Review I of Chapter 4: Linear Mapping

illusion

Especially made for smy

School of Mathematical Science

XMU

Friday 13^{th} December, 2024

Outline

Practice to review

例： 设V是一个非空集合，U是定义在F上的线性空间，$\varphi : V \to U$是一个双射，定义V中的运算：

$$a \oplus b = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b)),\ c \odot a = \varphi^{-1}(c\varphi(a)),\ \forall c \in F,\ a, b \in V$$

证明: $(V, \oplus, \odot)$成为F上的线性空间，且φ成为线性同构

Try

设 $V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, z \neq -1\}$，$V$ 中两个数 z_1, z_2 的运算定义为

$$z_1 \oplus z_2 = \frac{-1 + z_1 + z_2 + 3z_1z_2}{3 + z_1 + z_2 - z_1z_2}\ k \odot z = \frac{(1-k) + (1+k)z}{(1+k) + (1-k)z}.$$

证明：$(V, \oplus, \odot)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间

(Hint: $U = \{ai \mid a \in \mathbb{R}\}$, $\varphi : V \to U, z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$ 给出一个双射)

Practice to review

例1：设V是$n(n \geqslant 3)$维线性空间，U, W为V的两个子空间，且$\dim U = n-1$，$\dim W = n-2$，则$\dim(U \cap W) = ?$

(19 Final)

例2：设 $A_i \in F^{m\times n}$，齐次线性方程组 $A_iX = O$ 的解空间是 V_i $(i = 1, 2)$。证明：

$$F^n = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = r(A_1) + r(A_2) = n.$$

例3：$A \in F^{n\times n}$ 且 A 为可逆矩阵，$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$。齐次线性方程组 $A_iX = O$ 的解空间是 V_i $(i = 1, 2)$。证明：

$$F^n = V_1 \oplus V_2.$$

Example

设V_1为F上n维线性空间V的一个真子空间，且$\dim V_1 = r$，证明：若存在k个$n-1$维子空间满足$U_1, \cdots, U_k$使得

$$\bigcap_{i=1}^{k} U_i = V_1$$

则$k \geqslant n-r$

Notes:

- F^n上的真子空间一定可以看成某个线性方程组$AX=O$的解空间，其中A不可逆
- 如何用$V \cong F^n$给出一个更具体的构造？$\rightsquigarrow$ 将V_1看成线性方程组的解空间

Example

设数域$F \subseteq K \subseteq L$，则在下面两个运算下$K$成为$F$上的线性空间：$F$中元素与$K$中元素的数量乘法，$K$中元素的加法。同理$L$也是$K$上的线性空间，如果$\dim_F K < \infty$，则记$\dim_F K = [K : F]$，证明：

$$[L : K][K : F] = [L : F]$$

Notes:

- Revisit your homework: $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{2}) = 2$
- $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = ?$

Review I: Quotient Space

设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，U 是 V 的子空间，定义v 的 U-陪集和陪集构成的集合V/U分别为$v+U := \{v+u \mid u \in U\}$, $V/U = \{v+U \mid v \in V\}$

- $v_1 + U = v_2 + U \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$
- U-陪集之间或者相等，或者不相交，给出原空间的划分
  (Define: $a \sim b \Leftrightarrow a + U = b + U$)
- 在V/U中定义
  $$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U, \quad k \cdot (v_1 + U) := k \cdot v_1 + U$$
  这个定义不依赖代表元的选取，well-defined，V/U在上述运算下成为F上的线性空间，称为商空间。
- 设 $V = U \oplus W$，则 $\dim V/U = \dim W$，即 $W \cong V/U$

Review II: Fundamental Theorem of Homomorphisms

- 设V, U为有限维线性空间, $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, U)$，则$V/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$
- $\widetilde{\varphi}:\ V/\mathrm{Ker}\varphi \to \mathrm{Im}\varphi,\ a + \mathrm{Ker}\varphi \mapsto \varphi(a)$为同构映射
  (Note: $a + \mathrm{Ker}\varphi$也记作 $\overline{a}$，表示一个等价类)
- 记典范同态 $\sigma : V \to V/\mathrm{Ker}\varphi, a \mapsto a + \mathrm{Ker}\varphi$，则有下面的交换图成立

