Final Review

illusion

Especially made for smy

School of Mathematical Science

XMU

Saturday 4th January, 2025

Review of §4.6 Invariant Subspace

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ V_1, V_2 为 $\varphi-$ 子空间且满足 $V = V_1 \oplus V_2$，取 V_1 的一组基为 $\xi_1, \cdots, \xi_r$，V_2 的一组基为 $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$，拼成 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$，那么就有

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n) \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \tag{1}$$

反之，若成立 (1) 式，那么存在 $V_1 = \langle \xi_1, \cdots, \xi_r \rangle$, $V_2 = \langle \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n \rangle$ 为 $\varphi-$子空间且满足 $V = V_1 \oplus V_2$。

Try

若 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 在一组基下的矩阵为 $\boldsymbol{J}(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，那么 V 能否分解为两个非平凡 $\varphi-$子空间的直和呢？

Examples

例 1

证明：若 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 在一组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{J}(\lambda, n) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

那么 V 不能分解为两个非平凡 $\varphi-$子空间的直和。

Note: 如何求所有的 $\varphi-$子空间？

Problems to solve in Chapter 5-7

- 几何语言：是否存在 V 的一组基使得 φ 在这组基下的表示矩阵形状比较简单? (上三角矩阵? 对角矩阵? 分块对角阵?)
- 代数语言：一个给定矩阵在相似关系下的最简代表元是什么? 有没有相似标准型? (Schur, Frobenius, Jordan)
- 相似关系下的全系不变量是什么? (Chapter 6 中的特征值，特征多项式，极小多项式也都只是必要条件，有没有充要条件?)
- 任何一个线性空间都可以分解为一维子空间的直和，这是平凡的，但当直和分解出的子空间带有性质时就有意义了。能不能将空间分解为若干$\varphi-$子空间的直和? 进一步，若干不可再分的$\varphi-$子空间的直和? (空间第一，第二分解定理，准素分解和循环分解)

A brief introduction to Jordan Canonical Form

例： 设 $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，且 $\varphi^3 - 2\varphi^2 + \varphi = \mathscr{O}$. 证明：

(1) $V = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \mathrm{Ker}\varphi$;

(2) 存在 V 的一组基 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 使得

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 A 为一个 r 阶可逆方阵，$\dim \mathrm{Im}\varphi = r$.

Notes:

- 你能说明 $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_V)^2$ 吗？
- 其实 (1) 可以改写为 $V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_V)^2$，能直接证明吗？
- Hint: $(\varphi - \mathrm{id}_V)^2 - (\varphi - 2\mathrm{id}_V)\varphi = \mathrm{id}_V \rightsquigarrow$ 同构意义下创造单位阵打洞!
- (Chapter 5) Generally, if we have $f, g \in F[x], f(\varphi)g(\varphi) = \mathscr{O}, \gcd(f, g) = 1$, then

$$V = \mathrm{Ker} f(\varphi) \oplus \mathrm{Ker} g(\varphi),\ \mathrm{Im} f(\varphi) = \mathrm{Ker} g(\varphi).$$

由于 $\varphi(\mathrm{Im}\varphi) = \mathrm{Im}\varphi^2 \subseteq \mathrm{Im}\varphi$，所以 $\mathrm{Im}\varphi$ 为 φ−子空间，即 $\varphi|_{\mathrm{Im}\varphi}$ 仍然为 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的线性变换。在上例中，我们知道 $(\varphi - \mathrm{id}_V)^2|_{\mathrm{Im}\varphi} = \mathscr{O}$。令 $\psi = \varphi - \mathrm{id}_V$，则存在 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_r$ 使得

$$\psi(\xi_1, \cdots, \xi_r) = (\xi_1, \cdots, \xi_r)\,\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(0,2), \cdots, \boldsymbol{J}(0,2), \boldsymbol{J}(0,1), \cdots, \boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

这其实说明

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_r) = (\xi_1, \cdots, \xi_r)\,\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2), \cdots, \boldsymbol{J}(1,2), \boldsymbol{J}(1,1), \cdots, \boldsymbol{J}(1,1)\}.$$

将 $\xi_1, \cdots, \xi_r$ 扩为 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ ，则 φ 在这组基下的矩阵为

$$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2), \cdots, \boldsymbol{J}(1,2), \boldsymbol{J}(1,1), \cdots, \boldsymbol{J}(1,1), \boldsymbol{J}(0,1), \cdots, \boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

记上述分块对角矩阵为 φ 在 F 上的 **Jordan 标准型**。

Descending and Ascending Chain of $\mathrm{Ker}\varphi$, $\mathrm{Im}\varphi$

Thm 2

设 $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，则成立

(1) $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^m \subseteq \cdots$

(2) $\rightsquigarrow \mathrm{Ker}\varphi^i = \mathrm{Ker}\varphi^j \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\varphi^i = \dim \mathrm{Ker}\varphi^j$

