Review III of Chapter 4: Linear Mapping

illusion

Especially made for smy

School of Mathematical Science

XMU

Thursday 26th December, 2024

Outline

1. Before we start
2. Review of §4.6 Invariant Subspace
3. Jordan Canonical Form
4. Some Chapter 3 problems
5. Properties of Linear Transformation
6. Matrices and Linear Mapping
7. Basis Extension Method

U 为线性空间 V 的子空间，$\varphi \in \mathcal{L}(V)$，那么

$$\varphi(\varphi^{-1}(U)) = U \cap \mathrm{Im}\varphi, \varphi^{-1}(\varphi(U)) = U + \mathrm{Ker}\varphi.$$

Practice to review

例1： 设 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$，$U$ 是 V 的子空间，满足 $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\psi$，则

A. $\varphi = \psi$

B. $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$

C. 若 $\varphi(U) \subseteq U$, 则 $\psi(U) \subseteq U$

D. φ, ψ 在 V 的任意基下的矩阵相抵

例2： 设 U 是 V 的子空间，$\varphi \in \mathcal{L}(V)$，记 $\varphi^{-1}(U) = \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) \in U\}$, 则

A. $\dim \varphi^{-1}(U) = \dim U$

B. $\dim \varphi^{-1}(U) \leq \dim U$

C. $\dim \varphi^{-1}(U) \geq \dim U$

D. $\dim \varphi^{-1}(U)$ 和 $\dim U$ 没有关系

例3： 设 V_1, V_2, W 都是 n 维线性空间 V 的子空间，若 $V_1 \subseteq V_2$ 且 $V_1 \oplus W = V_2 \oplus W$，则（选填"必"、"未必"）有 $V_1 = V_2$。

例4： 设 V_1, V_2, W 是 n 维线性空间 V 的非平凡子空间，且 $V = V_1 \oplus V_2$，$W \cap V_1 = \{\mathbf{0}\}$，$W \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$. 求 $(W + V_1) \cap (W + V_2)$ 的基和维数。

Practice to review

例： 设

$$V=\{A\in F^{3\times 3}\mid A^\top=A\},\quad U=\{A\in F^{3\times 3}\mid A^\top=-A\},$$

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in F\right\}.$$

(1) 分别写出 V,U 和 W 的基；

(2) 证明：存在 $\varphi\in\mathcal{L}(V,U)$，使得 $\mathrm{Ker}\varphi=W$。

(3) 设 $\varphi\in\mathcal{L}(F^{3\times 3})$，$\varphi(A)=A^\top$，求证：存在 $F^{3\times 3}$ 的一组基，使得 φ 在这组基下的表示矩阵为 $\begin{bmatrix}E_6&O\\O&-E_3\end{bmatrix}$.

Review of §4.6 Invariant Subspace

- 导出变换的维数公式：设 $\varphi \in \mathcal{L}(V,U), V_1 \subseteq V, U_1 \subseteq U$
  (1) $\dim \varphi(V_1) + \dim(\mathrm{Ker}\varphi \cap V_1) = \dim V_1 \rightsquigarrow \varphi|_{V_1}$
  (2) $\dim(U_1 \cap \mathrm{Im}\varphi) + \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim \varphi^{-1}(U_1) \rightsquigarrow \varphi|_{\varphi^{-1}(U_1)}$

- 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$ 非零非可逆，则 $\mathrm{Im}\varphi, \mathrm{Ker}\varphi$ 为非平凡 $\varphi-$子空间
- $\rightsquigarrow$ 若 $\mathscr{O} \neq \varphi \in \mathcal{L}(V,U)$ 只有平凡 $\varphi-$子空间，则 φ 可逆，反之不成立

- 设 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V,U)$，且 $\varphi\psi = \psi\varphi$，则 $\mathrm{Ker}\varphi, \mathrm{Im}\varphi$ 均为 $\psi-$子空间
- $\rightsquigarrow \varphi\psi + \psi\varphi = \mathscr{O}$ 上述结论也成立

