

2024.11.29 Review of Chapter 3 Homework

1. 在 $F^{2 \times 2}$ 中, 记

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & a+b \\ 2b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -a+2b-c & a-b+c \\ a-3b-c & a-b+2c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}.$$

写出 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的一个基。

2. 设 $A \in M_n(F)$ 不可逆, $V_1 = \{X \in F^n \mid AX = O\}$, 将 A 按列分块, 得到 $A = (A_1, \dots, A_n)$, 设 $V_2 = \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n)$, 容易验证 $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim F^n = n$, 请你举例说明 $F^n = V_1 \oplus V_2$ 不一定成立。

3. 证明 F^n 的真子空间一定可以看作是某个线性方程组 $AX = O$ 的解空间，并构造 A 。

4. 设 A, B 分别是 $m \times n, n \times s$ 矩阵。求证： F^n 的子空间

$$W = \{BX \mid ABX = 0\}$$

的维数等于 $r(B) - r(AB)$ 。