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"] & U \\ V/\mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

- (Dimension Formula) $\dim V/\mathrm{Ker}\varphi = \dim \mathrm{Im}\varphi$

$$\rightsquigarrow \dim V = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi$$

Review II: Fundamental Theorem of Homomorphisms

- 若$\xi_1,\cdots,\xi_r$为$\mathrm{Ker}\varphi$的一组基，扩为V的一组基$\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$，那么$\varphi(\xi_{r+1}),\cdots,\varphi(\xi_n)$为$\mathrm{Im}\varphi$的一组基
- 利用同构和交换图证明维数公式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_1"'] & U \arrow[d, "\sigma_2"] \\ F^n \arrow[r, "\varphi_A"] & F^m \end{tikzcd}$$

Try

若$\xi_1,\cdots,\xi_r$为$\mathrm{Ker}\varphi$的一组基，$\varphi(\xi_{r+1}),\cdots,\varphi(\xi_n)$为$\mathrm{Im}\varphi$的一组基，那么$\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$为$V$的一组基

Basis Extension Method – I

Example

设 $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，则存在 $\psi, \sigma \in \mathrm{End}_F(V)$ 使得 $\varphi = \psi\sigma$，其中 $\psi^2 = \psi$，σ 是可逆变换。

Notes:

- 线性同构：转化为矩阵语言用相抵标准型
- 映射手段：从$\mathrm{Ker}\varphi$开始扩基

Try

设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, U)$，$V_1, V_2$ 是 V 的子空间，且 $\mathrm{Ker}\varphi = V_1 \cap V_2$。求证：存在 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_F(V, U)$，使得

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad V_1 = \mathrm{Ker}\varphi_1, \quad V_2 = \mathrm{Ker}\varphi_2.$$

Basis Extension Method – I

Example

设$\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，且$\varphi^2 = \mathscr{O}$，求证：存在$V$的一组基$\xi_1, \cdots, \xi_n$满足

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} O & E_r & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

Note:

- 证明：$r \leqslant \dfrac{n}{2}$

Try

若存在m，使得$\varphi^m = \mathscr{O}, \varphi^{m-1} \neq \mathscr{O}$，$\dim \mathrm{Im}\varphi = n - 1$，求证：存在$V$的一组基$\xi_1, \cdots, \xi_n$满足

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-1} & O \end{pmatrix}.$$

Review III: Matrix Representation of Linear Mapping

设V, U为F上的有限维线性空间，$\varphi,\ \psi \in \mathrm{Hom}_F(V,U)$，设$\xi_1,\cdots,\xi_n$为$V$的一组基，$\eta_1,\cdots,\eta_m$为$U$的一组基，设

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n) = (\eta_1,\cdots,\eta_m)A,\ \psi(\xi_1,\cdots,\xi_n) = (\eta_1,\cdots,\eta_m)B$$

- $A,\ B \in F^{m\times n}$
- φ由在V的基下的像唯一确定，即 $\varphi(\xi_i) \equiv \psi(\xi_i) \Leftrightarrow \varphi = \psi$
- 在取定V和U的基的情况下，φ由在基下的表示矩阵唯一确定，即 $\varphi = \psi \Leftrightarrow A = B$

再设$(\xi_1',\cdots,\xi_n') = (\xi_1,\cdots,\xi_n)P,\ (\eta_1',\cdots,\eta_m') = (\eta_1,\cdots,\eta_m)Q$，$P, Q$可逆，且$\varphi(\xi_1',\cdots,\xi_n') = (\eta_1',\cdots,\eta_m')C$，那么

- A与C相抵，且$C = Q^{-1}AP \rightsquigarrow$ 同一线性映射在不同基下的矩阵是相抵的
- 可以选取ξ_i', η_j'，使得$C = \mathrm{diag}\{E_r, O\},\ r(A) = \dim \mathrm{Im}\varphi = r$