Try

设 $\mathscr{O} \neq \varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$，$\dim V = 2n+1$ $(n \in \mathbf{N}^*)$，若 $\varphi\psi + \psi\varphi = \mathscr{O}$，求证：$\varphi$ 既有非平凡的 $\psi-$子空间，也有非平凡的 $\varphi-$子空间。

Review of §4.6 Invariant Subspace

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 且 U 为 $\varphi-$ 子空间，取 U 的一组基为 $\xi_1, \cdots, \xi_r$，扩为 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$，由于 $\varphi(U) \subseteq U$，这说明

$$\begin{cases} \varphi(\xi_1) = a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{r1}\xi_r + 0 \cdot \xi_{r+1} + \cdots + 0 \cdot \xi_n \\ \cdots \\ \varphi(\xi_r) = a_{1r}\xi_1 + \cdots + a_{rr}\xi_r + 0 \cdot \xi_{r+1} + \cdots + 0 \cdot \xi_n \\ \varphi(\xi_{r+1}) = b_{1,r+1}\xi_1 + \cdots + b_{r,r+1}\xi_r + c_{r+1,r+1}\xi_{r+1} + \cdots + c_{n,r+1}\xi_n \\ \cdots \\ \varphi(\xi_n) = b_{1n}\xi_1 + \cdots + b_{rn}\xi_r + c_{r+1,n}\xi_{r+1} + \cdots + c_{nn}\xi_n \end{cases}$$

Let $A = (a_{ij})_{r\times r}, B = (b_{i,j+r})_{r\times n-r}, C = (c_{i+r,j+r})_{n-r\times n-r}$

Review of §4.6 Invariant Subspace

就有

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n)\begin{bmatrix}A & B\\ O & C\end{bmatrix} \tag{1}$$

调换基的位置有

$$\varphi(\xi_{r+1},\cdots,\xi_n,\xi_1,\cdots,\xi_r)=(\xi_{r+1},\cdots,\xi_n,\xi_1,\cdots,\xi_r)\begin{bmatrix}C & O\\ B & A\end{bmatrix} \tag{2}$$

Q: 当基的位置调换为 $\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+s},\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+s+1},\cdots,\xi_n$，其中 $s<n-r$，你能对 C,B 适当分块写出在这组基下的表示矩阵吗？

可以使用三类相似初等变换： $E(i,j)AE(i,j)$, $E(i(c))AE(i(c^{-1}))$, $E(i,j(c))AE(i,j(-c))$.

Examples

Example

(Multiple Choice) 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 有非平凡的 $\varphi-$子空间，则必定存在 V 的某个基，使得 φ 在这组基下的矩阵为

A. $\begin{bmatrix} O & A \\ B & C \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} A & O & O & B \\ O & C & D & O \\ O & E & F & O \\ G & O & O & H \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ O & E & O & F \\ G & H & I & J \\ O & K & O & L \end{bmatrix}$

Hint: 考虑调换基的顺序

Examples

Example

(Multiple Choice) 设 $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ 定义为 $\varphi : X \mapsto AX$，若 φ 有非平凡 $\varphi-$子空间，则 A 不可能为

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Hint: 二维空间的非平凡不变子空间必定为一维的，即特征子空间

Review of §4.6 Invariant Subspace

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ V_1, V_2 为 $\varphi-$ 子空间且满足 $V = V_1 \oplus V_2$，取 V_1 的一组基为 $\xi_1, \cdots, \xi_r$，V_2 的一组基为 $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$，拼成 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$，那么就有

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n) \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \tag{3}$$

反之，若成立 (3) 式，那么存在 $V_1 = \langle \xi_1, \cdots, \xi_r \rangle$，$V_2 = \langle \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n \rangle$ 为 $\varphi-$子空间且满足 $V = V_1 \oplus V_2$。

