

# Final Exam (Due: 2025/1/13)

2025 年 1 月 3 日

1. (10 + 20 + 10 = 40 points) 同构是代数学基本思想之一，在高等代数I中我们主要把握线性同构的学习，回答下列问题：
  - (1) 举出两个你熟悉的线性同构的例子（例如： $F^{2 \times 2} \cong F^4$ ，但不能与所给例子相同）；
  - (2) 同构映射有哪些性质？请你列举一些。
  - (3) 你能构建你在 (1) 中所举例子的同构映射吗？
  
2. (10 + 15 + 5 = 30 points) 我们在高等代数I中还遗留下一个很重要的问题：那就是是否存在一组基，使得某一个线性变换在这组基下的矩阵形状比较简单。回答下列问题：
  - (1) 请你用矩阵的语言转述上述问题；
  - (2) 联系上述问题，思考我们为什么要学习不变子空间，并将上述问题转化为空间分解的语言；
  - (3) 我们知道，如果两个矩阵有相同的秩，那么它们相抵，这是判断相抵的充分必要条件，那么判断两个矩阵相似，我们能使用矩阵的迹相同吗？或者行列式相同？
  
3. (30 points) 在本学期的习题课中，你是否有很喜欢的题目或者是建议，感受？可以在此处分享。

**附加题** 有人认为，高等代数这门课程学习的主线是以线性空间为例，掌握研究代数结构的方法：从内部研究直和分解，子结构和从外部建立同态和同构映射。还有人觉得，高等代数这门课程的主线应当是掌握矩阵分解的基本技巧，熟练各种常用的标准型，在后续课程中加以应用。你赞同哪一个观点？只能二选一，谈谈你的感受。