Review II of Chapter 4: Linear Mapping

illusion

Especially made for smy

School of Mathematical Science

XMU

Wednesday 18^{th} December, 2024

Outline

Practice to review

例1： $F^{n\times n}$ 按矩阵的数乘和以下定义的加法，有 ___ 个构成 F 上的线性空间？

(1) $A \oplus B = AB$;

(2) $A \oplus B = A + B^T$;

(3) $A \oplus B = AB - BA$;

(4) $A \oplus B = A^T + B$.

例2： 设 V 是 n 维线性空间，$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 和 $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$ 分别是 V 的两个基，且从 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 到 $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$ 的过渡矩阵为 P。设 V 上可逆线性变换 φ 在 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 下的矩阵为 A，则 $\varphi^3 + 3\varphi^{-1} + \mathrm{id}_V$ 在 $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$ 下的矩阵为 ____________。

Chapter 3: Examples

Try

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 是 F^m 的一组基，$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 是 F^n 的一组基。证明：

$$\{\alpha_i \beta_j^{\mathsf{T}} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

是 $F^{m\times n}$ 的一组基。

Notes:

- (Chapter 4 Review B Ex.6) 设 $A, B \in F^{n\times n}$ 是取定的矩阵。对任意的 $X \in F^{n\times n}$，令 $\sigma(X) = AXB$. 求证 σ 可逆 $\Leftrightarrow \det(AB) \neq 0$.
- (FDU 2024) 若修改 $A \in F^{m\times n}, X \in F^{n\times q}, B \in F^{q\times l}$，上述充要条件该如何修改呢？
- 你能给出几种证明方式？如何求 σ^{-1}？

Thm 1

设$\dim V = n$，$V_i\ (i=1,\cdots,n)$ 为 V 的两两不同的非平凡子空间，求证：

(1) $\exists\ \alpha \in V, \alpha \notin \bigcup_{i=1}^{2} V_i$

(2) $\exists\ \beta \in V, \beta \notin \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

Notes:

- (Hint) Consider the vectors in the set

$$S = \{\xi_1 + j\xi_2 + j^2\xi_3 + \cdots + j^{n-1}\xi_n \mid j = 1, 2, \cdots\}$$

- (Chapter 4 Review C Ex.1) 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_s \in \mathrm{End}_F(V)$ 非零，求证：存在$\alpha \in V$，使得 $\varphi_i(\alpha) \neq \mathbf{0}$ 均成立。

Review I: Properties of Homomorphic Mapping

设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, U)$，且 V_1, V_2为V的子空间，U_1, U_2 为U的子空间，则

- V中线性相关，线性表出 $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\varphi \subseteq U$中线性相关，线性表出
- $\mathrm{Im}\ \varphi|_{V_1} = \varphi(V_1)$ 是U的子空间
- $\rightsquigarrow V_1 = V,\ \mathrm{Im}\ \varphi|_{V_1} = \mathrm{Im}\ \varphi$ ✓
- $\varphi^{-1}(U_1) := \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) \in U_1\}$ 为V的子空间
- $\rightsquigarrow U_1 = \{\mathbf{0}\}, \varphi^{-1}(U_1) = \mathrm{Ker}\varphi$ ✓
- $\varphi(V_1 + V_2) = \varphi(V_1) + \varphi(V_2)$
- $\varphi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \varphi^{-1}(U_1) \cap \varphi^{-1}(U_2)$

Try

When $\varphi^{-1}(U_1 + U_2) = \varphi^{-1}(U_1) + \varphi^{-1}(U_2)$? $\rightsquigarrow$ onto ✓

Review II: Properties of Isomorphic Mapping

Slogan

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, U), V/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$$

φ is **1-1** $\rightsquigarrow V \cong \mathrm{Im}\varphi$

- V中线性相关，无关，表出，基 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\varphi$中线性相关，无关，表出，基
- V_1为r维子空间 $\Rightarrow$ $\varphi(V_1)$为r维子空间
- $\varphi(V_1 \cap V_2) = \varphi(V_1) \cap \varphi(V_2)$
- $V = V_1 \oplus V_2,\ \mathrm{Im}\varphi = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$

Try

φ is **1-1**, U_1为U的r维子空间，则 $\dim \varphi^{-1}(U_1) = \dim(\mathrm{Im}\varphi \cap U_1) \leqslant r$

Review II: Properties of Isomorphic Mapping

Slogan

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V,U), V/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$$