Try

若 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 在一组基下的矩阵为 $\boldsymbol{J}(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，那么 V 能否分解为两个非平凡 $\varphi-$子空间的直和呢？

Examples

Example

证明：若 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 在一组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{J}(\lambda, n) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

那么 V 不能分解为两个非平凡 $\varphi-$子空间的直和。

Note: 如何求所有的 $\varphi-$子空间？

Problems to solve in Chapter 5-7

- 几何语言：是否存在 V 的一组基使得 φ 在这组基下的表示矩阵形状比较简单? (上三角矩阵? 对角矩阵? 分块对角阵?)
- 代数语言：一个给定矩阵在相似关系下的最简代表元是什么? 有没有相似标准型? (Schur, Frobenius, Jordan)
- 相似关系下的全系不变量是什么? (Chapter 6 中的特征值，特征多项式，极小多项式也都只是必要条件，有没有充要条件?)
- 任何一个线性空间都可以分解为一维子空间的直和，这是平凡的，但当直和分解出的子空间带有性质时就有意义了。能不能将空间分解为若干$\varphi-$子空间的直和? 进一步，若干不可再分的$\varphi-$子空间的直和? (空间第一，第二分解定理，准素分解和循环分解)

A brief introduction to Jordan Canonical Form

例： 设 $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，且 $\varphi^3 - 2\varphi^2 + \varphi = \mathscr{O}$. 证明：

(1) $V = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \mathrm{Ker}\varphi$;

(2) 存在 V 的一组基 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 使得

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 A 为一个 r 阶可逆方阵，$\dim \mathrm{Im}\varphi = r$.

Notes:

- 你能说明 $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_V)^2$ 吗？
- 其实 (1) 可以改写为 $V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_V)^2$，能直接证明吗？
- Hint: $(\varphi - \mathrm{id}_V)^2 - (\varphi - 2\mathrm{id}_V)\varphi = \mathrm{id}_V \rightsquigarrow$ 同构意义下创造单位阵打洞!
- (Chapter 5) Generally, if we have $f, g \in F[x]$, $f(\varphi)g(\varphi) = \mathscr{O}, \gcd(f, g) = 1$, then

$$V = \mathrm{Ker} f(\varphi) \oplus \mathrm{Ker} g(\varphi),\ \mathrm{Im} f(\varphi) = \mathrm{Ker} g(\varphi).$$

由于 $\varphi(\mathrm{Im}\varphi) = \mathrm{Im}\varphi^2 \subseteq \mathrm{Im}\varphi$，所以 $\mathrm{Im}\varphi$ 为 φ–子空间，即 $\varphi|_{\mathrm{Im}\varphi}$ 仍然为 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的线性变换。在上例中，我们知道 $(\varphi - \mathrm{id}_V)^2|_{\mathrm{Im}\varphi} = \mathscr{O}$。令 $\psi = \varphi - \mathrm{id}_V$，则存在 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_r$ 使得

$$\psi(\xi_1, \cdots, \xi_r) = (\xi_1, \cdots, \xi_r)\ \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(0,2), \cdots, \boldsymbol{J}(0,2), \boldsymbol{J}(0,1), \cdots, \boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

这其实说明

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_r) = (\xi_1, \cdots, \xi_r)\ \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2), \cdots, \boldsymbol{J}(1,2), \boldsymbol{J}(1,1), \cdots, \boldsymbol{J}(1,1)\}.$$

将 $\xi_1, \cdots, \xi_r$ 扩为 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ ，则 φ 在这组基下的矩阵为

$$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2), \cdots, \boldsymbol{J}(1,2), \boldsymbol{J}(1,1), \cdots, \boldsymbol{J}(1,1), \boldsymbol{J}(0,1), \cdots, \boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

记上述分块对角矩阵为 φ 在 F 上的 **Jordan 标准型**。

Figure out P that satisfies $P^{-1}AP = J$

例： 验证 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 能求出可逆矩阵 P 满足 $P^{-1}AP = J$ 吗?
- 将结论转化为几何语言，也就是 F^4 上的线性变换 $\varphi \ldots$

