹-۲)$$

پس:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi(2 \cos(\theta))} \sqrt{\ln \left(\frac{(4c - c^2 v_s)}{(2 + c^2) v_s} \right)} \quad (70-2)$$

بنابراین با داشتن ضریب گذردهی دامنه c و نمایانی مربوط به سطح ناصاف v_s ، ناصافی سطح σ ناشی از توری سینوسی نیز، به دست خواهد آمد.

۲-۶ به دست آوردن ضریب شکست مواد با استفاده از روابط بازتابی و عبور

همان طور که ملاحظه شد، ناصافی سطح σ برای توری رانکی و در بازتاب از رابطه‌ی (۲-۴۵)، بدست آمد. هم‌چنین ناصافی سطح σ برای توری رانکی و در حالت عبور، برابر است با [۳۶]:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi(n-1)} \sqrt{\ln \left(\frac{(2c)}{(1+c^2)v_s} \right)} \quad (71-2)$$

که در این رابطه، n برابر با ضریب شکست ماده‌ی ناصاف است.

با توجه به دو معادله فوق، رهیافت جالبی که به‌نظر می‌رسد این است که می‌توان برای مواد با ضریب شکست نامعلوم، ابتدا مقدار

ناصافی را در حالت بازتاب بدست آورد. سپس در حالت عبور با جایگزینی مقدار ناصافی بدست آمده (σ)، مقدار ضریب شکست را

تعیین کرد.

فصل سوم

رهیافت تجربی

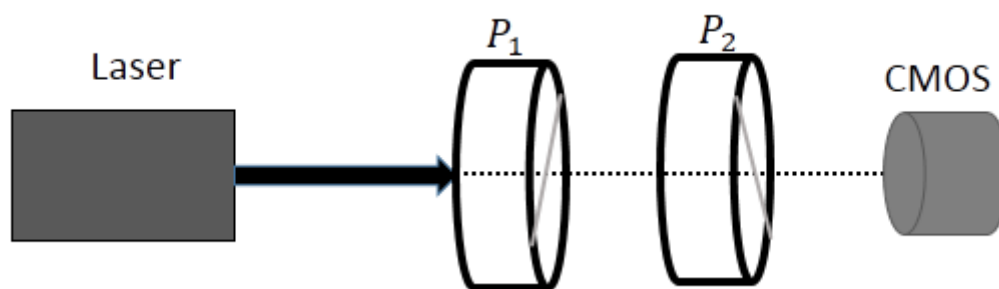
در این فصل به بررسی تجربی مفاهیم گفته شده در فصل پیش می‌پردازیم. ابتدا به بررسی رابطه‌ی ناصافی با توری رانگی که در فصل پیش به صورت زیر بدست آمد، می‌پردازیم:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi(2 \cos(\theta))} \sqrt{\ln\left(\frac{(2c)}{(1+c^2)v_s}\right)} \quad (۱-۳)$$

برای این منظور ابتدا ضریب گذردهی توری را با استفاده از یک سطح صاف مرجع بدست می‌آوریم، سپس نمایانی سطوح ناصاف را در زوایای مختلف پیدا کرده و با استفاده از رابطه‌ی فوق ناصافی آن‌ها را بدست می‌آوریم، لازم به ذکر است که در این پایان نامه، از سطوحی ناصاف و استاندارد با مقادیر ناصافی مشخص استفاده شده است. در نتیجه، مقدار ناصافی که از رابطه‌ی فوق بدست می‌آید، باید مقادیر اصلی را تایید نمایند.

و در قسمت دوم این فصل، با استفاده از رهیافتی که در انتهای فصل پیش ارائه شد، ضریب شکست یک ماده نمونه را بدست می‌آوریم.

با توجه به حساسیت این آزمایش به شدت نور، نکته‌ای که قبل از چیدن آزمایش باید به آن توجه کنیم، اطمینان از عملکرد خطی دوربین (CMOS) است. به این منظور آزمایش زیر را در نظر می‌گیریم:



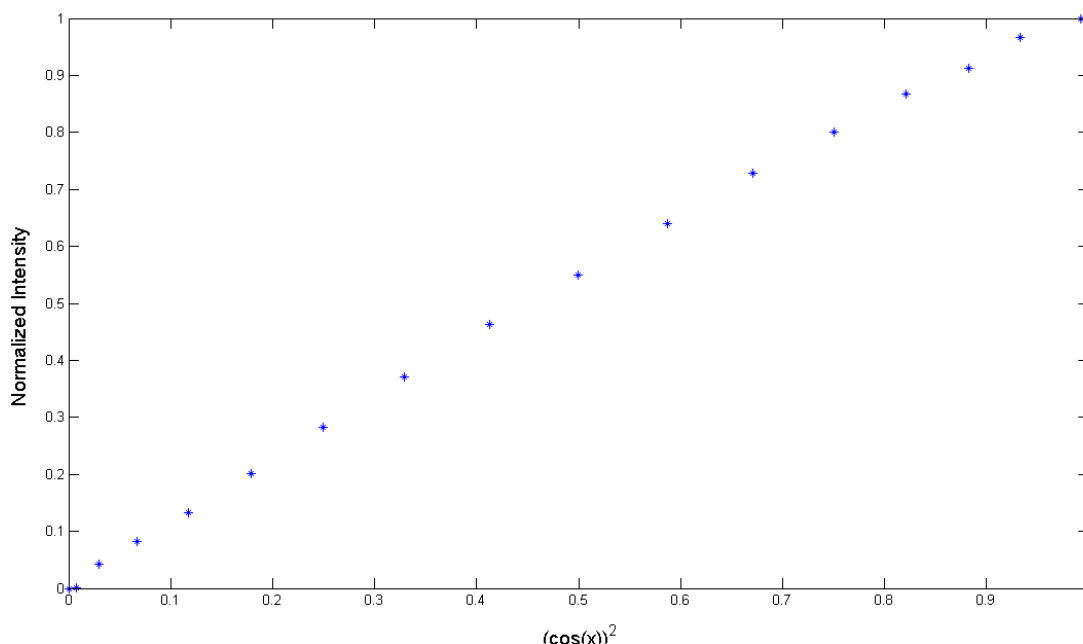
شکل ۱-۳ چیدمان آزمایش برای بررسی عملکرد خطی CMOS مطابق با قانون مالوس. شدت نور لیزر توسط CMOS، پس از عبور از دو قطبشگر p_1, p_2 ثبت می‌شود.

مطابق شکل ۱-۳ ابتدا نور لیزری که خواهان آزمایش با آن هستیم و قطبیده است و به صورت موازی با میز اپتیکی تنظیم شده است را از قطبشگر P_1 عبور می‌دهیم. سپس در مسیر نور عبوری قطبشگر دوم یعنی P_2 را قرار می‌دهیم. با توجه به قوانین اولیه اپتیک (قانون مالوس)، شدت نور عبوری از قطبشگر دوم متناسب است با:

$$I \propto \cos^2 X \quad (۲-۳)$$

که در اینجا X برابر با زاویه‌ی بین دو قطبشگر است. سپس شدت حاصل از نور عبوری را در CMOS ثبت می‌کنیم. برای ثبت نتایج تجربی قطبشگر P_2 را ابتدا آنقدر می‌چرخانیم که شدت عبوری برابر با صفر گردد، سپس به تدریج با افزایش زاویه، شدت

عبوری را ثبت می‌نماییم. (این کار با قرار دادن دوربین (CMOS) در مسیر نور و جمع زدن مقدار شدت متناظر با هر پیکسل، انجام می‌شود.) پس با توجه به رابطه قانون مالوس، نمودار I بر حسب $\cos^2 X$ باید خطی بدست آید، که پس از امتحان دوربین‌های مختلف سرانجام نمودار زیر حاصل گردید (شدت بهنجار به یک شده است)

