# 2024.12.13 Homework

1. 设 $\dim V = n$，设 $\varphi \in \mathrm{End}_F(V)$ 且 $\varphi^2 = \varphi$，求证：

   (i) $V = \mathrm{Im}\varphi \oplus \mathrm{Ker}\varphi$;

   (ii) $\varphi$ 为 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的投影变换，即
   $$\forall \alpha \in \mathrm{Im}\varphi,\ \varphi(\alpha) = \alpha.$$

   (iii) 存在 $V$ 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$，使得
   $$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

   (iv) 若$A, B \in M_n(F)$ $(n \geq 2)$，$B^2 = B$，则 $r(AB - BA) \leq r(AB + BA)$.

**pf:**

**(i)** 首先由维数公式得到 $\dim V = \dim \mathrm{Im}\varphi + \dim \mathrm{Ker}\varphi$，只需证明 $V = \mathrm{Im}\varphi + \mathrm{Ker}\varphi$ 或者 $\mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$ 即可

(a) **映射性质证明** $\mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$：考虑 $\alpha \in \mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\varphi$，那么根据核空间和像空间的性质，有
$$\exists \beta \in V, \varphi(\beta) = \alpha, \varphi(\alpha) = \mathbf{0}$$
结合 $\varphi^2 = \varphi$，我们自然得到 $\alpha = \varphi(\beta) = \varphi^2(\beta) = \varphi[\varphi(\beta)] = \varphi(\alpha) = \mathbf{0}$

(b) **扩基证明** $\mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$：考虑 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基 $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$，将其扩为 $V$ 的一组基 $\xi_1, \cdots, \xi_r$, $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$。那么 $\varphi(\xi_1), \cdots, \varphi(\xi_r)$ 为 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基。
任取 $\alpha \in \mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Ker}\varphi$，我们有
$$\exists\ c_1, \cdots, c_n, s.t.\ \alpha = \sum_{i=1}^{r} c_i\varphi(\xi_i) = \sum_{i=r+1}^{n} c_i\xi_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} c_i\varphi(\xi_i) - \sum_{i=r+1}^{n} c_i\xi_i = \mathbf{0} \tag{1}$$
左作用 $\varphi$ 得到
$$\sum_{i=1}^{r} c_i\varphi^2(\xi_i) - \sum_{i=r+1}^{n} c_i\varphi(\xi_i) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{r} c_i\varphi^2(\xi_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i\varphi(\xi_i) = \mathbf{0}$$
利用 $\varphi(\xi_1), \cdots, \varphi(\xi_r)$ 为 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基，马上得到 $c_1 = \cdots = c_r = 0$。代回 (1) 式中得到
$$\sum_{i=r+1}^{n} c_i\xi_i = \mathbf{0} \rightsquigarrow c_{r+1} = \cdots = c_n = 0 \rightsquigarrow \alpha = \mathbf{0}$$
实际上上述步骤也说明了 $\varphi(\xi_1), \cdots, \varphi(\xi_r), \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$ 为 $V$ 的一组基，这也是直和性质的一个验证，即 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基和 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基可以拼成 $V$ 的一组基。

(c) **映射性质证明** $V=\mathrm{Im}\varphi+\mathrm{Ker}\varphi$：注意到下面的式子成立即可

$$\alpha=\alpha-\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha) \tag{2}$$

只需要验证一下，由 $\varphi[\alpha-\varphi(\alpha)]=\varphi(\alpha)-\varphi^2(\alpha)=\mathbf{0}$，这说明 $\alpha-\varphi(\alpha)\in\mathrm{Ker}\varphi$。另一方面，$\varphi(\alpha)\in\mathrm{Im}\varphi$ 这一点是显然的。

其实类似 (2) 式这样的拆分在后续用的很多，比如我们曾练习过对合矩阵的一个结论若 $A^2=E$，那么有 $r(A+E)+r(A-E)=n$，如果现在要证明：$\varphi\in\mathrm{End}_F(V)$，$\varphi^2=\mathrm{id}_V$，$V=\mathrm{Ker}(\varphi+\mathrm{id}_V)\oplus\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id}_V)$，你能给出类似上面的一个方法吗？

(d) **扩基证明** $V=\mathrm{Im}\varphi+\mathrm{Ker}\varphi$ 就是重复刚才的过程，已经证明。

**(ii)** 由(i)的证明已经得到

$$\forall\alpha\in\mathrm{Im}\varphi,\exists\, c_1,\cdots,c_r\in F,\ \alpha=c_1\varphi(\xi_1)+\cdots+c_r\varphi(\xi_r)$$