φ is **1-1 and onto** $\rightsquigarrow V \cong U$

- V中线性相关，无关，表出，基 $\Leftrightarrow$ U中线性相关，无关，表出，基
- $V = V_1 \oplus V_2,\ U = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$
- U_1为U的r维子空间，则$\varphi^{-1}(U_1)$也是U的r维子空间
- $\varphi^{-1}(U_1 + U_2) = \varphi^{-1}(U_1) + \varphi^{-1}(U_2)$
- $\rightsquigarrow \varphi^{-1}(U_1 \oplus U_2) = \varphi^{-1}(U_1) \oplus \varphi^{-1}(U_2)$

Note: $\varphi \in \mathrm{End}_F(V), \varphi$ is **1-1** $\Leftrightarrow \varphi$ is **onto** $\Leftrightarrow \varphi$ is **isomorphic**.

Review III: Matrix Representation of Linear Mapping

设V, U为F上的有限维线性空间，$\varphi,\ \psi \in \mathrm{Hom}_F(V, U)$，设$\xi_1, \cdots, \xi_n$为$V$的一组基，$\eta_1, \cdots, \eta_m$为$U$的一组基，设

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_m)A,\ \psi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_m)B$$

- $A,\ B \in F^{m\times n}$
- φ由在V的基下的像唯一确定，即 $\varphi(\xi_i) \equiv \psi(\xi_i) \Leftrightarrow \varphi = \psi$
- 在取定V和U的基的情况下，φ由在基下的表示矩阵唯一确定，即 $\varphi = \psi \Leftrightarrow A = B$

再设$(\xi_1', \cdots, \xi_n') = (\xi_1, \cdots, \xi_n)P,\ (\eta_1', \cdots, \eta_m') = (\eta_1, \cdots, \eta_m)Q$，$P, Q$可逆，且$\varphi(\xi_1', \cdots, \xi_n') = (\eta_1', \cdots, \eta_m')C$，那么

- A与C相抵，且$C = Q^{-1}AP \rightsquigarrow$ 同一线性映射在不同基下的矩阵是相抵的
- 可以选取ξ_i', η_j'，使得$C = \mathrm{diag}\{E_r, O\},\ r(A) = \dim \mathrm{Im}\varphi = r$

Review IV: Matrix Representation of Linear Transformation

设V为F上的有限维线性空间，$\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，设$\xi_1, \cdots, \xi_n$和$\xi_1', \cdots, \xi_n'$分别为$V$的一组基且$(\xi_1', \cdots, \xi_n') = (\xi_1, \cdots, \xi_n)P$，设

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)A, \ \varphi(\xi_1', \cdots, \xi_n') = (\xi_1', \cdots, \xi_n')C$$

- A与C**相似**，且$C = P^{-1}AP \rightsquigarrow$ 同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的
- A与C相似可以记为$A \sim C$
- 相似的必要条件：$A \sim C \Rightarrow \det, \mathrm{tr}, \mathrm{rank}$ 相等，反之不成立

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2024 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2024} \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \text{相似吗?}$$

- (Why?) 设f为多项式，则$f(C) = P^{-1}f(A)P \rightsquigarrow f(C) \sim f(A)$

An example in HW-3

Example

设 V 是 n 维线性空间，$0 \neq \alpha \in V$，记

$$\mathcal{L}(V)\alpha = \{\varphi(\alpha) \mid \varphi \in \mathcal{L}(V)\},$$

求证：

$$\mathcal{L}(V)\alpha = V.$$

Treat them like Matrices

- $\dim V = n, \dim U = m$
- $V \cong F^n, U \cong F^m, \mathrm{Hom}_F(V, U) \cong F^{m\times n}$
- $\alpha \leftrightsquigarrow X$, $\beta \leftrightsquigarrow Y$, $\varphi \leftrightsquigarrow A$
- $V \rightsquigarrow \xi_1, \cdots, \xi_n,\ U \rightsquigarrow \eta_1, \cdots, \eta_m$

Easy to check:

- $\varphi[(\xi_1, \cdots, \xi_n)X] = [\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n)]X = (\eta_1, \cdots, \eta_m)(AX)$
- $\varphi(\alpha) = \beta \Leftrightarrow AX = Y$
- $\psi \in \mathrm{Hom}_F(U, W), \psi \leftrightsquigarrow B \Rightarrow \psi\varphi \leftrightsquigarrow BA$

