Stochastic Processes

2025 Spring

作者：Illusion

时间：2025 年 6 月 15 日

目录

1 预备知识 **1**
1.1 事件与概率 . . . 1
1.2 独立性 . . . 2
1.3 条件概率和条件独立 . . . 3
1.4 期望与条件期望 . . . 4
1.5 多个离散型随机变量的定义，独立性，条件期望 . . . 7
1.6 随机过程的基本概念 . . . 8

2 离散时间 Markov 链 **9**
2.1 马氏性的等价刻画 . . . 9
2.2 时齐 Markov 链的有限维分布 . . . 10
2.3 从固定点出发的马氏链 . . . 12
2.3.1 状态的分类：常返和暂留的判定 . . . 12
2.3.2 停时和强马氏性 . . . 14
2.3.3 状态之间的关系：可达和互通 . . . 16
2.3.4 状态空间分解定理 . . . 17
2.4 平稳分布和特殊例子 . . . 18
2.5 极限行为和平稳分布的存在唯一性 . . . 19
2.6 首达时 . . . 21

3 Poisson 过程 **24**
3.1 指数分布和 Poisson 分布 . . . 24
3.2 Poisson 过程的定义 . . . 25
3.3 复合 Poisson 过程 . . . 27
3.4 Poisson 过程的变换 . . . 28
3.4.1 稀释 . . . 28
3.4.2 叠加 . . . 30
3.4.3 条件分布 . . . 31
3.5 轨道的右连左极性 (càdlàg) . . . 32

4 更新过程 **33**
4.1 定义和基本性质 . . . 33
4.2 更新过程的极限定理 . . . 33
4.2.1 更新报酬过程 . . . 34
4.2.2 交替更新过程 . . . 35
4.2.3 使用年龄和剩余寿命 . . . 35

5 连续时间 Markov 链 **36**
5.1 概念和例子 36
5.2 转移速率矩阵和嵌入链 38
5.2.1 转移概率的连续性 38
5.2.2 转移概率的可微性: Kolmogorov 方程 39
5.2.3 轨道的跳跃性质 40
5.2.4 利用跳过程构造 CTMC 40
5.3 平稳分布与极限行为 41
5.4 应用举例 42
5.4.1 转移概率的计算 42
5.4.2 纯生过程和生灭过程 43
5.4.3 排队论 44

6 离散时间鞅 **45**
6.1 定义 45
6.2 基本性质和例子 46
6.2.1 鞅差和鞅增量 46
6.2.2 Jensen 不等式和凸函数变换 46
6.2.3 例子：随机游走，指数鞅 46
6.3 离散型随机积分 47
6.4 停时定理 48
6.4.1 可选停时定理 48
6.4.2 鞅停时定理 49
6.5 应用: 随机游走中的赌徒破产 49
6.5.1 离出分布 49
6.5.2 平均首达时 51
6.6 收敛定理 51
6.6.1 Doob 极大值不等式 51
6.6.2 鞅收敛定理 52
6.6.3 应用: Polya 罐 52

7 一维 Brown 运动 **54**
7.1 定义和基本性质 54

Chapter 1

预备知识

设随机变量 $X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (S, \mathscr{S}, \mu_X)$ 是从概率空间到测度空间的可测映射：

- 当 S 为可数集时，通常取其上的 σ 代数为幂集，即 $\mathscr{S} = 2^S$；
- 当 $S = \mathbb{R}$ 时，通常取 $\mathscr{S} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$，即实数轴上的 Borel σ 代数.

§1.1 事件与概率

【定义 1.1】(σ 代数) 称 $\mathscr{F} \subseteq 2^\Omega$ 为一个 σ 代数或事件域，若

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(2) 对补运算封闭，即 $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$;

(3) 对可列并封闭，即 $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{F} \Rightarrow \cup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{F}$.

此时，称二元组 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间.

【注 1.2】 下面几个叙述是在本章中常见的：

- σ 代数对有限并，交，可列并，交都是封闭的，对交的情形只需要使用 De Morgan 律;
- 两个平凡的 σ 代数：最大的 σ 代数为 2^Ω，最小的 σ 代数为 $\{\emptyset, \Omega\}$;
- 对任意 $A \subseteq \Omega$ 有 $\sigma(A) = \sigma(A^c) = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$.

【定义 1.3】(划分/分割) 称 $\pi_\Omega := \{\Lambda_n : n \geq 1\}$ 为样本空间 Ω 的一个划分，若 $\Omega = \sum_{n\geq 1} \Lambda_n$，即 $\{\Lambda_n\}_{n\geq 1}$ 互不相交且 $\Omega = \cup_{n\geq 1}\Lambda_n$. 则由划分生成的 σ 代数为

$$\sigma(\pi_\Omega) = \left\{ \sum_{k\in J} \Lambda_k : J \subseteq \mathbb{N}^* \right\}.$$

且 $\sigma(\pi_\Omega)$ 为包含集类 π_Ω 的**最小 σ 代数**.

【定义 1.4】(概率测度) 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间，$\mathbb{P} : \mathscr{F} \to [0, 1]$ 为概率测度，若 $\mathbb{P}$ 满足 (1) 非负性；(2) 规范性 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$; (3) 可列可加性.

【命题 1.5】 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间，则

(1) $\mathbb{P}(\cdot)$ 满足有限可加性；

(2) $\mathbb{P}(\cdot)$ 满足次可列可加性，也即对任意一列事件 $\{A_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{F}$ 有

$$\mathbb{P}\left(\cup_{n\geq 1}A_n\right)\leq\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(A_n).$$

(3) $\mathbb{P}(\cdot)$ 满足上连续和下连续性，也即对单调非降集合列 $\{A_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{F}$ 和单调非升集合列 $\{B_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{F}$，定义 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n:=\cup_{n\geq 1}A_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}B_n:=\cap_{n\geq 1}B_n$，那么

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n),\ \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_n).$$

<u>**证明.**</u> (1) 只需要并上可列个空集. (2) 考虑 $\{C_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $C_1=A_1$，$C_n=A_nA_{n-1}^c\cdots A_1^c\ (n>1)$，那么 $\cup_{n\geq 1}C_n=\cup_{n\geq 1}A_n$，再利用概率测度的单调性. (3) 这时候 (2) 中的分解就变成

$$\cup_{n\geq 1}A_n=A_1+A_2\backslash A_1+\cdots+A_n\backslash A_{n-1}+\cdots$$

利用可列可加性和减法公式. □

§1.2 独立性

首先讨论事件和 σ 代数的独立性. 下面的定义都默认已经有了概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$.

【定义 1.6】(事件的独立性) 设 $\{A_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{F}$，称 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是相互独立的，若任意 $J\subseteq\mathbb{N}^*$, $\#J\geq 2$ 有

$$\mathbb{P}(\cap_{k\in J}A_k)=\prod_{k\in J}\mathbb{P}(A_k).$$

【定义 1.7】(σ 代数的独立性) 考虑一列 $(\Omega,\mathscr{F}_k,\mathbb{P})(k\geq 1)$，称 $\{\mathscr{F}_k\}_{k\geq 1}$ 相互独立，若任意 $J\subseteq\mathbb{N}^*$, $\#J\geq 2$, $A_k\in\mathscr{F}_k$ 有 $\{A_k\}_{k\geq 1}$ **为相互独立的事件**，即

$$\mathbb{P}(\cap_{k\in J}A_k)=\prod_{k\in J}\mathbb{P}(A_k).$$

【命题 1.8】 $\{\mathscr{F}_k\}_{k\geq 1}$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ 任取 $A_k\in\mathscr{F}_k$ 有

$$\mathbb{P}(\cap_{k\geq 1}A_k)=\prod_{k\geq 1}\mathbb{P}(A_k).$$

<u>**证明.**</u> 只证充分性，对任意 $J\subseteq\mathbb{N}^*$, $\#J\geq 2$, $A_k\in\mathscr{F}_k$，令 $B_k=A_k,\ k\in J;B_k=\Omega,\ k\in J^c$ 然后带入条件即可. □

接下来只定义离散型随机变量 (Discrete Random Variable, denoted as D.R.V.) 的独立性.

【定义 1.9】(D.R.V.) 令 $S=\{x_k:k\geq 1\}$，其中 x_k 互不相同，$\Omega=\sum\limits_{k\geq 1}\Lambda_k$ 为一个划分且 $\mathbb{P}(\Lambda_k)>0$. 则称 $X(\omega)=\sum\limits_{k\geq 1}x_k\mathbf{1}_{\Lambda_k}(\omega)$, $\omega\in\Omega$ 为离散型随机变量.

【定义 1.10】(D.R.V.生成的 σ 代数) 定义 $\sigma(X):=X^{-1}(2^S)=\{X^{-1}(A):A\in 2^S\}$ 为 X 生成的 σ 代数.

【定理 1.11】 $\sigma(X)=\sigma(\pi_X)$，其中 $\pi_X:=\pi_\Omega=\{X=x_k:k\geq 1\}$ 为样本空间的划分.

<u>**证明.**</u> 只需要证明 $\sigma(\pi_X)=X^{-1}(2^S)$. 任取 $J\subseteq N^*$，那么 $\sum\limits_{k\in J}\{X=x_k\}\in\sigma(\pi_X)$. 定义 $A:=\{x_k:k\in J\}\in$

2^S. 那么 $\sum_{k\in J}\{X=x_k\}=\sum_{x_k\in A}\{X=x_k\}=X^{-1}(A)\in X^{-1}(2^S)$. 另一边包含是同理的. □

【定义 1.12】(D.R.V.的独立性) 设 $X:\Omega\to S_1$, $Y:\Omega\to S_2$ 为两个D.R.V. 称 $X\perp\!\!\!\perp Y$，若 $X^{-1}(2^{S_1})\perp\!\!\!\perp Y^{-1}(2^{S_2})$. 也即对任意 $E_1\subseteq S_1$, $E_2\subseteq S_2$ 都有

$$\mathbb{P}(X\in E_1,Y\in E_2)=\mathbb{P}(X\in E_1)\mathbb{P}(Y\in E_2).$$

【命题 1.13】 D.R.V. $X\perp\!\!\!\perp Y\Leftrightarrow$

(1) $\forall\, x\in S_1,y\in S_2$, 成立 $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$;

(2) $\forall\, x\in S_1,y\in S_2$, 成立 $\mathbb{P}(X\le x,Y\le y)=\mathbb{P}(X\le x)\mathbb{P}(Y\le y)$;

证明. 只证明 (1) 的充分性，事实上，只需要将定义拆分成简单事件的无交并即可，然后利用可列/有限可加性：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\in E_1,Y\in E_2)&=\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{x\in E_1}\{X=x\}\right)\bigcap\{Y\in E_2\}\right]\\&=\sum_{x\in E_1}\mathbb{P}\left[\{X=x\}\bigcap\left(\bigcup_{y\in E_2}\{Y=y\}\right)\right]\\&=\sum_{x\in E_1}\sum_{y\in E_2}\mathbb{P}\{X=x,Y=y\}.\end{aligned}$$

□

【定理 1.14】 设 $\{A_n\}_{n\ge1}\subseteq\mathscr{F}$，则下列叙述等价：

(1) $\{A_n\}_{n\ge1}$ 相互独立;

(2) $\{\sigma(A_n)\}_{n\ge1}$ 相互独立;

(3) D.R.V. $\{\mathbf{1}_{A_n}\}_{n\ge1}$ 相互独立.

证明. 首先根据定理 1.11 得到 $\sigma(\mathbf{1}_{A_n})=\sigma(A_n)$，故 (2) $\Leftrightarrow$ (3). 而 $A_n\in\sigma(A_n)$ 蕴含了 (2) $\Rightarrow$ (1). 注意到 $\sigma(A_n)=\{\varnothing,\Omega,A_n,A_n^c\}$ 且 $\varnothing\perp\!\!\!\perp A_n$, $\Omega\perp\!\!\!\perp A_n$，那么 (1) $\Rightarrow$ (2). □

【例 1.15】 设 X 为 D.R.V. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，那么 $g(X)=\sum_{x\in S}g(x)\mathbf{1}_{\{X=x\}}$ 也为 D.R.V. 且 $\sigma(g(X))\subseteq\sigma(X)$. 若 D.R.V. $X\perp\!\!\!\perp Y$，那么对 $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，自然有 $\sigma(g(X))\perp\!\!\!\perp\sigma(h(Y))$.

§1.3 条件概率和条件独立

【定义 1.16】(条件概率) 设 $B\in\mathscr{F}$ 且 $\mathbb{P}(B)>0$，定义 $\mathbb{P}(A\mid B)=\mathbb{P}(AB)/\mathbb{P}(B):=\mathbb{P}_B(A)$ 为 B 发生条件下 A 的条件概率.

【注 1.17】 $\mathbb{P}_B(\cdot)$ 也是可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度.

【定理 1.18】(全概率公式) 设 $\{B_n\}_{n\ge1}$ 互不相交且 $\mathbb{P}(B_n)>0$, $\mathbb{P}(\cup_{n\ge1}B_n)=1$. 对任意 $A\in\mathscr{F}$ 都有

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{n\ge1}\mathbb{P}(A\mid B_n)\mathbb{P}(B_n).$$

证明. 注意到 $\Omega=(\sum\limits_{n\geq 1}B_n)+(\sum\limits_{n\geq 1}B_n)^c$. 那么

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\Omega)=\mathbb{P}\left[A\cap\left(\sum_{n\geq 1}B_n\right)\right]+\mathbb{P}\left[A\cap\left(\sum_{n\geq 1}B_n\right)^c\right].$$

对后一项

$$\mathbb{P}\left[A\cap\left(\sum_{n\geq 1}B_n\right)^c\right]=\mathbb{P}\left[A\middle|\left(\sum_{n\geq 1}B_n\right)^c\right]\mathbb{P}\left[\left(\sum_{n\geq 1}B_n\right)^c\right]=0.$$

□

【命题 1.19】 设 $\mathbb{P}(B)>0$, $\mathbb{P}(C)>0$，则 $\mathbb{P}_B(\cdot\mid C)=\mathbb{P}_{BC}(\cdot)$.

证明. $\mathbb{P}_B(\cdot\mid C)=\mathbb{P}_B(\cdot C)/\mathbb{P}_B(C)=\mathbb{P}(\cdot BC)/\mathbb{P}(BC)=\mathbb{P}_{BC}(\cdot)$. □

【定义 1.20】(条件独立) 称 C 发生条件下 A 与 B 独立，若 $\mathbb{P}_C(AB)=\mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)$，记作 $A\perp\!\!\!\perp_C B$.

【命题 1.21】 设下列条件概率均有意义，那么

(1) $A\perp\!\!\!\perp B\Leftrightarrow\mathbb{P}(A\mid B)=\mathbb{P}(A)\Leftrightarrow\mathbb{P}(B\mid A)=\mathbb{P}(B)$;

(2) $A\perp\!\!\!\perp_C B\Leftrightarrow\mathbb{P}_C(A\mid B)=\mathbb{P}_C(A)\Leftrightarrow\mathbb{P}_C(B\mid A)=\mathbb{P}_C(B)$.

§1.4 期望与条件期望

期望存在是一个很强的条件.

【定义 1.22】(D.R.V.的期望) 设 $X:\Omega\to S$ 为 D.R.V. 定义 X 的期望

$$\mathbb{E}(X):=\sum_{x\in S}x\mathbb{P}(X=x):=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X).$$

当此求和**绝对收敛**，称 $\mathbb{E}(X)$ 存在.

【定义 1.23】(D.R.V.的函数的期望) 设 $X:\Omega\to S$ 为 D.R.V. 若 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，定义 $g(X)$ 的期望

$$\mathbb{E}[g(X)]:=\sum_{x\in S}g(x)\mathbb{P}(X=x).$$

当此求和**绝对收敛**，称 $\mathbb{E}[g(X)]$ 存在.

【注 1.24】 期望存在时，意味着级数的重排不影响最后收敛的值.

【命题 1.25】 设下列期望均存在，则

(1) (线性性) $\mathbb{E}(aX+bY)=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)$;

(2) $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，那么 $\mathbb{E}(X_1\cdots X_n)=\mathbb{E}(X_1)\cdots\mathbb{E}(X_n)$;

(3) X_1,X_2 相互独立，$g,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，那么 $\mathbb{E}[g(X)h(Y)]=\mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]$.

【命题 1.26】 设 X 为取非负整数值的 D.R.V. 则 $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{k\geq 1}\mathbb{P}(X\geq k)$.

【例 1.27】 设 $X:=\sum\limits_{x\in S}x\mathbf{1}_{A_x}$ 的期望存在，求 $\mathbb{E}(\mathbf{1}_BX)$，其中 $A_x,B\in\mathscr{F}$.

解. 首先 $\mathbf{1}_B X = \sum_{x\in S} x\mathbf{1}_{A_x B}$ 这是一个 D.R.V. 那么 $\mathbb{E}|\mathbf{1}_B X| = \sum_{x\in S}|x|\mathbb{P}(A_x B) \le \sum_{x\in S}|x|\mathbb{P}(A_x) = \mathbb{E}|X| < \infty$. 故期望存在且等于 $\sum_{x\in S} x\mathbb{P}(A_x B) = \mathbb{P}(B)\sum_{x\in S} x\mathbb{P}(A_x \mid B)$. □

接下来给出关于给定集合，给定划分生成的 σ 代数以及 D.R.V. 的条件期望的定义，性质和基本例子.

【定义 1.28】(给定集合的条件期望) 在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 中，设 $A\in\mathscr{F}$ 且 $\mathbb{P}(A)>0$，$X:\Omega\to S$ 为 D.R.V. 定义 X 关于集合 A 的条件期望

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_{x\in S} x\mathbb{P}_A(X=x) := \mathbb{E}^{\mathbb{P}_A}(X).$$

【命题 1.29】 $\mathbb{E}(X\mid A) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_A)/\mathbb{P}(A)$.