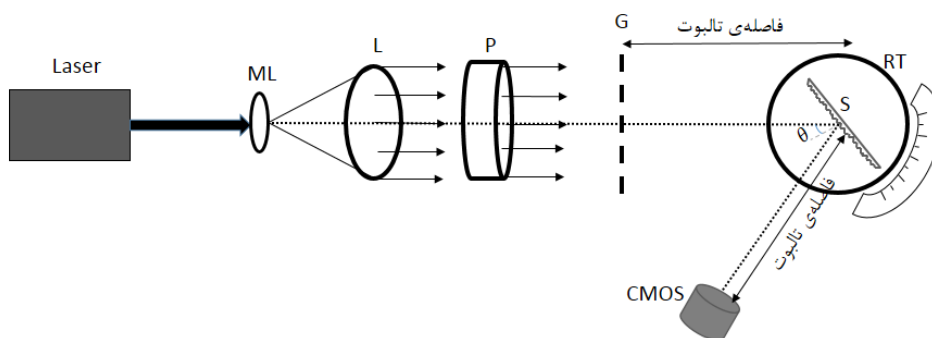


شکل ۳-۲ نمودار شدت بر حسب $\cos^2 X$ که در آن زاویه بین دو قطبش گر است.

۳-۱-۳ چیدمان آزمایش

در شکل ۳-۳ چیدمان آزمایش نشان داده شده است. باریکه‌ی لیزر هلیوم-نئون ۱۰ میلی وات با طول موج ۶۳۲٫۸ نانومتر، ابتدا به میکرو لنز ML برخورد می‌کند و واگرا می‌شود. سپس با عبور از لنز L با فاصله‌ی کانونی ۱۰۰ میلی متر، موازی می‌شود. نور موازی شده پس از عبور از قطبش گر P و توری پراش رانکی (G) با دوره‌ی تناوب ۰٫۲ میلی متر، از سطح ناصاف (یا سطح مرجع) S که در فاصله‌ی تالابوت توری قرار گرفته و پرتو فرودی لیزر با محور عمود بر آن زاویه‌ی θ می‌سازد، پراکنده می‌شود (سطح ناصاف بر روی گونیامتر RT جهت چرخش در زوایای گوناگون قرار داده شده است) و در نهایت توسط دوربین (CMOS) که در زاویه‌ی بازتاب برابر با پرتو فرودی قرار گرفته، عمل ثبت توزیع شدت انجام شده و تصویر به کامپیوتر منتقل می‌شود. (از قطبش گر برای تنظیم شدت و جلوگیری از اشباع CMOS استفاده شده است). نمونه‌های ناصاف استفاده شده در این آزمایش، یک سری سطوح ناصاف استاندارد^{۲۰}، و با مقدار ناصافی مشخص هستند. هم‌چنین از دوربین کانن^{۲۱} به عنوان CMOS استفاده شده است. با توجه به توری استفاده شده، فاصله‌ی نیم تالابوت تقریباً ۶٫۳ سانتی متر است.

^{۲۰} Rugotest
^{۲۱} Canon D450



شکل ۳-۳ نور موازی لیزر پس از عبور از میکرو لنز ML، لنز L، پلاروید P و توری G با زاویه‌ی θ به سطح ناصاف S که بر روی گونیامتر RT قرار داده شده، می‌رسد و از آن پراکنده می‌شود. توزیع شدت توسط CMOS که در زاویه‌ی بازتاب برابر با پرتو فرودی بر سطح S، قرار گرفته، ثبت می‌شود.

۲-۳ ملاحظات عملی

عامل مهمی که در طول این آزمایشی باید در نظر داشته باشیم این است که نور پس از عبور از عدسی کاملاً باید موازی میز اپتیکی حرکت کند. برای این منظور، پرتو لیزر می‌بایست به طور دقیق با میز اپتیکی موازی شود و دیگر قطعات اپتیکی که بر روی میز اپتیکی قرار می‌گیرند نیز کاملاً عمود بر پرتوی لیزر باشند، به طوری که بازتاب نور از هر یک از آن‌ها حول مرکز قطعه‌ی اپتیکی قبلی قرار گیرد.

ضمناً برای این که پرتوی عبوری از عدسی موازی باشد، فاصله‌ی میکرو لنز و عدسی باید بسیار دقیق تنظیم شود. برای این منظور، CMOS را که بعد از توری قرار دارد بر روی میز اپتیکی حرکت می‌دهیم تا به نیم تالبوت اول برسیم و تصویر توری را به وضوح مشاهده کنیم. در نیم تالبوت اول تعداد خطوط سیاه و سفید تصویر را می‌شماریم. بعد از آن CMOS را به اندازه‌ی چند نیم تالبوت دورتر می‌بریم و خطوط سیاه و سفید آن تصویر را هم می‌شماریم. اگر نور موازی باشد، تعداد خطوط در همه‌ی فواصل از توری، برابر خواهد بود. اگر تعداد خطوط در نزدیکی توری بیشتر باشد، نور واگرا است و اگر کمتر باشد نور هم گرا است، بنابراین تعداد خطوطی از توری که بر روی CMOS می‌افتد نشان دهنده‌ی واگرایی یا همگرایی نور خواهد بود. پس آن قدر عدسی L را نسبت به میکرو لنز ML جابجا می‌کنیم تا برابری تعداد خطوط در فواصل مختلف بعد از توری حاصل شود.

باید توجه داشت که CMOS در طول آزمایش، هیچ گاه نباید به حالت اشباع در آید. بنابراین برای جلوگیری از این امر با استفاده از قطبش گر شدت نور ورودی را به قدری کم می‌کنیم تا CMOS از حالت اشباع خارج شود. البته می‌بایست به این نکته توجه کرد که، کم کردن بیش از حد شدت نور بخصوص در حالتی که از شیشه‌های با ناصافی بیشتر استفاده می‌شود، باعث می‌شود که تصاویری با تفاوت شدت بیشینه و کمینه بسیار پایین تشکیل گردد، در حدی که نمایانی آنها دیگر قابل تشخیص نیست.

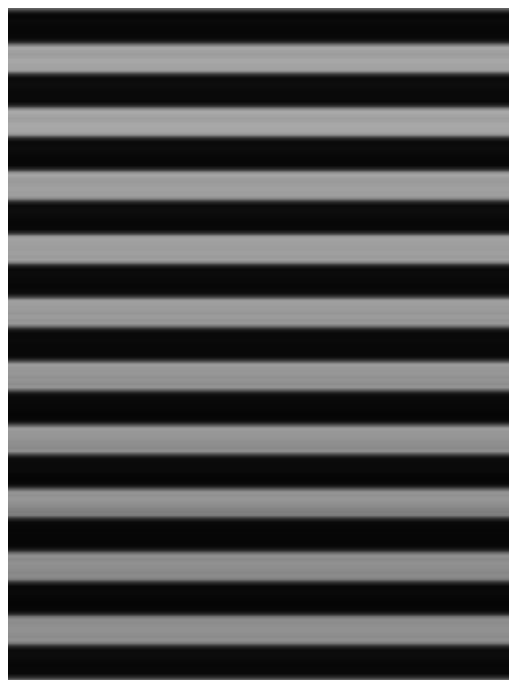
بنابراین دقت شود با استفاده از قطبش گر، شدت نور ورودی را تنها به میزانی کاهش داده شود که $CMOS$ در حالت اشباع قرار نگیرد.