那么验证一下题干的式子

$$\varphi(\alpha)=c_1\varphi^2(\xi_1)+\cdots+c_r\varphi^2(\xi_r)=c_1\varphi(\xi_1)+\cdots+c_r\varphi(\xi_r)=\alpha$$

也可以直接由 $\alpha\in\mathrm{Im}\varphi$，那么

$$\exists\beta\in V,\ \varphi(\beta)=\alpha$$

也就说明 $\varphi(\alpha)=\varphi^2(\beta)=\varphi(\beta)=\alpha$。值得注意的一点是，这里必须强调 $\varphi$ 是在 $\mathrm{Im}\varphi$ 上的投影变换，也就是对原空间 $V$ 从 $\mathrm{Ker}\varphi$ 中扩出来的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$ **未必有** $\varphi(\xi_i)=\xi_i\ (i=1,2,\cdots,r)$。其实由 $\mathrm{Im}\varphi$ 为 $V$ 的 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一个补空间就可以看出，补空间是不唯一的。

**(iii)** 由(i)的证明已经得到 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r),\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$ 为 $V$ 的一组基，那么

$$\varphi(\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r),\xi_{r+1},\cdots,\xi_n)=(\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r),\xi_{r+1},\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

这说明 $A\in M_n(F),\ A^2=A,\ A\sim\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$。

**(iv)** 不妨假设 $B=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}P,\ A=P^{-1}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}P$

那么原题等价为 $r\left[\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\right]\leq\left[\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\right]$。

化简后得到 $r\left[\begin{pmatrix}A_{11} & O\\ A_{21} & O\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ O & O\end{pmatrix}\right]\leq\left[\begin{pmatrix}A_{11} & O\\ A_{21} & O\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ O & O\end{pmatrix}\right]$。这是显然的。 □

2. 设 $\dim V=n$, $\varphi\in\mathrm{End}_F(V)$，且 $\varphi^2=\mathscr{O}$，求证：存在 $V$ 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 满足

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\ \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(0,2),\cdots,\boldsymbol{J}(0,2),\boldsymbol{J}(0,1),\cdots,\boldsymbol{J}(0,1)\}.$$

其中$\boldsymbol{J}(0,2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{J}(0,1)=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$。

进一步，定义 $\dim\mathrm{Im}\varphi=r(\varphi)$，请你 check：

- $\boldsymbol{J}(0,k)(k\geqslant 1)$ 的个数 $N(\boldsymbol{J}(0,k))=n-r(\varphi)$;
- $\boldsymbol{J}(0,1)$ 的个数 $N(\boldsymbol{J}(0,1))=r(\varphi^2)+n-2r(\varphi)$;
- $\boldsymbol{J}(0,2)$ 的个数 $N(\boldsymbol{J}(0,2))=r(\varphi^3)+r(\varphi)-2r(\varphi^2)$.

**pf:** 考虑 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基 $\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$，将其扩为 $V$ 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$。那么 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r)$ 为 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基。

首先断言 $\mathrm{Im}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}\varphi$。否则取 $\mathbf{0}\neq\alpha\in\mathrm{Im}\varphi$, $\alpha\notin\mathrm{Ker}\varphi$，假设 $\beta\in V$, $\varphi(\beta)=\alpha$，那么自然 $\varphi^2(\beta)=\varphi(\alpha)\neq\mathbf{0}$，这与 $\varphi^2=\mathscr{O}$ 矛盾。

接下来将 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r)$ 扩为 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r),\sigma_1,\cdots,\sigma_t$ $(t=n-2r)$。断言 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r),\sigma_1,\cdots,\sigma_t$ 恰好组成 $V$ 的一组基。因为这是 $V$ 中的 $n$ 个向量，所以只需要证明它们是线性无关的。考虑

$$\sum_{i=1}^{r}c_i\xi_i+\sum_{i=1}^{r}\tilde{c}_i\varphi(\xi_i)+\sum_{i=1}^{t}d_i\sigma_i=\mathbf{0}\rightsquigarrow\varphi\left\{\sum_{i=1}^{r}c_i\xi_i+\sum_{i=1}^{r}\tilde{c}_i\varphi(\xi_i)+\sum_{i=1}^{t}d_i\sigma_i\right\}=\sum_{i=1}^{r}c_i\varphi(\xi_i)=\varphi(\mathbf{0})=\mathbf{0}\tag{3}$$

