Liczba Dedekinda

Liczba monotonicznych funkcji boolowskich n-zmiennych

Jan Iwaszkiewicz

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytet Gdański

14 maja 2019

Plan prezentacji

Wstęp i przypomnienie

Wstęp - Richard Dedekind

Richard Dedekind niemiecki matematyk, uczeń Petera Gustava Dirichleta i Carla Friedricha Gaussa, przyjaciel Georga Cantora. Jego prace dotyczą głównie teorii liczb, algebry, teorii mnogości i analizy matematycznej.

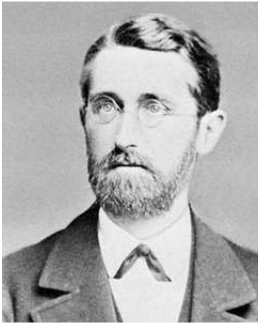

Figure: Julius Wilhelm Richard Dedekind

https://pl.wikipedia.org/wiki/Richard_Dedekind

Liczba Dedekinda

Liczbą Dedekinda możemy nazwać ilość elementów w zbiorze monotonicznych boolowskich funkcji o k-zmiennych (gdzie $k \in [0, \infty)$). Taki zbiór będziemy określać jako M_k.

Wikipedia - Dedekind number

Przypomnienie - funkcja boolowska

Definicja

$$f : B^k \to B$$
$$B = \{0, 1\}$$
$$k \in [0, \infty)$$

$B^k \in 2^k$ elementów oraz 2^{2^k} funkcji boolowskich z k-zmiennymi

Przykład

$$B^0 = \{0, 1\}$$
$$B^1 = \{00, 01, 10, 11\}$$
$$B^2 = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, ...\}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Boolean_function

Przypomnienie - monotoniczność

Definicja

Porządek relacji w B:

$$0 \leqslant 0, 0 \leqslant 1, 1 \leqslant 1$$

Oraz częściowy porządek w B^k:

$$x = (x_1, ..., x_k), y = (y_1, ..., y_k)$$

$$x \leqslant y \text{ dla } x_i \leqslant y_i, i \in [1, k]$$

Zatem funkcja g jest monotoniczna gdy:

$$x \leqslant y \Rightarrow g(x) \leqslant g(y)$$

Przypomnienie - konkatenacja dwóch funkcji

Twierdzenie

Konkatenacja dwóch funkcji monotonicznych tworzy również funkcję monotoniczną.

Przykłady (nie)monotonicznych funkcji:

$0 \cdot 1 \rightarrow 01$

$1 \cdot 0 \nrightarrow 10$, brak spełnionego warunku

$0101 \cdot 1111 \rightarrow 01011111$

Algorytmy

Wizualizacja kostek

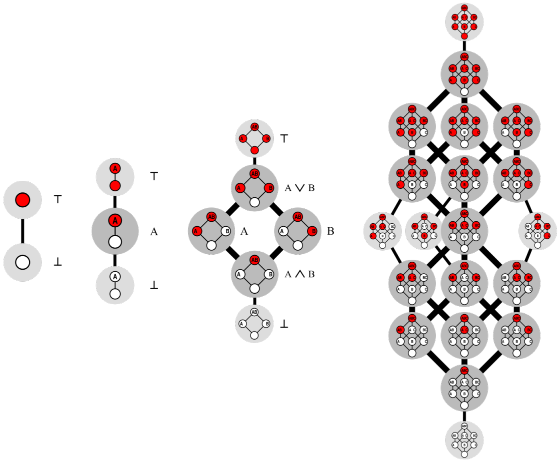

Figure: Wygląd kostek oraz ich "kolorowania" dla zadanej liczby Dedekinda.

Pierwszy algorytm

Pseudokod

sum = 0
for i = 1 to M_{k-1} do
    for j = 1 to M_{k-1} do
        if $M_{k-1}[i] \leqslant M_{k-1}[j]$ then
            sum = sum + 1

            $M_k[sum] = M_{k-1}[i] \cdot M_{k-1}[j]$
return sum, M_k

Algorithms counting monotone Boolean functions - Robert Fidytek, Andrzej W. Mostowski, Rafał Somla, Andrzej Szepietowski

Drugi algorytm

Pseudokod

compute matrix $r \Leftarrow u \leqslant v \; ? \; r[u][v] = 1 : r[u][v] = 0$

compute matrix $re = r * r$

$sum = \sum_{i,j \in M_{k-2}} (re[i][j])^2$

Algorithms counting monotone Boolean functions - Robert Fidytek, Andrzej W. Mostowski, Rafał Somla, Andrzej Szepietowski

Podsumowanie

Podsumowanie

Dziękuję za uwagę!
Zapraszam do dyskusji oraz pytań.