همچنین نکته‌ی دیگری که به آن باید توجه داشت این است که اگر نمونه ناصاف کاملاً عمود بر پرتو نور در سیستم قرار نگیرد، سبب جابه‌جایی پرتو نور می‌شود، در نتیجه تصویر تالپوت با چند پیکسل جابجایی بر روی $CMOS$ می‌افتد، برای جلوگیری از این موضوع، ما از یک لیزر دیگر که موازی میز اپتیکی و در انتهای سیستم قرار داشت، استفاده کردیم. در نتیجه سطح ناصاف زمانی کاملاً عمود بر پرتو نور ورودی قرار می‌گرفت که بازتاب نور لیزر دوم از آن در داخل خود لیزر دوم قرار می‌گرفت.

۳-۳ نتایج تجربی

۳-۳-۱ نمایانی شدت بعد از توری بر حسب فاصله از سطح ناصاف

برای انجام آزمایش ابتدا یک تیغه‌ی شیشه‌ای را به عنوان نمونه‌ی مرجع (سطح صاف) بعد از توری قرار دادیم و از توزیع شدت بدست آمده، نمایانی نمونه‌ی مرجع را 0.92 بدست آوردیم (شکل ۳-۴) و سپس مطابق با رابطه‌ی (۲-۴۰) مقدار ضریب گذرده‌ی توری برابر 0.64 بدست آمد. (در واقع $c = 0.64$)



شکل ۳-۴ توزیع شدت گرفته شده توسط $CMOS$ در فاصله تالپوت و در حضور سطح صاف مرجع (تیغه‌ی شیشه‌ای)

در ادامه به جای نمونه‌ی مرجع، سطوح ناصاف باید قرار داده شوند. ما در آزمایش خود، ناصافی سطوح شماره $N2, N3, N4$ سطوح استاندارد^{۲۲} خود را مورد بررسی قرار داده‌ایم. در شکل ۳-۵ سطوح ناصاف استاندارد استفاده شده را، مشاهده می‌کنیم.



شکل ۳-۵ تصویر نمونه‌های ناصاف استاندارد استفاده شده در آزمایش

ردیف B و C این سطوح دارای انحنا و خواص دیگری هستند که در این پایان نامه مورد نظر ما قرار ندارند. در نتیجه از سطوح ردیف A استفاده شده است. همچنین مقادیر ناصافی داده شده‌ی این سطوح به شرح زیر هستند:

$$\sigma_{ave} = 0.05\mu m : N2 \text{ سطح}$$

$$\sigma_{ave} = 0.1\mu m : N3 \text{ سطح}$$

$$\sigma_{ave} = 0.2\mu m : N4 \text{ سطح}$$

ولی نکته ای که باید مدنظر داشته باشیم این است که این مقادیر براساس ناصافی میانگین، و نه براساس RMS داده شده‌اند. ولی همان‌طور که در فصل اول در رابطه‌ی (۱-۵) بررسی شد، رابطه‌ی بین این دو پارامتر به‌صورت زیر است:

$$\sigma_{ave} = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (۳-۳)$$

که در آن σ برابر با پارامتر RMS ، و σ_{ave} برابر با پارامتر ناصافی میانگین است. ولی باز به دلیل کوچک بودن مقدار ناصافی میانگین در نمونه‌های $N2, N3, N4$ و همچنین عدم گزارش خطای آنها، این مقادیر تفاوت خاصی به جز در نمونه‌ی $N2$ پیدا نمی‌کنند و در نتیجه برای پارامتر RMS آن‌ها داریم:

$$\sigma \cong 0.06\mu m : N2 \text{ سطح}$$

$$\sigma \cong 0.1\mu m : N3 \text{ سطح}$$

$$\sigma \cong 0.2\mu m : N4 \text{ سطح}$$

دومین نکته‌ای که باید مدنظر قرار دهیم این است که، برای سطوح با ناصافی بزرگ‌تر از 0.2μ ، با توجه به رابطه‌ی (۲-۴۴) یعنی رابطه‌ی زیر:

$$v_{surface} = \frac{4c \exp[-k^2(2 \cos(\theta))^2 \sigma^2]}{2+2c^2} \quad (۳-۴)$$

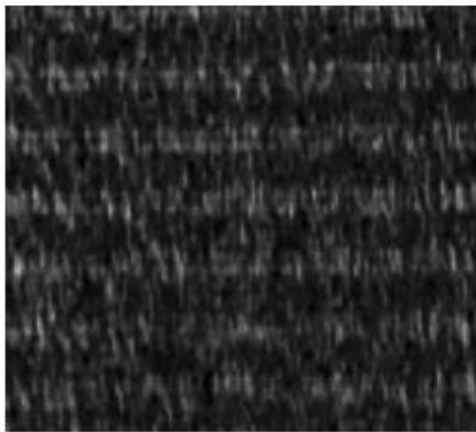
نمایی برای زاویه‌های کوچکتر از 65 درجه، بسیار کوچک می‌شود، و در نتیجه بدست آوردن نمایی ناممکن می‌شود.

درواقع یکی از مزیت‌های مهم مطالعه‌ی سطوح ناصاف در بازتاب نسبت به مطالعه‌ی این سطوح در عبور، این است که سطوح با ناصافی‌های کم، در زاویه‌های کوچک دارای نمایی هستند و در نتیجه ناصافی آن‌ها نیز قابل محاسبه است.

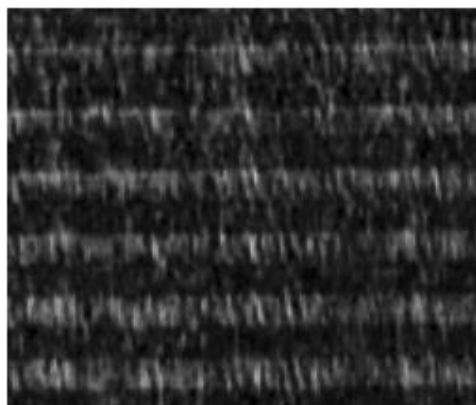
باتوجه به نکته‌ی فوق، برای سطوح $N5, N6, \dots$ به دلیل افزایش ناصافی مطالعه‌ی آن‌ها باید در زوایای بزرگتری انجام شود، ولی با توجه به مساحت کوچک این ناصافی‌ها و هم این نکته که با افزایش زاویه سطح مقطع نمونه بسیار کوچک می‌شود، در این پایان نامه امکان مطالعه‌ی آن‌ها وجود نداشته است، همچنین برای سطح $N4$ نیز، آزمایش تنها در زاویه‌ی 65 درجه انجام شده است (به دلیل کوچک شدن سطح مقطع در زوایای بزرگتر)

در این جا برای مثال از رهیافت آزمایش، توزیع شدت نمونه‌ی $N3$ و همچنین شکل میانگین گرفته شده‌ی آن را در سه زاویه‌ی مختلف ۴۰، ۵۰ و ۶۵ درجه نشان می‌دهیم (شکل ۳-۶).

