2024.12.19 Prepare Notes for Discussion Session 3

课上叙述出错的地方：

(i) $\varphi^{-1}(U_1 \oplus U_2) = \varphi^{-1}(U_1) \oplus \varphi^{-1}(U_2)$ **必须要求同构映射**，虽然在保持线性和满射前提下已经成立 $\varphi^{-1}(U_1 + U_2) = \varphi^{-1}(U_1) + \varphi^{-1}(U_2)$ 和 $\varphi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \varphi^{-1}(U_1) \cap \varphi^{-1}(U_2)$。

但是此时 $\varphi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \varphi^{-1}(U_1) \cap \varphi^{-1}(U_2) = \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$ **这是必须要成立的，所以必须单射!**

(ii) $\Theta(\mathrm{id}_V) = E_n$ 这一点直接由 Θ 的**定义得到**就可以了，也就是任取定 V 的一组基，id_V 在这组基下的矩阵一定是 E_n ，因为这是**恒同映射**。

A brief introduction to Jordan Canonical Form:

1. 设 $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，且 $\varphi^3 - 2\varphi^2 + \varphi = \mathscr{O}$. 证明：

(i) $V = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \mathrm{Ker}\varphi$;

(ii) 存在 V 的一组基 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 使得

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 A 为一个 r 阶可逆方阵，$\dim \mathrm{Im}\varphi = r$.

(iii) 你能说明 $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_V)^2$ 吗？

Hint: $(\varphi - \mathrm{id}_V)^2 - (\varphi - 2\mathrm{id}_V)\varphi = \mathrm{id}_V \rightsquigarrow$ 同构意义下创造单位阵打洞!

(iv) 其实 (1) 可以改写为 $V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_V)^2$，能直接证明吗？

Note: (Chapter 5) Generally, if we have $f, g \in F[x], f(\varphi)g(\varphi) = \mathscr{O}, \gcd(f, g) = 1$, then

$$V = \mathrm{Ker}f(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}g(\varphi),\ \mathrm{Im}f(\varphi) = \mathrm{Ker}g(\varphi).$$

(v) 存在 V 的一组基 $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ 使得

$$\varphi(\xi_1', \ldots, \xi_n') = (\xi_1', \ldots, \xi_n')\ \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2), \cdots, \boldsymbol{J}(1,2), \boldsymbol{J}(1,1), \cdots, \boldsymbol{J}(1,1), \boldsymbol{J}(0,1), \cdots, \boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

pf:

(i) 注意到显然有维数 $\dim \mathrm{Im}\varphi + \dim \mathrm{Ker}\varphi = n$,只证明 $\mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$ 或者 $V = \mathrm{Im}\varphi + \mathrm{Ker}\varphi$ 其中一条:

(a) 选择 $\mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$，考虑 $\forall \alpha \in \mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\varphi$，那么有

$$\varphi(\alpha) = \mathbf{0},\ \exists\, \beta \in V,\ \varphi(\beta) = \alpha.$$

利用条件 $\varphi^3 - 2\varphi^2 + \varphi = \mathscr{O}$，得到 $\varphi(\beta) = 2\varphi^2(\beta) - \varphi^3(\beta) = 2\varphi(\alpha) - \varphi^2(\alpha) = \mathbf{0}$.

(b) 选择 $V = \mathrm{Im}\varphi + \mathrm{Ker}\varphi$ ，注意到拆分

$$\alpha = (\varphi - \mathrm{id}_V)^2(\alpha) - \varphi^2(\alpha) + 2\varphi(\alpha) = (\varphi - \mathrm{id}_V)^2(\alpha) - \varphi(\varphi(\alpha) - 2\alpha). \tag{1}$$

那么由 $\varphi(\varphi - \mathrm{id}_V)^2 = \mathscr{O}$ 得到 $\varphi[(\varphi - \mathrm{id}_V)^2(\alpha)] = [\varphi(\varphi - \mathrm{id}_V)^2](\alpha) = \mathbf{0} \rightsquigarrow (\varphi - \mathrm{id}_V)^2(\alpha) \in \mathrm{Ker}\varphi$，而 $\varphi(\varphi(\alpha) - 2\alpha) \in \mathrm{Im}\varphi$ 是显然的。