证明. 直接由例 1.27 得到. □

【命题 1.30】 $\mathbb{P}(A)>0, \mathbb{E}|X|<\infty$，且 $X \perp\!\!\!\perp \mathbf{1}_A$，那么有 $\mathbb{E}(X\mid A) = \mathbb{E}(X)$.

证明. 先证明期望存在. 利用命题 1.29 有 $\mathbb{E}(|X| \mid A) = \mathbb{E}(|X|\mathbf{1}_A)/\mathbb{P}(A) \le \mathbb{E}|X|/\mathbb{P}(A) < \infty$. 由独立性，$\mathbb{E}(X\mid A) = \sum_{x\in S} x\mathbb{P}_A(X=x) = \sum_{x\in S} x\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{E}(X)$. □

【命题 1.31】 Y 在 A 上取常数 c，证明：$\mathbb{E}(XY\mid A) = c\mathbb{E}(X\mid A)$.

证明. 利用命题 1.29 有 $\mathbb{E}(XY \mid A) = \mathbb{E}(XY\mathbf{1}_A)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(cX\mathbf{1}_A)/\mathbb{P}(A) = c\mathbb{E}(X\mathbf{1}_A)/\mathbb{P}(A) = c\mathbb{E}(X\mid A)$. □

【定义 1.32】(给定划分生成的 σ 代数的条件期望) 设 $\pi = \{\Lambda_k : k\ge 1\}$ 为 Ω 的划分，X 为 D.R.V. 且期望存在，定义 $\mathbb{E}(X\mid\sigma(\pi))(\omega) = \mathbb{E}(X\mid\Lambda_k)$ 当 $\omega\in\Lambda_k$. 也即

$$\mathbb{E}(X\mid\sigma(\pi)) = \sum_{k\ge 1}\mathbf{1}_{\Lambda_k}\mathbb{E}(X\mid\Lambda_k).$$

【注 1.33】 $\mathbb{E}(X\mid\sigma(\pi))$ 为一个 D.R.V. 且 $\sigma[\mathbb{E}(X\mid\sigma(\pi))] \subseteq \sigma(\pi)$.

【命题 1.34】 $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(\pi)$，则 $\mathbb{E}(X\mid\sigma(\pi)) = \mathbb{E}(X)$.

证明. 利用命题 1.30 有 $\mathbb{E}(X\mid\sigma(\pi)) = \sum_{k\ge 1}\mathbf{1}_{\Lambda_k}\mathbb{E}(X\mid\Lambda_k) = \sum_{k\ge 1}\mathbf{1}_{\Lambda_k}\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X)\mathbf{1}_\Omega = \mathbb{E}(X)$. □

【命题 1.35】 证明：$\mathbb{E}(X\mid\sigma(X)) = X$. 这个例子说明知道 $\sigma(X)$ 的信息对压缩 X 完全没有帮助.

证明. 利用命题 1.31 有 $\mathbb{E}(X\mid\sigma(X)) = \sum_{x\in S}\mathbf{1}_{\{X=x\}}\mathbb{E}(X\mid X=x) = \sum_{x\in S} x\mathbf{1}_{\{X=x\}}\mathbb{E}(1\mid X=x) = X$. □

【定理 1.36】(提取已知量) 设 $\pi = \{\Lambda_k : k\ge 1\}$ 为 Ω 的划分，X, Y 为 D.R.V. 且 $\mathbb{E}|X|<\infty$, $\mathbb{E}|XY|<\infty$. 当 $\sigma(X)\subseteq\sigma(\pi)$ 时有

(1) $\mathbb{E}(X\mid\sigma(\pi)) = X$;

(2) $\mathbb{E}(XY\mid\sigma(\pi)) = X\mathbb{E}(Y\mid\sigma(\pi))$.

证明. 注意到若 (2) 成立，那么取 $Y = \mathbf{1}_\Omega$ 即得 (1). 只证 (2). 设 $X = \sum_{x\in S} x\mathbf{1}_{\{X=x\}} := \sum_{x\in S} x\mathbf{1}_{A_x}$. 由 $\Omega = \sum_{x\in S} A_x = \sum_{k\ge 1}\Lambda_k$ 且 $A_x\in\sigma(\pi)$. 则存在 $J_x\subseteq\mathbb{N}^*$ 为无交并使 $\mathbb{N}^* = \sum_{x\in S} J_x$ 满足 $\sum_{k\in J_x}\Lambda_k = A_x$. 则

$$X = \sum_{x\in S} x\mathbf{1}_{A_x} = \sum_{x\in S} x\sum_{k\in J_x}\mathbf{1}_{\Lambda_k} := \sum_{k\ge 1} x_k\mathbf{1}_{\Lambda_k}.$$

其中 $x_k = \sum_{x\in S} x\mathbf{1}_{\{k\in J_x\}}$. 上述步骤的用意在于用 π 来表示 X. 而不是 X 自带的划分. 那么 $\mathbb{E}(XY \mid \sigma(\pi)) = \sum_{\ell\geq 1}\mathbf{1}_{\Lambda_\ell}\mathbb{E}(XY|\Lambda_\ell)$. 应用命题 1.31，$X = \sum_{k\geq 1} x_k\mathbf{1}_{\Lambda_k}$ 在 Λ_ℓ 上恒取常数 x_ℓ，那么

$$\mathbb{E}(XY \mid \sigma(\pi)) = \sum_{\ell\geq 1} x_\ell\mathbf{1}_{\Lambda_\ell}\mathbb{E}(Y|\Lambda_\ell) = X\mathbb{E}(Y \mid \sigma(\pi)).$$

□

【定理 1.37】(塔定理/蛇吞象) 设 π_1,π_2 为 Ω 上两个划分，且 $\sigma(\pi_1)\subseteq\sigma(\pi_2)$，则

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi_1)) \mid \sigma(\pi_2)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi_2)) \mid \sigma(\pi_1)] = \mathbb{E}[X \mid \sigma(\pi_1)].$$

证明. 不妨 $\pi_1 = \{\Lambda_k : k\geq 1\}$，$\pi_2 = \{\Theta_m : m\geq 1\}$. 由 $\sigma(\pi_1)\subseteq\sigma(\pi_2)$，那么类似命题 1.36，$\mathbb{N}^* = \sum_{k\geq 1} J_k$ 满足 $\Lambda_k = \sum_{m\in J_k}\Theta_m$. 从而 $\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi_2)) = \sum_{m\geq 1}\mathbf{1}_{\Theta_m}\mathbb{E}(X \mid \Theta_m) = \sum_{k\geq 1}\sum_{m\in J_k}\mathbf{1}_{\Theta_m}\mathbb{E}(X \mid \Theta_m)$. 而 $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi_2)) \mid \sigma(\pi_1)] = \sum_{\ell\geq 1}\mathbf{1}_{\Lambda_\ell}\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi_2)) \mid \Lambda_\ell]$. 接下来求

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi_2)) \mid \Lambda_\ell\right] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi_2))\mathbf{1}_{\Lambda_\ell}]/\mathbb{P}(\Lambda_\ell)\\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 1}\sum_{m\in J_k}\mathbf{1}_{\Theta_m}\mathbb{E}(X \mid \Theta_m)\mathbf{1}_{\Lambda_\ell}\right]/\mathbb{P}(\Lambda_\ell)\\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{m\in J_\ell}\mathbf{1}_{\Theta_m}\mathbb{E}(X \mid \Theta_m)\right]/\mathbb{P}(\Lambda_\ell)\\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{m\in J_\ell}\mathbf{1}_{\Theta_m}\frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\Theta_m})}{\mathbb{P}(\Theta_m)}\right]/\mathbb{P}(\Lambda_\ell)\\
&= \sum_{m\in J_\ell}\frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\Theta_m})}{\mathbb{P}(\Theta_m)}\mathbb{P}(\Theta_m)/\mathbb{P}(\Lambda_\ell)\\
&= \frac{\mathbb{E}(X\sum_{m\in J_\ell}\mathbf{1}_{\Theta_m})}{\mathbb{P}(\Lambda_\ell)} = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\Lambda_\ell})}{\mathbb{P}(\Lambda_\ell)} = \mathbb{E}(X \mid \Lambda_\ell).
\end{aligned}$$

于是 $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi_2)) \mid \sigma(\pi_1)] = \sum_{\ell\geq 1}\mathbf{1}_{\Lambda_\ell}\mathbb{E}(X \mid \Lambda_\ell) = \mathbb{E}[X \mid \sigma(\pi_1)]$.

另一个等式是容易的，利用 $\sigma(\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi_1)))\subseteq\sigma(\pi_1)\subseteq\sigma(\pi_2)$ 与定理 1.36 即可. □

【定理 1.38】(条件期望的一般定义) 设 $\pi := \{\Lambda_k : k\geq 1\}$ 为 Ω 的划分，$\mathbb{E}|X| < \infty$. 记 $Y := \mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi))$，则

(1) Y 为 D.R.V. 且 $\mathbb{E}|Y| \leq \mathbb{E}|X| < \infty$;

(2) $\sigma(Y)\subseteq\sigma(\pi)$，记作 $Y\in\sigma(\pi)$;

(3) 若 $A\in\sigma(\pi)$，则 $\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_A)$.

证明. (1) 首先 $|\mathbb{E}(X \mid \Lambda_k)| = |\sum_{x\in S} x\mathbb{P}(X = x \mid \Lambda_k)| \leq \sum_{x\in S}|x|\mathbb{P}(X = x \mid \Lambda_k)$. 那么

$$\mathbb{E}|Y| = \sum_{k\geq 1}\mathbf{1}_{\Lambda_k}|\mathbb{E}(X \mid \Lambda_k)| \leq \sum_{k\geq 1}\sum_{x\in S}|x|\mathbb{P}(\Lambda_k\cap\{X = x\}) = \sum_{x\in S}|x|\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(\Lambda_k\cap\{X = x\}) = \sum_{x\in S}|x|\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}|X| < \infty.$$

(2) 记 $y_k := \mathbb{E}(X \mid \Lambda_k)$，那么可能存在 $k_1 \neq k_2$ 使得 $y_{k_1} = y_{k_2}$. 设定指标集 $J_y := \{k : y_k = y\}$ 以及 $S_y := \{y_k : k \geq 1\}$. 那么

$$Y = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}(X \mid \Lambda_k)\mathbf{1}_{\Lambda_k} = \sum_{k\geq 1} y_k \mathbf{1}_{\Lambda_k} = \sum_{y\in S_Y} y \sum_{k\in J_y} \mathbf{1}_{\Lambda_k} = \sum_{y\in S_Y} y \sum_{k\in J_y} \mathbf{1}_{\sum_{k\in J_y}\Lambda_k}.$$

注意 $\{Y = y\} = \sum\limits_{k\in J_y} \Lambda_k \in \sigma(\pi)$ 就有 $\sigma(Y) \subseteq \sigma(\pi)$.

(3) 由定理 1.36 有 $\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi))] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbf{1}_A X \mid \sigma(\pi))] = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A X)$. 最后一个等号用到了重期望公式，它是 (1) 的直接推论. □

【推论 1.39】(重期望公式) 在定理 1.38 条件下，有 $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \sigma(\pi))] = \mathbb{E}(X)$.

【定义 1.40】(关于 D.R.V. 的条件期望) 给定 X, Y 为 D.R.V. 其中 $\mathbb{E}|X| < \infty$，定义 $\mathbb{E}(X \mid Y) := \mathbb{E}(X \mid \sigma(Y))$. 其中 $\mathbb{E}(X \mid Y)(\omega) = \mathbb{E}(X \mid Y = y)$ 当 $\omega \in \{Y = y\} \in \pi_Y$.

【命题 1.41】(关于 D.R.V. 的条件期望的性质) 设下列均为 D.R.V. 且期望均存在，那么

(1) $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$;

(2) $\sigma(X) \subseteq \sigma(Z) \Rightarrow \mathbb{E}(XY \mid Z) = X\mathbb{E}(Y \mid Z)$;

(3) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Y)] = \mathbb{E}(X)$, $|\mathbb{E}(X \mid Y)| \leq \mathbb{E}(|X| \mid Y)$.

§1.5 多个离散型随机变量的定义，独立性，条件期望

为了研究 $\mathbb{E}(Y \mid X_1 \cdots X_n)$，首先要给出 $\sigma(X_1, \cdots, X_n)$ 的定义.

【定义 1.42】($\sigma(X_1, \cdots, X_n)$ 的定义) $\sigma(X_1, \cdots, X_n) := (X_1, \cdots, X_n)^{-1}(2^{S_1} \times \cdots \times 2^{S_n}) = \{(X_1, \cdots, X_n)^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_n) : A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq S_1 \times \cdots \times S_n\}$.

上述定义是有意义的，因为它事实上也是划分生成的 σ 代数.

【定理 1.43】(定义合理性) 对每个 $1 \leq k \leq n$ 定义 $\pi_k := \{\Lambda_{k,i} : i \geq 1\}$ 为 Ω 的划分，则 $X_k = \sum\limits_{i\geq 1} x_{k,i}\mathbf{1}_{\Lambda_{k,i}}$，其中 $x_{k,i}$ 两两不同，也即 $\sigma(X_k) = \sigma(\pi_k)$. 定义 $\pi_{(X_1,\cdots,X_n)} := \{\Lambda_{i,i_1} \cap \cdots \cap \Lambda_{n,i_n} : i_k \geq 1\}$，那么

(1) $\pi_{(X_1,\cdots,X_n)}$ 为 Ω 的划分且

$$\sigma(\pi_{(X_1,\cdots,X_n)}) = \left\{ \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in J_1\times\cdots\times J_n} (\Lambda_{i,i_1} \cap \cdots \cap \Lambda_{n,i_n}) : J_k \subseteq \mathbb{N}^*,\ 1 \leq k \leq n \right\}.$$

(2) $\sigma(X_1, \cdots, X_n) = \sigma(\pi_{(X_1,\cdots,X_n)})$.

<u>**证明.**</u> 参考定理 1.11 的证明. □

【定义 1.44】(条件期望) 设 $\mathbb{E}|Z| < \infty$，定义 $\mathbb{E}(Z \mid X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}(Z \mid \sigma(X_1, \cdots, X_n)) = \mathbb{E}(Z \mid \sigma(\pi_{(X_1,\cdots,X_n)})$.

【定义 1.45】(独立性) 设 D.R.V. $Y : \Omega \to S_2$，$X_1 : \Omega \to S_1$，$X_2 : \Omega \to S_2$，称 $Y \perp\!\!\!\perp (X_1, X_2)$，若 $Y^{-1}(2^{S_Y}) \perp\!\!\!\perp (X_1, X_2)^{-1}(2^{S_1} \times 2^{S_2})$. 也即对任意事件 $A \subseteq S_Y, B \subseteq 2^{S_1} \times 2^{S_2}$ 都有 $\mathbb{P}(Y \in A, (X_1, X_2) \in B) = \mathbb{P}(Y \in A)\mathbb{P}((X_1, X_2) \in B)$.

【命题 1.46】 $Y \perp\!\!\!\perp (X_1, X_2) \Leftrightarrow \forall\ y \in S_Y, (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2$ 有 $\mathbb{P}(Y = y, (X_1, X_2) = (x_1, x_2)) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}((X_1, X_2) = (x_1, x_2))$.

<u>**证明.**</u> 参考定理 1.13 的证明. □

【命题 1.47】 设 $Y \perp\!\!\!\perp (X_1, X_2)$，那么 $Y \perp\!\!\!\perp X_1$, $Y \perp\!\!\!\perp X_2$.

<u>**证明.**</u> 任取 $A \subseteq S_Y$, $B_1 \subseteq S_1$，那么 $\mathbb{P}(Y \in A, X_1 \in B_1) = \mathbb{P}(Y \in A, X_1 \in B_1, X_2 \in \Omega) = \mathbb{P}(Y \in A)\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in \Omega) = \mathbb{P}(Y \in A)\mathbb{P}(X_1 \in B_1)$. □

【推论 1.48】 设 $(Y_1, \cdots, Y_m) \perp\!\!\!\perp (X_1, \cdots, X_n)$，那么 $(Y_{m_1}, \cdots, Y_{m_k}) \perp\!\!\!\perp (X_{n_1}, \cdots, X_{n_j})$，其中 $k, j \geq 1$, $\{m_p\}_{p=1}^m \subseteq \{1, 2, \cdots, m\}, \{n_q\}_{q=1}^j \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ 且每个序列中的元素互不相同.

§1.6 随机过程的基本概念

本节主要是基本的概念，没有证明.

【定义 1.49】(随机过程) 给定概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 以及可测空间 $(S, \mathscr{S})$. $\mathbb{T}$ 为指标集，存在序结构. 称随机变量族 $X := \{X_t \mid X_t : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (S, \mathscr{S}),\ t \in \mathbb{T}\}$ 为 S 值的随机过程，其中 S 被称为状态空间.

随机过程的一种刻画是用有限维分布族.

【定义 1.50】(有限维分布族) 称 $F_{t_1, \cdots, t_n}(x_1, \cdots, x_n) = \mathbb{P}\{X_{t_1} \leq x_1, \cdots, X_{t_n} \leq x_n\}$ $(n \geq 1, t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{T})$ 为过程的有限维分布族.

【定理 1.51】(Kolmogorov) 若有限维分布族 $\{F_{t_1, \cdots, t_n}(x_1, \cdots, x_n)\}$ 满足

(1) 对称性：设置换 $\sigma \in S_n$，那么 $F_{t_{\sigma(1)}, \cdots, t_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = F_{t_1, \cdots, t_n}(x_1, \cdots, x_n)$;

(2) 相容性：设 $m > n$，那么 $F_{t_1, \cdots, t_n, t_{n+1}, \cdots, t_m}(x_1, \cdots, x_n, +\infty, \cdots, +\infty) = F_{t_1, \cdots, t_n}(x_1, \cdots, x_n)$,

那么必存在一个有限维分布族为 $\{F_{t_1, \cdots, t_n}(x_1, \cdots, x_n)\}$ 的随机过程 $\{X_t : t \in \mathbb{T}\}$.