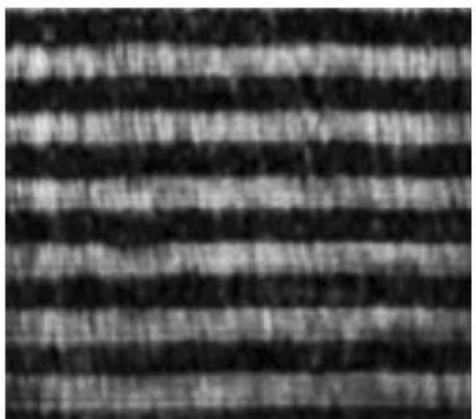
همان‌طور که در شکل ۳-۶ مشاهده می‌کنیم، در هر قسمت (آ) و (ب) و (ج)، در سمت چپ توزیع شدت گرفته شده توسط CMOS در فاصله‌ی تالپوت و در سمت راست میانگین توزیع شدت متناظر با برنامه‌ی کامپیوتری نمایش داده شده است. در قسمت (آ) مقدار نمایی در زاویه‌ی فرود ۴۰ درجه بر سطح ناصاف، برابر با 0.14 و در قسمت (ب) مقدار نمایی در زاویه‌ی فرود ۵۰ درجه برابر با 0.22 و در قسمت (ج) مقدار نمایی در زاویه‌ی فرود ۶۵ درجه برابر با 0.50 بدست آمده است. در نتیجه با معلوم بودن ضریب گذردهی توری و نمایی در هر زاویه، می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۲-۴۵) مقدار ناصافی را مشخص کرد. که تمامی مقادیر ناصافی اندازه‌گیری شده در جدول ۳-۱ نشان داده شده است. که برای نمونه‌ی $N4$ ، همان‌طور که در این بخش توضیح داده شد، در زوایای فرود کم‌تر از ۶۵ درجه نمایی بسیار کم، و در زوایای بزرگ‌تر، به دلیل کوچک بودن مساحت نمونه‌ها و همچنین کم شدن سطح مقطع (به دلیل افزایش زاویه) امکان اندازه‌گیری ناصافی وجود نداشته است



(آ)



(ب)



(ج)



شکل ۳-۶ تصاویر سمت چپ توزیع شدت نمونه‌ی N_2 را در فاصله‌ی تالپوت و زوایای بازتابی (آ) ۴۰ درجه، (ب) ۵۰ درجه و (ج) ۶۵ درجه نشان می‌دهند. همچنین تصاویر سمت راست، توزیع شدت میانگین متناظر، در امتداد خطوط توری هستند.

همچنین برای محاسبه خطا در این آزمایش، در هر زاویه، چند تصویر گرفته شده و در هر تصویر نمایانی در قسمت‌های مختلف آن محاسبه گردیده است. سپس از داده‌های بدست آمده واریانس گرفته شده و مقدار خطا بدست آمده است.

جدول ۳-۱ مقادیر ناصافی نمونه‌های استاندارد

نام سطح ناصاف	زاویه‌ی فرود بر سطح بر حسب درجه (θ)	σ آزمایش بر حسب میکرومتر	σ داده شده بر حسب میکرومتر
N2	35	0.054 ± 0.008	0.06
N2	40	0.051 ± 0.009	
N2	45	0.054 ± 0.006	
N2	50	0.056 ± 0.005	
N2	55	0.055 ± 0.007	
N2	60	0.058 ± 0.009	
N2	70	0.059 ± 0.009	
N3	35	0.096 ± 0.007	0.1
N3	40	0.090 ± 0.007	
N3	45	0.100 ± 0.030	
N3	50	0.094 ± 0.016	
N3	55	0.108 ± 0.012	
N3	60	0.980 ± 0.013	
N3	65	0.092 ± 0.031	
N4	65	0.16 ± 0.05	0.2

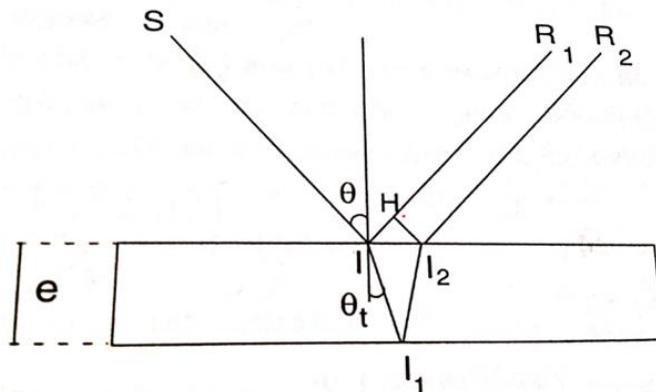
۳-۳-۳ بدست آوردن ضریب شکست با استفاده از روابط بازتابی و عبور

همان‌طور که در بخش (۲-۶) فصل دوم بیان شد، می‌توان با بدست آوردن مقدار ناصافی در حالت بازتابی، و جایگزینی آن در روابط عبوری، مقدار ضریب شکست مواد را تعیین کرد. در اینجا با این رهیافت مقدار ضریب شکست یک ماده‌ی نمونه را تعیین می‌کنیم، و در بخش بعدی این مقدار را با یک روش استاندارد تعیین شده، مقایسه می‌کنیم.

نمونه‌ی ناصاف استفاده شده در این آزمایش، تیغه‌ی شیشه‌ای به قطر 3.86 میلی‌متر است که یک طرف آن به وسیله‌ی پودری با شماره مش 3000 سایش داده شده است. (شماره‌ی مش، بیانگر تعداد روزنه‌های الک پودر در اینچ است).

ابتدا با استفاده از رابطه‌ی (۲-۴۵) و هم‌چنین رهیافت تجربی قسمت پیش، ابتدا مقدار ناصافی را بدست آوردیم. سپس با قرار دادن مقدار ناصافی در رابطه‌ی (۲-۷۱) مقدار ضریب شکست برابر با $n = 1.528 \pm 0.005$ محاسبه شده است. باز هم مثل حالت قبل، ابتدا برای محاسبه‌ی ناصافی نمونه، با انتخاب قسمت‌های مختلف تصویر گرفته شده توسط دوربین، ناصافی‌های مختلف محاسبه گردیده است. سپس با استفاده از این ناصافی‌ها ضریب شکست مربوط به هر کدام محاسبه، و با گرفتن واریانس آن‌ها، خطای ضریب شکست معلوم گردیده است. در ادامه یک روش تایید شده برای تعیین ضریب شکست، را به طور کامل توضیح می‌دهیم و با انجام آزمایش نتایج را با مقدار بدست آمده در این بخش مقایسه می‌کنیم.

۳-۳-۴ بدست آوردن ضریب شکست با استفاده از یک روش اثبات شده و مقایسه نتایج [۳۷]



شکل ۳-۷ پرتو SI با زاویه‌ی θ به یک تیغه با ضخامت e برخورد و از دوسطح بالایی و زیرین تیغه، بازتاب می‌یابد.

با توجه به شکل فوق، پرتو SI به یک تیغه به ضخامت e و ضریب شکست N تحت زاویه‌ی θ برخورد می‌کند. فاصله‌ی بین دو پرتو بازتاب شده از دوسطح بالا و پایین تیغه، برابر است با:

$$l = \frac{e \sin(2\theta)}{(N^2 - (\sin \theta)^2)^{1/2}} \quad (۵-۳)$$

با رسم $\left(\frac{l}{e}\right)$ بر حسب θ (رادیان) نمودار زیر به ازای مقادیر مختلف N بدست می‌آید:

فاصله‌ی دو پرتو در $\theta = 0$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ صفر می‌شود، در نتیجه این فاصله باید در زاویه‌ای به نام θ_{max} ماکزیمم شود. با گرفتن مشتق نسبت به زاویه از رابطه‌ی فوق بدست می‌آوریم:

$$\sin^4 \theta_{max} - 2 N^2 \sin^2 \theta_{max} + N^2 = 0 \quad (۶-۳)$$

که این معادله برای $N > 1$ برابر خواهد شد با:

$$\theta_{max} = \sin^{-1} [N^2 - N(N^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \quad (7-3)$$

