Notes 2024.12.5

Chapter 4 Linear mapping

$M_n(F)$. $F^{m\times n}$

F^n

${}_F V$ $\rightsquigarrow$ 运算关系、子结构、直和.

$\mathcal{L}(V,U)$ $V\to U$ 所有线性映射 ($\mathrm{Hom}(V,U)$)

$\mathcal{L}(V)$ V 上所有线性变换 ($\mathrm{Hom}(V)$)

$\boxed{\text{Homomorphism}}$ 同态

Recall: 坐标

$\boxed{{}_F V}$ $\xrightarrow{\xi_1\cdots\xi_n}$ F^n X_α

$$\alpha = c_1\xi_1+\cdots+c_n\xi_n = (\xi_1\cdots\xi_n)\begin{pmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix}$$

相同线性关系

$\varphi: V\to F^n$. $\alpha\mapsto X_\alpha$

- 1-1
- onto
- $\boxed{\text{保持+, 数乘}}$ ☆

Goal:

1° $\boxed{{}_F V \cong F^n.}$

$\Downarrow$

2° $\mathcal{L}(V,U)$ 上定义运算 → vector space.

$$\mathcal{L}(V,U) \cong F^{m\times n}$$

1° 映射 $\varphi: A\to B$, $\alpha\mapsto\varphi(\alpha)$ $\xrightarrow{\text{线性空间}}$ $\varphi: V\to U$, $\alpha\mapsto\varphi(\alpha)$

保持+, 数乘

$\varphi(0)=\varphi(0+0)=2\varphi(0)$

- $\mathrm{Im}\varphi = \varphi(A) = \{\varphi(\alpha)\mid\alpha\in V\}$ 像

满射: $\mathrm{Im}\varphi = U$

- $\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(0) = \{\alpha\in V\mid\varphi(\alpha)=0\}$ 核

非逆映射

$\mathrm{Ker}\varphi=\{0\}$

单射: $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)\Rightarrow\alpha=\beta \Rightarrow \boxed{\varphi(\alpha)=0=\varphi(0)\Rightarrow\alpha=0}$

非单射: $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta) \not\Rightarrow \alpha=\beta$

$\rightsquigarrow \varphi(\alpha-\beta)=0 \Rightarrow \alpha-\beta\in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \exists\gamma\in\mathrm{Ker}\varphi,\ \alpha=\beta+\gamma$

· $\boxed{\alpha+\mathrm{Ker}\varphi} = \{\alpha+\gamma \mid \gamma\in\mathrm{Ker}\varphi\}$

元　空间

$\varphi(\alpha+\mathrm{Ker}\varphi)=\varphi(\alpha)$

$\alpha+\mathrm{Ker}\varphi=\beta+\mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(\alpha)=\varphi(\beta) \Rightarrow \alpha-\beta\in\mathrm{Ker}\varphi$

$$V/\mathrm{Ker}\varphi := \{\alpha+\mathrm{Ker}\varphi \mid \alpha\in V\}$$

· 加　$(\alpha+\mathrm{Ker}\varphi)+(\beta+\mathrm{Ker}\varphi)=(\alpha+\beta)+\mathrm{Ker}\varphi$

· 数乘　$c(\alpha+\mathrm{Ker}\varphi)=c\alpha+\mathrm{Ker}\varphi$

$V/\mathrm{Ker}\varphi$ 在以上述两个运算下构成上的线性空间

记为 V 的一个商空间

Well-defined 良定义的. 代表元选取是否影响?

$\alpha_1+\mathrm{Ker}\varphi=\alpha+\mathrm{Ker}\varphi \Leftrightarrow \alpha_1-\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi$

$\beta_1+\mathrm{Ker}\varphi=\beta+\mathrm{Ker}\varphi \Leftrightarrow \beta_1-\beta\in\mathrm{Ker}\varphi$

$\alpha_1+\beta_1+\mathrm{Ker}\varphi \overset{?}{=} \alpha+\beta+\mathrm{Ker}\varphi \Leftrightarrow \overbrace{(\alpha_1+\beta_1)-(\alpha+\beta)}^{(\alpha_1-\alpha)+(\beta_1-\beta)} \in \mathrm{Ker}\varphi$ ✓

Notes: $\ker\varphi$ 其实为一个线性空间（V的一个子空间）

- $\varphi^{-1}(U) = \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) \in U\}$ 下的像.