Chapter 2

离散时间 Markov 链

§2.1 马氏性的等价刻画

【定义 2.1】(离散 Markov 链) 称 S 值随机过程 $\{X_n : n \geq 0\}$ 为离散时间马氏链(Discrete-Time Markov Chain, DTMC)，若对任意 $y, x_0, \cdots, x_n \in S$ 有

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = y \mid X_n = x_n\}. \tag{2.1}$$

其中，X_0 的分布称为 X 的初始分布，记作 μ.

【注 2.2】 式 (2.1) 等价于 $X_{n+1} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} (X_0, \cdots, X_{n-1})$.

【命题 2.3】(等价命题I) 下面三个命题等价：

(1) 式 (2.1)

(2) 过去事件个数的推广：$\forall\, k \geq 1,\ 0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n,\ y, x_{n_1}, \cdots, x_{n_k} \in S$ 有

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = y \mid X_{n_1} = x_{n_1}, \cdots, X_{n_k} = x_{n_k}\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = y \mid X_{n_k} = n_k\}.$$

即 $\{X_{n+1} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_{n_k} = x_{n_k}\}} \{X_{n_1} = x_{n_1}, \cdots, X_{n_{k-1}} = x_{n_{k-1}}\}$.

(3) 未来时间点的推广：对任意 $m \geq 1,\ n \geq 0, y, x_1, \cdots, x_n, x_{n+m} \in S$ 有

$$\mathbb{P}\{X_{n+m} = y \mid X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n\} = \mathbb{P}\{X_{n+m} = y \mid X_n = x_n\}.$$

即 $\{X_{n+m} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} \{X_0 = x_0, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$.

<u>**证明.**</u> (2) $\Rightarrow$ (1) 显然. 只证 (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2). (3) $\Rightarrow$ (2). 考虑 $J = \{1, 2, \cdots, n_k\} \backslash \{n_1, \cdots, n_k\}$，令 $\tilde{\mathbb{P}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid X_{n_1} = x_{n_1}, \cdots, X_{n_k} = x_{n_k})$. 那么由全概率公式

$$\tilde{\mathbb{P}}(X_{n+1} = y) = \sum_{x_j \in S, j \in J} \tilde{\mathbb{P}}(X_{n+1} = y \mid X_j = x_j,\ j \in S) \tilde{\mathbb{P}}(X_j = x_j,\ j \in S).$$

由 (3) 知道 $\tilde{\mathbb{P}}(X_{n+1} = y \mid X_j = x_j,\ j \in S) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_{n_k} = x_{n_k})$. 这与求和无关，故

$$\tilde{\mathbb{P}}(X_{n+1} = y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_{n_k} = x_{n_k}) \sum_{x_j \in S, j \in J} \tilde{\mathbb{P}}(X_j = x_j,\ j \in S) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_{n_k} = x_{n_k}) \tilde{\mathbb{P}}(\Omega).$$

再证 (1) $\Rightarrow$ (3). 用归纳法，当 $m=1$ 即式(2.1) 已成立，设 $m=k$ 时命题成立，那么 $m=k+1$ 时，令 $\hat{\mathbb{P}}(\cdot)=\mathbb{P}(\cdot\mid X_0=x_0,\cdots,X_n=x_n)$，那么

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{P}}(X_{n+k+1}=x_{n+k+1}) &= \sum_{x_{n+1}\in S}\hat{\mathbb{P}}(X_{n+k+1}=x_{n+k+1}\mid X_{n+1}=x_{n+1})\hat{\mathbb{P}}(X_{n+1}=x_{n+1})\\ &= \sum_{x_{n+1}\in S}\mathbb{P}(X_{n+k+1}=x_{n+k+1}\mid X_{n+1}=x_{n+1})\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n)\\ &= \sum_{x_{n+1}\in S}\mathbb{P}(X_{n+k+1}=x_{n+k+1}\mid X_{n+1}=x_{n+1},X_n=x_n)\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n)\\ &= \sum_{x_{n+1}\in S}\mathbb{P}(X_{n+k+1}=x_{n+k+1},X_{n+1}=x_{n+1},X_n=x_n)/\mathbb{P}(X_n=x_n)\\ &= \mathbb{P}(X_{n+k+1}=x_{n+k+1},X_n=x_n)/\mathbb{P}(X_n=x_n)=\mathbb{P}(X_{n+k+1}=x_{n+k+1}\mid X_n=x_n).\end{aligned}$$

□

接下来，我们推广未来事件个数.

【命题 2.4】(等价命题II) 下列两个命题等价：

(1) 式 (2.1)

(2) 未来事件个数的推广：对任意 $m\geq 1$，$n\geq 1$，$A\subseteq S^n$，$B\subseteq S^m$ 有 $\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\in S\}}((X_0,\cdots,X_{n-1})\in A,(X_{n+1},\cdots,X_{n+m})\in B)=\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\in S\}}((X_0,\cdots,X_{n-1})\in A)\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\in S\}}((X_{n+1},\cdots,X_{n+m})\in B)$. 即 $(X_0,\cdots,X_{n-1})\perp\!\!\!\perp_{\{X_n=x_n\in S\}}(X_{n+1},\cdots,X_{n+m})$.

<u>**证明.**</u> 只证 (1) $\Rightarrow$ (2). 取 $(X_0,\cdots,X_{n-1})\in A,(X_{n+1},\cdots,X_{n+m})\in B$ 为简单事件即可，否则可以通过可列可加性得到. 对 m 用归纳法，$m=1$ 直接由命题 2.3 得到. 设 $m=k$ 时结论成立，$m=k+1$ 时，引入记号 $x_a^b=(x_a,\cdots,x_b)(a<b,a,b\in\mathbb{N}^*)$ 以及 $\tilde{\mathbb{P}}(\cdot)=\mathbb{P}(\cdot\mid(X_0,\cdots,X_n)=x_0^n\in S^{n+1})$. 那么

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbb{P}}((X_{n+1},\cdots,X_{n+k+1})=x_{n+1}^{n+k+1}\in S^{k+1})\\ &=\tilde{\mathbb{P}}((X_{n+2},\cdots,X_{n+k+1})=x_{n+2}^{n+k+1}\mid X_{n+1}=x_{n+1})\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n)\\ &=\mathbb{P}((X_{n+2},\cdots,X_{n+k+1})=x_{n+2}^{n+k+1}\mid X_{n+1}=x_{n+1})\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n)\\ &=\mathbb{P}((X_{n+2},\cdots,X_{n+k+1})=x_{n+2}^{n+k+1}\mid X_{n+1}=x_{n+1},X_n=x_n)\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n)\\ &=\mathbb{P}((X_n,\cdots,X_{n+k+1})=x_n^{n+k+1})/\mathbb{P}(X_n=x_n)=\mathbb{P}((X_{n+1},\cdots,X_{n+k+1})=x_{n+1}^{n+k+1}\mid X_n=x_n).\end{aligned}$$

□

【定理 2.5】(等价命题III) 设 X 为DTMC，那么对每个 $n,m\geq 1,u_k<u_{k+1}$，$0\leq k\leq n+m-1$ 有

$$(X_{u_0},\cdots,X_{u_{n-1}})\perp\!\!\!\perp_{\{X_{u_n}=x\in S\}}(X_{u_{n+1}},\cdots,X_{u_{n+m-1}}).$$

<u>**证明.**</u> 直接由命题 2.4 得到. □

§2.2 时齐 Markov 链的有限维分布

【定义 2.6】(HDTMC 定义I) 设 X 为DTMC，若对任意 $n\geq 1,i,j\in S$ 都有

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=\mathbb{P}(X_1=j\mid X_0=i):=p_{ij}.$$

称 X 为时间齐次的离散时间 Markov 链(Homogeneous Discrete-Time Markov Chain, HDTMC). 称 p_{ij} 为状态 i 到状态 j 的一步转移概率，矩阵 $P=(p_{ij})_{i,j\in S}$ 为一步转移概率矩阵.

【定义 2.7】(随机矩阵) 设 P 为 HDTMC$\{X_n\}_{n\geq 0}$ 的一步转移概率矩阵，则 P 为随机矩阵，即 (1) $p_{ij} \geq 0$; (2) $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$ 对任意 $i \in S$ 成立.

【命题 2.8】(HDTMC 定义II) 设 $X := \{X_n\}_{n\geq 0}$ 为一随机过程，满足：

(1) 初值 $X_0 \sim \mu = (\mu_i)_{i\in S}$，即 $\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu_i$;

(2) 存在随机矩阵 $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$ 满足

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid (X_0, \cdots, X_{n-1}) = i_0^{n-1} \in S^n, X_n = i) = p_{ij}, \forall\, n \geq 1.$$

则称 $X \sim \text{Markov}(\mu, P)$，为具有初始分布 μ 和一步转移概率矩阵 P 的 HDTMC.

证明. 只需要证明命题 2.8 蕴含定义 2.6 即可. 由全概率公式

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \sum_{i_0^{n-1}\in S^n} p_{ij}\mathbb{P}_{\{X_n=i\}}((X_0, \cdots, X_{n-1}) = i_0^{n-1} \in S^n) = p_{ij}\mathbb{P}_{\{X_n=i\}}(\Omega) = p_{ij}.$$

上式对任意 $n \geq 1$ 成立，于是同时证明了时齐和马氏性质. □

【定义 2.9】(多步转移概率) 设 X 为 DTMC，称 $p_{ij}(m, m+n) := \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = i)$ $(m, n \geq 0,)$ 为 X 的 n 步转移概率. 并称 $P(m, m+n) = (p_{ij}(m, m+n))_{i,j\in S}$ 为 X 的 n 步转移概率矩阵. 进一步，若 X 为 HDTMC，记 $P(n) = P(m, m+n)$，并约定 $P(m, m) = P(0) := \mathbf{1}$.

【定理 2.10】(Chapman-Kolmogorov) 设 X 为 DTMC，则 $P(m, m+n+r) = P(m, m+n)P(m+n, m+n+r)$ $(m, n, r \geq 0)$. 分量形式为

$$p_{ij}(m, m+n+r) = \sum_{k\in S} p_{ik}(m, m+n)p_{kj}(m+n, m+n+r).$$

进一步，若 X 为 HDTMC，那么 $P(m, m+n) = P(n) = P^n$.

证明. 利用命题 2.3 (2) 即可: $p_{ij}(m, m+n+r) = \mathbb{P}_{\{X_m=i\}}(X_{m+n+r} = j) = \sum_{k\in S} \mathbb{P}_{\{X_m=i\}}(X_{m+n+r} = j \mid X_{m+n} = k)\mathbb{P}_{\{X_m=i\}}(X_{m+n} = k) = \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{m+n+r} = j \mid X_{m+n} = k)\mathbb{P}(X_{m+n} = k \mid X_m = i) = \sum_{k\in S} p_{ik}(m, m+n)p_{kj}(m+n, m+n+r)$. □

【命题 2.11】 P^n 对任意 $n \geq 1$ 仍为随机矩阵.

证明. 用归纳法. 设 $n-1$ 时结论成立，对 n 的情形有

$$\sum_{j\in S} p_{ij}(n) = \sum_{j\in S}\sum_{k\in S} p_{ik}(n-1)p_{kj} = \sum_{k\in S} p_{ik}(n-1)(\sum_{j\in S} p_{kj}) = \sum_{k\in S} p_{ik}(n-1) = 1.$$

□

下面我们可以给出 HDTMC 的有限维分布.

【定理 2.12】(HDTMC的有限维分布) 设 $X \sim \text{Markov}(\mu, P)$，任取 $0 \leq u_1 < \cdots < u_n$，$i_1, \cdots, i_n \in S$ 有

$$\mathbb{P}(X_{u_1} = i_1, \cdots, X_{u_n} = i_n) = (\mu P^{u_1})_{i_1} \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k, i_{k+1}}(u_k - u_{k-1}).$$

<u>**证明.**</u> 首先证明 $X_{u_1} \sim \mu^{(u_1)} = \mu P^{u_1}$. 注意到

$$\mathbb{P}(X_{u_1} = j) = \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_0 = k)\mathbb{P}(X_{u_1} = j \mid X_0 = k) = \sum_{k\in S} \mu_k p_{kj}(u_1) = (\mu P^{u_1})_j.$$

再利用乘法公式得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{u_1} = i_1, \cdots, X_{u_n} = i_n) &= \mathbb{P}(X_{u_1} = i_1)\mathbb{P}(X_{u_2} = i_2 \mid X_{u_1} = i_1)\cdots\mathbb{P}(X_{u_n} = i_n \mid X_{u_1} = i_1, \cdots, X_{u_{n-1}} = i_{n-1}) \\ &= (\mu P^{u_1})_{i_1} \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k, i_{k+1}}(u_k - u_{k-1}).\end{aligned}$$

□

§2.3 从固定点出发的马氏链

2.3.1 状态的分类：常返和暂留的判定

【定义 2.13】 称状态 i 为常返的，若 $\mathbb{P}_i(\exists\, n \geq 1,\ X_n = i) = 1$，否则称 i 为暂留的. 其中 $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$.

【注 2.14】 状态 i 为常返的等价于 $\mathbb{P}_i(\cup_{n\geq1}\{X_n = i\}) = 1$.

考察首次返回时刻，记 $f_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j \mid X_0 = i)$. 那么明显

$$\mathbb{P}_i(\cup_{n\geq1}\{X_n = i\}) = \sum_{n\geq1} f_{ii}(n) = 1.$$

引入母函数 $P_{ij}(s) = \sum_{n\geq0} s^n p_{ij}(n)$, $F_{ij}(s) = \sum_{n\geq0} s^n f_{ij}(n)$. 约定 $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$，$f_{ij}(0) = 0$.

【引理 2.15】 $|s| < 1$ 时 $P_{ij}(s)$, $F_{ij}(s)$ 均绝对收敛，且 $P_{ij}(s) = \delta_{ij} + P_{jj}(s)F_{ij}(s)$.

<u>**证明.**</u> 绝对收敛性只需注意到 $p_{ij}(n), f_{ij}(n) \leq 1$ 且 $\sum_{n\geq0} s^n$ 在 $|s| < 1$ 绝对收敛. 记 $B_m(j) := \{X_m = j, X_{m-1} \neq j, \cdots, X_1 = j\}$.

$$p_{ij}(n) = \mathbb{P}_i\left(\{X_n = j\} \cap \left[\sum_{m\geq1} B_m(j)\right]\right) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_i(X_n = j \mid B_m(j))\mathbb{P}_i(B_m(j)) = \sum_{m=1}^{n} p_{jj}(n-m)f_{ij}(m).$$

那么

$$\begin{aligned}P_{ij}(s) &= s^0\delta_{ij} + \sum_{n\geq1} s^n \sum_{m=1}^{n} p_{jj}(n-m)f_{ij}(m) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{m=1}^{n}\sum_{n\geq m} (s^{n-m}p_{jj}(n-m))(s^m f_{ij}(m)) \\ &= \delta_{ij} + P_{jj}[\sum_{m=1}^{n} s^m f_{ij}(m) + s^0 f_{ij}(0)] = \delta_{ij} + P_{jj}F_{ij}(s).\end{aligned}$$

□

应用引理 2.15，那么 $P_{jj}(s) = 1/(1 - F_{jj}(s))$. 应用 Abel 连续性定理，令 $s \to 1^-$，得到当 j 常返时有 $\sum_{n\geq0} p_{jj} = \infty$. 若 j 暂留，则 $\sum_{n\geq0} p_{jj} < \infty$. 又 $F_{ij}(1) = \mathbb{P}_i(T_j < \infty) \leq 1$，那么 $\sum_{n\geq0} p_{ij} < \infty$. 其中 $T_j := \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$ 为首次回访时间. 由数项级数收敛，立即得到 $p_{ij}(n) \to 0 (n \to \infty)$.

对常返状态 i 必然有 $\mathbb{P}_i(T_i<\infty)=\sum_{n\geq 0} f_{ii}=1$. 考察 $\mathbb{E}_i T_i=\sum_{n\geq 0} n f_{ii}$. 容易看出，由于当 i 暂留时，$\mathbb{P}_i(T_i=\infty)>0$，那么 $\mathbb{E}_i T_i=\infty$ 必定成立.而对常返态可能该级数收敛，于是有如下定义：

【定义 2.16】(常返态进一步分类) 常返态 i 若满足 $\mathbb{E}_i T_i<\infty$，则称为正常返，否则称为零常返. 但此时一定有 $\mathbb{P}_i(T_i<\infty)=\sum_{n\geq 0} f_{ii}=1$.

下面推广首次返回时间的概念：

【定义 2.17】(第 n 次返回时间) 记 $T_i^{(1)}:=T_i=\min\{n\geq 1: X_n=i\}$，递归定义 $T_i^{(n)}:=\min\{n>T_i^{(n-1)}: X_n=i\}$. 用 $\rho_{ij}^{(n)}:=\mathbb{P}_i(T_j^{(n)}<\infty)$ 表示从 i 出发第 n 次返回 j 时间有限的概率. 其中当 $n=1$ 时，$\rho_{ij}^{(1)}:=\rho_{ij}=\mathbb{P}_i(T_j<\infty)$.

【定义 2.18】(返回次数) 用 $N(j)$ 表示链在时刻 0 后返回状态 j 的次数，容易看出 $\mathbb{P}_i(N(j)\geq k)=\mathbb{P}_i(T_j^{(k)}<\infty)=\rho_{ij}^{(k)}$.

常返态这个名字给我们一种感觉，链无限次返回该状态以概率1发生. 事实上，这是成立的，但这需要下面的引理.