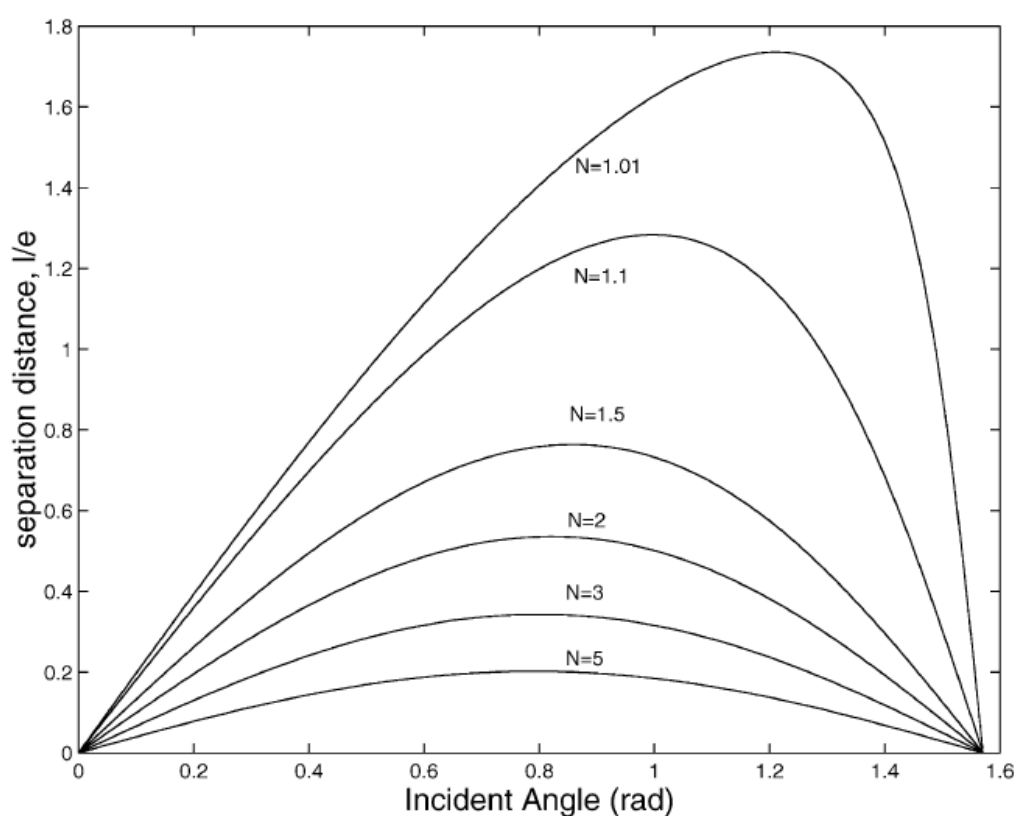
با قرار دادن θ_{max} در معادله‌ی اصلی، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$l_{max} = 2e[N - N(N^2 - 1)^{\frac{1}{2}}] \quad (8-3)$$

با نوشتن این رابطه بر حسب N داریم:

$$N = \frac{e}{l_{max}} + \frac{l_{max}}{4e} \quad (9-3)$$

پس با بدست آوردن l_{max} و e (ضخامت تیغه)، می‌توان ضریب شکست را تعیین کرد.



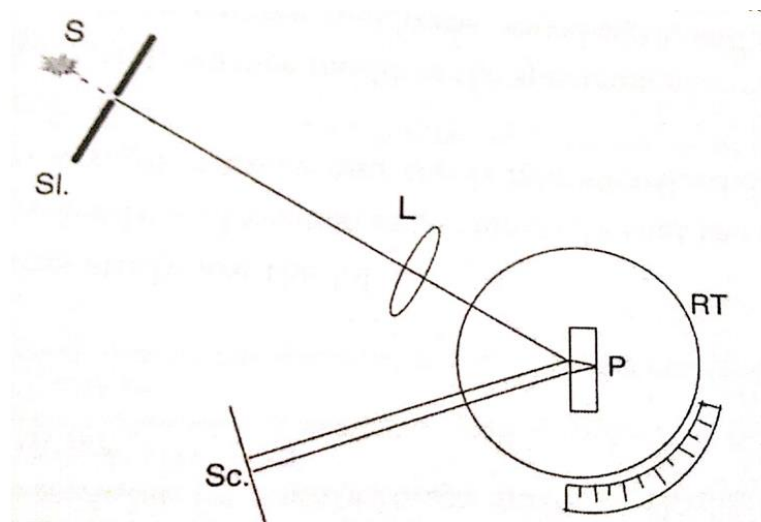
شکل ۸-۳ نمودار فاصله‌ی دو پرتو بازتابی از دو سطح بالایی و زیرین تیغه، برحسب زاویه‌ی پرتو فرودی

همان‌طور که در شکل ۸-۳ مشخص است، در یک بازه‌ی زاویه‌ای نسبتاً بزرگ حول θ_{max} فاصله‌ی دو پرتو تقریباً مقدار ثابتی است. . همچنین در مقاله‌ی مربوط به این آزمایش، نکته‌ای تجربی به این صورت ذکر شده است:

با توجه به مطالعات تجربی، برای اکثر موادی که ضریب شکست آن‌ها بین 1.35 تا 1.8 قرار دارد، زاویه‌ی θ_{max} در بازه‌ی 47.5 تا 50.5 درجه واقع می‌شود.

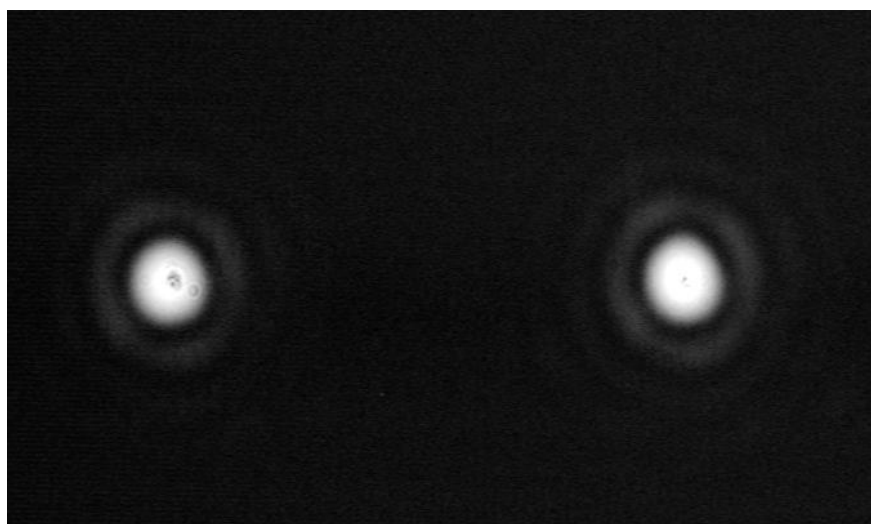
با توجه به این که نمونه‌ی ناصاف ما نوعی شیشه بود، در نتیجه کافی است برای بدست آوردن l_{max} ، در محدوده‌ی زاویه‌ای ذکر شده آزمایش خود را انجام دهیم.

مطابق شکل ۳-۹ چیدمان آزمایش چیده شده است. در این شکل S بیانگر چشمه‌ی نور، SI روزنه، L عدسی، RT گونیامتر، P محل قرار گرفتن نمونه و Sc محل قرارگیری دوربین (CMOS) است.



شکل ۳-۹ چیدمان تجربی شکل ۳-۷ برای تعیین ضریب شکست تیغه

با انجام آزمایش در محدوده‌ی زاویه‌ای ذکر شده، θ_{max} در زاویه‌ی ۴۹ درجه و در نتیجه فاصله‌ی ماکزیمم بین دو پرتو برابر با ۴۰۰ پیکسل بدست آمد. (شکل ۳-۱۰)



شکل ۳-۱۰ توزیع شدت گرفته شده توسط CMOS از دو پرتو بازتابیده از دوسطح بالایی و زیرین تیغه

که درواقع با اندازه‌گیری فاصله‌ی دو مرکز روشن شکل فوق، فاصله‌ی دو پرتو مشخص می‌شود.

