Review of Chapter 3: Linear Space

illusion

Especially made for smy

School of Mathematical Science

XMU

Monday 9^{th} December, 2024

Practice to review

例： 设 $V=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1, z\neq -1\}$，$V$ 中两个数 z_1,z_2 的运算定义为

$$z_1\oplus z_2=\frac{-1+z_1+z_2+3z_1z_2}{3+z_1+z_2-z_1z_2}\quad k\odot z=\frac{(1-k)+(1+k)z}{(1+k)+(1-k)z}.$$

证明：$(V,\oplus,\odot)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

Notes (View of Chapter 4):

- $U=\{ai\mid a\in\mathbb{R}\}$在虚数的加法和与虚数与实数的数乘下形成线性空间
- $\varphi: V\to U, z\mapsto \dfrac{1-z}{1+z}$ 给出一个双射
- φ和U的结构诱导出V的结构

$$z_1\oplus z_2=\varphi^{-1}(\varphi(z_1)+\varphi(z_2)),\ c\odot z=\varphi^{-1}(c\varphi(z))$$

可以验证$(V,\oplus,\odot)$成为线性空间，且φ成为线性同构。

Practice to review

例：求下列数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V_1, V_2 的维数和一组基：

$$(1)\ V_1 = \{X \in M_{2n}(\mathbb{K}) \mid X^{\mathsf{T}}J + JX = O\},\ \text{其中}\ J = \begin{pmatrix} O & E_n \\ -E_n & O \end{pmatrix};$$

$$(2)\ V_2 = \langle AB - BA \rangle,\ \ A, B \in M_n(\mathbb{K})$$

- Let $V_3 = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$, we have $V_2 = V_3$.
- (Chapter 4 Review C Ex.2)

  φ is a linear mapping from $M_n(\mathbb{K})$ to $\mathbb{K}$, and $\varphi(AB) = \varphi(BA),\ \forall A, B$.

  $\rightsquigarrow \varphi(A) = \frac{1}{n}\varphi(E)\mathrm{tr}(A) \xlongequal{\text{def}} \lambda \mathrm{tr}(A)$.

Extension of basis

Lemma 1

设V是数域F上的n维线性空间，$\xi_1, \cdots, \xi_r$ $(r < n)$是V中的一个线性无关向量组，则在V中可选取出向量$\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$使得$\{\xi_i\}_{i=1}^n$构成V的一组基

Notes:

- 上述$\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$唯一吗？为什么？
- 记$V_1 = \mathcal{L}(\xi_1, \cdots, \xi_r) = \langle \xi_1, \cdots, \xi_r \rangle$，$V_2 = \mathcal{L}(\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n)$，可以导出$V$的一个直和分解$V = V_1 \oplus V_2$

Example

在 $F^{2\times 2}$ 中，证明

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

线性无关，并扩为 $F^{2\times 2}$ 的一个基。

Proof of dimension formula

Thm 2

设V_1, V_2是有限维线性空间，则必有

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$$

pf: 注意到$V_1\cap V_2\subseteq V_1, V_2\subseteq V_1+V_2$，从最小的部分开始扩基。

设$V_1\cap V_2$的一组基为$\{\xi_i\}_{i=1}^r$，将其分别扩为V_1的基$\{\xi_i\}_{i=1}^r\cup\{\eta_j\}_{j=1}^s$和$V_2$的基$\{\xi_i\}_{i=1}^r\cup\{\delta_k\}_{k=1}^t$

To show: $V_1+V_2=\mathcal{L}(\xi_1,\cdots,\xi_r,\eta_1,\cdots,\eta_s,\delta_1,\cdots,\delta_t)$

由和空间的定义，其实我们只需要说明线性无关性，这时我们要注意到下面一个很巧妙的转化

$$\sum_{i=1}^{r}c_i\xi_i+\sum_{i=r+1}^{r+s}c_i\eta_i=-\sum_{i=r+s+1}^{r+s+t}c_i\delta_i\in V_1\cap V_2\rightsquigarrow=\sum_{j=1}^{r}k_i\xi_i$$

More examples

Example

设V_1为F上n维线性空间V的一个真子空间，且$\dim V_1 = r$，证明：若存在k个$n-1$维子空间满足$U_1, \cdots, U_k$使得

$$\bigcap_{i=1}^{k} U_i = V_1$$

则$k \geqslant n-r$

Notes:

- F^n上的真子空间一定可以看成某个线性方程组$AX = O$的解空间，其中A不可逆
- 如何用$V \cong F^n$给出一个更具体的构造？$\rightsquigarrow$ 将V_1看成线性方程组的解空间