【引理 2.19】 $\rho_{ij}^{(k)}=\rho_{ij}\rho_{jj}^{(k-1)}$. 特别地，$\rho_{ii}^{(k)}=\rho_{ii}^{k}$.

<u>**证明.**</u> 需要强马氏性说明 $\{X_{T_j+n}\}_{n\geq 0}$ 仍然为马氏过程且与初始过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 独立，分布一致.此处略去. □

那么说明当 i 常返时有 $\mathbb{P}_i(N(j)=\infty)=\lim_{k\to\infty}\rho_{ii}^{k}=1$; i 暂留时，$\mathbb{P}_i(N(j)=\infty)=0$，也就是以概率1只返回有限次. 最后我们考察返回次数的期望. 注意到 $N(j)$ 只取非负整数值，那么

$$\mathbb{E}_j N(j)=\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}_j(N(j)\geq n)=\sum_{n\geq 1}\rho_{jj}^{n}=\rho_{jj}/(1-\rho_{jj})<\infty.$$

这同时说明了 j 常返的充要条件为 $\mathbb{E}_j N(j)=\infty$. 最后我们整理相关结论如下：

【定理 2.20】(常返态的判定) 下列叙述等价：

(1) 状态 i 为常返的；

(2) $\mathbb{P}_i(\cup_{n\geq 1}\{X_n=i\})=\sum_{n\geq 0} f_{ii}(n)=1$;

(3) $\mathbb{P}_i(T_i<\infty)=\rho_{ii}=1$;

(4) $\sum_{n\geq 0} p_{ii}(n)=\infty$;

(5) (Why The Name) $\mathbb{P}_i(N(i)=\infty)=1$;

(6) $\mathbb{E}_i N(i)=\infty$.

【定理 2.21】(暂留态的判定) 下列叙述等价：

(1) 状态 i 为暂留的；

(2) $\mathbb{P}_i(\cup_{n\geq 1}\{X_n=i\})=\sum_{n\geq 0} f_{ii}(n)<1$;

(3) $\mathbb{P}_i(T_i<\infty)=\rho_{ii}<1$;

(4) $\sum_{n\geq 0} p_{ii}(n)<\infty\Rightarrow\sum_{n\geq 0} p_{ij}(n)<\infty$ (反之未必);

(5) (Why The Name) $\mathbb{P}_i(N(i) < \infty) = 1$;

(6) $\mathbb{E}_i N(i) = \rho_{ii}/(1-\rho_{ii}) < \infty$.

2.3.2 停时和强马氏性

【定义 2.22】(关于自然流的停时) 设 R.V. $\tau : \Omega \to \{0,1,2,\cdots\} \cup \{+\infty\}$. 若满足 $\forall 0 \le n < +\infty$ 时有 $\{\tau = n\} \in \sigma(X_0,\cdots,X_n)$，则称 τ 为关于 $\{X_n : n \ge 0\}$ 的停时. 事实上，可以推广定义一般流的停时，在第六章中.

【例 2.23】 首次回访时间 $T_y^{(1)} := T_y$ 为停时，由于 $\{T_y = n\} = \{(X_0,\cdots,X_n) \in S \times (S\backslash\{y\}) \times \cdots \times (S\backslash\{y\}) \times \{y\}\} \subseteq \sigma(X_0,\cdots,X_n)$.

【定义 2.24】(停时 σ 代数) 设 τ 为 $\{X_n\}_{n\ge 0}$ 的停时，定义停时 σ 代数 $\mathscr{F}_\tau := \{A \mid A \cap \{\tau = n\} \in \sigma(X_0,\cdots,X_n)\}$ $(\forall\, n \ge 0)$.

【命题 2.25】 $\sigma(X_\tau) \subseteq \mathscr{F}_\tau$.

<u>**证明.**</u> 考虑 $\Lambda_j := \{\omega \in \Omega \mid X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega) = j,\ j \in S\}$, 它生成的划分 $\pi_\Omega := \{\Lambda_j, j \in S\}$. 由于 $\sigma(X_\tau) = \sigma(\pi_{\Lambda_j})$，下面只需要证明 $\Lambda_j \in \mathscr{F}_\tau$ 对每个 $j \in S$ 成立即可. 注意到 $\Lambda_j \cap \{\tau = n\} = \{X_\tau = j, \tau = n\} = \{X_n = j, \tau = n\} \in \sigma(X_0,\cdots,X_n)$. 于是得到结论. □

【定理 2.26】(HDTMC的强马氏性) 设 $X \sim \mathrm{Markov}(\mu, P)$. τ 为关于 $\{X_n\}_{n\ge 0}$ 的停时，则

(1) 在 $\mathbb{P}(\cdot \mid \tau < \infty, X_\tau = x)$ 条件下，有 $\{X_{\tau+n}\}_{n\ge 0} \sim \mathrm{Markov}(\delta_x, P)$，其中 $\delta_x = (\delta_{xy})_{y\in S}$;

(2) 对任意 $J \subseteq \mathbb{N}^*, \#J < \infty$ 有

$$\sigma\left[(X_{\tau+n})_{n\in J}\right] \perp\!\!\!\perp_{\{\tau<\infty, X_\tau = x\}} \mathscr{F}_\tau.$$

<u>**证明.**</u> (1) 由定理 2.12, 只需要求出有限维分布.任取 $0 \le u_1 < \cdots < u_n$, $i_1,\cdots,i_n \in S$，考虑

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{\tau+u_1} = i_1,\cdots,X_{\tau+u_n} = i_n, \tau = m, X_\tau = x)\\
=\ &\mathbb{P}(X_{m+u_1} = i_1,\cdots,X_{m+u_n} = i_n, \tau = m \mid X_m = x)\mathbb{P}(X_m = x)\\
=\ &\mathbb{P}(X_{m+u_1} = i_1,\cdots,X_{m+u_n} = i_n \mid X_m = x)\mathbb{P}(\tau = m \mid X_m = x)\mathbb{P}(X_m = x)\\
=\ &\mathbb{P}(X_{m+u_1} = i_1,\cdots,X_{m+u_n} = i_n \mid X_m = x)\mathbb{P}(\tau = m, X_m = x)\\
=\ &\mathbb{P}(X_{m+u_1} = i_1,\cdots,X_{m+u_n} = i_n \mid X_m = x)\mathbb{P}(\tau = m, X_\tau = x)\\
=\ &p_{x,i_1}^{(u_1)} \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k,i_{k-1}}^{(u_k-u_{k-1})}\mathbb{P}(\tau = m, X_\tau = x).
\end{aligned}$$

两边对 $\tau = m$ 求和得到

$$\mathbb{P}(X_{\tau+u_1} = i_1,\cdots,X_{\tau+u_n} = i_n \mid \tau < \infty, X_\tau = x) = p_{x,i_1}^{(u_1)} \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k,i_{k-1}}^{(u_k-u_{k-1})} = (\delta_x P^{(u_1)})_{i_1} \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k,i_{k-1}}^{(u_k-u_{k-1})}.$$

(2) 分两种情况考虑：

(Step I) 若 $0 \notin J$，不妨设 $\#J = k$, $J = \{n_1, n_2,\cdots,n_k\}$. 任取事件 $A \in \mathscr{F}_\tau$，那么对任意的 $j_1,\cdots,j_k, x \in S$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_{\tau+n_1} = j_1,\cdots,X_{\tau+n_k} = j_k\} \cap A \cap \{\tau = m, X_\tau = x\})\\
=\ &\mathbb{P}(\{X_{m+n_1} = j_1,\cdots,X_{m+n_k} = j_k\} \cap A \cap \{\tau = m, X_m = x\}), \qquad (2.2)\\
=\ &\mathbb{P}(\{X_{m+n_1} = j_1,\cdots,X_{m+n_k} = j_k\} \cap (A \cap \{\tau = m\}) \cap \{X_m = x\}). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

记 $\mathbb{P}_x(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid X_m = x)$，那么利用乘法公式得到

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\{X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k\} \cap A \cap \{\tau = m, X_\tau = x\}) \\ &= \mathbb{P}_x(\{X_{m+n_1} = j_1, \cdots, X_{m+n_k} = j_k\} \cap (A \cap \{\tau = m\}))\mathbb{P}(X_m = x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

而 $A \in \mathscr{F}_\tau \rightsquigarrow A \cap \{\tau = m\} \in \sigma\{X_0, \cdots, X_m\}$. 利用马氏性，得到 $\sigma\{X_{m+n_1}, \cdots, X_{m+n_k}\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_m=x\}} \sigma\{X_0, \cdots, X_m\}$. 那么上式可以化简为

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\{X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k\} \cap A \cap \{\tau = m, X_\tau = x\}) \\ &= \mathbb{P}_x(X_{m+n_1} = j_1, \cdots, X_{m+n_k} = j_k)\mathbb{P}_x(A \cap \{\tau = m\})\mathbb{P}(X_m = x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

再次利用乘法公式

$$\mathbb{P}_x(A \cap \{\tau = m\})\mathbb{P}(X_m = x) = \mathbb{P}(A \cap \{\tau = m, X_m = x\}) = \mathbb{P}(A \cap \{\tau = m, X_\tau = x\}). \tag{2.6}$$

利用马氏链的有限维分布

$$\mathbb{P}_x(X_{m+n_1} = j_1, \cdots, X_{m+n_k} = j_k) = \boldsymbol{\mu}_x^{(m)} p_{x,j_1}^{(n_1)} \prod_{i=1}^{k-1} p_{j_i,j_{i+1}}^{(n_{i+1}-n_i)} / \boldsymbol{\mu}_x^{(m)} = p_{x,j_1}^{(n_1)} \prod_{i=1}^{k-1} p_{j_i,j_{i+1}}^{(n_{i+1}-n_i)}. \tag{2.7}$$

其中 $\boldsymbol{\mu}^{(m)}$ 表示 X_m 的概率分布。那么将式 (2.6), (2.7) 带入式 (2.5) 中得到

$$\mathbb{P}(\{X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k\} \cap A \cap \{\tau = m, X_\tau = x\}) = p_{x,j_1}^{(n_1)} \prod_{i=1}^{k-1} p_{j_i,j_{i+1}}^{(n_{i+1}-n_i)} \cdot \mathbb{P}(A \cap \{\tau = m, X_\tau = x\}). \tag{2.8}$$

两边对 m 从 0 到 $+\infty$ 求和得到

$$\mathbb{P}(\{X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k\} \cap A \cap \{\tau < \infty, X_\tau = x\}) = p_{x,j_1}^{(n_1)} \prod_{i=1}^{k-1} p_{j_i,j_{i+1}}^{(n_{i+1}-n_i)} \cdot \mathbb{P}(A \cap \{\tau < \infty, X_\tau = x\}). \tag{2.9}$$

两边同时除以 $\mathbb{P}\{\tau < \infty, X_\tau = x\}$ 得到

$$\mathbb{P}(\{X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k\} \cap A \mid \tau < \infty, X_\tau = x) = p_{x,j_1}^{(n_1)} \prod_{i=1}^{k-1} p_{j_i,j_{i+1}}^{(n_{i+1}-n_i)} \cdot \mathbb{P}(A \mid \tau < \infty, X_\tau = x). \tag{2.10}$$

而我们注意到在 (i) 中我们已经得到了在 $\{\tau < \infty\}$ 和 $\{X_\tau = x\}$ 条件下，$\{X_{\tau+n},\ n \geq 0\} \sim \mathrm{Markov}(\delta_x, \mathbf{P})$. 也即

$$\mathbb{P}\{X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k \mid \tau < \infty, X_\tau = x\} = p_{x,j_1}^{(n_1)} \prod_{i=1}^{k-1} p_{j_i,j_{i+1}}^{(n_{i+1}-n_i)}. \tag{2.11}$$

将 (2.11) 带入 (2.10) 中得到

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\{X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k\} \cap A \mid \tau < \infty, X_\tau = x) \\ &= \mathbb{P}\{X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k \mid \tau < \infty, X_\tau = x\} \cdot \mathbb{P}(A \mid \tau < \infty, X_\tau = x). \end{aligned} \tag{2.12}$$

上述只研究了 $\{X_{\tau+n}, n \in J\}$ 取简单基本事件的情形，对每个 $X_{\tau+n_k}$ 取值为 S 的子集情形可以用概率测度的可列可加性化归到前述情形。

那么得到欲证结论

$$\sigma\{X_{\tau+n}, n \in J\} \perp\!\!\!\perp_{\{\tau<\infty, X_\tau=x\}} \mathscr{F}_\tau.$$

(Step 2) 若 $0 \in J$，取 $X_{\tau+0} = X_\tau = j_0$. 其余记号同 Step 1. 当 $j_0 \neq x$ 时，自然有

$$\begin{aligned}0 &= \mathbb{P}(\{X_\tau = j_0 \neq x, X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k\} \cap A \mid \tau < \infty, X_\tau = x) \\ &= \mathbb{P}\{X_\tau = j_0 \neq x, X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k \mid \tau < \infty, X_\tau = x\} \cdot \mathbb{P}(A \mid \tau < \infty, X_\tau = x) = 0. \quad (2.13)\end{aligned}$$

当 $j_0 = x$ 时，有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X_\tau = x, X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k\} \cap A \mid \tau < \infty, X_\tau = x) \\ =& \mathbb{P}(\{X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k\} \cap A \mid \tau < \infty, X_\tau = x), \quad (2.14)\\ =& \mathbb{P}\{X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k \mid \tau < \infty, X_\tau = x\} \cdot \mathbb{P}(A \mid \tau < \infty, X_\tau = x), \quad (2.15)\\ =& \mathbb{P}\{X_\tau = x, X_{\tau+n_1} = j_1, \cdots, X_{\tau+n_k} = j_k \mid \tau < \infty, X_\tau = x\} \cdot \mathbb{P}(A \mid \tau < \infty, X_\tau = x). \quad (2.16)\end{aligned}$$

这里从 (2.14) 到 (2.15) 用到了 Step 1 的结论。那么下列结论仍然成立

$$\sigma\{X_{\tau+n}, n \in J\} \perp\!\!\!\perp_{\{\tau<\infty, X_\tau = x\}} \mathscr{F}_\tau.$$

□

【定义 2.27】(新链的首次返回时刻) 当 $T_y^{(k-1)} < \infty$ 时，定义 $S_y^{(k)} := T_y^{(k)} - T_y^{(k-1)} = \min\{n \geq 1 \mid X_{T_y^{(k-1)}+n} = y\}$ 为新链 $\{X_{T_y^{(k-1)}+n}\}_{n\geq 0}$ 的首次返回时刻.

【推论 2.28】 对 $k \geq 2$ 有

(1) $\sigma(S_y^{(k)}) \perp\!\!\!\perp_{\{T_y^{(k-1)}<\infty\}} \mathscr{F}_{T_y^{(k-1)}}$;

(2) $\mathbb{P}(S_y^{(k)} < \infty \mid T_y^{(k-1)} < \infty) = \mathbb{P}(T_y^{(1)} < \infty \mid X_0 = y) = \rho_{yy}$.

<u>**证明.**</u> 用定理 2.26，用上述引理即可证明引理 2.19. □

2.3.3 状态之间的关系：可达和互通

【定义 2.29】(可达和互通) 对 $i, j \in S$，若存在 $n \geq 0$ 使得 $p_{ij}(n) > 0$，则称 i 可达 j，记作 $i \to j$. 若 $i \to j, j \to i$ 同时成立，称 i 与 j 互通，记作 $i \leftrightarrow j$.

【注 2.30】 互通关系为 S 上的等价关系.

【命题 2.31】(可达的判定) 对**不同**的 $i, j \in S$，下列命题等价：

(1) $i \to j$;

(2) $0 < f_{ij} = \rho_{ij} := \mathbb{P}_i(T_j < \infty)$;

(3) 存在某些状态 $i_0 = i, i_1, \cdots, i_n = j \in S$ 使得 $p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n} > 0$;

(4) $\mathbb{P}_i(\exists\, n \geq 0, X_n = j) > 0$.

<u>**证明.**</u> (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (4) 由定义得到. 只证 (1) $\Leftrightarrow$ (3). 若 (3) 成立，则由 C-K 方程知 $p_{ij}(n) \geq p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n} > 0$. 反之，由 $p_{ij}(n) = \sum_{i_1^{n-1} \in S^{n-1}} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n} > 0$ 且每项非负，那么可以找到一组 $(i_1, \cdots, i_{n-1})$ 为所求. □

【命题 2.32】 若 $i \to j$, $j \to k$，那么 $i \to k$ 成立.

证明. 由C-K方程立即得到. □

【引理 2.33】 设 $i \to j$，则

(1) 若 i 为常返态，则 $\rho_{ji} = 1 > 0$. 此时 $i \leftrightarrow j$ 且 j 常返.

(2) $\rho_{ji} < 1 \Rightarrow i$ 为暂留态.