$\varphi^{-1}(\alpha) = \{\beta \in V \mid \varphi(\beta) = \alpha\}$

2° 映射 $\varphi = \psi$ $\forall \alpha \in V$, $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$

$\Downarrow$

线性映射. Th_1 $\varphi: V \to U$ 为线性映射. $\underset{\circ}{\underbrace{\xi_1 - - \xi_n}}$ 为V的一组基, $\beta_1 - - \beta_n$ 为U中的任意n个向量, s.t. $\varphi(\xi_i) = \beta_i$ 若还有 $\psi(\xi_i) = \beta_i$, $\psi: V \to U$ 为线性映射 $\Rightarrow \psi = \varphi$

Pf: $\forall \alpha \in V$. Goal: $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$

$\alpha = c_1\xi_1 + \cdots + c_n\xi_n$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\alpha) &= c_1\varphi(\xi_1) + \cdots + c_n\varphi(\xi_n) = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n \\
&= c_1\psi(\xi_1) + \cdots + c_n\psi(\xi_n) \\
&= \psi(c_1\xi_1 + \cdots + c_n\xi_n) \\
&= \psi(\alpha) \qquad \text{▢}.
\end{aligned}
$$

3. 设 $\alpha_1=(1,0,1,1)$, $\alpha_2=(0,-1,1,2)$, $\alpha_3=(1,-1,3,3)$, $\alpha_4=(2,-2,5,6)$; $\beta_1=(1,1,1,1)$, $\beta_2=(1,1,0,2)$, $\beta_3=(1,0,0,3)$, $\beta_4=(3,2,1,6)$. 问: 是否存在 F_4 上的线性变换 φ, 使得 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i\ (i=1,2,3,4)$? 并请说明理由.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \to \varepsilon_4$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \varepsilon_4 \\ \downarrow\varphi & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array}$$

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=\varphi(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\varphi(\alpha_4)\overset{?}{=}\beta_4 \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

3° 矩阵

$$\varphi: V \to U$$

$$\{\xi_i\}_{i=1}^{n} \qquad \{\eta_j\}_{j=1}^{m}$$

$$\begin{cases} \varphi(\xi_1)=c_{11}\eta_1+c_{21}\eta_2+\cdots+c_{m1}\eta_m \\ \vdots \\ \varphi(\xi_n)=c_{1n}\eta_1+\cdots\cdots+c_{mn}\eta_m \end{cases}$$

$$(\varphi(\xi_1)\cdots\varphi(\xi_n))=\underbrace{(\eta_1\cdots\cdots\eta_m)}_{U}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \overset{\text{det}}{=} C$$

$$\| \text{def}$$

$$\varphi\underbrace{(\xi_1\cdots\cdots\xi_n)}_{V}$$

$m\times n$

$\varphi: F^2 \to F^2,\quad X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$

φ $\{\varepsilon_1\ \varepsilon_2\}$ 下的矩阵 $\varphi(\varepsilon_1\ \varepsilon_2) = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\ \varepsilon_2) = (\varepsilon_1+\varepsilon_2\ \ \varepsilon_2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

基改变 表示矩阵怎么变?

