1. 给定矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

按下列步骤计算 $\boldsymbol{A}$ 的广义 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}$ 和 Frobenius 标准型 $\boldsymbol{F}$，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P_2}$ 满足 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{F}$.

(a) 验证 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda^2+1)^2(\lambda-1)^2$, 并叙述此时的空间第一分解定理(i.e. **全空间的准素分解定理**).

(b) 设 $\mathscr{A}: F^n \to F^n$，$\boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 通过行初等变换找出 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2$ 列向量组的极大无关组，并由此寻找 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}^2+\mathscr{E})^2$ 的一组基，已知：

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=\begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ -8 & -3 & 1 & -4 & -5 & -3 \\ 4 & -1 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -8 & -5 & -1 & -4 & -5 & -3 \\ 8 & 3 & -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) 取 $\boldsymbol{\alpha} \in F^n$ 生成循环子空间 $F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}$，你能找到一个 α 满足 $\dim F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}=4=\deg(\lambda^2+1)^2$ 吗?

(d) 在 (c) 的基础上，设 $\mathscr{A}_1=\mathscr{A}|_{F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}}$，找到一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$，使得

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{J}((\lambda^2+1)^2).$$

已知：

$$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E})\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ -1 & 3\\ -1 & -2\\ -1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\\ 2 & -2\\ 0 & 2\\ -2 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\\ -1 & 2\\ -1 & 0\\ -1 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\\ 3 & -2\\ -2 & 2\\ -1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}.$$

(e) 解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$，得到基础解系如下：

$$\boldsymbol{X}=c_1\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\\ -1\\ -1\end{bmatrix},\ c_1,c_2\in F.$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的一个属于特征值 $\lambda=1$ 的一级广义特征向量 $\boldsymbol{\beta}$, i.e., $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{O}$, $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{O}$.

(f) 求出 $\boldsymbol{P}_1$.

(g) 令 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，问 $\boldsymbol{\gamma}$ 的关于 $\mathscr{A}$ 的极小多项式是什么? 求出 $\boldsymbol{P}_2$. (可以用 $\mathscr{A},\boldsymbol{\gamma}$ 来表示而不求出具体值.)