Review IV: Matrix Representation of Linear Transformation

设V为F上的有限维线性空间，$\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V,V)$，设$\xi_1,\cdots,\xi_n$和$\xi_1',\cdots,\xi_n'$分别为$V$的一组基且$(\xi_1',\cdots,\xi_n')=(\xi_1,\cdots,\xi_n)P$，设

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)A,\ \varphi(\xi_1',\cdots,\xi_n')=(\xi_1',\cdots,\xi_n')C$$

- A与C**相似**，且$C=P^{-1}AP \rightsquigarrow$ 同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的
- A与C相似可以记为$A\sim C$
- 相似的必要条件：$A\sim C \Rightarrow \det, \mathrm{tr}, \mathrm{rank}$ 相等，反之不成立

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2024 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2024} \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2\text{相似吗?}$$

- (Why?) 设f为多项式，则$f(C)=P^{-1}f(A)P \rightsquigarrow f(C)\sim f(A)$

An example

Example

设 V 是 n 维线性空间，$0 \neq \alpha \in V$，记

$$\mathcal{L}(V)\alpha = \{\varphi(\alpha) \mid \varphi \in \mathcal{L}(V)\},$$

求证：

$$\mathcal{L}(V)\alpha = V.$$

Problems to solve in Chapter 5-7

- 几何语言：是否存在V的一组基使得φ在这组基下的表示矩阵形状比较简单？(上三角矩阵？对角矩阵？分块对角阵？)
- 代数语言：一个给定矩阵在相似关系下的最简代表元是什么？有没有相似标准型？(Schur, Frobenius, Jordan)
- 相似关系下的全系不变量是什么？(Chapter 6 中的特征值，特征多项式，极小多项式也都只是必要条件，有没有充要条件？)
- 任何一个线性空间都可以分解为一维子空间的直和，这是平凡的，但当直和分解出的子空间带有性质时就有意义了。能不能将空间分解为若干$\varphi-$子空间的直和？进一步，若干不可再分的$\varphi-$子空间的直和？(空间第一，第二分解定理，准素分解和循环分解)

Review V: Properties of Homomorphic Mapping

设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V,U)$，且 V_1, V_2为V的子空间，U_1, U_2 为U的子空间，则

- V中线性相关，线性表出 $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\varphi \subseteq U$中线性相关，线性表出
- $\mathrm{Im}\ \varphi|_{V_1} = \varphi(V_1)$ 是U的子空间
- $\rightsquigarrow V_1 = V,\ \mathrm{Im}\ \varphi|_{V_1} = \mathrm{Im}\ \varphi$ ✓
- $\varphi^{-1}(U_1) := \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) \in U_1\}$ 为V的子空间
- $\rightsquigarrow U_1 = \{\mathbf{0}\}, \varphi^{-1}(U_1) = \mathrm{Ker}\varphi$ ✓
- $\varphi(V_1 + V_2) = \varphi(V_1) + \varphi(V_2)$
- $\varphi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \varphi^{-1}(U_1) \cap \varphi^{-1}(U_2)$

Try

When $\varphi^{-1}(U_1 + U_2) = \varphi^{-1}(U_1) + \varphi^{-1}(U_2)$? $\rightsquigarrow$ onto ✓

Review VI: Properties of Isomorphic Mapping

Slogan

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V,U), V/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$$

φ is **1-1** $\rightsquigarrow V \cong \mathrm{Im}\varphi$

- V中线性相关，无关，表出，基 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\varphi$中线性相关，无关，表出，基
- V_1为r维子空间 $\Rightarrow \varphi(V_1)$为r维子空间
- $\varphi(V_1 \cap V_2) = \varphi(V_1) \cap \varphi(V_2)$
- $V = V_1 \oplus V_2,\ \mathrm{Im}\varphi = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$