Quickly Review

What we have:

- $\varphi^2 = \mathscr{O} \Leftrightarrow \varphi \leftrightsquigarrow \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(0,2), \cdots, \boldsymbol{J}(0,2), 0, \cdots, 0\} \Leftrightarrow V = \mathrm{Ker}\varphi^2$
- $\varphi^2 = \varphi \Leftrightarrow \varphi \leftrightsquigarrow \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \Leftrightarrow V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_V)$
- $(\varphi - \mathrm{id}_V)^2\varphi = \mathscr{O} \Leftrightarrow \varphi \leftrightsquigarrow \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(1,2), \cdots, \boldsymbol{J}(1,2), 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0\}$
- $\varphi^n = \mathscr{O}, \varphi^{n-1} \neq \mathscr{O} \Leftrightarrow \varphi \leftrightsquigarrow \boldsymbol{J}(0,n)$
- (HW-4) $\varphi^m = \mathscr{O}, \varphi^{m-1} \neq \mathscr{O}, \dim \mathrm{Im}\varphi = n-1 \Leftrightarrow \varphi \leftrightsquigarrow \boldsymbol{J}(0,n)$

Try

$$\varphi^2 = 2\varphi \Leftrightarrow \varphi \leftrightsquigarrow \begin{bmatrix} 2E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \text{ ?}$$

Thm 1

设$\dim V = n$，$V_i\ (i = 1, \cdots, n)$ 为 V 的两两不同的非平凡子空间，求证：

(1) $\exists\ \alpha \in V, \alpha \notin \bigcup_{i=1}^{2} V_i$

(2) $\exists\ \beta \in V, \beta \notin \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

Notes:

- Hint: Consider the vectors in the set
$$S = \{\xi_1 + j\xi_2 + j^2\xi_3 + \cdots + j^{n-1}\xi_n \mid j = 1, 2, \cdots\}$$
- (Chapter 4 Review C Ex.1) 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_s \in \mathrm{End}_F(V)$ 非零，求证：存在$\alpha \in V$，使得 $\varphi_i(\alpha) \neq \mathbf{0}$ 均成立。

Chapter 3: Examples

Try

设 n 维空间 V 的两个子空间 V_1, V_2 的维数均为 m，且 $m < n$，求使得

$$V_1 \oplus U = V_2 \oplus U$$

的 U 的最大维数 k，并构造 U.

Notes:

- 回顾补空间不唯一：设 W 是 V 的子空间，那么存在不同的子空间 L_1, L_2 满足 $V = W \oplus L_1 = W \oplus L_2$
- 本题相当于已知补空间，找原空间的过程，扩基法不太适用了。

Descending and Ascending Chain of $\mathrm{Ker}\varphi,\ \mathrm{Im}\varphi$

Thm 2

设 $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，则成立

(1) $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^m \subseteq \cdots$

(2) $\rightsquigarrow \mathrm{Ker}\varphi^i = \mathrm{Ker}\varphi^j \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\varphi^i = \dim \mathrm{Ker}\varphi^j$

(3) $\mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^m \supseteq \cdots$

(4) $\rightsquigarrow \mathrm{Im}\varphi^i = \mathrm{Im}\varphi^j \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\varphi^i = \dim \mathrm{Im}\varphi^j$

(5) 存在 $s \in \mathbf{N}^*$，对任意的 $p \in \mathbf{N}^*$ 有 $\mathrm{Ker}\varphi^s = \mathrm{Ker}\varphi^{s+1} = \cdots = \mathrm{Ker}\varphi^{s+p}$

(6) 存在 $t \in \mathbf{N}^*$，对任意的 $p \in \mathbf{N}^*$ 有 $\mathrm{Im}\varphi^t = \mathrm{Im}\varphi^{t+1} = \cdots = \mathrm{Im}\varphi^{t+p}$

Try

设 $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，若存在 $m \in \mathbf{N}^*$ 使 $\varphi^m = \mathscr{O}$，求证: $\varphi^n = \mathscr{O}$.

