

# Algorytmy numeryczne

## Projekt 1

Temat:

„Sumowanie szeregów potęgowych – funkcja cosinus”

W związku z zadaną w trakcie zajęć funkcją  $\cos(x)$ , podczas obliczania przybliżonej wartości szeregu skorzystałem z rozwinięcia Maclaurina oraz wyprowadzonego wzoru na następny wyraz ciągu:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * x^{2n}}{(2n)!} \quad \frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{(-1) * x^2}{(2n) * (2n-1)}$$

, gdzie  $x$  podawany jest w radianach oraz  $n$  oznacza liczbę obliczanych kroków(iteracji).

Program, wykonujący potrzebne operacje dla typu **long double**, został napisany w języku C. Wyniki działań są porównywane z funkcją «**cosl(x)**» zawartą w bibliotece «**math.h**».

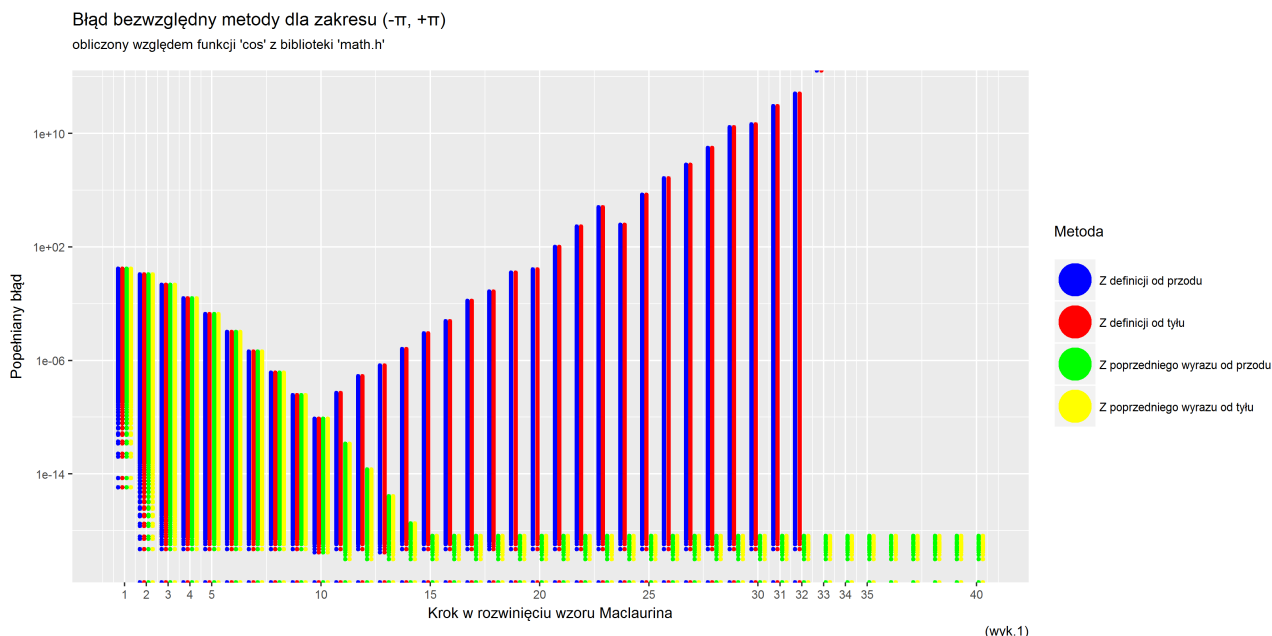
Obliczenia wykonałem dla czterech różnych metod, licząc:

- Bezpośrednio z definicji:
  - sumując kolejno wyrazy od przodu
  - sumując wyrazy z zapamiętanej tablicy od tyłu
- Korzystając z wyprowadzonego ilorazu dla poprzednika w ciągu:
  - sumując wyrazy od przodu
  - sumując wyrazy z zapamiętanej tablicy od tyłu

Jako zakres wartości  $x$  przyjąłem  $(-M\_PI, +M\_PI)$ , gdzie  $M\_PI$  jest zdefiniowane w języku C jako liczba  $\pi$ .

Ze względu na naturę cosinusa, nie zdecydowałem się na testowanie poza tym zakresem, gdyż funkcja jest parzysta i okresowa.

Poniżej przedstawiam wykresy sporządzone na podstawie otrzymanych danych:



## WNIOSKI:

Podczas przeprowadzonych badań i obserwacji ich wyników, sformułowałem następujące wnioski:

### 1. Błędy dla metod to „wypadkowa” trzech błędów: wejściowych, obcięcia oraz zaokrągleń.

Pierwszym czynnikiem wpływającym na powstający błąd jest niedostateczne rozwinięcie liczby  $\pi$  w pamięci komputera. Nie jesteśmy w stanie podać dokładnej wartości, zastępujemy to urwaniem/zaokrągleniem liczby co prowadzi do błędu wejścia. Również zakres wprowadzonych danych jest skończony, co skutkuje brakiem informacji dla części przedziału  $(-\pi, \pi)$ . Drugi czynniki jest związany z procedurami numerycznymi. Błąd obcięcia, który powodowany jest przez sumowanie nieskończonego szeregu. W naszym działaniu zwiększamy liczbę sumowanych wyrazów ciągu, staramy się tak zmniejszyć tę niedoskonałość. Ostatnim składnikiem jest błąd zaokrąglenia powstający podczas obliczeń, którego nie można ominąć. Jednak dobierając umiejętnie sposób działania, możemy go redukować.