证明. 只证明(1), (2) 为其逆否命题. 仅考虑 $i \neq j$. 若$\rho_{ji} < 1 \rightsquigarrow \mathbb{P}_j(T_i = \infty) = (1-\rho_{ji}) > 0$. 而 $i \to j$，那么存在 $n \geq 1$ 使得 $p_{ij}(n) > 0$. 令 $K := \min\{k \geq 1 : p_{ij}(k) > 0\}$. 由 C-K 方程知存在与 i, j 不同的状态 $i_1, \cdots, i_{K-1}$ 使得 $p_{i,i_1} \cdots p_{i_{K-1},j} > 0$. 补充定义 $i_0 = i$, $i_K = j$. 考察

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(T_i = \infty) = \mathbb{P}_i[\cap_{n\geq 1}\{X_n \neq i\}] \\
&\geq \mathbb{P}_i[\{X_m = i_m,\ 1 \leq m \leq K\} \cap (\cap_{n\geq K+1}\{X_n \neq i\})] \\
&= \mathbb{P}[\{X_m = i_m,\ 0 \leq m \leq K\} \cap (\cap_{n\geq K+1}\{X_n \neq i\})]/\mathbb{P}(X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}_{\{X_K=j\}}[\{X_m = i_m,\ 0 \leq m \leq K-1\}]\mathbb{P}_{\{X_K=j\}}(\cap_{n\geq K+1}\{X_n \neq i\})\mathbb{P}(X_K = j)/\mathbb{P}(X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}[\{X_m = i_m,\ 1 \leq m \leq K\} \mid X_0 = i]\mathbb{P}_{\{X_K=j\}}(\cap_{n\geq K+1}\{X_n \neq i\}) \\
&= p_{i,i_1} \cdots p_{i_{K-1},j}\mathbb{P}_{\{X_K=j\}}(\cap_{n\geq K+1}\{X_n \neq i\}).
\end{aligned}
$$

选取常数停时 $\tau = K$，那么在 $\mathbb{P}(\cdot \mid X_K = j)$ 下，$\{X_{K+n}\}_{n\geq 0} \sim \text{Markov}(\delta_j, P)$. 于是

$$
\mathbb{P}_{\{X_K=j\}}[(\cap_{n\geq K+1}\{X_n \neq i\})] = \mathbb{P}_{\{X_0=j\}}[(\cap_{n\geq 1}\{X_n \neq i\})] = \mathbb{P}_j(T_i = \infty) = 1 - \rho_{ji}.
$$

得到 $\mathbb{P}_i(T_i = \infty) = p_{i,i_1} \cdots p_{i_{K-1},j}(1-\rho_{ji}) > 0$. 与 i 为常返态矛盾，于是 $\rho_{ji} = 1 > 0$, $j \to i$ 成立. 再证明 j 常返. 由于存在 $n' > 0$ 使得 $p_{ji}(n') > 0$. 对任意 $r \geq 0$，考察

$$
p_{jj}(n + n' + r) \geq p_{ji}(n')p_{ii}(r)p_{ij}(n). \rightsquigarrow \sum_{r\geq 0} p_{jj}(n + n' + r) \geq p_{ji}(n')p_{ij}(n) \sum_{r\geq 0} p_{ii}(r) = \infty.
$$

于是 $\sum_{r\geq 0} p_{jj}(r) = \infty$，故 j 常返. □

【推论 2.34】 **(类性质)** 若 $i \leftrightarrow j$，则 i, j 同时为常返状态或暂留状态.

证明. 直接由引理 2.33 的证明得到. □

2.3.4 状态空间分解定理

【定义 2.35】 **(不可约链)** $C \subseteq S$，若任意 $i, j \in C$ 都有 $i \leftrightarrow j$，则称 C 不可约. 若 S 不可约，则称链不可约. 此时 C 中状态要么全是常返的，要么全是暂留的.

【定义 2.36】 **(闭集定义I)** $C \subseteq S$，若 $i \in C, j \notin C$ 蕴含 $p_{ij} = 0$，则称 C 为闭集.

【命题 2.37】 **(闭集定义II)** $C \subseteq S$，若 $i \in C, i \to j$ 蕴含 $j \in C$，则称 C 为闭集. 换言之，对任意 $j \notin C$ 都有 i 不可达 j.

证明. 设 C 满足闭集定义I，对任意 $i \to j$，不妨 $j \neq i$，否则 $j = i \in C$ 已经成立. 那么由命题 2.31 (3) 可知，存在状态 $i_0 = i, i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, i_n = j \in S$ 使得

$$
p_{i_0,i_1}p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n} > 0 \Leftrightarrow p_{i_k,i_{k+1}} > 0, \forall\, 0 \leq k \leq n-1.
$$

由 $p_{i,i_1} > 0, i \in C$, 那么只能 $i_1 \in C$. 又 $p_{i_1,i_2} > 0$，只能 $i_2 \in C$. 以此类推, 可以得到 $i_2, \cdots, i_{n-1}, i_n(j) \in C$.

反之，若 $i \in C, j \notin C$，那么必定有 i 不可达 j. 即对任意 $n \geq 0$，都有 $p_{ij}(n) = 0$. 特别地，取 $n = 1$，有 $p_{ij} = 0$，也即 C 满足闭集定义I. □

【定义 2.38】(常返互通类) 设 $i \in S$，定义 i 的互通类 $C(i) := \{j \in S : i \leftrightarrow j\}$. 若 i 常返，则 $C(i)$ 常返，称为 i 的常返互通类.

【命题 2.39】 若 i 常返，则 $C(i)$ 为闭集.

证明. 考察任意 $j \in C(i), j \to k$. 利用引理 2.33 知道 $j \leftrightarrow k$. 那么由于互通为等价关系，自然 $i \leftrightarrow k$. 即 $k \in C(i)$. 由定义II得证. □

【定理 2.40】 设 $C \subseteq S$ 为有限不可约闭集，那么 C 中全是常返态.

证明. 若 C 中存在暂留态，则全为暂留态，意味着 $p_{ij}(n) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 对任意 $i,j \in C$. 但对 $i \in C$ 有 $\sum\limits_{j\in S} p_{ij}(n) = \sum\limits_{j\in C} p_{ij}(n) + \sum\limits_{j\in \overline{C}} 0 = 1$. 两边同取 $n \to \infty$ 得到 $1 = 0$，矛盾. □

【推论 2.41】 若状态空间 S 有限，则必定存在一个常返态.

证明. 完全类似定理 2.40 的证明. □

【定理 2.42】(状态空间分解定理) 状态空间 S 可以被唯一分解为 $S = T + R_1 + R_2 + \cdots$. 其中 T 全为暂留状态，R_i 为常返不可约闭集.

证明. 首先取 $S\backslash T$ 若非空集，取 $i_1 \in S\backslash T$，令 $R_1 = C(i_1)$. 取 $S\backslash(T \cup R_1)$，若非空集，取 $i_2 \in S\backslash(T \cup R_1)$. 断言 $C(i_1) \cap C(i_2) = \emptyset$. 否则取 $j \in C(i_1) \cap C(i_2)$，那么 $j \leftrightarrow i_1 \leftrightarrow i_2$. 矛盾. 于是令 $R_2 = C(i_2)$，以此类推. □

§2.4 平稳分布和特殊例子

【定义 2.43】(平稳分布) 称 π 为 DTMC $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 的转移概率矩阵 P 的平稳分布，若 (1) $\pi_j \geq 0$ 对任意 $j \in S$ 成立且 $\sum\limits_j \pi_j = 1$; (2) $\pi = \pi P$.

【命题 2.44】 设 $\{X_n\}_{n\geq 0} \sim \text{Markov}(\pi, P)$，其中 π 为概率转移矩阵 P 的平稳分布，证明：对固定 $m \geq 0$ 有 $\{X_{m+n}\}_{n\geq 0} \sim \text{Markov}(\pi, P)$

证明. 任取 $0 \leq u_1 < \cdots < u_n$, $i_1, \cdots, i_n \in S$. 考虑有限维分布 $\mathbb{P}(X_{m+u_1} = i_1, \cdots, X_{m+u_n} = i_n) = (\pi P^{u_1})_{i_1} \prod\limits_{k=1}^{n-1} p_{i_k, i_{k-1}}^{(u_k - u_{k-1})} = \pi_{i_1} \prod\limits_{k=1}^{n-1} p_{i_k, i_{k-1}}^{(u_k - u_{k-1})}$. □

【定义 2.45】(双随机链) 称概率转移矩阵 P 是双随机的，若 $\sum\limits_{i\in S} p_{ij} = 1$ 对任意 $j \in S$ 成立.

【命题 2.46】 设状态空间 S 有限，则 DTMC $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 的概率转移矩阵 P 是双随机的 $\Leftrightarrow$ 均匀分布为 P 的平稳分布.

证明. 直接验证 $\sum\limits_{i\in S}(1/|S|)p_{ij} = 1/|S| \Leftrightarrow \sum\limits_{i\in S} p_{ij} = 1$ 对任意 j 成立. □

【定义 2.47】(细致平衡条件) 概率分布 π 满足细致平衡条件 (Detailed Balance Condition,DBC). 若 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ 对任意 $i,j \in S$ 成立.

【注 2.48】 若 π 满足 DBC，则 π 为平稳分布.

【定理 2.49】 设 $\{X_n\}_{n\geq 1} \sim \text{Markov}(\pi, P)$，其中 π 为概率转移矩阵 P 的平稳分布. 固定 n，定义 $Y_m := X_{n-m}$ $(0 \leq m \leq n)$，则 $\{Y_m\} \sim \text{Markov}(\pi, \hat{P})$. 其中 $\hat{P} = (\hat{p}_{ij})_{i,j\in S}$，$\hat{p}_{ij} = \pi_j p_{ji}/\pi_i$ 称为对偶转移概率.

证明. 用命题 2.8. 验证 $\hat{P}$ 为随机矩阵. $\sum\limits_{j\in S} \pi_j p_{ji}/\pi_i = \pi_i/\pi_i = 1$. 验证初始分布 $Y_0 = X_n \sim \pi$. 取 $i_0, \cdots, i_{m+1} \in S, m < n$，最后计算

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{m+1} = i_{n+1} \mid Y_m = i_m, \cdots, Y_0 = i_0) &= \mathbb{P}(X_{n-m-1} = i_{m+1}, \cdots, X_n = i_0)/\mathbb{P}(X_{n-m} = i_m, \cdots, X_n = i_0)\\ &= \pi_{i_{m+1}} p_{i_{m+1}, i_m}/\pi_{i_m} = \hat{p}_{i_m, i_{m+1}}.\end{aligned}$$

□

【推论 2.50】(可逆性) 在定理 2.49 的条件中，若平稳分布 π 满足 DBC，则 $\hat{P} = P$. 也即 $\{Y_m\} \overset{(d)}{=} \{X_n\}$，此时称该 Markov 链可逆.

§2.5 极限行为和平稳分布的存在唯一性

【定义 2.51】(状态的周期) 令 $I_x := \{n \geq 1 : p_{xx}^{(n)} > 0\}$. 定义 x 的周期 $d(x) = \gcd(I_x)$. 若 $I_x = \varnothing$，约定 $d(x) = \infty$.

【定义 2.52】(非周期) 称链是非周期的，若所有状态的周期均为 1.

【命题 2.53】 周期为类性质. 即若 $i \leftrightarrow j$，那么 $d(i) = d(j)$.

证明. 由 $i \leftrightarrow j$，则存在 $m, n \geq 0$ 使得 $p_{ij}(m), p_{ji}(n) > 0$. 设 $d(i) = d_1$，$d(j) = d_2$. 由 C-K 方程知

$$p_{ii}(m+n) \geq p_{ij}(m)p_{ji}(n) > 0,\ p_{ii}(m+n+d_2) \geq p_{ij}(m)p_{jj}(d_2)p_{ji}(n) > 0.$$

则 $d_1 \mid m+n, d_1 \mid m+n+d_2 \rightsquigarrow d_1 \mid d_2$. 同理 $d_2 \mid d_1$. 得证. □

下面给出本节的几个重要定理，略去证明.

【定理 2.54】(收敛定理) 若马氏链不可约，非周期，且存在平稳分布 π，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$.

【注 2.55】 定理 2.54 说明在上述条件下，平稳分布若存在则唯一.

【定理 2.56】(渐近频率) 若马氏链不可约，常返，则 n 时刻之前访问状态 y 的频率 $N_n(y)/n \to 1/\mathbb{E}_y T_y$ 当 $n \to \infty$.

【定理 2.57】(平稳分布的存在唯一性) 设马氏链不可约.

(1) 平稳分布 π 若存在，则 $\pi_y = 1/\mathbb{E}_y T_y > 0$，即 π 唯一.

(2) 马氏链常返，则存在平稳测度 $(\mu_x)_{x\in S}$，其中 $\mu_x > 0$ 对任意 $x \in S$ 成立. 进一步，若 $\mu(S) := \sum\limits_{x\in S} \mu_x < \infty$，则平稳分布存在唯一 $\pi_x = \mu_x/\mu(S) > 0$.

证明. 仅证明 $\pi_y > 0$. 若存在 $y \in S$ 使得 $\pi_y = 0$. 由 $\pi = \pi P^n \rightsquigarrow 0 = \pi_y = \sum\limits_{x\in S} \pi_x p_{xy}(n) = 0$. 又 S 不可约，即 $x \to y$. 对任意 $x \in S$，存在 $n_x \geq 0$ 使得 $p_{xy}(n_x) > 0$. 那么依次取 $n = n_x$ 得到 $\pi_x \equiv 0$. 矛盾. □

【注 2.58】 $\mu = (\mu_x)_{x\in S}$ 称为平稳测度，若 (1) $\mu_x \geq 0$ 对任意 $x \in S$; (2) $\mu P = \mu$.

下面给出两个可以满足 $\mu(S) < \infty$ 的条件.

【推论 2.59】 设马氏链具有**有限状态**，不可约，则

(1) 存在平稳分布 $\pi=(\pi_x)_{x\in S}$ 且 $\pi_x=1/\mathbb{E}_xT_x>0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}N_n(x)/n=1/\mathbb{E}_xT_x=\pi_x$.

【推论 2.60】 设马氏链不可约，下列结论等价：

1. 某个状态正常返；
2. 所有状态**正常返**；
3. 存在平稳分布 π.

【注 2.61】 推论 2.60 说明，对不可约链平稳分布存在当且仅当存在正常返态，此时平稳分布必定唯一.

【命题 2.62】 设状态空间 S 有限，存在 $i\in S$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\pi_j$ 对任意 $j\in S$ 成立，则 $\pi=(\pi_j)_{j\in S}$ 为平稳分布且唯一.

证明. 由于

$$\sum_{j\in S}p_{ij}^{(n)}=1,$$

且注意到 S 是有限状态空间，因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in S}p_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in S}\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in S}\pi_j=1.$$

根据 C-K 方程有 $p_{ij}^{(n+1)}=\sum\limits_{k\in S}p_{ik}^{(n)}p_{kj}$. 两边同取极限得到 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n+1)}=\sum\limits_{k\in S}\left(\lim\limits_{n\to\infty}p_{ik}^{(n)}\right)p_{kj}$. 那么 $\pi_j=\sum\limits_{k\in S}\pi_kp_{kj}$，即 $\pi=(\pi_j)_{j\in S}$ 为平稳分布.设还存在另一个平稳分布 $\tilde{\pi}=(\tilde{\pi}_j)_{j\in S}$，那么有 $\tilde{\pi}_j=\sum\limits_{k\in S}\tilde{\pi}_kp_{kj}^{(n)}$. 令 $n\to\infty$，得到 $\tilde{\pi}_j=\sum\limits_{i\in S}\tilde{\pi}_i\left(\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}\right)=\pi_j\cdot\sum\limits_{i\in S}\tilde{\pi}_i=\pi_j\cdot 1=\pi_j$. 这说明 $\tilde{\pi}=\pi$.

□

【命题 2.63】 设某有限状态的马氏链满足 $\forall\, i,j\in S,p_{ij}>0$ 且 $\forall\, i,j,k\in S$ 都有 $p_{ij}p_{jk}p_{ki}=p_{ik}p_{kj}p_{ji}$. 证明该 Markov 链可逆.

证明. 首先由 $p_{ij}>0$ 可知该马氏链非周期，不可约，又其状态空间有限，则常返，那么存在唯一平稳分布 π，下只需要验证其满足 DBC. 对任意 $i_1,i_2,i_3\in S$ 有

$$p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}p_{i_2,i_3}p_{i_3,i}=\frac{p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}p_{i_2,i}p_{i,i_2}p_{i_2,i_3}p_{i_3,i}}{p_{i_2,i}p_{i,i_2}}=\frac{p_{i,i_2}p_{i_2,i_1}p_{i_1,i}}{p_{i,i_2}}\cdot\frac{p_{i,i_3}p_{i_3,i_2}p_{i_2,i}}{p_{i_2,i}}=p_{i,i_3}p_{i_3,i_2}p_{i_2,i_1}p_{i_1,i}.$$

类似可推广到任意 $k\geq 2$, $i_1,\cdots,i_k\in S$ 有

$$p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_k,i}=p_{i,i_k}p_{i_k,i_{k-1}}\cdots p_{i_1,i}.$$

不妨取 $i_k=j$，对 $i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}\in S$ 累加，由 C-K 方程知

$$p_{ij}^{(k)}p_{ji}=p_{ji}^{(k)}p_{ij}.$$

令 $k\to\infty$ 由定理 2.54 知

$$\pi_jp_{ji}=\pi_ip_{ij}.$$

那么该平稳分布 π 满足 DBC，该 Markov 链可逆.

□

§2.6 首达时

【定义 2.64】(击中概率) 取 $A \subseteq S$, 定义首达时刻 $V_A := \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}$. 称 $h_x^A := \mathbb{P}_x(V_A < \infty)$ 为击中概率. 特别地，若 A 为闭集，称 h_x^A 为吸收概率.

【命题 2.65】 $h^A := (h_x^A)_{x \in S}$ 满足下列方程:

$$\begin{cases} h_x^A = 1, x \in A \\ h_x^A = \sum_y p_{xy} h_y^A = \sum_{y \in A} p_{xy} + \sum_{y \in S \setminus A} p_{xy} h_y^A, x \notin A. \end{cases}$$

【注 2.66】 命题 2.65 的方程可以写作矩阵形式，即

$$\begin{cases} h_A^A = \mathbf{1}_{|A| \times 1}, \\ h_{\{S \setminus A\}}^A = P[S \setminus A, A] \mathbf{1}_{|A| \times 1} + P[S \setminus A, S \setminus A] h_{\{S \setminus A\}}^A. \end{cases}$$

其中 $h^A = \begin{bmatrix} h_A^A \\ h_{\{S \setminus A\}}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{|A| \times 1} \\ h_{\{S \setminus A\}}^A \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P[A,A] & P[A, S \setminus A] \\ P[S \setminus A, A] & P[S \setminus A, S \setminus A] \end{bmatrix}, \mathbf{1} = [1, 1, \cdots, 1]'$.