(ii) 不妨取 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基为 $\xi_{r+1},\cdots,\xi_r$，扩为 V 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$。那么 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r)$ 即为 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基，根据 (i) 已经证明直和，那么 $\mathrm{Im}\varphi$ 和 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的基拼在一起就得到 V 的一组基，即 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r),\xi_{r+1},\cdots,\xi_r$ 为 V 的一组基，**又由于 $\mathrm{Im}\varphi,\mathrm{Ker}\varphi$ 均为 $\varphi-$子空间，那么 φ 在这组基下的矩阵为分块对角阵：**

$$\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\begin{pmatrix}A & O\\ O & O\end{pmatrix} \tag{2}$$

其中 A 为 r 阶方阵，由扩基假设 $\dim\mathrm{Im}\varphi=r$，即 φ 在任何一组基下的矩阵的秩为 r，那么 $r(A)=r\rightsquigarrow A$可逆。

(iii) 证明两边包含即可：

(a) Goal: $\mathrm{Im}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id}_V)^2$，这是很容易的，只要注意到 $\varphi(\varphi-\mathrm{id}_V)^2=\mathscr{O}$，这说明

$$\forall\ \alpha\in\mathrm{Im}\varphi,\exists\ \beta\in V,\ \varphi(\beta)=\alpha\rightsquigarrow(\varphi-\mathrm{id}_V)^2(\alpha)=[\varphi(\varphi-\mathrm{id}_V)^2](\beta)=\mathbf{0}\rightsquigarrow\alpha\in\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id}_V)^2. \tag{3}$$

(b) Goal: $\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id}_V)^2\subseteq\mathrm{Im}\varphi$。这需要利用Hint，注意到 $(\varphi-\mathrm{id}_V)^2-(\varphi-2\mathrm{id}_V)\varphi=\mathrm{id}_V$，那么

$$\forall\ \alpha\in\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id}_V)^2,\alpha=\mathrm{id}_V(\alpha)=[(\varphi-\mathrm{id}_V)^2-(\varphi-2\mathrm{id}_V)\varphi](\alpha)=\varphi[(2\mathrm{id}_V-\varphi)(\alpha)]\in\mathrm{Im}\varphi. \tag{4}$$

(iv) 其实空间直和分解的三个条件在此处都能证明出来，逐一叙述：

(a) $V=\mathrm{Ker}\varphi+\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id}_V)^2$: 利用 (i) 中的 (1) 式即可；

(b) $\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id}_V)^2=\{\mathbf{0}\}$: 利用 (i) 中的 (1) 式即可；

(c) $\dim\mathrm{Ker}\varphi+\dim\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id}_V)^2=n$: 利用同构原理，取定空间的一组基，将 φ 转化到基下的矩阵 A。为证明结论，只需 $r(A)+r[(A-E)^2]=n$ 即可。下面利用矩阵打洞：

$$\begin{bmatrix}A & O\\ O & (A-E)^2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}A & (A-E)^2-(A-2E)A\\ O & (A-E)^2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}A & E\\ O & (A-E)^2\end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow\begin{bmatrix}A & E\\ -(A-E)^2A(=O) & O\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}O & E\\ -(A-E)^2A(=O) & O\end{bmatrix}.$$

(v) 注意到 $\mathrm{Im}\varphi$ 为 $\varphi-$子空间，即 $\varphi|_{\mathrm{Im}\varphi}$ 仍然为 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的线性变换。而 $(\varphi-\mathrm{id}_V)^2|_{\mathrm{Im}\varphi}=\mathscr{O}$。令 $\psi=\varphi-\mathrm{id}_V$，则存在 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基 $\xi_1',\cdots,\xi_r'$ 使得

$$\psi(\xi_1',\cdots,\xi_r')=(\xi_1',\cdots,\xi_r')\ \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(0,2),\cdots,\boldsymbol{J}(0,2),\boldsymbol{J}(0,1),\cdots,\boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

这其实说明

$$\varphi(\xi_1',\cdots,\xi_r')=(\xi_1',\cdots,\xi_r')\ \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2),\cdots,\boldsymbol{J}(1,2),\boldsymbol{J}(1,1),\cdots,\boldsymbol{J}(1,1)\}.$$

将 $\xi_1',\cdots,\xi_r'$ 扩为 V 的一组基 $\xi_1',\cdots,\xi_n'$ ，则

$$\varphi(\xi_1',\cdots,\xi_n')=(\xi_1',\cdots,\xi_n')\ \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2),\cdots,\boldsymbol{J}(1,2),\boldsymbol{J}(1,1),\cdots,\boldsymbol{J}(1,1),\boldsymbol{J}(0,1),\cdots,\boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

$\square$

2. 验证 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1&-1\\-1&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

(1) 能求出可逆矩阵 P 满足 $P^{-1}AP=J$ 吗?