Link Matrices to Linear Mapping

Example

设 $\alpha_1 = (1,0,1,1)', \alpha_2 = (0,-1,1,2)', \alpha_3 = (1,-1,3,3)', \alpha_4 = (2,-2,5,6)'$; $\beta_1 = (1,1,1,1)', \beta_2 = (1,1,0,2)', \beta_3 = (1,0,0,3)', \beta_4 = (3,2,1,6)'$. 问：是否存在 F^4 上的线性变换 φ，使得 $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$ $(i = 1,2,3,4)$？并请说明理由。

Notes:

- 确定线性映射：关注在基下的像/基下的表示矩阵
- 转化为矩阵语言 $\rightsquigarrow$ 方程组是否有解 $\rightsquigarrow$ r 的判定

Link Matrices to Linear Mapping

Example

设 $\varphi: V \to W$ 是有限维线性空间 V 和 W 之间的线性映射。求证下面叙述是等价的：

(1) φ 是单射；

(2) 对于任意的线性映射 $\psi_1, \psi_2 : U \to V$，若 $\varphi\psi_1 = \varphi\psi_2$，则必有 $\psi_1 = \psi_2$；

(3) 存在线性映射 $\psi : W \to V$，使得 $\psi\varphi = \mathrm{id}_V$。

Notes:

- 上述映射语言在同构意义下怎么转化为矩阵语言？
- 能给出满射相关的等价叙述吗？ $\rightsquigarrow$ HW-4

ψ 满 $\Leftrightarrow$ $\varphi_1\psi = \varphi_2\psi$ 可推 $\varphi_1 = \varphi_2$ $\Leftrightarrow$ 存在 φ, $\psi\varphi = \mathrm{id}_W$

Link Matrices to Linear Mapping

Example

设 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ 在 V 的任意一个基下的矩阵都相同，证明：$\varphi = c\,\mathrm{id}_V$，其中 $c \in F$。

Notes:

- (Recall Chapter 1) 与任意n阶方阵可交换的必定为标量阵
- (Corollary) 与A相似的矩阵只有自身 $\Rightarrow A = cE_n$

Problems to solve in Chapter 5-7

- 几何语言：是否存在V的一组基使得φ在这组基下的表示矩阵形状比较简单? (上三角矩阵? 对角矩阵? 分块对角阵?)
- 代数语言：一个给定矩阵在相似关系下的最简代表元是什么? 有没有相似标准型? (Schur, Frobenius, Jordan)
- 相似关系下的全系不变量是什么? (Chapter 6 中的特征值，特征多项式，极小多项式也都只是必要条件，有没有充要条件?)
- 任何一个线性空间都可以分解为一维子空间的直和，这是平凡的，但当直和分解出的子空间带有性质时就有意义了。能不能将空间分解为若干$\varphi-$子空间的直和? 进一步，若干不可再分的$\varphi-$子空间的直和? (空间第一，第二分解定理，准素分解和循环分解)

Basis Extension Method – II

Example

设 $\dim V = n$, $\varphi, \theta \in \mathrm{End}_F(V)$ 满足 $\dim \mathrm{Im}\, \varphi + \dim \mathrm{Im}\, \theta \leq n$. 证明：存在 V 的可逆线性变换 σ，使得

$$\varphi\sigma\theta = \mathscr{O}.$$

An example in HW-3

Try

若存在 m，使得 $\varphi^m = \mathscr{O}, \varphi^{m-1} \neq \mathscr{O}$，$\dim \mathrm{Im}\varphi = n-1$，求证：

(1) $\dim \mathrm{Im}\varphi^m \geqslant n-m$;

(2) 取 $\alpha \notin \mathrm{Ker}\varphi^{m-1}$，则 $\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关;

(3) 存在 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 满足

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-1} & O \end{pmatrix}.$$

(4) 思考本题能不能用扩基的方法?

A brief introduction to Jordan Canonical Form

例： 设 $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，且 $\varphi^3 - 2\varphi^2 + \varphi = \mathscr{O}$. 证明：

(1) $V = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \mathrm{Ker}\varphi$;

(2) 存在 V 的一组基 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 使得

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 A 为一个 r 阶可逆方阵，$\dim \mathrm{Im}\varphi = r$.