نکته‌ای که باید به آن توجه داشته باشیم این است که در این روش، فاصله‌ی بدست آمده برحسب پیکسل هست که باید به واحد مناسب جهت جایگذاری در معادله‌ی تعیین ضریب شکست تبدیل گردد. بدین منظور روش زیر را ارائه می‌دهیم:

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، از توری با تناوب 0.2 میلی‌متر در این آزمایش استفاده شده است. در نتیجه با تاباندن نور موازی به این توری در فاصله‌ی تالپوت از آن تصویر می‌گیریم. با توجه به این‌که در فاصله‌ی تالپوت تصویر توری مجدداً به طور کامل تشکیل می‌شود، تعداد پیکسل‌های یک تناوب توری را می‌شماریم. این تعداد باید متناسب با تناوب توری یعنی 0.2 میلی‌متر باشد، یعنی یا یک تناسب ساده، فاصله‌ی دو توری برحسب میلی‌متر بدست می‌آید، که این فاصله در آزمایش ما برابر با 2.857 میلی‌متر گردید.

با استفاده از رابطه‌ی (۳-۹) که در این فصل اثبات گردید، مقدار ضریب شکست و هم‌چنین خطای آن به صورت زیر بدست آمده است:

$$N = 1.536 \pm 0.008 \quad (۳-۱۰)$$

که با مقایسه با مقدار بدست آمده از روش این پایان نامه، با هم همخوانی دارند.

نتیجه گیری

در این مطالعه به طور نظری، رابطه‌ی نمایانی شدت در فواصل تالبوت برای بازتاب نور از سطوح ناصاف، با ناصافی و تابع همبستگی سطح محاسبه شد. همچنین نشان داده شد که اگر فاصله خطوط توری از طول همبستگی سطح بزرگ‌تر باشد، نمایانی شدت تنها به ناصافی سطح وابسته است. در مطالعات تجربی اندازه‌ی ناصافی سطوحی استاندارد با این روش اندازه‌گیری شد. نتایج به دست آمده از این روش با مقادیر رسمی به خوبی مطابقت دارد. پژوهش انجام شده نشان داد روش اندازه‌گیری نمایانی در فواصل تالبوت می‌تواند به عنوان یکی از روش‌های غیرتماسی کارآمد برای اندازه‌گیری ناصافی مورد استفاده قرار گیرد. این روش، جدای از دارا بودن مزایای روش‌های غیرتماسی (ذکر شده در انتهای فصل اول)، چیدمان بسیار ساده و کم هزینه‌ای دارد. همچنین به علت اندازه‌گیری نمایانی بجای شدت نور، درصد خطای آزمایش در آن پایین‌تر از روش‌های دیگر غیرتماسی است، و مهم‌ترین مزیت این روش بهره‌گیری از نظریه‌ی پراش میدان نزدیک (پراش فرنل) است که امکان بدست آوردن طول همبستگی و ناصافی سطح را از روی نمایانی شدت نور در فواصل تالبوت فراهم می‌کند. همچنین در این پایان‌نامه رهیافتی جالب برای بدست آوردن ضریب شکست مواد ناصاف با استفاده از روابط بازتابی و عبور ارائه شد که از چیدمان آزمایش بسیار ساده‌ای در مقایسه با روش‌های دیگر برخوردار است.

به‌طور کلی می‌توان نکات برجسته‌ی این پژوهش را به صورت زیر بیان کرد:

- (۱) چیدمان آزمایشگاهی ساده و ارزان قیمت
- (۲) عدم نیاز به دانستن ضریب شکست مواد دارای یک سطح ناصاف، برای تعیین ناصافی و طول هم‌دوسی سطوح ناصاف
- (۳) دقت و گستره‌ی وسیع در اندازه‌گیری ناصافی سطوح
- (۴) اندازه‌گیری ضریب شکست مواد دارای یک سطح ناصاف با مقایسه روابط بازتابی و عبور
- (۵) وابسته نبودن به شفاف یا غیر شفاف بودن سطوح ناصاف
- (۶) اندازه‌گیری نمایانی به جای شدت نور، که سبب کاهش خطای ناشی از ارتعاشات نور لیزر می‌شود
- (۷) اندازه‌گیری ضریب شکست مواد دارای یک سطح ناصاف و تعیین ناصافی سطوح در یک چیدمان آزمایشگاهی

مراجع

- [1] K. H. Guenther, P. G. Wierer, and J. M. Bennett, "Surface roughness measurements of low-scatter mirrors and roughness standards," *Appl. Opt.* 23, 3820–3836 (1984).
- [2] C. Amra, "From light scattering to the microstructure of thin-film multilayers," *Appl. Opt.* 32, 5481–5491 (1993).
- [3] D. J. Whitehouse, "Review article: surface metrology," *Meas. Sci. Technol.* 8, 955–972 (1997).
- [4] J. M. Bennett, "Measurement of the rms roughness, autocovariance and other statistical properties of optical surfaces using a FECO scanning interferometer," *Appl. Opt.* 15, 2705–2721 (1976).
- [5] K. A. O'Donnell, "Effect of finite stylus width in surface contact profilometry," *Appl. Opt.* 32, 4922–4928 (1993).
- [6] Y. Fainman, E. Lenz, and J. Shamir, "Optical profilometer: a new method for high sensitivity and wide dynamic range," *Appl. Opt.* 21, 3200–3208 (1982).
- [7] O. V. Angelsky and P. P. Maksimyak, "Optical diagnostics of random phase objects," *Appl. Opt.* 29, 2894–2898 (1990).
- [8] O. V. Angelsky, P. P. Maksimyak, V. V. Ryukhtin, and S. G. Hanson, "New feasibilities for characterizing rough surfaces by optical-correlation techniques," *Appl. Opt.* 40, 5693–5707 (2001).
- [9] O. V. Angelsky, D. N. Burkovets, P. P. Maksimyak, and S. G. Hanson, "Applicability of the singular-optics concept for diagnostics of random and fractal rough surfaces," *Appl. Opt.* 42, 4529–4540 (2003).
- [10] W. T. Welford, "Optical estimation of statistics of surface roughness from light scattering measurements," *Opt. Quantum Electron.* 9, 269–287 (1977).
- [11] M. Dashtdar and M. T. Tavassoly, "Roughness measurement using threshold angle of image formation," *Opt. Eng.* 50, 123601 (2011).
- [12] P. Gonzalez-Rodriguez and A. D. Kim, "Light propagation in two-layer tissue with an irregular interface," *J. Opt. Soc. Am. A* 25, 64–73 (2008).
- [13] Y. Oh, K. Sarabandi, and F. T. Ulaby, "An empirical model and an inversion technique for radar scattering from bare soil surfaces," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 30, 370–381 (1992).