(2) 将结论转化为几何语言，也就是 F^4 上的线性变换 $\varphi\ldots$

pf:

(0) 首先验证相似，由第一题可知如果矩阵 A 满足 $(A-E)^2A=O$ 那么必然会相似到形如 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2),\cdots,\boldsymbol{J}(1,2),\boldsymbol{J}(1,1),\cdots,\boldsymbol{J}(1,1),\boldsymbol{J}(0,1),\cdots,\boldsymbol{J}(0,1)\}$ 的Jordan标准型，而

$$A^2=\begin{bmatrix}3&2&-2&-2\\-2&-1&2&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix}4&3&-3&-3\\-3&-2&3&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow A^3-2A^2+A=O \tag{5}$$

验证发现这是成立的，而 $r(A)=3$ ，相似保持秩的不变性，则 $\boldsymbol{J}(0,1)$ 只有1块，只需要说明必定有一个 $\boldsymbol{J}(1,2)$ 块即可。若剩下的为 3 个 $\boldsymbol{J}(1,1)$ 这说明 $\dim\mathrm{Ker}(A-E)=3$，即 $r(A-E)=1$，但简单计算可知 $r(A-E)=2$ 与该假设矛盾，即必定有一个 $\boldsymbol{J}(1,2)$ 块。

(1) 设 $A(P_1,P_2,P_3,P_4)=(P_1,P_2,P_3,P_4)J\rightsquigarrow AP_1=P_1,AP_2=P_1+P_2,AP_3=P_3,AP_4=O$。首先求 P_4，即求 $AX=O$ 的一个基础解系，矩阵打洞得

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&-1\\-1&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得到一个基础解系为 $P_4=(0,0,1,-1)'$。接下来求 P_1,P_2,P_3，要注意 P_1,P_2 是关联在一起得两个向量，因此不采取直接求解线性方程组 $(A-E)X=O$ 得到 P_1,P_3 后再去求解 P_2 的方法。注意到 $(A-E)P_2=P_1\neq O$, $(A-E)P_1=(A-E)^2P_2=O$。因此我们先求解 $(A-E)^2X=O$ 的基础解系中的一个向量，再将其左作用 $A-E$ 后得到 P_1，称这时候的 P_2 为$\boldsymbol{J}(1,2)$ 的循环向量。而直接求解 $(A-E)^2$ 再矩阵打洞十分麻烦，注意到 $(A-E)^2A=O$ 以及 $r[(A-E)^2]+r(A)=n$ 这说明 A 的列向量组的极大无关组就是 $(A-E)^2X=O$ 的基础解系。记 $A=(A_1,A_2,A_3,A_4)$ ，容易发现 A_1,A_2,A_3 即为列向量组的极大无关组，将它们同时用 $(A-E)$ 左作用，得到

$$(A-E)A_1=(1,-1,0,0)',(A-E)A_2=(1,-1,0,0)',(A-E)A_3=(-1,1,0,0)' \tag{6}$$

这说明 $A_1,A_2,A_3\in\mathrm{Ker}(A-E)^2,A_1,A_2,A_3\notin\mathrm{Ker}(A-E)$，均可以作为 $\boldsymbol{J}(1,2)$ 的循环向量，不妨取为 A_1，将 $P_2=A_1,P_1=(A-E)A_1$ 扩为 $\mathrm{Ker}(A-E)^2$ 的一个基。其实此处就差 $\mathrm{Ker}(A-E)$ 中的一个与这

两个线性无关的向量，于是求解 $(A-E)X=O$，得到基础解系的两个向量为 $(1,0,1,0)'$，$(1,-1,0,0)'$。那么扩基时就选取 $P_3=(1,0,1,0)'$ 即可。

最后得到

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\ P^{-1}AP=J. \tag{7}$$

(2) 取定 F^4 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_4$，那么搭建线性变换 φ:

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_4)=(\xi_1,\cdots,\xi_4)A,\ \alpha_i=(\xi_1,\cdots,\xi_4)P_i \tag{8}$$

即

$$\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_4)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_4)J.$$

□

Chapter 3: Examples :

3. 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 是 F^m 的一组基，$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 是 F^n 的一组基。证明：

$$\{\alpha_i\beta_j^{\mathrm{T}}\mid 1\le i\le m,1\le j\le n\}$$

是 $F^{m\times n}$ 的一组基。

Notes:

(1) (Chapter 4 Review B Ex.6) 设 $A,B\in F^{n\times n}$ 是取定的矩阵。对任意的 $X\in F^{n\times n}$，令 $\sigma(X)=AXB$. 求证 σ 可逆 $\Leftrightarrow \det(AB)\neq 0$.

(2) (FDU 2024) 若修改 $A\in F^{m\times n},X\in F^{n\times q},B\in F^{q\times l}$，上述充要条件该如何修改呢？

(3) 你能给出几种证明方式？如何求 σ^{-1}？

pf: 首先注意到 $\{\alpha_i\beta_j^{\mathrm{T}}\mid 1\le i\le m,1\le j\le n\}$ 已经为 mn 个向量，故只需证明线性无关性即可。考虑线性组合：

$$c_{11}\alpha_1\beta_1'+\cdots+c_{nn}\alpha_n\beta_n'=\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}\alpha_i\beta_j'=O \tag{9}$$

设 $\alpha_i=(a_{1i},\cdots,a_{mi})'$，那么上式可转化为

$$\sum_{i,j=1}^{i=m,j=n}c_{ij}\alpha_i\beta_j'=\left(\sum_{i,j=1}^{i=m,j=n}c_{ij}a_{i1}\beta_j',\cdots,\sum_{i,j=1}^{i=m,j=n}c_{ij}a_{im}\beta_j'\right)'=O\rightsquigarrow\forall\ k,\ \sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}a_{ik}\beta_j'=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}c_{ij}a_{ik}\right)\beta_j'=O$$

这说明 $\forall\ k,j,\ \sum_{i=1}^{n}c_{ij}a_{ik}=0$。令 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)'$，$C=(c_{ij})_{m\times n}$，那么 $AC=O$，而 A 可逆，从而 $C=O\rightsquigarrow c_{ij}\equiv 0$。

注：其实这个逆命题也成立。即若 $\{\alpha_i\beta_j^{\mathrm{T}} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 是 $F^{m\times n}$ 的一组基，那么 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 是 F^m 的一组基且 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 是 F^n 的一组基。考虑前者，令

$$d_1\alpha_1 + \cdots + d_m\alpha_m = \mathbf{0} \rightsquigarrow (d_1\alpha_1 + \cdots + d_m\alpha_m)\beta_1' = O \rightsquigarrow d_1 = \cdots = d_m = 0 \tag{10}$$

(1) 选取 $F^{n\times n}$ 的一组基 $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$，那么令 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)'$，$B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$，就得到这组基在 σ下的像为 $\{\alpha_i\beta_j^{\mathrm{T}} \mid 1 \le i, j \le n\}$。那么由上题直接得到结论。下面再介绍一种映射观点的做法：

  (a) $\Leftarrow$: 令 $\sigma^{-1} : X \mapsto A^{-1}XB^{-1}$ 即可；

  (b) $\Rightarrow$: 反证，若 A, B 其中之一不可逆，若 A 不可逆，则 $AX = O$ 有非零解，记为 $O \ne X_0 \in F^n$，令$X_1 = (X_0, O, \cdots, O) \in F^{n\times n}$，那么 $\sigma(X_1) = \sigma(O) = O$，这与单射矛盾；若 B 不可逆，那么 $B'X = O$ 有非零解，即 $YB = O$ 有非零解，记为 $O \ne Y_0 \in F_n$，取 $Y_1 = (Y_0, O, \cdots, O)'$，则$\sigma(Y_1) = \sigma(O) = O$，这与单射矛盾。

(2) 充要条件为 $r(A) = n, r(B) = q$，证明同上，这里叙述逆映射的构造：由于 A 列满秩，所以

$$A = P\begin{bmatrix} E_n \\ O \end{bmatrix} \rightsquigarrow U = [E_n, O]P^{-1},\ UA = E_n \tag{11}$$