Notes:

- 你能说明 $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_V)^2$ 吗？
- 其实 (1) 可以改写为 $V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_V)^2$，能直接证明吗？
- Hint: $(\varphi - \mathrm{id}_V)^2 - (\varphi - 2\mathrm{id}_V)\varphi = \mathrm{id}_V \rightsquigarrow$ 同构意义下创造单位阵打洞!
- (Chapter 5) Generally, if we have $f, g \in F[x], f(\varphi)g(\varphi) = \mathscr{O}, \gcd(f, g) = 1$, then

$$V = \mathrm{Ker} f(\varphi) \oplus \mathrm{Ker} g(\varphi),\ \mathrm{Im} f(\varphi) = \mathrm{Ker} g(\varphi).$$

A brief introduction to Jordan Canonical Form

由于 $\varphi(\mathrm{Im}\varphi)=\mathrm{Im}\varphi^2\subseteq\mathrm{Im}\varphi$，所以 $\mathrm{Im}\varphi$ 为 φ–子空间，即 $\varphi|_{\mathrm{Im}\varphi}$ 仍然为 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的线性变换。在上例中，我们知道 $(\varphi-\mathrm{id}_V)^2|_{\mathrm{Im}\varphi}=\mathscr{O}$。令 $\psi=\varphi-\mathrm{id}_V$，则存在 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_r$ 使得

$$\psi(\xi_1,\cdots,\xi_r)=(\xi_1,\cdots,\xi_r)\,\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(0,2),\cdots,\boldsymbol{J}(0,2),\boldsymbol{J}(0,1),\cdots,\boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

这其实说明

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_r)=(\xi_1,\cdots,\xi_r)\,\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2),\cdots,\boldsymbol{J}(1,2),\boldsymbol{J}(1,1),\cdots,\boldsymbol{J}(1,1)\}.$$

将 $\xi_1,\cdots,\xi_r$ 扩为 V 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ ，则 φ 在这组基下的矩阵为

$$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2),\cdots,\boldsymbol{J}(1,2),\boldsymbol{J}(1,1),\cdots,\boldsymbol{J}(1,1),\boldsymbol{J}(0,1),\cdots,\boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

记上述分块对角矩阵为 φ 在 F 上的 **Jordan 标准型**。

例： 验证 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

- 能求出可逆矩阵 P 满足 $P^{-1}AP=J$吗?
- 将结论转化为几何语言，也就是 F^4 上的线性变换 $\varphi \ldots$

Projection Operator

Try

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$。对 $i = 1, 2$，定义

$$\tau_i : V \to V_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \mapsto \alpha_i; \tag{1}$$

$$\sigma_1 : V_1 \to V, \quad \alpha_1 \mapsto \alpha_1 + \mathbf{0}; \tag{2}$$

$$\sigma_2 : V_2 \to V, \quad \alpha_2 \mapsto \mathbf{0} + \alpha_2. \tag{3}$$

验证 τ_i, σ_i $(i = 1, 2)$ 是线性映射且满足：

(1) $\tau_j \sigma_i = \mathscr{O}$ $(i \neq j)$；

(2) $\mathrm{Ker} \sigma_1 \tau_1 = \mathrm{Im} \sigma_2 \tau_2$；

(3) $V = \mathrm{Im} \sigma_1 \tau_1 \oplus \mathrm{Im} \sigma_2 \tau_2$。

Projection Operator

Def 2

设 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$，则 $v \in V$ 有唯一分解 $v = v_1 + \cdots + v_m$，其中 $v_i \in V_i$。定义

$$\varphi_i : V \to V, \quad \varphi_i(v) = v_i \ (1 \leq i \leq m),$$

容易验证 φ_i 是 V 上的线性变换，称为 V 到 V_i 上的投影变换。

- $\varphi_i^2 = \varphi_i, \quad \varphi_i\varphi_j = 0 \ (i \neq j), \quad \mathrm{id}_V = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m$；
- $\mathrm{Im}\,\varphi_i = V_i, \quad \mathrm{Ker}\varphi_i = \bigoplus_{j \neq i} V_j, \quad V = \mathrm{Im}\,\varphi_i \oplus \mathrm{Ker}\varphi_i = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\varphi_i$

Notes:

- 若φ为V上线性变换且 $\varphi^2 = \varphi$，φ 就是 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的投影变换
- 还有其他结论吗？

Left to Discussion Session 4

Try

设 n 维空间 V 的两个子空间 V_1, V_2 的维数均为 m，且 $m < n$，求使得

$$V = V_1 \oplus U = V_2 \oplus U$$

的 U 的最大维数 k，并构造 U.