<u>证明.</u> 只考虑 $x \notin A$. 此时 $V_A \geq 1$. 考虑一步转移情况(One Step Reasoning),

$$\begin{aligned} h_x^A = \sum_{y \in S} \mathbb{P}_x(V_A < \infty, X_1 = y) &= \sum_{y \in S} \mathbb{P}(V_A < \infty \mid X_1 = y, X_0 = x) \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x) \\ &= \sum_{y \in S} p_{xy} \mathbb{P}(V_A < \infty \mid X_1 = y, X_0 = x) \\ &= \sum_{y \in S} p_{xy} \mathbb{P}\left[\cup_{n \geq 1} \{X_n \in A\} \mid X_1 = y, X_0 = x\right] \\ &= \sum_{y \in S} p_{xy} \mathbb{P}\left[\cup_{n \geq 1} \{X_n \in A\} \mid X_1 = y\right] \\ &= \sum_{y \in S} p_{xy} \mathbb{P}\left[\cup_{n \geq 0} \{X_n \in A\} \mid X_0 = y\right] \\ &= \sum_{y \in S} p_{xy} h_y^A. \end{aligned}$$

□

【命题 2.67】 $a, b \in S$, $V_A := V_{\{a\}}$, $V_B = V_{\{b\}}$. 考虑 $h(x) = \mathbb{P}_x(V_A < V_B)$，则 $h := (h(x))_{x \in S}$ 满足下列方程:

$$\begin{cases} h(a) = 1, h(b) = 0, \\ h(x) = \sum_y p_{xy} h(y) = p_{xa} + \sum_{y \in S \setminus \{a,b\}} p_{xy} h(y), x \neq a, b. \end{cases}$$

<u>证明.</u> 只考虑 $x \notin \{a, b\}$. 此时 $V_A, V_B \geq 1$. 考虑一步转移情况(One Step Reasoning), 同上只需验证 $\mathbb{P}_x(V_A < V_B \mid X_1 = y) = h(y)$. 注意到

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(V_A < V_B \mid X_1 = y) &= \mathbb{P}_x(\cup_{m \geq 1} [\{X_m = a\} \cap (\cap_{1 \leq k \leq m} \{X_k \neq a, b\})] \mid X_1 = y) \\ &= \mathbb{P}(\cup_{m \geq 1} [\{X_m = a\} \cap (\cap_{1 \leq k \leq m} \{X_k \neq a, b\})] \mid X_1 = y) \\ &= \mathbb{P}(\cup_{m \geq 0} [\{X_m = a\} \cap (\cap_{1 \leq k \leq m} \{X_k \neq a, b\})] \mid X_0 = y) = \mathbb{P}_y(V_A < V_B) = h(y). \end{aligned}$$

□

【定理 2.68】(方程解的存在唯一性) 设 $A,B\subseteq S$ 且 $A\cap B=\varnothing$. 令 $C=S-(A\cup B)$. 若 $\#C<\infty$, $\mathbb{P}_x(V_A\wedge V_B<\infty)>0$，对任意 $x\in C$ 成立. 则方程

$$\begin{cases} h(x)=1, x\in A,\\ h(x)=0, x\in B,\\ h(x)=\sum\limits_{y\in S}p_{xy}h(y), x\in C.\end{cases}$$

存在唯一非负解 $h(x)=\mathbb{P}_x(V_A<V_B)$, $x\in S$.

【注 2.69】 定理 2.68 中 $\mathbb{P}_x(V_A\wedge V_B<\infty)>0$ 等价于 $x\to a$ 或 $x\to b$. 上述方程同样也有矩阵形式

$$\begin{cases} h_A=\mathbf{1},\\ h_B=\mathbf{0},\\ h_C=P[C,A]\mathbf{1}+P[C,C]h_C.\end{cases}$$

其中 $h=\begin{bmatrix}h_A\\h_B\\h_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\h_C\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}P[A,A]&P[A,B]&P[A,C]\\P[B,A]&P[B,B]&P[B,C]\\P[C,A]&P[C,B]&P[C,C]\end{bmatrix}$.

【定义 2.70】(离出分布和离出时刻) $\tau_C:=\min\{n\geq 0: X_n\notin C\}$ 为离出时刻. 此时 $X_{\tau_C}\in A$ 或者 $X_{\tau_C}\in B$. 称 $\mathbb{P}_x(V_A<V_B)$ 和 $\mathbb{P}_x(V_B<V_A)$ 为离出分布.

【定义 2.71】(平均首达时) 记 $k_x^A:=\mathbb{E}_xV_A$ 为平均首达时刻.

【命题 2.72】 $k^A:=(k_x^A)_{x\in S}$ 满足下列方程:

$$\begin{cases} k_x^A=0, x\in A\\ k_x^A=1+\sum\limits_{y}p_{xy}k_y^A=1+\sum\limits_{y\in S\setminus A}p_{xy}k_y^A, x\notin A.\end{cases}$$

【注 2.73】 命题 2.72 的方程可以写作矩阵形式，即

$$\begin{cases} k_A^A=\mathbf{0}_{|A|\times 1},\\ k_{\{S\setminus A\}}^A=\mathbf{1}_{|S\setminus A|\times 1}+P[S\setminus A,S\setminus A]k_{\{S\setminus A\}}^A.\end{cases}$$

其中 $k^A=\begin{bmatrix}k_A^A\\k_{\{S\setminus A\}}^A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{|A|\times 1}\\k_{\{S\setminus A\}}^A\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}P[A,A]&P[A,S\setminus A]\\P[S\setminus A,A]&P[S\setminus A,S\setminus A]\end{bmatrix}$.

证明. 只考虑 $x\notin A$ 的情形. 首先 $\mathbb{E}_xV_A=\sum\limits_{y\in S}\mathbb{E}_x(V_A\mathbf{1}_{\{X_1=y\}})$. 接着利用命题 1.29 得到

$$\mathbb{E}_xV_A=\sum_{y\in S}\mathbb{E}_x(V_A\mid X_1=y)\mathbb{P}_x(X_1=y)=\sum_{y\in S}p_{xy}\mathbb{E}_x(V_A\mid X_1=y).$$

下面只需要证明 $\mathbb{E}_x\{V_A\mid X_1=y\}=\mathbb{E}\{V_A+1\mid X_0=y\}=\mathbb{E}_y\{V_A+1\}$, $\forall y\in S$, $x\notin A$. 仅考虑 $\mathbb{P}_x\{V_A<\infty\mid X_1=y\}=1$ 成立的情形，否则等式两端都是 ∞ 已经成立. 那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\{V_A \mid X_1=y\} &= \sum_{n\geq 1} n\,\mathbb{P}_x\{V_A=n \mid X_1=y\} \\
&= \sum_{n\geq 1} n\,\mathbb{P}_x\left\{\bigcap_{k=1}^{n-1}\{X_k\notin A\}\cap\{X_n\in A\}\,\middle|\, X_1=y\right\} \\
&= \sum_{n\geq 1} n\,\mathbb{P}\left\{\bigcap_{k=1}^{n-1}\{X_k\notin A\}\cap\{X_n\in A\}\,\middle|\, X_1=y\right\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1\in A \mid X_1=y\}+\sum_{n\geq 2} n\,\mathbb{P}\left\{\bigcap_{k=1}^{n-1}\{X_k\notin A\}\cap\{X_n\in A\}\,\middle|\, X_1=y\right\}. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

选取常数停时 $\tau_1=0,\tau_2=1$，根据定理 2.26 有 $\{X_{\tau_i+n}\}_{n\geq 0}\sim \text{Markov}(\delta_y,P)$ 在概率测度 $\mathbb{P}(\cdot\mid X_{\tau_i}=y)$ $(i=1,2)$ 下. 说明

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{k=1}^{n-1}\{X_k\notin A\}\cap\{X_n\in A\}\,\middle|\, X_1=y\right\}=\mathbb{P}\left\{\bigcap_{k=0}^{n-2}\{X_k\notin A\}\cap\{X_{n-1}\in A\}\,\middle|\, X_0=y\right\}. \qquad (2.18)$$

$$\mathbb{P}\{X_1\in A\mid X_1=y\}=\mathbb{P}\{X_0\in A\mid X_0=y\}. \qquad (2.19)$$

将 (2.19), (2.18) 带入 (2.17) 中得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\{V_A \mid X_1=y\} &= \mathbb{P}\{X_0\in A\mid X_0=y\}+\sum_{n\geq 2} n\,\mathbb{P}\left\{\bigcap_{k=0}^{n-2}\{X_k\notin A\}\cap\{X_{n-1}\in A\}\,\middle|\, X_0=y\right\} \\
&= \mathbb{P}\{X_0\in A\mid X_0=y\}+\sum_{n\geq 1} (n+1)\,\mathbb{P}\left\{\bigcap_{k=0}^{n-1}\{X_k\notin A\}\cap\{X_n\in A\}\,\middle|\, X_0=y\right\} \\
&= (0+1)\cdot\mathbb{P}\{V_A=0\mid X_0=y\}+\sum_{n\geq 1}(n+1)\,\mathbb{P}\{V_A=n\mid X_0=y\} \\
&= \sum_{n\geq 0}(n+1)\,\mathbb{P}\{V_A=n\mid X_0=y\}=\mathbb{E}\{V_A+1\mid X_0=y\}.
\end{aligned}$$

完成了证明.

□

【定理 2.74】(方程解的存在唯一性) 设 $A\subseteq S$. 令 $C=S-A$. 若 $\#C<\infty$, $\mathbb{P}_x(V_A<\infty)>0$，对任意 $x\in C$ 成立. 则方程

$$\begin{cases} g(x)=0, x\in A, \\ g(x)=1+\sum\limits_{y\in S}p_{xy}g(y), x\in C. \end{cases}$$

存在唯一非负解 $g(x)=\mathbb{E}_xV_A$, $x\in S$.

【注 2.75】 定理 2.74 中方程同样也有矩阵形式

$$\begin{cases} g_A=\mathbf{0}_{|A|\times 1}, \\ g_C=\mathbf{1}_{|C|\times 1}+P[C,C]g_C. \end{cases}$$

其中 $g=\begin{bmatrix} g_A \\ g_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ g_C\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}P[A,A] & P[A,C]\\ P[C,A] & P[C,C]\end{bmatrix}$.

Chapter 3

Poisson 过程

§3.1 指数分布和 Poisson 分布

【定义 3.1】 **(指数分布)** 称 R.V. T 服从参数为 λ 的指数分布，记作 $T \sim \text{Exp}(\lambda), \mathscr{E}(\lambda)$ 若分布函数 $F_T(t) = (1-e^{-\lambda t})\mathbf{1}_{\{t\geq 0\}}$, 或是密度函数 $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{\{t\geq 0\}}$.

【命题 3.2】 **($\text{Exp}(\lambda)$ 基本性质)** 设 $T \sim \text{Exp}(\lambda)$，那么

(1) (矩) $\mathbb{E}T = 1/\lambda$, $\mathbb{E}T^2 = 2/\lambda^2$, $\text{Var}T = 1/\lambda^2$;

(2) (尺度性质) 若还有 $S \sim \text{Exp}(1)$，则 $S/\lambda \overset{(d)}{=} T$, $S \overset{(d)}{=} \lambda T$;

(3) (无记忆性) 任意 $t, s \geq 0$ 有 $\mathbb{P}(T > s+t \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s)$.

【命题 3.3】 **($\text{Exp}(\lambda)$ 的排序)** 设 $\{T_i\}_{i=1}^n \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ 相互独立. 令 $V := \min(T_1, \cdots, T_n)$, $I := \min\{i : T_i = V\}$ 为随机下标，那么 (1) $V \sim \text{Exp}(\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k)$; (2) $\mathbb{P}(T_i = V) = \mathbb{P}(I = i) = \lambda_i/(\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k)$; (3) $I \perp\!\!\!\perp V$.

<u>证明.</u> (1) 直接求分布函数; (2) 当 $n = 2$ 时，设 $S \sim \text{Exp}(\lambda)$, $U \sim \text{Exp}(\mu)$，那么

$$\mathbb{P}(S = \min(S, U)) = \mathbb{P}(S \leq U) = \int_0^{+\infty}\int_0^u f_S(s) f_U(u) ds du = \int_0^{+\infty}(1-e^{-\lambda u}) f_U(u) du = \lambda/(\lambda+\mu).$$

对 $n > 2$ 的情形，设 $T_i = \min(T_1, \cdots, T_n)$, $T_j = \min(T_1, \cdots, T_{i-1}, T_{i+1}, \cdots, T_n)$. 由 (1) $T_j \sim \text{Exp}(\sum\limits_{j\neq i} \lambda_j)$. 那么

$$\mathbb{P}(T_i = \min(T_1, \cdots, T_n)) = \mathbb{P}(T_i \leq T_j) = \lambda_i/(\lambda_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j).$$

(3) 令 $\tilde{V}_i = \min(T_1, \cdots, T_{i-1}, T_{i+1}, \cdots, T_n)$. 那么 $\{I = i\} = \{T_i < \tilde{V}_i\} + \cup_{j=i+1}^n \{T_i \leq \tilde{V}_i, V_i = V_j\}$. 由命题 1.5, 利用概率测度的次可加性得到

$$0 \leq \mathbb{P}[\cup_{j=i+1}^n \{T_i \leq \tilde{V}_i, V_i = V_j\}] \leq \sum_{j=i+1}^n \mathbb{P}(T_i = T_j) = \sum_{j=i+1}^n \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_i = t) f_{T_j}(t) dt = 0.$$

也说明 $\cup_{j=i+1}^n \{T_i \leq \tilde{V}_i, V_i = V_j\}$ 为零测集，那么 $\mathbb{P}(I = i, V > t) = \mathbb{P}(T_i < \tilde{V}_i, V > t) = \mathbb{P}(\tilde{V}_i > T_i > t)$. 接着利用 $T_i \perp\!\!\!\perp \tilde{V}_i$ 就有

$$\mathbb{P}(I = i, V > t) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\tilde{V}_i > s > t) f_{T_i}(s) ds$$

$$= \int_t^{+\infty} \mathbb{P}(\tilde{V}_i > s) f_{T_i}(s) ds = \lambda_i \exp\{-\sum_{k=1}^n \lambda_k t\}/(\sum_{k=1}^n \lambda_k) = \mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(V > t).$$

□

【命题 3.4】 设 $\{\tau_i\}_{i=1}^n \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$. 则对 $n \geq 1$ 有 $T_n := \sum_{k=1}^n \tau_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$，即 $f_{T_n}(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^{n-1}/(n-1)!\mathbf{1}_{t \geq 0}$.

【定义 3.5】 **(Poisson 分布)** 称 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，记作 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$，若 $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

【命题 3.6】 **(Poisson(λ) 基本性质)** 设 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$，那么

(1) (矩) $\mathbb{E}X(X-1)\cdots(X-k+1) = \lambda^k$, $k \geq 1$. 特别地, $\mathbb{E}X = \lambda$, $\text{Var}X = \lambda$;

(2) 若 $\{X_k\}_{k=1}^n \sim \text{Poisson}(\lambda_k), k \geq 1$ 且相互独立，则 $\sum_{k=1}^n X_k \sim \text{Poisson}(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$;

(3) (二项分布的Possion 逼近) $X_n \sim \text{Binomial}(n, \lambda/n)$，则 $X_n \xrightarrow{d} \text{Poisson}(\lambda)$.

§3.2 Poisson 过程的定义

给出两个定义：计数过程定义和间隔时间序列构造性定义，事实上，还有一种无穷小定义.

【定义 3.7】 **(计数过程)** 若随机变量 $N(t)$ 表示时间段 $[0, t]$ 内某事件发生的次数，则称 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 为计数过程，若：(1) $N(t)$ 取 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 值; (2) 若 $s < t$ 则 $N(s) \leq N(t)$ 且 $N(t) - N(s)$ 表示时间段 $(s, t]$ 内事件发生次数.

【定义 3.8】 **(Poisson过程定义I)** 称计数过程 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 为带有参数或速率 λ 的 Poisson 过程，若 (1) $N(0) = 0$ 或是 $\mathbb{P}(N(0) = 0) = 1$; (2) (独立增量) 对 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 有 $\{N(t_n) - N(t_{n-1})\}$ 相互独立; (3) $\forall\, t > 0$, $s \geq 0$ 都有 $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. 记为 $\{N(t)\}_{t\geq 0} \sim \text{PP}(\lambda)$.

【命题 3.9】 $\{N(t)\}_{t\geq 0} \sim \text{PP}(\lambda)$，则 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 具有平稳独立增量，即

$$N(t+s) - N(t) \overset{(d)}{=} N(t) - N(0) \overset{(d)}{=} N(t) \overset{(d)}{=} \text{Poisson}(\lambda t).$$

【命题 3.10】 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0} \sim \text{PP}(\lambda)$，则对固定的 $s \geq 0$, $N(t+s) - N(s) : t \geq 0\} \sim \text{PP}(\lambda)$ 且 $\{N(t+s) - N(s)\} \perp\!\!\!\perp \{N(r)\}_{0\leq r\leq s}$.

