# 2024.12.13 Homework　　Due: 2024.12.15

1. 设 $\dim V = n$，设 $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$ 且 $\varphi^2 = \varphi$，求证：

   (i) $V = \mathrm{Im}\varphi \oplus \mathrm{Ker}\varphi$;

   (ii) $\varphi$ 为 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的投影变换，即

   $$\forall \alpha \in \mathrm{Im}\varphi,\ \varphi(\alpha) = \alpha.$$

   (iii) 存在 $V$ 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$，使得

   $$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

   (iv) 若$A, B \in M_n(F)$ $(n \geq 2)$，$B^2 = B$，则 $r(AB - BA) \leq r(AB + BA)$.

2. 设 $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，且 $\varphi^2 = \mathscr{O}$，求证：存在 $V$ 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 满足

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)\ \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(0,2), \cdots, \boldsymbol{J}(0,2), \boldsymbol{J}(0,1), \cdots, \boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

其中$\boldsymbol{J}(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{J}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$。

进一步，定义 $\dim \mathrm{Im}\varphi = r(\varphi)$，请你 check：

- $\boldsymbol{J}(0,k)(k \geqslant 1)$ 的个数 $N(\boldsymbol{J}(0,k)) = n - r(\varphi)$;
- $\boldsymbol{J}(0,1)$ 的个数 $N(\boldsymbol{J}(0,1)) = r(\varphi^2) + n - 2r(\varphi)$;
- $\boldsymbol{J}(0,2)$ 的个数 $N(\boldsymbol{J}(0,2)) = r(\varphi^3) + r(\varphi) - 2r(\varphi^2)$.

3. 设 $\dim V = n$，$0 \neq \alpha \in V$，记

$$\mathcal{L}(V)\alpha = \{\varphi(\alpha) \mid \varphi \in \mathcal{L}(V)\},$$

求证：

$$\mathcal{L}(V)\alpha = V.$$

4. 若存在 $m$，使得 $\varphi^m = \mathscr{O}, \varphi^{m-1} \neq \mathscr{O}$，$\dim \mathrm{Im}\varphi = n-1$，求证：

(i) $\dim \mathrm{Im}\varphi^m \geqslant n-m$;

(ii) 取 $\alpha \notin \mathrm{Ker}\varphi^{m-1}$，则 $\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关;

(iii) 存在 $V$ 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 满足

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-1} & O \end{pmatrix}.$$

(iv) 思考本题能不能用扩基的方法？