- [14] M. Dashtdar and M. T. Tavassoly, "Redshift and blueshift in the spectra of lights coherently and diffusely scattered from random rough interfaces," *J. Opt. Soc. Am. A* 26, 2134–2138 (2009).
- [15] M. Leyva-Lucero, E. R. M~ndez, T. A. Leskova, A. A. Maradudin, and J. Q. Lu, "Multiple-scattering effects in the second-harmonic generation of light in reflection from a randomly rough metal surface," *Opt. Lett.* 21, 1809 (1996).
- [16] *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry: Surfaces, Colloids, Polymers*, edited by D. Avnir (Wiley, New York, 1989).
- [17] M. Saillard and D. Maystre, "Scattering from metallic and dielectric rough surfaces," *J. Opt. Soc. Am. A* 7, 982 (1990). [4] M. Leyva-Lucero, E. R. M~ndez, T. A. Leskova, A. A. Maradudin, and J. Q. Lu, "Multiple-scattering effects in the second-harmonic generation of light in reflection from a randomly rough metal surface," *Opt. Lett.* 21, 1809 (1996).
- [18] Ernst SchlSmann, "Demagnetizing fields in thin magnetic films due to surface roughness," *J. Appl. Phys.* 41, 1617 (1970).
- [19] Q. Jiang, H.-N. Yang, and G.-C. Wang, "Effect of interface roughness on hysteresis loops of ultrathin Co films from 2 to 30 ML on Cu(001) surfaces," *Surf. Sci.* 373, 181 (1997).
- [20] G. Palasantzas and J. Barns "Surface-roughness fractality effects in electrical conductivity of single metallic and semiconducting films," *Phys. Rev. B* 56, 7726 (1997).
- [21] M. Leyva-Lucero, E. R. M~ndez, T. A. Leskova, A. A. Maradudin, and J. Q. Lu, "Multiple-scattering effects in the second-harmonic generation of light in reflection from a randomly rough metal surface," *Opt. Lett.* 21, 1809 (1996).
- [22] K. A. O'Donnell and R. Torre, "Second-harmonic generation from a strongly rough metal surface," *Opt. Commun.* 138, 341 (1997).
- [23] *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry: Surfaces, Colloids, Polymers*, edited by D. Avnir (Wiley, New York, 1989).
- [24] M. Saillard and D. Maystre, "Scattering from metallic and dielectric rough surfaces," *J. Opt. Soc. Am. A* 7, 982 (1990).
- [25] Jean-Jacques Greffet, "Theoretical model of the shift of the Brewster angle on a rough surface," *Opt. Lett.* 17, 238 (1992).
- [26] R. I. Hedge, M. A. Chonko, and P. J. Tobin, "Effect of silicon substrate microroughness on gate oxide quality," *J. Vac. Sci. Technol. B* 14, 3299 (1996).

- [27] F. Ladouceur, "Roughness, inhomogeneity, and integrated optics," J. Lightwave Technol. 15, 1020 (1997).
- [28] Soe-Mie F. Nee, Randle V. Dewees, Tsu-Wei Nee, Linda F. Johnson, and Mark B. Moran, "Slope distribution of a rough surface measured by transmission scattering and polarization," Appl. Opt. 39, 1561–1569 (2000).
- [29] T. M. Elfouhaily and C. A. Guerin, "A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces," Waves Random Media 14, R1–40 (2004).
- [30] T. R. Thomas, *Rough Surfaces* (New York, Longman, 1982). [18] M.T.Tavassoly, M.Dashtdar, 'Height distribution on a rough plane and specularly diffracted light amplitude are Fourier transform pair', Optics Communications. 281, 2008, 2397-2405
- [31] M. Nieto-Vesperinas, J. A. Sanchez-Gil, A. J. Sant, and J. C. Dainty, "Light transmission from a randomly rough dielectric diffuser: theoretical and experimental results," Opt. Lett. 15, 1261–1263 (1990).
- [32] C. Babu Rao and Baldev Raj, "Study of engineering surfaces using laser-scattering techniques," Sadhana 28, 739–761 (2003).
- [33] M.T.Tavassoly, M.Dashtdar, 'Height distribution on a rough plane and specularly diffracted light amplitude are Fourier transform pair', Optics Communications. 281, 2008, 2397-2405
- [34] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University, 2002), pp. 421–430.
- [35] Yiping Zhao, Gwo-Ching Wang, Toh Ming Lu, 'Characterization of Amorphous and Crystalline Rough Surface: Principles and Applications', 2001, U.S., Academic Press
- [36] Masoomah Dashtdar and S. Mohammad Ali Hosseini Saber, "Determination of the rough interface parameters using the self-imaging effect," JOSA A, Vol. 30, Issue 11, pp. 2416-2421 (2013)
- [37] M.T Tavassoly, "A simple method for measuring the refractive index of a plate," Optics and Lasers in Engineering, Elsevier, June 2001.

پیوست ۱: فهرست اشکال

- تصویر AFM از سطح وافر سیلیکن با دو بزرگنمایی متفاوت ۴
- تأثیر دقت ابزار اندازه‌گیری در آزمایش ۵
- تصویر AFM یک ماده سیلیکونی لایه نشانی شده با مس و نمودار توزیع ارتفاع سطح متناظر با آن ۸
- مقایسه‌ی سه سطح ناصاف با RMS های متفاوت ۹
- دو سطح با RMS یکسان ولی با توابع توزیع ارتفاع متفاوت ۱۰
- سه سطح ناصاف با RMS یکسان و طول هم‌بستگی متفاوت ۱۲
- تابع هم‌بستگی متقابل سطوح متناظر با شکل ۴-۱ ۱۵
- شمای کلی ابزار سوزنی ۱۷
- باریکه نور موازی، هم‌دوس و تکفام، که با سطح ناصاف زاویه θ دارد به توری پراش رانکی که عمود به باریکه در صفحه $\eta - \xi$ قرار گرفته است، می‌تابد و بعد از بازتاب از سطح ناصاف (صفحه‌ی $\hat{x} - \hat{y}$) به نقطه (x, y) در صفحه‌ی $x - y$ می‌رسد ۲۶
- پرتویی با زاویه θ از سطح بازتابیده می‌شود. وقتی که سطح صاف است، پرتو در نقطه (\hat{x}, \hat{y}) از صفحه مرجع بازتابیده می‌شود. ولی وقتی که سطح ناصاف است، پرتو در نقطه (\hat{x}, \hat{y}) از ارتفاع $h(\hat{x}, \hat{y})$ بازتابیده می‌شود ۲۸
- چیدمان آزمایش برای بررسی عملکرد خطی CMOS مطابق با قانون مالوس. شدت نور لیزر توسط CMOS، پس از عبور از دوقطبشگر p_1, p_2 ثبت می‌شود ۴۵
- نمودار شدت بر حسب $\cos^2 X$ که در آن X زاویه‌ی بین دوقطبشگر است ۴۶
- نور موازی لیزر پس از عبور از میکرو لنز ML، لنز L، پلاروید P و توری G با زاویه‌ی θ به سطح ناصاف S که بر روی گونیامتر RT قرار داده شده، می‌رسد و از آن پراکنده می‌شود. توزیع شدت توسط CMOS که در زاویه‌ی بازتاب برابر با پرتو فرودی بر سطح S، قرار گرفته، ثبت می‌شود ۴۷
- توزیع شدت گرفته شده توسط CMOS در فاصله تالبوت و در حضور سطح صاف مرجع (تیغه‌ی شیشه‌ای) ۴۸
- تصویر نمونه‌های ناصاف استاندارد استفاده شده در آزمایش ۴۹
- تصاویر سمت چپ توزیع شدت نمونه‌ی N_2 را در فاصله‌ی تالبوت و زوایای بازتابی آ (۴۰ درجه، ب) ۵۰ درجه و ج) ۶۵ درجه نشان می‌دهند. هم‌چنین تصاویر سمت راست، توزیع شدت میانگین متناظر، در امتداد خطوط توری هستند ۵۱
- پرتو SI با زاویه‌ی θ به یک تیغه با ضخامت e برخورد و از دوسطح بالایی و زیرین تیغه، بازتاب می‌یابد ۵۳
- نمودار فاصله‌ی دو پرتو بازتابی از دو سطح بالایی و زیرین تیغه برحسب زاویه‌ی پرتو فرودی ۵۴

چیدمان تجربی شکل ۳-۷ برای تعیین ضریب شکست تیغه..... ۵۵

توزیع شدت گرفته شده توسط *CMOS* از دو پرتو بازتابیده از دوسطح بالایی و زیرین تیغه..... ۵۵