<u>证明.</u> 按定义 3.8 直接验证. □

【命题 3.11】 **(Markov 性)** $\{N(t)\}_{t\geq 0} \sim \text{PP}(\lambda)$，任取 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $\forall\, n \geq 1$, $0 \leq x_0 \leq x_1 \cdots \leq x_n$，其中 $x_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，那么

$$\mathbb{P}(N(t_n) = x_n \mid N(t_{n-1}) = x_{n-1}, \cdots, N(t_0) = x_0) = \mathbb{P}(N(t_n) = x_n \mid N(t_{n-1}) = x_{n-1}).$$

<u>证明.</u> 利用独立增量性，$\mathbb{P}(N(t_n) = x_n \mid N(t_{n-1}) = x_{n-1}, \cdots, N(t_0) = x_0) = \mathbb{P}(N(t_n) = x_n, \cdots, N(t_0) = x_0)/\mathbb{P}(N(t_{n-1}) = x_{n-1}, \cdots, N(t_0) = x_0) = \mathbb{P}(N(t_n) - N(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}, \cdots, N(t_0) - N(0) = x_0)/\mathbb{P}(N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}) = x_{n-1} - x_{n-2}, \cdots, N(t_0) - N(0) = x_0) = \mathbb{P}(N(t_n) - N(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1})$. 再利用命题 3.10，得到 $N(t_n) - N(t_{n-1}) \perp\!\!\!\perp N(t_{n-1})$，即 $\mathbb{P}(N(t_n) - N(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}) = \mathbb{P}(N(t_n) - N(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1} \mid N(t_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(N(t_n) = x_n \mid N(t_{n-1}) = x_{n-1})$. □

【定义 3.12】(Poisson过程定义II) 令 $\{\tau_i\}_{i\geq 1} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$，$T_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k \mathbf{1}_{\{n\geq 1\}}$. 定义 $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$，则称 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 为带有参数或速率 λ 的 Poisson 过程.

【注 3.13】 在定义 3.12 中，$\{\tau_i\}_{i\geq 1}$ 被称为到达时间间隔序列，$\{T_n\}_{n\geq 1}$ 被称为到达时间序列.这个定义同时给出了 Poisson 过程存在性的构造性证明. Poisson 过程的轨道具有右连左极性，即右连续，左极限存在.

【引理 3.14】(命题 3.10 的推广) 在定义 3.12 的条件下，固定 $s \geq 0$，令 $\tau_1^s := T_{N(s)+1} - s$，$\tau_n^s := \tau_{N(s)+n}$，$n \geq 2$. 定义 $T_n^s := \sum_{k=1}^{n} \tau_k^s \mathbf{1}_{\{n\geq 1\}}$，$N^s(t) := \max\{n : T_n^s \leq t\}\mathbf{1}_{\{t>0\}}$. 则

(1) $N^s(t) = N(t+s) - N(s)$;

(2) $\tau_k^s \overset{(d)}{=} \tau_k \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，$\tau_1^s, \tau_2^s, \cdots, \tau_k^s$ 独立同分布. 且对任意 $k \geq 1$ 都有 $\{\tau_k^s\}_{k\geq 0} \perp\!\!\!\perp (N(t))_{0\leq t\leq s}$. 即对 $\forall\, k, j \geq 1$, $r_1, \cdots, r_j \in [0, s]$ 有 $(\tau_1^s, \cdots, \tau_k^s) \perp\!\!\!\perp (N(r_1), \cdots, N(r_j))$.

(3) $\{N^s(t) = N(t+s) - N(s) : t \geq 0\}$ 为带有参数或速率 λ 的 Poisson 过程且 $\{N(t+s) - N(s)\}_{t\geq 0} \perp\!\!\!\perp \{N(\gamma)\}_{0\leq\gamma\leq s}$. 即对 $\forall\, k, j \geq 1, t_1, \cdots, t_k \geq 0$, $r_1, \cdots, r_j \in [0, s]$ 有 $(N(t_1+s) - N(s), \cdots, N(t_k+s) - N(s)) \perp\!\!\!\perp (N(r_1), \cdots, N(r_j))$.

<u>**证明.**</u> (1) 由 $T_n^s = T_{N(s)+n} - s$，那么 $N^s(t) = \max\{n : T_{N(s)+n} \leq s+t\} = \max\{m - N(s) : T_m \leq s+t\} = \max\{m : T_m \leq s+t\} - N(s) = N(s+t) - N(s)$. (2) 先证明 $k = 1$ 时，考察

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_1^s > t_1, N(s) = n) &= \mathbb{P}(T_{n+1} = \tau_{n+1} + T_n > s + t_1, T_n \leq s) \\
&= \int_0^s \mathbb{P}(\tau_{n+1} > s + t_1 - u) f_{T_n}(u) du \\
&= \int_0^s \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1)\mathbb{P}(\tau_{n+1} > s - u) f_{T_n}(u) du \\
&= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1)\mathbb{P}(T_{n+1} > s,\ T_n \leq s) \\
&= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1)\mathbb{P}(N(s) = n) \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 > t_1)\mathbb{P}(N(s) = n).
\end{aligned}
$$

等式两端对 n 求和得到 $\tau_1^s \overset{(d)}{=} \tau_1$. 再带回 $\mathbb{P}(\tau_1 > t_1) = \mathbb{P}(\tau_1^s > t_1)$ 得到 $\tau_1^s \perp\!\!\!\perp N(s)$. 这里 $N(s)$ 改成 $(N(r_1), \cdots, N(r_j), N(s))$ 也是成立的，只需要类似同上改写为 $\{T_k\}_{1\leq k\leq s}$ 的概率并注意到 $\{T_k\}_{1\leq k\leq s} \perp\!\!\!\perp \tau_{n+1}$. 为方便只讨论 $N(s)$. 当 $k \geq 2$ 时，考察

$$
A_n = \{N(s) = n, \tau_1^s > t_1, \cdots, \tau_k^s > t_k\} = \{T_n \leq s, T_{n+1} > t_1 + s\} \cap [\cap_{i=2}^k \{\tau_{n+2} > t_i\}].
$$

利用 $(T_n, T_{n+1}) \perp\!\!\!\perp (\tau_{n+2}, \cdots, \tau_{n+k}) \overset{(d)}{=} (\tau_2, \cdots, \tau_k)$ 类似上述处理即可. (3) 只需注意到 $\{N^s(t) = N(t+s) - N(s) : t \geq 0\}$ 完全满足定义 3.12 的条件，自然为参数为 λ 的过程，并且可以写为关于 $\{\tau_k^s\}_{k\geq 1}$ 的函数，那么由(2) 即得. □

【注 3.15】 在引理 3.14 的证明中我们得到, 事实上 $(\tau_k^s \mid N(s) = n) \overset{(d)}{=} \tau_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

【定理 3.16】(定义的等价性) 定义 I $\Leftrightarrow$ 定义 II

<u>**证明.**</u> 先证明 II $\Rightarrow$ I. 也就是验证定义 3.8. 首先 $\mathbb{P}(N(0) = 0) = \mathbb{P}(\tau_1 > 0) = 1$. 独立增量性质由引理 3.14 (3) 直接得到. 为证明平稳增量 $N^s(t) \overset{(d)}{=} N(t) \overset{(d)}{=} \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 由引理 3.14 (3) 只需要验证 $N(t) \overset{(d)}{=} \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. $\mathbb{P}(N(t) = 0) = \mathbb{P}(\tau_1 > t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^0/0!$ 成立; $\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t \leq T_n + \tau_{n+1})$. 又 $T_n \perp\!\!\!\perp \tau_{n+1}$, 那么

$$
\mathbb{P}(T_n \leq t \leq T_n + \tau_{n+1}) = \int_0^t \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t - u) f_{T_n}(u) du = \frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n.
$$

再证明 I $\Rightarrow$ II. 验证定义 3.12. 定义 $T_n := \inf\{t : N(t) \geq n\}$, $\tau_n = T_n - T_{n-1}$ $(n \geq 2)$, $\tau_1 = T_1$. 当 $t \neq 0$ 时, $N(t) = \sum\limits_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{N(t)\geq n\}} = \sum\limits_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} = \max\{n : T_n \leq t\}$. 最后只需证明 $\{\tau_k\}_{k\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$.只证明两个的情形，多个同理. 首先 $\mathbb{P}(\tau_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \rightsquigarrow \tau_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 考察 (T_1, T_2). 支撑集为 $S := \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < x_2\}$. 设 $0 < \gamma_1 < t_1 < \gamma_2 < t_2$，考察联合概率

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\gamma_1 < T_1 \leq t_1, \gamma_2 < T_2 \leq t_2) &= \mathbb{P}(N(\gamma_1) = 0, N(\gamma_2) - N(t_1) = 0, N(t_1) - N(\gamma_1) = 1, N(t_2) - N(\gamma_2) \geq 1) \\
&= e^{-\lambda\gamma_1} \cdot e^{-\lambda(\gamma_2 - t_1)} \cdot (e^{-\lambda(t_1-\gamma_1)}\lambda(t_1 - \gamma_1)) \cdot (1 - e^{-\lambda(t_2-\gamma_2)}) \\
&= \int_{\gamma_1}^{t_1} dx_1 \int_{\gamma_2}^{t_2} \lambda^2 e^{-\lambda x_2} dx_2.
\end{aligned}
$$

于是 $f_{T_1,T_2}(x_1, x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda x_2} \mathbf{1}_{\{(x_1,x_2)\in S\}}$. 带入 $\mathbb{P}(\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2) = \mathbb{P}(T_1 > t_1, T_2 - T_1 > t_2) = e^{-\lambda(t_1+t_2)}$. 又 $\tau_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，那么 $\tau_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ 且 $\tau_1 \perp\!\!\!\perp \tau_2$. □

【定义 3.17】(非齐次Poisson过程) 称计数过程 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 为带有参数或速率 $\lambda(r)$ 的非齐次 Poisson 过程，若 (1) $N(0) = 0$ 或是 $\mathbb{P}(N(0) = 0) = 1$; (2) (独立增量) 对 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 有 $\{N(t_n) - N(t_{n-1})\}$ 相互独立; (3) 对 $t > 0$, $s \geq 0$ 有 $N(t+s) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}(\int_s^{t+s} \lambda(r)dr)$.

【注 3.18】 定义 3.17 中非齐次 Poisson 过程的到达时间序列 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ 不再服从指数分布，不再相互独立.

§3.3 复合 Poisson 过程

【定义 3.19】(复合Poisson过程) 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0} \sim \mathrm{PP}(\lambda)$, $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. D.R.V.列且 $\{Y_i\}_{i\geq 1} \perp\!\!\!\perp \{N(t)\}_{t\geq 0}$. 令 $S(t) := \sum\limits_{i=1}^{N(t)} Y_i \mathbf{1}_{\{N(t)\neq 0\}}$，则 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 称为一个复合Poisson过程.

【定理 3.20】 $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. R.V. 列. N 为取非负整数值 R.V. 且 $\{Y_i\}_{i\geq 1} \perp\!\!\!\perp N$，令 $S = \sum\limits_{i=1}^{N} Y_i \mathbf{1}_{\{N\neq 0\}}$，则

(1) $\mathbb{E}S = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_1$;

(2) $\mathrm{Var}S = \mathbb{E}N\mathrm{Var}Y_i + \mathrm{Var}N(\mathbb{E}Y_1)^2$;

(3) 特别地，若 $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$，则 $\mathbb{E}S = \lambda\mathbb{E}Y_1$, $\mathrm{Var}S = \lambda[\mathrm{Var}Y_1 + (\mathbb{E}Y_1)^2] = \lambda\mathbb{E}Y_1^2$.

<u>**证明.**</u> (1) 利用重期望公式，即推论 1.39 有 $\mathbb{E}S = \mathbb{E}[\mathbb{E}(S \mid N)] = \mathbb{E}[\sum\limits_{n\geq 1} \mathbb{E}(S \mid N = n)\mathbf{1} - \{N = n\}] = \sum\limits_{n\geq 1} \mathbb{E}(S \mid N = n)\mathbb{P}(N = n)$. 再利用 $\{Y_i\}_{i\geq 1} \perp\!\!\!\perp N$ 和命题 1.34 得到 $\mathbb{E}(S \mid N = n) = \mathbb{E}(\sum\limits_{i=1}^{N} Y_i \mid N = n) = \mathbb{E}(\sum\limits_{i=1}^{N} Y_i) = n\mathbb{E}Y_1$. 带回原式，得到 $\mathbb{E}S = \mathbb{E}Y_1(\sum\limits_{n\geq 1} n\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_1$. (2) 仿照 (1) 用相同的方法，我们只需要求解 $\mathbb{E}(S^2 \mid N = n) = \mathbb{E}[(\sum\limits_{i=1}^{N} Y_i)^2] = \mathrm{Var}(\sum\limits_{i=1}^{N} Y_i) + [\mathbb{E}(\sum\limits_{i=1}^{N} Y_i)]^2 = n\mathrm{Var}Y_1 + n^2(\mathbb{E}Y_1)^2$. 即 $\mathbb{E}S^2 = \mathbb{E}N\mathrm{Var}Y_1 + \mathbb{E}N^2(\mathbb{E}Y_1)^2$. 最后利用公式 $\mathrm{Var}S = \mathbb{E}S^2 - (\mathbb{E}S)^2$ 即可. □

§3.4

Poisson 过程的变换

3.4.1 稀释

下面的引理 3.21 可以看成引理 3.14 的推广，叙述和证明上的极其类似. 过程比较繁琐.

【引理 3.21】 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0} \sim \mathrm{PP}(\lambda)$，$\{Y_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. D.R.V. 列. 且 $\{Y_i\}_{i\geq 1} \perp\!\!\!\perp \{N(t)\}_{t\geq 0}$. 设 $\mathbb{P}(Y_1 = j) = p_j$，$1 \leq j \leq m$. 固定 $s \geq 0$，令 $Y_i^s := Y_{N(s)+i}$，$N_1^s(t) := \sum_{i=1}^{N^s(t)} \mathbf{1}_{\{Y_i^s=1\}}$，$p_1 := p$，其中 $N^s(t)$ 如同引理 3.14 所定义并规定 $\sum_a^b(\cdot) = 0$ 当 $b < a$. 则

(1) $N_1^s(t) = N_1(t+s) - N_1(s)$, 其中 $N_1(s)$ 的定义见定理 3.23;

(2) (a) $\{Y_i^s\}_{i\geq 1}$ i.i.d. 且 $Y_i^s \overset{(d)}{=} Y_i$，(b) $\{Y_i^s\}_{i\geq 1} \perp\!\!\!\perp \{N^s(t)\}_{t\geq 0}$;

(3) $N_1^s(t) = N_1(t+s) - N_1(s)$ 服从参数为 λpt 的 Poisson 分布.

<u>**证明.**</u> (1) 由引理 3.14 知 $N^s(t) = N(t+s) - N(s)$. 那么

$$N_1^s(t) = \sum_{i=1}^{N(t+s)-N(s)} \mathbf{1}_{\{Y_{i+N(s)}=1\}} = \sum_{\ell=N(s)}^{N(t+s)} \mathbf{1}_{\{Y_\ell=1\}} = \sum_{\ell=1}^{N(t+s)} \mathbf{1}_{\{Y_\ell=1\}} - \sum_{\ell=1}^{N(s)} \mathbf{1}_{\{Y_\ell=1\}} = N_1(t+s) - N_1(s).$$

(2) (a) 任取 $i_1 < \cdots < i_m$，$j_1, \cdots, j_m \in \mathbb{N}^* \cap [1, m]$，$m \geq 2$ 考察联合概率 $\mathbb{P}[\cap_{k=1}^m \{Y_{N(s)+i_k} = j_k\}] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[\cap_{k=1}^m \{Y_{N(s)+i_k} = j_k\} \mid N(s) = n]\mathbb{P}(N(s) = n) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[\cap_{k=1}^m \{Y_{n+i_k} = j_k\} \mid N(s) = n]\mathbb{P}(N(s) = n)$. 而 $Y_{n+i_k} \overset{(d)}{=} Y_{i_k} \overset{(d)}{=} Y_1$，因为这里不再是随机下标. 那么

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[\cap_{k=1}^m \{Y_{n+i_k} = j_k\} \mid N(s) = n]\mathbb{P}(N(s) = n) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[\cap_{k=1}^m \{Y_{i_k} = j_k\} \mid N(s) = n]\mathbb{P}(N(s) = n) = \mathbb{P}[\cap_{k=1}^m \{Y_{i_k} = j_k\}].$$

这里最后一个等号先利用了 $\{Y_i\}_{i\geq 1} \perp\!\!\!\perp \{N(t)\}_{t\geq 0}$，再对 n 求和得到 $P(\Omega) = 1$ 消去求和号. 再利用 $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. 得到 $\mathbb{P}[\cap_{k=1}^m \{Y_{i_k} = j_k\}] = \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(Y_{i_k} = j_k)$. 带回原式即

$$\mathbb{P}[\cap_{k=1}^m \{Y_{N(s)+i_k} = j_k\}] = \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(Y_{i_k} = j_k).$$

对 $j_2, \cdots, j_k$ 求和可知 $Y_{N(s)+i_1} \overset{(d)}{=} Y_{i_1} \overset{(d)}{=} Y_1$. 同理 $Y_{N(s)+i_k} \overset{(d)}{=} Y_{i_k} \overset{(d)}{=} Y_1$. 独立性只需要将 $\prod_{k=1}^m \mathbb{P}(Y_{i_k} = j_k)$ 换成 $\prod_{k=1}^m \mathbb{P}(Y_{N(s)+i_k} = j_k)$ 即可.

(b) 为了叙述的方便引入记号：$\mathbb{P}_1(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid \cap_{p=1}^q \{N^s(t_p) = n_q\})$，$\mathbb{P}_2(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid \cap_{p=1}^q \{N(s+t_p) = n_p + n\} \cap \{N(s) = n\})$. 往证 $\mathbb{P}_1(\cap_{k=1}^m \{Y_{N(s)+i_k} = j_k\}) = \mathbb{P}(\cap_{k=1}^m \{Y_{N(s)+i_k} = j_k\})$. 同样地，利用全概率公式得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(\cap_{k=1}^m \{Y_{N(s)+i_k} = j_k\}) &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_2(\cap_{k=1}^m \{Y_{n+i_k} = j_k\})\mathbb{P}(N(s) = n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_2(\cap_{k=1}^m \{Y_{i_k} = j_k\})\mathbb{P}(N(s) = n) \\
&= \mathbb{P}_2(\cap_{k=1}^m \{Y_{i_k} = j_k\}) = \mathbb{P}(\cap_{k=1}^m \{Y_{i_k} = j_k\}).
\end{aligned}$$

而在 (a) 中已经得到 $(Y_{i_1},\cdots,Y_{i_k})\overset{(d)}{=}(Y_{N(s)+i_1},\cdots,Y_{N(s)+i_k})$. 代回 $\mathbb{P}(\cap_{k=1}^m\{Y_{i_k}=j_k\})=\mathbb{P}(\cap_{k=1}^m\{Y_{N(s)+i_k}=j_k\})$ 即可.