Fitting Lemma

Thm 3

设 $\dim V = n$，$\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$，则成立

(1) $\mathrm{Ker}\varphi^s = \mathrm{Ker}\varphi^{s+1} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\varphi^s = \mathrm{Im}\varphi^{s+1} \Leftrightarrow V = \mathrm{Ker}\varphi^s \oplus \mathrm{Im}\varphi^s$

(2) 存在幂零矩阵 B，可逆矩阵 C 和 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 使得

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix} \tag{4}$$

(3) 取 $V_1 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathrm{Ker}\varphi^i$，$V_2 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\varphi^i$，则 V_1, V_2 均为 $\varphi-$子空间，其中 $\varphi|_{V_1}$ 幂零，$\varphi|_{V_2}$可逆，且 $V = V_1 \oplus V_2$.

Note: (Chapter 6) 设 φ 的特征多项式 $f_\varphi(\lambda) = \lambda^k g(\lambda), g(0) \neq 0$，那么由准素分解定理 $V = \mathrm{Ker}\varphi^k \oplus \mathrm{Ker} g(\varphi)$.

Figure out the basis of $\mathcal{L}(V, U)$

Example

设 V 是 n 维线性空间，$0 \neq \alpha \in V$，记 $\mathcal{L}(V)\alpha = \{\varphi(\alpha) \mid \varphi \in \mathcal{L}(V)\}$, 求证：$\mathcal{L}(V)\alpha = V$.

Try

设 V 是 n 维线性空间， $V^* = \mathcal{L}(V, F)$，V_1^* 和 V_2^* 是 V^* 的子空间。记：

$$W = \{v \in V \mid f(v) = 0, \forall f \in V_1^* \cap V_2^*\};$$

$$W_i = \{v \in V \mid f(v) = 0, \forall f \in V_i^*\}, i = 1, 2.$$

证明：$W = W_1 + W_2$。

Treat them like Matrices

- $\dim V = n, \dim U = m$
- $V \cong F^n, U \cong F^m, \mathrm{Hom}_F(V, U) \cong F^{m\times n}$
- $\alpha \leftrightsquigarrow X$, $\beta \leftrightsquigarrow Y$, $\varphi \leftrightsquigarrow A$
- $V \rightsquigarrow \xi_1, \cdots, \xi_n,\ U \rightsquigarrow \eta_1, \cdots, \eta_m$

Easy to check:

- $\varphi[(\xi_1, \cdots, \xi_n)X] = [\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n)]X = (\eta_1, \cdots, \eta_m)(AX)$
- $\varphi(\alpha) = \beta \Leftrightarrow AX = Y$
- $\psi \in \mathrm{Hom}_F(U, W), \psi \leftrightsquigarrow B \Rightarrow \psi\varphi \leftrightsquigarrow BA$

Link Matrices to Linear Mapping

Example

设 $\alpha_1=(1,0,1,1)',\alpha_2=(0,-1,1,2)',\alpha_3=(1,-1,3,3)',\alpha_4=(2,-2,5,6)';$ $\beta_1=(1,1,1,1)',\beta_2=(1,1,0,2)',\beta_3=(1,0,0,3)',\beta_4=(3,2,1,6)'$. 问：是否存在 F^4 上的线性变换 φ，使得 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i\ (i=1,2,3,4)$？并请说明理由。

Notes:

- 确定线性映射：关注在基下的像/基下的表示矩阵
- 转化为矩阵语言 $\rightsquigarrow$ 方程组是否有解 $\rightsquigarrow$ r 的判定