由于 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r)$ 为 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基，这说明它们是线性无关的，即 $c_1=\cdots=c_r=0$。带入式 (3) 中得到

$$\sum_{i=1}^{r}\tilde{c}_i\varphi(\xi_i)+\sum_{i=1}^{t}d_i\sigma_i=\mathbf{0}$$

又因为 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r),\sigma_1,\cdots,\sigma_t$ $(t=n-2r)$ 为 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基，那么 $\tilde{c}_i\equiv=d_i\equiv 0$。也就证明了前面的断言。

于是得到 $\varphi(\xi_1,\varphi(\xi_1),\xi_2,\varphi(\xi_2),\cdots,\xi_r,\varphi(\xi_r),\sigma_1,\cdots,\sigma_t)=(\xi_1,\varphi(\xi_1),\xi_2,\varphi(\xi_2),\cdots,\xi_r,\varphi(\xi_r),\sigma_1,\cdots,\sigma_t)\ \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}(0,2),\cdots,\boldsymbol{J}(0,2),\boldsymbol{J}(0,1),\cdots,\boldsymbol{J}(0,1)\}$。 □

3. 设 $\dim V=n$，$0\neq\alpha\in V$，记

$$\mathcal{L}(V)\alpha=\{\varphi(\alpha)\mid\varphi\in\mathcal{L}(V)\},$$

求证：

$$\mathcal{L}(V)\alpha=V.$$

**pf:** 首先将 $\alpha$ 扩为 $V$ 的一组基 $\alpha,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}$。在取定这组基的前提下，我们利用 $\mathcal{L}(V)\cong M_n(F)$，取 $\varphi_i\in\mathcal{L}(V)$

$$\varphi_i(\alpha,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})=(\alpha,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})(\varepsilon_{i+1},O,\cdots,O),\ i=0,1,\cdots,n-1 \tag{4}$$

那么

$$\forall\beta\in V,\ \beta=c_0\alpha+\sum_{i=1}^{n-1}c_i\xi_i=c_0\varphi_0(\alpha)+\sum_{i=1}^{n-1}c_i\varphi_i(\alpha)=\left\{\sum_{i=0}^{n-1}c_i\varphi_i\right\}(\alpha)\in\mathcal{L}(V)\alpha$$

这说明 $V\subseteq\mathcal{L}(V)\alpha$，但是显然有 $\mathcal{L}(V)\subseteq V$，那么只能 $\mathcal{L}(V)\alpha=V$。 □

4. 若存在 $m$，使得 $\varphi^m=\mathscr{O},\varphi^{m-1}\neq\mathscr{O}$，$\dim\mathrm{Im}\varphi=n-1$，求证：

(i) $\dim\mathrm{Im}\varphi^m\geq n-m$;

(ii) 取 $\alpha\notin\mathrm{Ker}\varphi^{m-1}$，则 $\alpha,\varphi(\alpha),\cdots,\varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关;

(iii) 存在 $V$ 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 满足

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}O & O\\ E_{n-1} & O\end{pmatrix}.$$

(iv) 思考本题能不能用扩基的方法？

**pf:**

**(i)** 根据 $\mathcal{L}(V)\cong M_n(F)$ 作为代数同构，保持加法，数乘，乘法三运算协调，那么取定 $V$ 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 下设 $\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)A\rightsquigarrow\varphi^k(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)A^k,\ k=1,2,3,\cdots$，那么自然有 $r(A^k)=\dim\mathrm{Im}\varphi^k$。为证原题，只需证若$r(A)=n-1$，那么有$r(A^m)\geq n-m$。

根据Sylvester不等式，我们有$r(A^2)\geq 2r(A)-n\geq n-2,\ r(A^3)\geq r(A)+r(A^2)-n\geq n-3,\cdots,\ r(A^m)\geq r(A^{m-1})+r(A)-n\geq n-m$。归纳得证。

**下面用扩基的方法来做**。易知 $\dim\mathrm{Ker}\varphi=1$，于是设 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基为 $\xi_n$，将其扩为 $V$ 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},\xi_n$，那么 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_{n-1})$ 为 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基。设 $V$ 的子空间 $V_1=\mathcal{L}(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$ ，那么由补空间的性质 $V=V_1\oplus\mathrm{Ker}\varphi$。

**断言** $\dim \mathrm{Im}\varphi^k \geq \dim(\mathrm{Im}\varphi^{k-1} \cap V_1)$，$k = 2,3,\cdots$。取 $\mathrm{Im}\varphi^{k-1} \cap V_1$ 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，下面说明 $\varphi(\alpha_1),\cdots,\varphi(\alpha_s)$ 仍然为 $\mathrm{Im}\varphi^k$ 中的线性无关向量组即可。不妨设

$$\sum_{i=1}^{s} c_i\varphi(\alpha_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{s} c_i\alpha_i\right) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{s} c_i\alpha_i \in \mathrm{Ker}\varphi \tag{5}$$