(3) $\mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^m \supseteq \cdots$

(4) $\rightsquigarrow \mathrm{Im}\varphi^i = \mathrm{Im}\varphi^j \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\varphi^i = \dim \mathrm{Im}\varphi^j$

(5) 存在 $s \in \mathbf{N}^*$，对任意的 $p \in \mathbf{N}^*$ 有 $\mathrm{Ker}\varphi^s = \mathrm{Ker}\varphi^{s+1} = \cdots = \mathrm{Ker}\varphi^{s+p}$

(6) 存在 $t \in \mathbf{N}^*$，对任意的 $p \in \mathbf{N}^*$ 有 $\mathrm{Im}\varphi^t = \mathrm{Im}\varphi^{t+1} = \cdots = \mathrm{Im}\varphi^{t+p}$

Try

设 $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，若存在 $m \in \mathbf{N}^*$ 使 $\varphi^m = \mathscr{O}$，求证: $\varphi^n = \mathscr{O}$.

Fitting Lemma

Thm 3

设 $\dim V = n$，$\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，则成立

(1) $\mathrm{Ker}\varphi^s = \mathrm{Ker}\varphi^{s+1} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\varphi^s = \mathrm{Im}\varphi^{s+1} \Leftrightarrow V = \mathrm{Ker}\varphi^s \oplus \mathrm{Im}\varphi^s$

(2) 存在幂零矩阵 B，可逆矩阵 C 和 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 使得

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix} \tag{2}$$

(3) 取 $V_1 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathrm{Ker}\varphi^i$，$V_2 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\varphi^i$，则 V_1, V_2 均为 $\varphi-$子空间，其中 $\varphi|_{V_1}$ 幂零，$\varphi|_{V_2}$可逆，且 $V = V_1 \oplus V_2$.

Note: (Chapter 6) 设 φ 的特征多项式 $f_\varphi(\lambda) = \lambda^k g(\lambda), g(0) \neq 0$，那么由准素分解定理 $V = \mathrm{Ker}\varphi^k \oplus \mathrm{Ker} g(\varphi)$.

Thm 4

设$\dim V = n$，$V_i\ (i = 1, \cdots, n)$ 为 V 的两两不同的非平凡子空间，求证：

(1) $\exists\ \alpha \in V, \alpha \notin \bigcup_{i=1}^{2} V_i$

(2) $\exists\ \beta \in V, \beta \notin \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

Notes:

- Hint: Consider the vectors in the set

$$S = \{\xi_1 + j\xi_2 + j^2\xi_3 + \cdots + j^{n-1}\xi_n \mid j = 1, 2, \cdots\}$$

- (Chapter 4 Review C Ex.1) 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_s \in \mathrm{End}_F(V)$ 非零，求证：存在$\alpha \in V$，使得 $\varphi_i(\alpha) \neq \mathbf{0}$ 均成立。

Chapter 3: Examples

Try

设 n 维空间 V 的两个子空间 V_1, V_2 的维数均为 m，且 $m < n$，求使得

$$V_1 \oplus U = V_2 \oplus U$$

的 U 的最大维数 k，并构造 U.

Notes:

- 回顾补空间不唯一：设 W 是 V 的子空间，那么存在不同的子空间 L_1, L_2 满足 $V = W \oplus L_1 = W \oplus L_2$
- 本题相当于已知补空间，找原空间的过程，扩基法不太适用了。

Outline of Chapter 3

- 线性空间的定义：2 (F, V) + 2 $(+$, scalar$)$ + 4 (group) + 4 (module)
- 扩基/找补空间：从简单的一组基里面找向量扩充 $\rightsquigarrow$ Laplace
- 求解 $\langle S\rangle$ 的一组基：$V \cong F^n \rightsquigarrow$ 打洞!
- 求 $V_1 \cap V_2$ 的一组基：$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i = \sum_{j=1}^{m} b_j\zeta_j \rightsquigarrow AX = O$
- $V_1 \oplus V_2$：$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ easiest!
- $\bigoplus_{i=1}^{m} V_i$：$V_i \cap \left(\bigcup_{j<i} V_j\right) = \{\mathbf{0}\} \rightsquigarrow$ 多个子空间的维数公式

Discussion Session 1

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$$

$$\Leftrightarrow V_i \cap \left(\bigcup_{j \neq i} V_j \right) = \{\mathbf{0}\}, i = 1, \cdots, n$$

$$\Leftrightarrow V_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \right) = \{\mathbf{0}\},\ i = 2, \cdots, n$$

$$\Leftrightarrow \dim \left(\sum_{i=1}^{n} V_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i$$

$$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^{m} \dim V_i = \dim \left(\sum_{i=1}^{m} V_i \right) + \sum_{i=2}^{m} \dim \left(V_i \bigcap \sum_{j=1}^{i-1} V_j \right)$$