Try

φ is **1-1**, U_1为U的r维子空间，则 $\dim \varphi^{-1}(U_1) = \dim(\mathrm{Im}\varphi \cap U_1) \leqslant r$

Review VI: Properties of Isomorphic Mapping

Slogan

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, U), V/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$$

φ is **1-1 and onto** $\rightsquigarrow V \cong U$

- V中线性相关，无关，表出，基 $\Leftrightarrow$ U中线性相关，无关，表出，基
- $V = V_1 \oplus V_2,\ U = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$
- U_1为U的r维子空间，则$\varphi^{-1}(U_1)$也是U的r维子空间
- $\varphi^{-1}(U_1 + U_2) = \varphi^{-1}(U_1) + \varphi^{-1}(U_2)$
- $\rightsquigarrow \varphi^{-1}(U_1 \oplus U_2) = \varphi^{-1}(U_1) \oplus \varphi^{-1}(U_2)$

Note: $\varphi \in \mathrm{End}_F(V), \varphi$ is **1-1** $\Leftrightarrow \varphi$ is **onto** $\Leftrightarrow \varphi$ is **isomorphic**.

Treat them like Matrices

- $\dim V = n, \dim U = m$
- $V \cong F^n, U \cong F^m, \mathrm{Hom}_F(V, U) \cong F^{m\times n}$
- $\alpha \leftrightsquigarrow X$, $\beta \leftrightsquigarrow Y$, $\varphi \leftrightsquigarrow A$
- $V \rightsquigarrow \xi_1, \cdots, \xi_n,\ U \rightsquigarrow \eta_1, \cdots, \eta_m$

Easy to check:

- $\varphi[(\xi_1, \cdots, \xi_n)X] = [\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n)]X = (\eta_1, \cdots, \eta_m)(AX)$
- $\varphi(\alpha) = \beta \Leftrightarrow AX = Y$
- $\psi \in \mathrm{Hom}_F(U, W), \psi \leftrightsquigarrow B \Rightarrow \psi\varphi \leftrightsquigarrow BA$

Link Matrices to Linear Mapping

Example

设 $\alpha_1=(1,0,1,1)',\alpha_2=(0,-1,1,2)',\alpha_3=(1,-1,3,3)',\alpha_4=(2,-2,5,6)';$ $\beta_1=(1,1,1,1)',\beta_2=(1,1,0,2)',\beta_3=(1,0,0,3)',\beta_4=(3,2,1,6)'.$ 问：是否存在 F^4 上的线性变换 φ，使得 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i\ (i=1,2,3,4)$？并请说明理由。

Notes:

- 确定线性映射：关注在基下的像/基下的表示矩阵
- 转化为矩阵语言 $\rightsquigarrow$ 方程组是否有解 $\rightsquigarrow$ r的判定

Link Matrices to Linear Mapping

Example

设 $\varphi: V \to W$ 是有限维线性空间 V 和 W 之间的线性映射。求证下面叙述是等价的：

(1) φ 是单射；

(2) 对于任意的线性映射 $\psi_1, \psi_2 : U \to V$，若 $\varphi\psi_1 = \varphi\psi_2$，则必有 $\psi_1 = \psi_2$；

(3) 存在线性映射 $\psi : W \to V$，使得 $\psi\varphi = \mathrm{id}_V$。

Notes:

- 上述映射语言在同构意义下怎么转化为矩阵语言？
- 能给出满射相关的等价叙述吗？ $\rightsquigarrow$ HW3

ψ 满 $\Leftrightarrow$ $\varphi_1\psi = \varphi_2\psi$ 可推 $\varphi_1 = \varphi_2$ $\Leftrightarrow$ 存在 φ, $\psi\varphi = \mathrm{id}_W$

Link Matrices to Linear Mapping

Example

设 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ 在 V 的任意一个基下的矩阵都相同，证明：$\varphi = c\,\mathrm{id}_V$，其中 $c \in F$。

Notes:

- (Recall Chapter 1) 与任意n阶方阵可交换的必定为标量阵
- (Corollary) 与A相似的矩阵只有自身 $\Rightarrow A = cE_n$