同理可以找到

$$B = [E_n, O]Q, \rightsquigarrow V = Q^{-1}\begin{bmatrix} E_n \\ O \end{bmatrix},\ BV = E_n \tag{12}$$

那么取 $\sigma^{-1} : X \mapsto UXV$ 即可。

□

4. 设$\dim V = n$，$V_i\ (i = 1, \cdots, n)$ 为 V 的两两不同的非平凡子空间，求证：

(1) $\exists\ \alpha \in V, \alpha \notin \bigcup\limits_{i=1}^{2} V_i$

(2) $\exists\ \beta \in V, \beta \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$

Hint: Consider the vectors in the set

$$S = \{\xi_1 + j\xi_2 + j^2\xi_3 + \cdots + j^{n-1}\xi_n \mid j = 1, 2, \cdots\}$$

(3) (Chapter 4 Review C Ex.1) 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_s \in \mathrm{End}_F(V)$ 非零，求证：存在 $\alpha \in V$，使得 $\varphi_i(\alpha) \ne \mathbf{0}$ 均成立。

pf:

(1) 分类讨论：

  (a) 若存在 V_1, V_2 之间的包含关系，不妨 $V_1 \subseteq V_2$，那么取 $\alpha \in V\backslash V_2$，这是一定可以找到的，因为 V_2 为真子空间，那么 $\alpha \notin V_1 \cup V_2$ 成立;

(b) 若不存在包含关系，令 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_1 \notin V_2$; $\alpha_2 \in V_2, \alpha_2 \notin V_1$，取 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$。

可以断言 $\alpha \notin V_1 \cup V_2$，否则有 $\alpha \in V_1$ 或者 $\alpha \in V_2$，不妨 $\alpha \in V_1$，而 $\alpha_1 \in V_1$，这说明 $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 \in V_1$ 与前面的取法矛盾。

(2) 用归纳法，其中 $n = 1, 2$ 情形已经成立，假设对 $n-1$ 结论成立，考虑对 n 的情形：

(a) 若 $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} V_i$ 与 V_n 存在包含关系，那么结论已经成立；

(b) 若不存在包含关系，那么可以取 $\alpha \in \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} V_i, \alpha \notin V_n$; $\beta \in V_n, \beta \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} V_i$，取 $\gamma_p = \alpha + p\beta$，其中 p 为任意自然数。仿照 (1) 可以证明，不可能有 $\gamma_p \notin V_n$。

如果对于任意自然数 p，均有 $\gamma_p \in \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} V_i$，那么对每个 p，都存在 V_{k_p} $(k_p = 1, 2, \cdots, n-1)$，使得 $\gamma_p = \alpha + p\beta \in V_{k_p}$。

由抽屉原理，在 $p \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 中必然存在两个不同数 $p \neq p'$ 使得 $\gamma_p, \gamma_p' \in V_{k_p} = V_{k_p'}$，这会导致 $\gamma_p - \gamma_p' = (p - p')\beta \in V_{k_p} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} V_i$。矛盾！

从而必定存在至少一个 p ，使得 $\gamma_p = \alpha + p\beta \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} V_i$，又 $\gamma_p \notin V_n$，结论得证。

注：此处变得 (2) 困难的原因就在于 $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} V_i$ 不再是一个子空间，没有加法的封闭性。

下面用一种更有技巧性的方法，考虑 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 和一个 V 中的无限集

$$S = \{\xi_1 + j\xi_2 + j^2\xi_3 + \cdots + j^{n-1}\xi_n \mid j = 1, 2, \cdots\} \tag{13}$$

容易看出这个集合中的任意 n 个不同向量在基下的过渡矩阵均可逆，是线性无关的。由于 $V_1, \cdots, V_n$ 是真子空间，每个子空间至多包含 S 中的 $n-1$ 个向量，那么 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$ 中至多包含 S 中的 $n(n-1)$ 个向量，但 S 为无限集，那么必然存在一个 $j_0 \in \mathbf{N}^*$, $\xi_1 + j_0\xi_2 + j_0^2\xi_3 + \cdots + j_0^{n-1}\xi_n \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$.

(3) 注意到 $\mathrm{Ker}\varphi_i (i = 1, \cdots, n)$ 是两两不同的真子空间，利用上述结论即可。

$\square$