2024.12.6 Homework

1. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，U 是 V 的**子空间**。对任意的 $v \in V$，集合

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}$$

称为 v 的 U-陪集。在所有 U-陪集构成的集合

$$V/U = \{v + U \mid v \in V\}$$

中，定义加法和数乘如下，其中 $v_1, v_2 \in V$, $k \in \mathbb{K}$：

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U, \quad k \cdot (v_1 + U) := k \cdot v_1 + U.$$

证明下列结论成立：

(i) $v_1 + U = v_2 + U$（作为集合相等）当且仅当 $v_1 - v_2 \in U$。特别地，$v + U$ 是 V 的子空间当且仅当 $v \in U$。

(ii) U-陪集之间的关系是：作为集合或者相等，或者不相交，给出原空间V的一个划分。
(**Note**: 其实这里可以定义一个等价关系$v \sim u \Leftrightarrow v + U = u + U$，等价关系给出原集合的一个划分，划分为若干等价类，每个等价类为一个集合$v + U$，其中v为这个集合的一个代表元。)

(iii) V/U 中的加法以及 $\mathbb{K}$ 关于 V/U 的数乘**不依赖于代表元的选取**，是良定义(well-defined)的。即若 $v_1 + U = v_1' + U$ 且 $v_2 + U = v_2' + U$，则

$$(v_1 + v_2) + U = (v_1' + v_2') + U, \quad (k \cdot v_1) + U = (k \cdot v_1') + U.$$

(iv) V/U 在上述加法和数乘下成为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，称为 V 关于子空间 U 的**商空间**。
(**Note**: 一定注意商空间V/U中的的元素不是向量v，而是陪集$v + U$。)

(v) 设$V = U \oplus W$，则$\dim V/U = \dim W$，并且存在线性同构

$$\varphi : W \to V/U.$$

2. 设V, U为有限维线性空间，$\varphi : V \to U$为线性映射，证明下面的线性同构：

$$V/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$$