$V \quad (\xi_1' - - - \xi_n') = (\xi_1 \cdots \xi_n)\,P = (p_{ij})$

$U \quad (\eta_1' \cdots \eta_m') = (\eta_1 - - \eta_m)\,Q = (g_{ij})$

$\varphi(\xi_1' - - - \xi_n') = (\eta_1' - - - \eta_m')\,\underline{A} \quad$ (A, C 关系?)

$$\varphi(\xi_1') = \varphi[p_{11}\xi_1 + - - + p_{n1}\xi_n]$$

$$= p_{11}\varphi(\xi_1) + - - + p_{n1}\varphi(\xi_n)$$

$$= (\varphi(\xi_1) \cdots \varphi(\xi_n))\begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}$$

$$(\eta_1 - - - \eta_m)\,C\begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{(\varphi(\xi_1') - - \varphi(\xi_n'))} = (\eta_1 - - \eta_m)\left(C\begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}, - - C\begin{pmatrix} p_{1n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$P\varepsilon_1 \qquad\qquad P\varepsilon_n$$

$= (\eta_1 - - \eta_m)\ CP(\underline{\varepsilon_1 - - - \varepsilon_n})$

$= (\eta_1 - - \eta_m)\ CP$

$= \underline{(\eta_1' - - - \eta_m')}\ \boxed{Q^{-1}CP = A} \to \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A与C相似

$\varphi: V \to V \quad \xi_1 - - \xi_n$

$\varphi(\xi_1 - - \xi_n) = (\xi_1 - - \xi_n)\, C_{n\times n}$

$\varphi(\xi_1' - - - \xi_n') = (\xi_1' - - \xi_n')\, A_{n\times n}$

$P^{-1}CP = A$

特殊的相似 $\to$ 相似

eg. $\varphi: V \to U$ 线性映射, $\dim \mathrm{Im}\varphi = r < n$, 证明: ∃V的一组基

$\xi_1 - - \xi_n$, U的一组基 $\eta_1 - - \eta_m$ s.t.

$\varphi(\xi_1 - - \xi_n) = (\eta_1 - - \eta_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pf: ∀V的一组基 $\delta_1 - - \delta_n$, U的一组基 $\mu_1 - - \mu_m$

$\varphi(\delta_1 - - \delta_n) = (\mu_1 - - \mu_m)\, A_{m\times n}$ 且 $r(A) = r$

$A = P_m \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m\times n} Q_n$

$(\xi_1 - - \xi_n) = (\delta_1 - - \delta_n)\, Q^{-1}$

$(\eta_1 - - \eta_m) = (\mu_1 - - \mu_m)\, P$

$\varphi(\xi_1 - - \xi_n)$

$= \underline{[\varphi(\delta_1 - - \delta_n)]}\, Q^{-1}$

$= (\mu_1 - - \mu_m)\, AQ^{-1} = (\eta_1 - - \eta_m)\, P^{-1}AQ^{-1}$

$= (\eta_1 - - \eta_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4° 同构

$\varphi: V \to U$ 同构映射 (Isomophic mapping)

- $\varphi \in \underline{\mathrm{Hom}}(V,U)$
- φ 1-1 and onto.

1° 线性相关 $\Rightarrow$ 线性相关　　$\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$ ✓

$\Leftarrow$ $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$! 单

2° 无关 $\Rightarrow$ 无关　单

$\Leftarrow$

$\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$

3° V的基 $\Rightarrow$ U的基　单+满 $\Leftrightarrow$ 双 $\Leftrightarrow$ 可逆

已证

$\varphi(V)$的基 单

4° V_1是V子空间 $\Rightarrow$ $\varphi(V_1)$是U子空间 $\to$ $\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$

($\mathrm{Im}\,\varphi|_{V_1}$)

$\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \varphi^{-1}(U_1)$是V子空间 $\Leftarrow$ U_1是U子空间

对任何

5. $V_1 + V_2 = V \Longrightarrow \varphi(V) = \varphi(V_1) + \varphi(V_2)$

$\varphi(V_1 \cap V_2) \overset{?}{=} \varphi(V_1) \cap \varphi(V_2)$

$\varphi(V_1 \cap V_2) \subseteq \varphi(V_1) \cap \varphi(V_2)$　只需证 $\varphi(V_1) \cap \varphi(V_2) \subseteq \varphi(V_1 \cap V_2)$

$\boxed{\varphi\text{单}}$ ✓

$\forall \alpha \in \varphi(V_1) \cap \varphi(V_2)$

$\Rightarrow \underline{\alpha = \varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)}$　$\alpha_1 \in V_1$　$\alpha_2 \in V_2$.