Discussion Session 1

为了求 $V_1 \cap V_2$ 的一组基，考虑 $\gamma \in V_1 \cap V_2$

$$
\begin{aligned}
\gamma &= c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r = k_1\beta_1 + \cdots + k_t\beta_t \\
&\Rightarrow c_1A_1 + \cdots + c_rA_r - k_1B_1 - \cdots - k_tB_t = O \text{ (Why?)} \\
&\Rightarrow (A_1, \cdots, A_r, B_1, \cdots, B_r) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ -k_1 \\ \vdots \\ -k_t \end{pmatrix} = O
\end{aligned}
$$

Let $A = (A_1, \cdots, A_r, B_1, \cdots, B_r) \rightsquigarrow$ Solve $AX = O$

Examples

- 求 $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}^{n\times n}$, $\dim(V_1 \times V_2)$, $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

- $V_1 = \{C \in F^{n\times n} \mid AC = O\}$， $V_2 = \{D \in F^{n\times n} \mid BD = O\}$，若 $r(A) = r$ $, r(B) = s, r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = k$，求 $\dim(V_1 + V_2)$.

- 设 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 是 V 的基。若 $\beta \in V$，且 β 为 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 中任意 $n-1$ 个向量的线性组合，求 β.

Examples

- 举反例：设 V_1, V_2, V_3 均为线性空间 V 的子空间，则 $V_1 + (V_2 \cap V_3) = (V_1 + V_2) \cap V_3$ 和 $(V_1 + V_2) \cap V_3 = (V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3)$ 不一定成立。
- 证明： $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1 \implies V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$.
- $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ 成为 $\mathbb{R}$ 上线性空间：

$$a \oplus b = ab, k \odot a = a^k$$

求 $\oplus$ 的单位元和逆元，判断 2 与 4 的线性相关性。

例 5

设在 $F^{2\times 2}$ 中，记

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2a+b & a+c \\ 2b+3c & a-3c \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in F \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in F \right\}.$$

(1) 若 $V = V_1 \oplus U$，构造出 2 个不同的 U；

(2) 写出 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的一个基和维数，并证明。

Examples

例 6

设 V 为 $F^{n\times n}$ 的子空间，若 V 中的非零矩阵都可逆，求证： $\dim V \leq n$.

例 7

设 V 是 $F^{n\times n}$ 的一个非空子集合，且满足以下条件：

(1) V 中至少有一个非零方阵；

(2) 对 V 中任意方阵 A, B，总有 $A - B \in V$；

(3) 对 V 中任意方阵 A，以及 $F^{n\times n}$ 中任意方阵 X，总有 $AX, XA \in V$。

证明：$V = F^{n\times n}$

Note: If R is a division ring, then $M_n(R)$ has only trivial ideals.

Outline of Chapter 4

- 扩基法 $\rightsquigarrow$ 同态基本定理 $V/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$ $\rightsquigarrow$ 维数公式
- 同构 $\rightsquigarrow$ 化归为熟悉的向量空间： $V \cong F^n, \mathcal{L}(V,U) \cong F^{m\times n}$
- 确定线性映射/变换 $\rightsquigarrow$ 确定在基下的像 $\rightsquigarrow$ 同构映射的确定
- 相似标准型 $\leftrightsquigarrow$ 是否存在一个基使得 φ 在这组基下的表示矩阵形状简单？
- $\rightsquigarrow$ 尝试将空间分解为 $\varphi-$子空间的直和 $\rightsquigarrow$ 特殊情形：可对角化
- 准素分解定理：$f(\varphi)g(\varphi) = \mathscr{O}, \gcd(f,g) = 1 \rightsquigarrow V = \mathrm{Ker}f(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}g(\varphi)$

Basis Extension Method – II

例 8

设 $\dim V = n$，$\varphi, \theta \in \mathrm{End}_F(V)$ 满足 $\dim \mathrm{Im}\, \varphi + \dim \mathrm{Im}\, \theta \leq n$. 证明：存在 V 的可逆线性变换 σ，使得

$$\varphi\sigma\theta = \mathscr{O}.$$

An example in HW-3

Try

若存在 m，使得 $\varphi^m = \mathscr{O}, \varphi^{m-1} \neq \mathscr{O}$，$\dim \mathrm{Im}\varphi = n-1$，求证：

(1) $\dim \mathrm{Im}\varphi^m \geqslant n-m$;

(2) 取 $\alpha \notin \mathrm{Ker}\varphi^{m-1}$，则 $\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关;

(3) 存在 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 满足

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-1} & O \end{pmatrix}.$$

(4) 思考本题能不能用扩基的方法?