Projection Operator

Try

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$。对 $i = 1, 2$，定义

$$\tau_i : V \to V_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \mapsto \alpha_i; \tag{1}$$

$$\sigma_1 : V_1 \to V, \quad \alpha_1 \mapsto \alpha_1 + \mathbf{0}; \tag{2}$$

$$\sigma_2 : V_2 \to V, \quad \alpha_2 \mapsto \mathbf{0} + \alpha_2. \tag{3}$$

验证 τ_i, σ_i $(i = 1, 2)$ 是线性映射且满足：

(1) $\tau_j \sigma_i = \mathscr{O}$ $(i \neq j)$；

(2) $\mathrm{Ker}\sigma_1\tau_1 = \mathrm{Im}\sigma_2\tau_2$；

(3) $V = \mathrm{Im}\sigma_1\tau_1 \oplus \mathrm{Im}\sigma_2\tau_2$。

Projection Operator

Def 1

设 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ ，则 $v \in V$ 有唯一分解 $v = v_1 + \cdots + v_m$，其中 $v_i \in V_i$。定义

$$\varphi_i : V \to V, \quad \varphi_i(v) = v_i \ (1 \le i \le m),$$

容易验证 φ_i 是 V 上的线性变换，称为 V 到 V_i 上的投影变换。

- $\varphi_i^2 = \varphi_i, \quad \varphi_i\varphi_j = 0 \ (i \neq j), \quad \mathrm{id}_V = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m$；
- $\mathrm{Im}\,\varphi_i = V_i, \quad \mathrm{Ker}\varphi_i = \bigoplus_{j\neq i} V_j, \quad V = \mathrm{Im}\,\varphi_i \oplus \mathrm{Ker}\varphi_i = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\varphi_i$

Notes:

- 若φ为V上线性变换且 $\varphi^2 = \varphi$，φ 就是 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的投影变换
- 还有其他结论吗？

An idea for Chapter 7

Example

设$\mathscr{A}$为n维线性空间V上的线性变换，证明：$\mathscr{A}^2 - \mathscr{A} - 2\mathrm{id}_V = \mathscr{O} \Leftrightarrow$ $F^n = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} + \mathrm{id}_V) \oplus \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - 2\mathrm{id}_V)$.

Notes:

- Hint: $(\mathscr{A} + \mathrm{id}_V) - (\mathscr{A} - 2\mathrm{id}_V) = 3\mathrm{id}_V \rightsquigarrow$ 创造单位阵打洞!
- (Chapter 5)Generally, if we have $f(\mathscr{A})g(\mathscr{A}) = \mathscr{O}, \gcd(f, g) = 1$, then

$$V = \mathrm{Ker} f(\mathscr{A}) \oplus \mathrm{Ker} g(\mathscr{A})$$

Left to Discussion Session 3

Try

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 是 $\mathbb{K}^m$ 中 m 个线性无关的 m 维列向量，$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q\}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中 n 个线性无关的 n 维列向量。证明：

$$\{\alpha_i \beta_j^{\mathsf{T}} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

是$\mathbb{K}^{m\times n}$的一组基。

Left to Discussion Session 3

Thm 2

设V为n维线性空间，$V_i\ (i=1,\cdots,n)$为V的两两不同的非平凡子空间，求证：

(1) $\exists \alpha \in V, \alpha \notin \bigcup_{i=1}^{2} V_i$

(2) $\exists \beta \in V, \beta \notin \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

Hint: Consider the vectors in the set

$$S=\{\xi_1+j\xi_2+j^2\xi_3+\cdots+j^{n-1}\xi_n \mid j=1,2,\cdots\}$$

.

Left to Discussion Session 3

Try

设 n 维空间 V 的两个子空间 V_1, V_2 的维数均为 m，且 $m < n$，求使得

$$V = V_1 \oplus U = V_2 \oplus U$$

的 U 的最大维数 k，并构造 U.