

1. 设 $f(x) = x^3 + 3x + 1$, 求满足同余方程 $v(x)f'(x) \equiv 1 \pmod{f(x)}$ 且次数最小的多项式 $v(x)$.

2. 设 $(f(x), g(x)) = 1$, 证明: $f^2(x) + g^2(x)$ 的重根必是 $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2$ 的根. (Hint: Consider over \mathbf{C} .)

3. 设 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}[x]$ 上的任一实系数多项式. 证明: 存在唯一实系数多项式 $g(x)$ 使得

$$((x^2 + 3x - 5)g(x))'' = f(x).$$