### 2. Dla zadanej funkcji najlepsze wyniki uzyskujemy korzystając z poprzedniego wyrazu ciągu, natomiast najgorsze przy obliczeniach ze wzoru.

Na załączonych wykresach zobrazowane są wyniki poszczególnych metod obliczeń. Do dziesiątej iteracji błąd bezwzględny zmniejsza się dla każdej z nich. Od jedenastej iteracji zauważamy różnice pomiędzy wynikami dla różnych metod.

Funkcje, w których wykorzystujemy poprzedni wyraz (`cosFront()`, `cosBack()`), w dalszym ciągu zmniejszają błąd. Jednak w pewnym momencie przestają obniżać go w znaczący sposób i wyniki utrzymują się na pewnym poziomie. Nie wykazują jednak tendencji do zaprzestania wykonywania operacji.

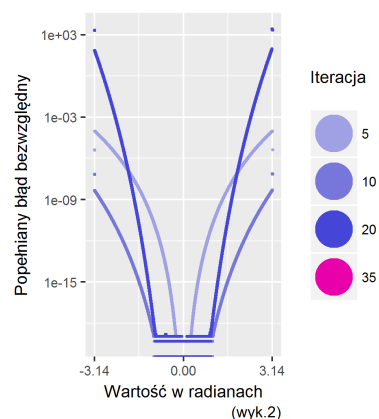
W przeciwieństwie do nich działają funkcje obliczające wyraz wprost z definicji (`cosMaclaurinFront()`, `cosMaclaurinBack()`), dla nich błąd zaczyna wzrastać. Skutkiem czego jest obniżenie precyzji wyników. W czasie trzydziestej drugiej oraz trzydziestej trzeciej iteracji wyniki zaczynają przerastać możliwości **typu long double** co prowadzi w trzydziestej czwartej iteracji do zwracania wartości *inf/NaN* (na wyk.1, wyk.2 i wyk.3 jest to przedstawione zanikiem ich reprezentacji). W tym momencie obie metody w żadnym stopniu nie spełniają swojego zadania.

Wnioskuje, że spowodowane jest to wykorzystaniem silni (`silnia()`) oraz potęgi (`potega()`) do obliczeń poszczególnych części równania. Zwracane przez nie wartości wykraczają poza zakres pamięci zmiennej, w wyniku czego maszyna nie jest w stanie poprawnie wykonać działań.

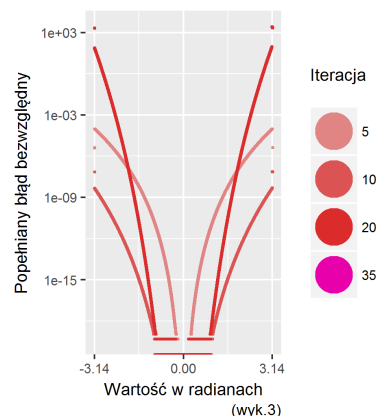
#### Wykorzystane materiały oraz pomoce naukowe:

- Wykład „Algorytmy numeryczne” w ramach zajęć na Uniwersytecie Gdańskim
- Wykład „Metody numeryczne” (<http://home.agh.edu.pl/~zak/downloads/MN2-2012.pdf>)
- The Maclaurin Expansion of  $\cos(x)$  (<http://blogs.ubc.ca/infinitieseriesmodule/units/unit-3-power-series/taylor-series/the-maclaurin-expansion-of-cosx/>)
- Środowisko języka R w wersji 3.3.2 wraz z pakietami `ggplot2` oraz `rschape2`

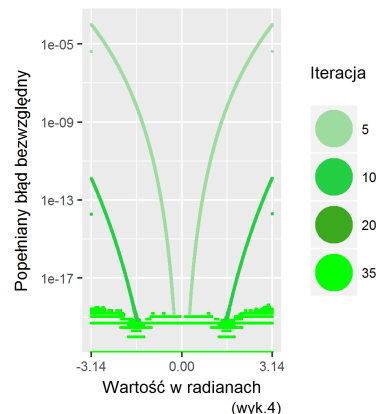
Sumowanie przy pomocy definicji od przodu



Sumowanie przy pomocy definicji od tyłu



Sumowanie przez poprzedni wyraz od przodu



Sumowanie przez poprzedni wyraz od tyłu