又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s \in V_1$ ，这说明 $\sum\limits_{i=1}^{s} c_i\alpha_i \in V_1 \rightsquigarrow \sum\limits_{i=1}^{s} c_i\alpha_i \in V_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$。于是得到 $\sum\limits_{i=1}^{s} c_i\alpha_i = \mathbf{0}$，也即 $c_1 = \cdots = c_s = 0$。说明了线性无关性。

**注：**此处不等号和等号都是可以取到的，取 $V$ 的一组基为 $\xi_1,\cdots,\xi_3$ ,构造 $\varphi(\xi_1) = \xi_1 + \xi_3, \varphi(\xi_2) = \xi_3, \varphi(\xi_3) = \mathbf{0}$，那么 $\dim \mathrm{Im}\varphi^2 = 1$，但 $\mathrm{Im}\varphi \cap V_1 = \{\mathbf{0}\}$。修改定义中的一条 $\varphi(\xi_1) = \xi_2$ 即可得到取等 $\dim \mathrm{Im}\varphi^2 = \dim \mathrm{Im}\varphi \cap V_1 = 1$。

**下面说明** $\mathrm{Im}\varphi^{k-1} \nsubseteq V_1$，$\forall k = 2,3,\cdots,m$ ，对 $k \geq m$，显然有 $\mathrm{Im}\varphi^k = \{0\}$。用反证法，设存在 $k_0 \in \{2,3,\cdots,m\}$ 使 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0-1} \subseteq V_1$，那么 $\mathrm{Im}\varphi^{k-1} \cap \mathrm{Ker}\varphi \subseteq V_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$。下面利用这一点说明 $\dim \mathrm{Im}\varphi^{k_0} \geq \dim \mathrm{Im}\varphi^{k_0-1}$。设 $\beta_1,\cdots,\beta_l$ 为 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0-1}$ 的一组基，只需证 $\varphi(\beta_1),\cdots,\varphi(\beta_l)$ 为 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0}$ 中的线性无关向量组即可。不妨设

$$\sum_{i=1}^{l} \tilde{c}_i\varphi(\beta_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{l} \tilde{c}_i\beta_i\right) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{l} \tilde{c}_i\beta_i \in \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi^{k_0-1} = \{0\}$$

这说明 $\tilde{c}_i \equiv 0$，也就说明了线性无关性，结合天然的包含关系 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^{k_0-1}$，可以得到 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0-1}$，也就是 $\varphi(\beta_1),\cdots,\varphi(\beta_l)$ 为 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0}$ 的一组基。

我们断言 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0-1} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0+1} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0+2} = \cdots$。利用条件的等价性，只需证明 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0+1}$ 即可。因为我们有天然包含关系 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0+1} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^{k_0}$，我们只需证明 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^{k_0+1}$。任取 $\gamma \in \mathrm{Im}\varphi^{k_0}, \exists\ \delta \in V,\ \varphi^{k_0}(\delta) = \gamma = \varphi[\varphi^{k_0-1}(\delta)]$。而已有条件 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0-1}$ 说明对 $\varphi^{k_0-1}(\delta)$，存在 $\delta'$ 使得 $\varphi^{k_0-1}(\delta) = \varphi^{k_0}(\delta')$。那么

$$\gamma = \varphi[\varphi^{k_0-1}(\delta)] = \varphi[\varphi^{k_0}(\delta')] = \varphi^{k_0+1}(\delta') \in \mathrm{Im}\varphi^{k_0+1}$$

这证明了$\mathrm{Im}\varphi^{k_0} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0+1}$，也即 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0-1} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0+1} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0+2} = \cdots$。但是由于 $k_0 \in \{2,3,\cdots,m\}, \varphi^{k_0-1} \neq \mathscr{O}$，即 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0-1} \neq \{0\}$。但上面的论证说明对任意整数 $p \geq 0$，都有 $\mathrm{Im}\varphi^{k_0+p} = \mathrm{Im}\varphi^{k_0} \neq \{0\}$。这与 $\varphi^m = \mathscr{O}$ 这一已知事实矛盾。