6. $V=V_1\oplus V_2 \overset{?}{\Rightarrow} \varphi(V)=\varphi(V_1)\oplus\varphi(V_2)$? $\Rightarrow \varphi$单

$U=\varphi(V_1)\oplus\varphi(V_2)$? $\Rightarrow\varphi$满.单

$\varphi: V\to U$ 为一个单线性映射，$\underline{V\cong \mathrm{Im}\varphi}$

取 V 的一组基 $\xi_1\cdots\xi_n$ claim $\varphi(\xi_1)\cdots\varphi(\xi_n)$ 为 $\mathrm{Im}\varphi$ 一组基

- 线性张成 √
- 无关 $c_1\varphi(\xi_1)+\cdots+c_n\varphi(\xi_n)=0$

$\Rightarrow \varphi(c_1\xi_1+\cdots+c_n\xi_n)=0=\varphi(0)$

$\Rightarrow c_1\xi_1+\cdots+c_n\xi_n=0 \Rightarrow c_i=0$

$\varphi: V\to U$ 同构 $\quad V\cong U \quad (\dim V=\dim U)$

$\varphi: V\to U$ 满的线性映射，$\underline{V/\mathrm{Ker}\varphi}\cong U=\mathrm{Im}\varphi$

$\{\underline{\alpha+\mathrm{Ker}\varphi}\}$

$\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基 $\xi_{r+1}\cdots\xi_n$ 扩充为 V 的一组基 $\xi_1\cdots\xi_r,\ \xi_{r+1}\cdots\xi_n$.

$$V/\mathrm{Ker}\varphi=\left\{\underline{c_1\xi_1+\cdots+c_n\xi_n}+\mathrm{Ker}\varphi \;\middle|\; \forall c_i\in F\right\}$$

$$= \{ c_1\xi_1 + \cdots + c_n\xi_r + \mathrm{Ker}\varphi \mid \forall c_i \in F \}$$

$$= \{ c_1(\xi_1 + \mathrm{Ker}\varphi) + c_2(\xi_2 + \mathrm{Ker}\varphi) + \cdots + c_n(\xi_r + \mathrm{Ker}\varphi) \mid - \}$$

$$= \langle \xi_1 + \mathrm{Ker}\varphi, \cdots, \xi_r + \mathrm{Ker}\varphi \rangle$$

$$c_1(\xi_1 + \mathrm{Ker}\varphi) + \cdots + c_n(\xi_r + \mathrm{Ker}\varphi) = \underbrace{0 + \mathrm{Ker}\varphi} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow c_1\xi_1 + \cdots + c_n\xi_r + \mathrm{Ker}\varphi = 0 + \mathrm{Ker}\varphi$$

$$\Rightarrow c_1\xi_1 + \cdots + c_n\xi_r = 0 \Rightarrow c_1 = \cdots = c_r = 0 \quad \checkmark$$

$$\sigma: \quad \underbrace{\xi_i + \mathrm{Ker}\varphi \mapsto \varphi(\xi_i)}$$

Th2. $\varphi: V \to U$ 的线性映射, 则 $V/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$

$$\sigma: \xi_i + \mathrm{Ker}\varphi \mapsto \varphi(\xi_i)$$

Corollary

1° $\underbrace{\dim(V/\mathrm{Ker}\varphi)} = \dim \mathrm{Im}\varphi = \underline{\dim V - \dim \mathrm{Ker}\varphi}$

$$\Rightarrow \dim V = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi$$

2° $\xi_{r+1} \cdots \xi_n$ 为 $\mathrm{Ker}\varphi$ 一组基. $\xi_1 \cdots \xi_n$ V 的一组基

$\varphi(\xi_1) - - \varphi(\xi_r)$ 为 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 的一组基.