More examples

Example

设数域$F \subseteq K \subseteq L$，则在下面两个运算下$K$成为$F$上的线性空间：$F$中元素与$K$中元素的数量乘法，$K$中元素的加法。同理$L$也是$K$上的线性空间，如果$\dim_F K < \infty$，则记$\dim_F K = [K : F]$，证明：

$$[L : K][K : F] = [L : F]$$

Notes:

- Revisit your homework: $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{2}) = 2$
- $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) =?$

More examples

Example

设$A \in M_n(F)$不可逆，$V_1 = \{X \in F^n \mid AX = O\}$，将$A$按列分块，得到$A = (A_1, \cdots, A_n)$，设$V_2 = \mathcal{L}(A_1, \cdots, A_n)$，证明：

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim F^n = n$$

$\rightsquigarrow$ In Chapter 4, dimension formula of linear mapping

Notes:

- 要求使用扩基法，并且不得使用 $\dim V_1 = n - r(A)$
- True of False: $F^n = V_1 \oplus V_2$?
- 记$V_3 = \{AX \mid X \in F^n\}$，则$V_3 = V_2$ 且 $\dim V_3 = \dim V_2 = r(A)$

Practice

Try

设 A, B 分别是 $m \times n$, $n \times s$ 矩阵。求证： F^n 的子空间

$$W = \{BX \mid ABX = 0\}$$

的维数等于 $\mathrm{r}(B) - \mathrm{r}(AB)$。

Notes:

- What you will see in Chapter 4: $\mathscr{B}|_{\mathrm{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}} : \mathrm{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B} \to \mathrm{Im}\mathscr{B}$
- $\dim(\mathrm{Im}\mathscr{B} \cap \mathrm{Ker}\mathscr{A}) = \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B} - \dim \mathrm{Ker}\mathscr{B}$

Practice

Try

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 是 $\mathbb{K}^m$ 中 m 个线性无关的 m 维列向量，$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q\}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中 n 个线性无关的 n 维列向量。证明：

$$\{\alpha_i \beta_j^{\mathsf{T}} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

是$\mathbb{K}^{m\times n}$的一组基。

Figure out a basis of $V_1 + V_2$ and $V_1 \cap V_2$

首先，我们用下面的引理把问题归结到生成子空间的讨论。

Lemma 3

V是数域F上的n维线性空间，$\xi_1, \cdots, \xi_n$是V的一组基，那么

$$V = \mathcal{L}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$$

Notes:

- Recall: 一个向量组和它的极大线性无关组等价
- 一个线性空间和它的一组基等价

为了方便后续讨论，再给出下面的引理。

Lemma 4

若$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$为向量组$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$的极大线性无关组，记$V = \mathcal{L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，则

$$V = \mathcal{L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_r),\ \dim V = r$$

Figure out a basis of $V_1 + V_2$ and $V_1 \cap V_2$

V_1, V_2是F上n维线性空间V的子空间，$V_1 = \mathcal{L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_r), V_2 = \mathcal{L}(\beta_1, \cdots, \beta_t)$，其中$\{\alpha_i\}$,$\{\beta_j\}$是线性无关的向量组。

Thm 5

$V_1 + V_2 = \mathcal{L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_t)$

用Lemma 4可以知道求$V_1 + V_2$的一组基归结到求$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_t\}$的极大无关组。在具体求解中，利用$V \cong F^n$，将每个向量等同到在基下的坐标，得到矩阵 $(A_1, \cdots, A_r, B_1, \cdots, B_r)$，用行初等变换求解。

Notes:

- $\varphi : V \to F^n, \alpha \mapsto A_\alpha$给出一个保持线性的同构映射。
- 上述同构映射保持向量的线性相关性，子空间，直和等性质，称向量与向量在基下的坐标有相同的线性关系。

Figure out a basis of $V_1 + V_2$ and $V_1 \cap V_2$

为了求$V_1 \cap V_2$的一组基，考虑$\gamma \in V_1 \cap V_2$

$$\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r = k_1\beta_1 + \cdots + k_t\beta_t$$

$$\Rightarrow c_1A_1 + \cdots + c_rA_r - k_1B_1 - \cdots - k_tB_t = O \text{ (Why?)}$$

$$\Rightarrow (A_1, \cdots, A_r, B_1, \cdots, B_r)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ -k_1 \\ \vdots \\ -k_t \end{pmatrix} = O$$

Let $A = (A_1, \cdots, A_r, B_1, \cdots, B_r) \rightsquigarrow$ Solve $AX = O$

Example

Suppose $r = 2,\ t = 2$ and we figure out $X = k(1, 2, 3, 4)^{\mathsf{T}}$

Can you give a basis of $V_1 \cap V_2$? (Use the form of α_i or β_j)