而 $\dim V_1 = n-1$，这说明 $\dim(V_1 + \mathrm{Im}\varphi^{k-1}) = n$。那么 $\dim \mathrm{Im}\varphi^2 \geq \dim(\mathrm{Im}\varphi \cap V_1) = (n-1)+(n-1)-n = n-2, \dim \mathrm{Im}\varphi^3 \geq \dim(\mathrm{Im}\varphi^2 \cap V_1) \geq (n-2)+(n-1)-n = n-3,\cdots,\dim \mathrm{Im}\varphi^m \geq \dim(\mathrm{Im}\varphi^{m-1} \cap V_1) = (n-m+1)+(n-1)-n = n-m$。

**(ii)** 考虑线性组合

$$c_0\alpha + c_1\varphi(\alpha) + \cdots + c_{m-1}\varphi^{m-1}(\alpha) = \mathbf{0} \tag{6}$$

对 (6) 式左作用 $\varphi^{m-1}$ 得到

$$c_0\varphi^{m-1}(\alpha)=\mathbf{0}\xrightarrow[\varphi^{m-1}(\alpha)\neq\mathbf{0}]{\alpha\notin\mathrm{Ker}\varphi^{m-1}}c_0=0$$

代回到 (6) 式得到 $c_1\varphi(\alpha)+\cdots+c_{m-1}\varphi^{m-1}(\alpha)=\mathbf{0}$，接下来左作用 $\varphi^{m-2}$ 同理可以得到 $c_1=0$，重复上述过程得到 $c_i\equiv 0$。即说明了线性无关性。

**(iii)** 由 (ii) 说明 $n=\dim V\geq m$，而由 (i) 的结论有 $0=\dim\mathrm{Im}\varphi^m\geq n-m\Leftrightarrow n\leq m$。那只能 $n=m$。也就说明在 (ii) 中的线性无关向量组为 $V$ 的一组基。考虑在这组基下的矩阵

$$\varphi(\alpha,\varphi(\alpha),\cdots,\varphi^{m-1}(\alpha))=(\alpha,\varphi(\alpha),\cdots,\varphi^{m-1}(\alpha))\begin{pmatrix}O & O\\ E_{n-1} & O\end{pmatrix}$$

**(iv)** 设 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基为 $\xi_n$，将其扩为 $V$ 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},\xi_n$，那么 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_{n-1})$ 为 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基。由 (i) 的扩基证明我们已经知道不可能出现 $\mathrm{Im}\varphi^k\cap\mathrm{Ker}\varphi=\{\mathbf{0}\},k=1,2,\cdots,m-1$的情形，否则由像空间 $\mathrm{Im}\varphi^k$ 降链的稳定性会导出非幂零变换的矛盾。

那么必定存在 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_{n-1})$ 中的一个向量满足 $\varphi(\xi_i)=q_1\xi_n$ $(q_1\neq 0,i=1,2,\cdots,n-1)$。并有且仅有一个，否则与 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_{n-1})$ 的线性无关性矛盾。不妨设 $\varphi(\xi_{n-1})=q_1\xi_n$，否则调换基的顺序使得这个式子成立，这是总能做到的。为消去常数，不妨一开始就取定 $\xi'_{n-1}:=q_1^{-1}\xi_n$。这样就有$\varphi(\xi'_{n-1})=\xi_n$。容易证明 $\varphi^2(\xi_1),\cdots,\varphi^2(\xi_{n-2})$ 为 $\mathrm{Im}\varphi^2$的一组基，由 $\mathrm{Im}\varphi^2\cap\mathrm{Ker}\varphi\neq\{\mathbf{0}\}$ 可以得到存在在 $\varphi^2(\xi_1),\cdots,\varphi^2(\xi_{n-2})$ 中有且仅有一个向量满足$\varphi^2(\xi_i)=q_2\xi_n$。不妨 $\varphi^2(\xi_{n-2})=\varphi[\varphi(\xi_{n-2})]=q_2\xi_n\rightsquigarrow\varphi(\xi_{n-2})=q_{21}\xi'_{n-1}$。同样对基做数乘调整，找到 $\xi'_{n-2}$ 满足 $\varphi(\xi'_{n-2})=\xi'_{n-1}$。

以此类推，可以对基适当调整，得到 $\xi'_1,\cdots,\xi'_{n-1},\xi_n$ 为 $V$ 的一组基，满足 $\varphi(\xi'_i)=\xi'_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,n-2,\varphi(\xi'_{n-1})=\xi_n,\varphi(\xi_n)=\mathbf{0}$。于是

$$\varphi(\xi'_1,\xi'_2,\cdots,\xi'_{n-1},\xi_n)=(\xi'_1,\xi'_2,\cdots,\xi'_{n-1},\xi_n)\begin{pmatrix}O & O\\ E_{n-1} & O\end{pmatrix}.$$

□