Quiz 1

Time: 2025/3/14, 15:00-15:45

1. 设 $f(x) = x^4 - 2022x^3 - 2021x^2 - 4045x - 1923$，则 $f(2023) = $ ________.

2. (单选) 设 $f(x), g(x) \in F[x]$，以下说法**错误**的是 ____.

   A. 在 F 上 $(f(x), g(x)) = 1$ 的充要条件是在 $\mathbb{C}$ 上 $f(x), g(x)$ 没有公共根.

   B. 在 $\mathbb{C}$ 上 $f(x)$ 没有重根的充要条件是在 F 上 $f(x)$ 没有重因式.

   C. 在 F 上 $f(x)$ 不可约的充要条件是在 $\mathbb{C}$ 上 $f(x)$ 没有重根.

   D. 在 $\mathbb{C}$ 上 $f(x) \mid g(x)$ 的充要条件是存在 $h(x) \in F[x]$，使得 $g(x) = f(x)h(x)$.

3. 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, $a, b, c, d \in F$ 且满足 $ad - bc \neq 0$，证明:

$$(af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x)) = (f(x), g(x)).$$

4. 已知 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r \in \mathbb{R}[x]$ 的三个根是 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(1) 证明：$p^2 \geq 3q$;

(2) 求**首一的**三次实系数多项式 $g(x)$，使得 x_1^2, x_2^2, x_3^2 为其所有根。（要求 $g(x)$ 的系数用 p, q, r 表示）

5. 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$，证明：

(1) 若 $f(x) - 1$ 在 $\mathbb{Z}$ 上有至少四个互异整数根，则 $f(x) + 1$ 在 $\mathbb{Z}$ 上无根;

(2) 若存在一个偶数 m 和奇数 n 使得 $f(m)$, $f(n)$ 均为奇数，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上无根。