More examples

Try

设V是$n(n \geqslant 3)$维线性空间，U, W为V的两个子空间，且$\dim U = n-1$，$\dim W = n-2$，则$\dim(U \cap W) = ?$

(19 Final)

Example

设 $\alpha_1 = (1, 0, -1, 0)$，$\alpha_2 = (0, 1, 2, 1)$，$\alpha_3 = (2, 1, 0, 1)$ 是四维实向量空间 V 中的向量，它们生成的子空间为 V_1，又向量

$$\beta_1 = (-1, 1, 1, 1),\ \beta_2 = (1, -1, -3, -1),\ \beta_3 = (-1, 1, -1, 1)$$

生成的子空间为 V_2，求子空间 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的基。

More examples

Try

在 $F^{2\times 2}$ 中，记

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in F \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-c & a+b-c \\ -a+b+2c & a+b-c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in F \right\}.$$

写出 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的一个基。

Review of direct sum

$$
\begin{aligned}
V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 &\Leftrightarrow \text{任意元素表示法唯一} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{0}\text{表示法唯一} \\
&\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\} \\
&\Leftrightarrow \dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2)
\end{aligned}
$$

$V_1 \oplus V_2 = V$ 当且仅当下面三条有两条成立:

(i) $V_1 + V_2 = V$

(ii) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\} \rightsquigarrow$ Easiest!

(iii) $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$

Review of direct sum

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$$

$$\Leftrightarrow V_i \cap \left(\bigcup_{j \neq i} V_j \right) = \{\mathbf{0}\}, i = 1, \cdots, n$$

$$\Leftrightarrow V_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \right) = \{\mathbf{0}\},\ i = 2, \cdots, n$$

$$\Leftrightarrow \dim \left(\sum_{i=1}^{n} V_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i$$

$$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^{m} \dim V_i = \dim \left(\sum_{i=1}^{m} V_i \right) + \sum_{i=2}^{m} \dim \left(V_i \bigcap \sum_{j=1}^{i-1} V_j \right)$$

Some friendly examples

Example

设 $A_i \in F^{m\times n}$，齐次线性方程组 $A_iX = O$ 的解空间是 V_i $(i = 1, 2)$。证明：

$$F^n = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = r(A_1) + r(A_2) = n.$$

Try

$A \in F^{n\times n}$ 且 A 为可逆矩阵，$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$。齐次线性方程组 $A_iX = O$ 的解空间是 V_i $(i = 1, 2)$。证明：

$$F^n = V_1 \oplus V_2.$$

我们下面记$AX=O$的解空间为$\mathrm{Ker}A$。

Example

设A为n阶方阵，证明：$A^2-A-2E=O \Leftrightarrow F^n=\mathrm{Ker}(A+E)\oplus\mathrm{Ker}(A-2E)$.

Notes:

- Hint: $(A+E)-(A-2E)=3E \rightsquigarrow$ 创造单位阵打洞!
- (Chapter 5)Generally, if we have $f(A)g(A)=O, \gcd(f,g)=1$, then

$$V=\mathrm{Ker}f(A)\oplus\mathrm{Ker}g(A)$$

Revisit an example

Thm 6

设V为n维线性空间，V_i $(i = 1, \cdots, n)$为V的两两不同的非平凡子空间，求证：

(1) $\exists \alpha \in V, \alpha \notin \bigcup_{i=1}^{2} V_i$

(2) $\exists \beta \in V, \beta \notin \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

Hint: Consider the vectors in the set

$$S = \{\xi_1 + j\xi_2 + j^2\xi_3 + \cdots + j^{n-1}\xi_n \mid j = 1, 2, \cdots\}$$

.

Some difficult examples

Try

设 n 维空间 V 的两个子空间 V_1, V_2 的维数均为 m，且 $m < n$，求使得

$$V = V_1 \oplus U = V_2 \oplus U$$

的 U 的最大维数 k，并构造 U.

Example

设 A 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 $n(n>1)$ 阶方阵，$r(A)=n-1$，A^* 是 A 的伴随矩阵。记齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间为 V_A，$A^*x=0$ 的解空间为 V_{A^*}。证明：

$$\mathbb{K}^n = V_A \oplus V_{A^*}$$

成立的充要条件是 $\mathrm{tr}(A^*)\neq 0$.

Hint: $r(A)=1 \Leftrightarrow A=\alpha\beta^{\mathsf{T}},\ \mathrm{tr}(A)=\beta^{\mathsf{T}}\alpha$.