واژه نامه فارسی به انگلیسی

Roughness Measurement	اندازه گیری ناصافی
Electron beam	باریکه الکترونی
Parallel beam	باریکه موازی
Conduction band	باند رسانایی
Taylor expansion	بسط تیلور
Reyleigh Parameter	پارامتر ریلی
Fresnel diffraction	پراش فرنل
Scattering Of Light	پراکندگی نور
Erosion Powder	پودر سایش
Structure function	تابع ساختاری
Amplitude transmittance	تابع گذردهی دامنه
Characteristic function	تابع مشخصه
Surface's correlation function	تابع همبستگی سطح
Fourier transform	تبدیل فوریه
Constructive interference	تداخل سازنده
Toyman-Green interferometer	تداخل سنج تویمان - گرین
Destructive interference	تداخل ویرانگر
Fourier image	تصویر فوریه
Talbot image	تصویر تالبوت
Topography	توپوگرافی - رویه نگاری
Grating	توری پراش
Ronchi grating	توری پراش رانکی
Sinusoidal grating	توری پراش سینوسی

Height probability distribution	توزیع احتمالی ارتفاع
Spatial distribution of roughness	توزیع فضایی ناصافی
Gaussian Distribution	توزیع گاوسی
Statistical description	توصیف آماری
Lateral displacement	جابجایی عرضی
Probe	جاروب کننده
Detection sensitivity	حساسیت آشکارسازی
Self-Image	خود تصویر
Degree of surface roughness	درجه ناصافی سطح
Displacement precision of CCD	دقت جابجایی CCD
Dirac delta	دلتای دیراک
Period of Grating	دوره تناوب توری
Statistical behavior of surface parameters	رفتار آماری پارامترهای سطح
Scattering method	روش پراکندگی
Light Scattering method	روش پراکندگی نور
Interferometry method	روش تداخل سنجی
Stylus method	روش سوزنی
Optical methods	روش های اپتیکی
Electrical method	روش های الکتریکی
Contact method	روش های تماسی
Noncontact method	روش های غیر تماسی
Optical rail	ریل اپتیکی
Light Incident angle	زاویه فرود نور
Flat reference surface	سطح مرجع صاف

Rough Surface	سطح ناصاف
Diamond Stylus	سوزن الماسی
Backup system	سیستم پشتیبان
Mesh Number	شماره مش
Refractive index	ضریب شکست
Correlation Length	طول همبستگی
Talbot distance	فاصله تالبوت
Talbot carpet	فرش تالبوت
Filament	فیلمان
Hook's law	قانون هوک
Piezoelectric crystal	کریستال پیزوالکتریک
Piezoelectric Transducer	مبدل پیزوالکتریک
Rayleigh Criterion	معیار ریلی
Coherent Light Source	منبع نور همدوس
Plane Wave	موج تخت
Monochromatic Wave	موج تکفام
Scanning tunneling microscopy	میکروسکوپ تونلی روبشی (STM)
Scanning electron microscopy	میکروسکوپ روبش الکترونی (SEM)
Surface roughness	ناصافی سطح
Perturbation theory	نظریه اختلال
Kirchhoff theory	نظریه کیرشهف
Coherent Light	نور همدوس
Second harmonic	هارمونیک دوم
Coherency of light	همدوسی نور
Vernier	ورنیه

واژه نامه انگلیسی به فارسی

Amplitude transmittance	تابع گذردهی دامنه
Backup system	سیستم پشتیبان
Characteristic function	تابع مشخصه
Coherency Of Light	همدوسی نور
Coherent Light	نور همدوس
Coherent Light Source	منبع نور همدوس
Conduction band	باند رسانایی
Constructive interference	تداخل سازنده
Contact method	روش های تماسی
Correlation Length	طول همبستگی
Detection sensitivity	حساسیت آشکارسازی
Diamond Stylus	سوزن الماسی
Dirac delta	دلتای دیراک
Displacement precision of CCD	دقت جابجایی CCD
Destructive interference	تداخل ویرانگر
Electrical method	روش های الکتریکی
Electron beam	باریکه الکترونی
Erosion Powder	پودر سایش
Filament	فیلمان
Flat reference surface	سطح مرجع صاف
Fourier image	تصویر فوریه

Fourier transform	تبدیل فوریه
Fresnel diffraction	پراش فرنل
Gaussian Distribution	توزیع گاوسی
Grating	توری پراش
Height probability distribution	توزیع احتمالی ارتفاع
Hook's low	قانون هوک
Interferometry method	روش تداخل سنجی
Kirchhoff theory	نظریه کیرشهف
Lateral displacement	جابجایی عرضی
Light Incident angle	زاویه فرود نور
Light Scattering method	روش پراکندگی نور
Mesh Number	شماره مش
Monochromatic Wave	موج تکفام
Noncontact method	روش های غیر تماسی
Optical rail	ریل اپتیکی
Oscilloscope	اسیلوسکوپ
Optical methods	روش های اپتیکی
Parallel beam	باریکه موازی
Perturbation theory	نظریه اختلال
Piezoelectric crystal	کریستال پیزوالکتریک
Piezoelectric Transducer	مبدل پیزوالکتریک
Plane Wave	موج تخت
Period of Grating	دوره تناوب توری
Probe	جاروب کننده
Rayleigh Criterion	معیار ریلی

Refractive index	ضریب شکست
Reyleigh Parameter	پارامتر ریلی
Ronchi grating	توری پراش رانکی
Rough Surface	سطح ناصاف
Roughness Measurement	اندازه گیری ناصافی
Surface Roughness	ناصافی سطح
Scanning tunneling microscopy	میکروسکوپ تونلی روبشی (STM)
Scanning electron microscopy	میکروسکوپ روبش الکترونی (SEM)
Scattering method	روش پراکندگی
Scattering Of Light	پراکندگی نور
Second harmonic	هارمونیک دوم
Secondary electrons	الکترون های ثانویه
Self-Image	خود تصویر
Sinusoidal grating	توری پراش سینوسی
Spatial distribution of roughness	توزیع فضایی ناصافی
Statistical behavior of surface parameters	رفتار آماری پارامتر های سطح
Statistical description	توصیف آماری
Structure function	تابع ساختاری
Stylus method	روش سوزنی
Surface correlation function	تابع همبستگی سطح
Talbot carpet	فرش تالبوت
Talbot distance	فاصله تالبوت
Talbot image	تصویر تالبوت
Taylor expansion	بسط تیلور

Topography	توپوگرافی - رویه نگاری
Toyman-Green interferometer	تداخل سنج تویمان - گرین
Vernier	ورنیه

Abstract

When a coherent light passes through a diffraction grating, the image of the grating is formed at the Talbot distances. The contrast of the light intensity at the Talbot intervals restrictedly depends on the coherency of the light. It is shown that if we place a rough interface after a diffraction grating, the reflected light also forms the image of the grating at Talbot distances but with less contrast. It is shown theoretically that the contrast of the Talbot images depends on the surface roughness, correlation length, the distance between the rough interface and the observation plane, and the grating period. It is also shown practically that by measuring the contrast of the scattered light at Talbot distances of gratings with periods longer than the surface correlation length, we can determine the surface roughness. We also introduce an interesting method for measuring the refractive index of materials with a rough interface (such as thin films).



Shahid Beheshti University

Faculty of Physics

Master Thesis in Atomic and Molecular Physics

Title:

**Determination of the roughness and the refractive index of
materials with a rough interface by light scattering in the
Fresnel zone**

Supervisor:

Dr. Masoomeh Dashtdar

By:

Ali Mohammadzadeh

August 2014