

2024.12.21 Homework

1. 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$, 若 U' 为 U 的子空间, 定义 $\varphi^{-1}(U') = \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) \in U'\}$, 求证:

- (i) 若对任意 U 的子空间 U_1, U_2 , 都有 $\varphi^{-1}(U_1 + U_2) = \varphi^{-1}(U_1) + \varphi^{-1}(U_2)$, 则 φ 是满射;
- (ii) 进一步, 对满足 $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$ 的任意 U 的子空间 U_1, U_2 , $\varphi^{-1}(U_1 \oplus U_2) = \varphi^{-1}(U_1) \oplus \varphi^{-1}(U_2)$ 成立的充分必要条件为 φ 是同构映射。

2. 设 $\dim V = n$, $\varphi, \theta \in \text{End}_F(V)$ 满足 $\dim \text{Im } \varphi + \dim \text{Im } \theta \leq n$. 证明: 存在 V 的可逆线性变换 σ , 使得

$$\varphi\sigma\theta = \mathcal{O}.$$

3. 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换, i 是任意正整数, 证明:

$$\dim(\operatorname{Im} \varphi^{i-1} \cap \operatorname{Ker} \varphi) = \dim(\operatorname{Ker} \varphi^i) - \dim(\operatorname{Ker} \varphi^{i-1}).$$