Link Matrices to Linear Mapping

Example

设 $\varphi: V \to W$ 是有限维线性空间 V 和 W 之间的线性映射。求证下面叙述是等价的：

(1) φ 是单射；

(2) 对于任意的线性映射 $\psi_1, \psi_2 : U \to V$，若 $\varphi\psi_1 = \varphi\psi_2$，则必有 $\psi_1 = \psi_2$；

(3) 存在线性映射 $\psi : W \to V$，使得 $\psi\varphi = \mathrm{id}_V$。

Notes:

- 上述映射语言在同构意义下怎么转化为矩阵语言？
- 能给出满射相关的等价叙述吗？ $\rightsquigarrow$ HW-5

ψ 满 $\Leftrightarrow$ $\varphi_1\psi = \varphi_2\psi$ 可推 $\varphi_1 = \varphi_2$ $\Leftrightarrow$ 存在 φ, $\psi\varphi = \mathrm{id}_W$

Link Matrices to Linear Mapping

Example

设 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ 在 V 的任意一个基下的矩阵都相同，证明：$\varphi = c\,\mathrm{id}_V$，其中 $c \in F$。

Notes:

- (Recall Chapter 1) 与任意n阶方阵可交换的必定为标量阵
- (Corollary) 与A相似的矩阵只有自身 $\Rightarrow A = cE_n$

Basis Extension Method – II

Example

设 $\dim V = n$, $\varphi, \theta \in \mathrm{End}_F(V)$ 满足 $\dim \mathrm{Im}\, \varphi + \dim \mathrm{Im}\, \theta \leq n$. 证明：存在 V 的可逆线性变换 σ，使得

$$\varphi\sigma\theta = \mathscr{O}.$$

An example in HW-3

Try

若存在 m，使得 $\varphi^m = \mathscr{O}, \varphi^{m-1} \neq \mathscr{O}$，$\dim \mathrm{Im}\varphi = n-1$，求证：

(1) $\dim \mathrm{Im}\varphi^m \geqslant n-m$;

(2) 取 $\alpha \notin \mathrm{Ker}\varphi^{m-1}$，则 $\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关;

(3) 存在 V 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 满足

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-1} & O \end{pmatrix}.$$

(4) 思考本题能不能用扩基的方法？

Projection Operator

Try

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$。对 $i = 1, 2$，定义

$$\tau_i : V \to V_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \mapsto \alpha_i; \tag{5}$$

$$\sigma_1 : V_1 \to V, \quad \alpha_1 \mapsto \alpha_1 + \mathbf{0}; \tag{6}$$

$$\sigma_2 : V_2 \to V, \quad \alpha_2 \mapsto \mathbf{0} + \alpha_2. \tag{7}$$

验证 τ_i, σ_i $(i = 1, 2)$ 是线性映射且满足：

(1) $\tau_j \sigma_i = \mathscr{O}$ $(i \neq j)$；

(2) $\mathrm{Ker}\sigma_1\tau_1 = \mathrm{Im}\sigma_2\tau_2$；

(3) $V = \mathrm{Im}\sigma_1\tau_1 \oplus \mathrm{Im}\sigma_2\tau_2$。

Projection Operator

Def 4

设 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ ，则 $v \in V$ 有唯一分解 $v = v_1 + \cdots + v_m$，其中 $v_i \in V_i$。定义

$$\varphi_i : V \to V, \quad \varphi_i(v) = v_i \ (1 \leq i \leq m),$$

容易验证 φ_i 是 V 上的线性变换，称为 V 到 V_i 上的投影变换。

- $\varphi_i^2 = \varphi_i, \quad \varphi_i\varphi_j = 0 \ (i \neq j), \quad \mathrm{id}_V = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m$；
- $\mathrm{Im}\,\varphi_i = V_i, \quad \mathrm{Ker}\varphi_i = \bigoplus_{j \neq i} V_j, \quad V = \mathrm{Im}\,\varphi_i \oplus \mathrm{Ker}\varphi_i = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\varphi_i$

Note: 若 $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$ 且 $\varphi^2 = \varphi$，φ 就是 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的投影变换