(3) 由引理 3.14 知道 $N^s(t)\sim\mathrm{PP}(\lambda)$ 且由 (2) (a) 知 $\{Y_i^s\}_{i\geq1}$ i.i.d. 且 $Y_i^s\overset{(d)}{=}Y_i$. 也就意味着 $N_1^s(t)$ 的构造完全和 $N_1(t)$ 的构造一致. 只需要证明 $N_1(t)\sim\mathrm{Poisson}(\lambda pt)$. 还是应用全概率公式

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1(t)=n)&=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}(N_1(t)=n\mid N(t)=n+m)\mathbb{P}(N(t)=n+m)\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n+m}\mathbf{1}_{\{Y_1=t\}}=n\mid N(t)=n+m)\mathbb{P}(N(t)=n+m)\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n+m}\mathbf{1}_{\{Y_1=t\}}=n)\mathbb{P}(N(t)=n+m)=\sum_{m=0}^{\infty}C_{n+m}^n p^n(1-p)^m\cdot\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}e^{-\lambda t}\\
&=\left[\frac{p^n}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}\right]\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-p)^m(\lambda t)^m}{m!}=\left[\frac{p^n}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}\right]e^{\lambda t(1-p)}=\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}.
\end{aligned}$$

□

【注 3.22】 由引理 3.21 知道其实 $\{N_1(t)\}_{t\geq0}$ 具有平稳增量，即 $N_1^s(t)\overset{(d)}{=}N_1(t)\sim\mathrm{Poisson}(\lambda pt)$.

【定理 3.23】 (稀释) 设 $\{N(t)\}_{t\geq0}\sim\mathrm{PP}(\lambda)$, $\{Y_i\}_{i\geq1}$ i.i.d. D.R.V. 列. 且 $\{Y_i\}_{i\geq1}\perp\!\!\!\perp\{N(t)\}_{t\geq0}$. 设 $\mathbb{P}(Y_1=j)=p_j$, $1\leq j\leq m$. 令 $N_j(t):=\sum_{i=1}^{N(t)}\mathbf{1}_{\{Y_i=j\}}$. 约定 $\sum_a^b(\cdot)=0$ 当 $b<a$. 则

(1) $N(t)=\sum_{j=1}^m N_j(t)$ a.s.;

(2) $\{N_j(t):t\geq0\}_{1\leq j\leq m}$ 为相互独立的 Poisson 过程且速率分别为 λp_j.

<u>**证明.**</u> (1) 只需要注意到

$$N(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}1=\sum_{i=1}^{N(t)}\left[\sum_{j=1}^m\mathbf{1}_{\{N(s)=j\}}\right]=\sum_{j=1}^m N_j(t)\text{ a.s.}$$

这里事实上用到了当 t 有限时有 $N(t)<\infty$ a.s.. 参考命题 4.3.

(2) $N(0)=N_1(0)+\cdots+N_m(0)=0$ a.s. $\rightsquigarrow N_j(0)=0$ a.s. 由注 3.22 我们只需要证明独立增量性. 这完全类似我们在引理 3.21 中的操作. 令 $0=t_0<t_1<\cdots<t_q$, 考虑

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\cap_{p=1}^q\{N_1(t_p)-N_1(t_{p-1})=m_p\}\mid(N(t_1),\cdots,N(t_q))=(n_1,\cdots,n_q)]\\
=&\,\mathbb{P}\left[\cap_{p=1}^q\left\{\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}\mathbf{1}_{\{Y_i=1\}}=m_p\right\}\mid(N(t_0),\cdots,N(t_q))=(n_1,\cdots,n_q)\right]\\
=&\,\mathbb{P}\left[\cap_{p=1}^q\left\{\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}\mathbf{1}_{\{Y_i=1\}}=m_p\right\}\right]\\
=&\prod_{p=1}^q\mathbb{P}\left[\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}\mathbf{1}_{\{Y_i=1\}}=m_p\right].
\end{aligned}$$

接下来，使用全概率公式

$$\mathbb{P}[\cap_{p=1}^q\{N_1(t_p)-N_1(t_{p-1})=m_p\}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(n_1,\cdots,n_q)} \mathbb{P}[\cap_{p=1}^{q}\{N_1(t_p)-N_1(t_{p-1})=m_p\} \mid (N(t_1),\cdots,N(t_q))=(n_1,\cdots,n_q)]\mathbb{P}[(N(t_1),\cdots,N(t_q))=(n_1,\cdots,n_q)] \\
&= \sum_{(n_1,\cdots,n_q)} \prod_{p=1}^{q} \mathbb{P}\left[\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} \mathbf{1}_{\{Y_i=1\}}=m_p\right]\mathbb{P}[(N(t_1),\cdots,N(t_q))=(n_1,\cdots,n_q)] \\
&= \sum_{(n_1,\cdots,n_q)} \prod_{p=1}^{q} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n_p-n_{p-1}} \mathbf{1}_{\{Y_i^{t_{p-1}}=1\}}=m_p\right]\mathbb{P}\left[N^{t_{p-1}}(t_p-t_{p-1})=n_p-n_{p-1}\right] \\
&= \sum_{(n_1,\cdots,n_q)} \prod_{p=1}^{q} \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n_p-n_{p-1}} \mathbf{1}_{\{Y_i^{t_{p-1}}=1\}}=m_p,\ N^{t_{p-1}}(t_p-t_{p-1})=n_p-n_{p-1}\right] \\
&= \sum_{(n_1,\cdots,n_q)} \prod_{p=1}^{q} \mathbb{P}\left[N_1(t_p)-N_1(t_{p-1})=m_p,\ N^{t_{p-1}}(t_p-t_{p-1})=n_p-n_{p-1}\right] = \prod_{p=1}^{q}\mathbb{P}[N_1(t_p)-N_1(t_{p-1})=m_p].
\end{aligned}
$$

倒数第三个等号利用了引理 3.21 中的独立性. 下面考察相互独立性. 取定正整数 n 以及 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$. 以及 m 个非负不减整数序列 $\{n_{q,j}\}_{q=0}^{n}$, $1\le j\le m$. 特别规定 $n_{0,j}\equiv 0$ $(1\le j\le m)$. 同时记 $n_q:=\sum_j n_{q,j}$. 对如下的 n 组随机变量向量列

$$
Z_{q,j} := \sum_{i=n_{q-1}+1}^{n_q} \mathbf{1}_{\{Y_i=j\}}. \rightsquigarrow (Z_{q,1},\cdots,Z_{q,m}) \sim \mathrm{Multinomial}(n_q-n_{q-1},p_1,\cdots,p_m).
$$

且相互独立，并与过程 $\{N(t)\}_{t\ge0}$ 独立. 考察联合概率

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\cap_{q=1}^{n}\cap_{j=1}^{m}\{N_j(t_q)=n_{q,j}\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\cap_{q=1}^{n}\left[\cap_{j=1}^{m}\{N_j(t_q)=n_{q,j}\}\cap\{N(t_q)=n_q\}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\cap_{q=1}^{n}\left[\cap_{j=1}^{m}\{N_j(t_q)-N_j(t_{q-1})=n_{q,j}-n_{q-1,j}\}\cap\{N(t_q)-N(t_{q-1})=n_q-n_{q-1}\}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\cap_{q=1}^{n}\cap_{j=1}^{m}\{Z_{q,j}=n_{q,j}-n_{q-1,j}\}\right)\mathbb{P}\left(\cap_{q=1}^{n}\{N(t_q)-N(t_{q-1})=n_q-n_{q-1}\}\right) \\
&= \prod_{q=1}^{n}(n_q-n_{q-1})!\prod_{j=1}^{m}\frac{p_j^{n_{q,j}-n_{q-1,j}}}{(n_{q,j}-n_{q-1,j})!}\cdot\left(e^{-\lambda(t_q-t_{q-1})}\frac{[\lambda(t_q-t_{q-1})]^{n_q-n_{q-1}}}{(n_q-n_{q-1})!}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{m}\left(\prod_{q=1}^{n}e^{-\lambda p_j(t_q-t_{q-1})}\frac{[\lambda p_j(t_q-t_{q-1})]^{n_{q,j}-n_{q-1,j}}}{(n_{q,j}-n_{q-1,j})!}\right).
\end{aligned}
$$

这就说明了不同的联合分布 $(N_j(t_1),\cdots,N_j(t_n))$ 的相互独立性. □

【注 3.24】 定理 3.23 也说明了在引理 3.21 中还有 $\{N_1^s(t)\}_{t\ge0}\sim\mathrm{PP}(\lambda p)$.

3.4.2 叠加

【定理 3.25】(叠加) 设 $\{N_j(t)\}_{t\ge0}\sim\mathrm{PP}(\lambda_j)$, $1\le j\le m$ 相互独立，那么 $(\sum_{j=1}^{m}N_j(t))_{t\ge0}\sim\mathrm{PP}(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j)$.

<u>**证明.**</u> 独立增量性由过程自身的独立增量性以及过程之间的独立性得到. 平稳增量由 Poisson 分布的可加性得到，即命题 3.6 (2). □

【例 3.26】 红队是一个速率为 λ 的 Poisson 过程，绿队是一个与之独立的速率为 μ 的 Poisson 过程，在 4 个绿队队员到达之前第 6 个红队队员已经到达的概率是多少？

<u>**解.**</u> 设红队和绿队的到达过程分别为 $\{N_1(t)\}_{t\ge0}\sim\mathrm{PP}(\lambda)$, $\{N_2(t)\}_{t\ge0}\sim\mathrm{PP}(\mu)$. 考察 $N(t):=N_1(t)+$

$N_2(t) \sim \mathrm{PP}(\lambda+\mu)$. 令 $\{Y_i\}_{i\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Bernoulli}(\lambda/(\lambda+\mu))$. 用 $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ 对 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 稀释. 由定理 3.23 知 $\widetilde{N}_j(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbf{1}_{\{Y_i=j\}}$, $j=1,2$ 分别与过程 $\{N_j(t)\}_{t\geq 0}$ 同分布且相互独立. 考察 $N(t)=9$ 时的条件分布. 所求为

$$\mathbb{P}(N_1(t)\geq 6 \mid N(t)=9) = \mathbb{P}(\hat{N}_1(t)\geq 6 \mid N(t)=9) = \sum_{m=6}^{9} C_9^m \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^m \Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\Big)^{9-m}.$$

3.4.3 条件分布

□

【引理 3.27】 **(到达时刻的条件分布 I)** 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0} \sim \mathrm{PP}(\lambda)$, $\{T_k\}_{k\geq 1}$ 为其到达时刻序列，则对任意 $n\geq 1$ 有 $(T_1,\cdots,T_n \mid N(t)=n)$ 的条件概率密度为

$$f(t_1,\cdots,t_n) = \frac{n!}{t^n}\mathbf{1}_{\{0<t_1<\cdots<t_n\leq t\}}.$$

<u>证明.</u> 和定理 3.17 中 I ⇒ II 的证明极其类似. 首先取 $0<\gamma_1<t_1<\cdots<\gamma_n<t_n\leq t$，那么 $A := \{\gamma_1 < T_1 \leq t_1,\cdots,\gamma_n<T_n\leq t_n, N(t)=n\} = \{N(\gamma_1)=0,\ N(\gamma_p)-N(t_{p-1})=0,\ 2\leq p\leq n,\ N(t_i)-N(\gamma_i)=1,\ 1\leq i\leq n,\ N(t)-N(t_n)=0\}$. 而后者可以利用独立增量性，即

$$\mathbb{P}(A) = (e^{-\lambda\gamma_1}\cdot e^{-\lambda(\gamma_2-t_1)}\cdots e^{-\lambda(\gamma_n-t_{n-1})})\cdot\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda(t_i-\gamma_i)}\lambda(t_i-\gamma_i)\cdot e^{-\lambda(t-t_n)} = e^{-\lambda t}\lambda^n\prod_{i=1}^{n}(t_i-\gamma_i).$$

令 $B := \{\gamma_1<T_1\leq t_1,\cdots,\gamma_n<T_n\leq t_n\}$. 那么

$$\mathbb{P}(B\mid N(t)=n) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(N(t)=n)} = \frac{e^{-\lambda t}\lambda^n\prod_{i=1}^n(t_i-\gamma_i)}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!} = \prod_{i=1}^{n}(t_i-\gamma_i)\frac{n!}{t^n} = \int_{\gamma_1}^{t_1}dx_1\cdots\int_{\gamma_n}^{t_n}\frac{n!}{t^n}dx_n.$$

□

【定理 3.28】 **(到达时刻的条件分布 II)** 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0}\sim\mathrm{PP}(\lambda)$, $\{T_k\}_{k\geq 1}$ 为其到达时刻序列，则对任意 $n\geq 1$ 有 $(T_1,\cdots,T_n\mid N(t)=n) \overset{(d)}{=} (V_1,\cdots,V_n)$. 其中 $V_1\leq V_2\leq\cdots\leq V_n$ 为 $\{U_k\}_{1\leq k\leq n}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathrm{Uniform}[0,t]$ 的重排，也即总体为 $\mathrm{Uniform}[0,t]$ 的次序统计量.

<u>证明.</u> 由引理 3.27, 只需要证明 $(V_1,\cdots,V_n)$ 的联合概率密度为 $f(y_1,\cdots,y_n)=n!/t^n\mathbf{1}_{\{0<y_1<\cdots<y_n\leq t\}}$. 令 $A_k := (x_k,y_k]$, $k=1,2,\cdots,n$, 其中 $x_1<y_1<x_2<\cdots<x_n<y_n$. 由全概率公式

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_1\in A_1,\cdots,V_n\in A_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathbb{P}(V_1\in A_1,\cdots,V_n\in A_n\mid U_1\in A_{\sigma(1)},\cdots,U_n\in A_{\sigma(n)})\,\mathbb{P}(A_{\sigma(1)},\cdots,U_n\in A_{\sigma(n)})\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} 1\cdot\mathbb{P}(U_1\in A_{\sigma(1)},\cdots,U_n\in A_{\sigma(n)})\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathbb{P}(U_1\in A_{\sigma(1)})\cdots\mathbb{P}(U_n\in A_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma\in S_n}1/t^n = n!/t^n.\end{aligned}$$

□

【命题 3.29】 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0}\sim\mathrm{PP}(\lambda)$, $0<s<t$, $0\leq m\leq n$，则 $(N(s)\mid N(t)=n)\sim\mathrm{Binomial}(n,s/t)$. 即 $\mathbb{P}(N(s)=m\mid N(t)=n) = C_n^m(s/t)^m(1-s/t)^{n-m}$.

<u>证明.</u> 由定义 3.12 知 $N(s)=\max\{n\mid T_n\leq s\} = \sum_{k=1}^{N(t)}\mathbf{1}_{\{T_k\leq s\}}$. 应用定理 3.28

$$\mathbb{P}(N(s)=m\mid N(t)=n) = \mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{T_k\leq s\}}=m\,\middle|\,N(t)=n\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{V_k \le s\}} = m\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k \le s\}} = m\right] = C_n^m \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-m}.
\end{aligned}
$$

□

【例 3.30】 乘客按照 $\{N(t)\}_{t\ge 0} \sim \mathrm{PP}(\lambda)$ 到达车站，火车会在 t 时刻离开，计算 $(0,t)$ 中到达的乘客等待火车离开的时长期望 $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-T_k)\right]$.

<u>解.</u> 应用定理 3.28 即可. 首先计算

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i) \,\middle|\, N(t)=n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(t-T_i) \,\middle|\, N(t)=n\right] \\
&= nt - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right] = nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}.
\end{aligned}
$$

利用重期望公式有

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(t-T_i) \,\middle|\, N(t)=n\right] \mathbb{P}(N(t)=n) = \frac{t}{2}\cdot \mathbb{E}[N(t)].
$$

而 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$, i.e., $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$. 带回上式得到

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\right] = \frac{\lambda t^2}{2}.
$$

□

§3.5 轨道的右连左极性 (càdlàg)

【命题 3.31】 The path of a Poisson process is càdlàg almost surely.

【命题 3.32】 设 $\{N(t)\}_{t\ge 0} \sim \mathrm{PP}(\lambda)$. 对任意 $i \in \mathbb{N}$，那么

$$
\bigcup_{t\ge 0}\{N(t)=i\} = \bigcup_{\mathbb{Q}\ni t\ge 0}\{N(t)=i\} \text{ a.s.} \rightsquigarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{t\ge 0}\{N(t)=i\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\mathbb{Q}\ni t\ge 0}\{N(t)=i\}\right).
$$

<u>证明.</u> 设除去零测集 $\widetilde{\Omega}^c$ 后 Poisson 过程的轨道满足 càdlàg. 下设 $\omega \in \widetilde{\Omega}$, 令

$$
A := \bigcup_{t\ge 0}\{\omega : \{N(t,\omega)=i\}\},\ B := \bigcup_{\mathbb{Q}\ni t\ge 0}\{\omega : \{N(t,\omega)=i\}\}.
$$

只需要证明 $A \subseteq B$. 任取 $\omega \in A$，不妨 $N(t_0,\omega) = i$, $t_0 \ge 0$. 由右连续性，存在 $\delta > 0$，使得对 $t \in [t_0, t_0+\delta)$ 都有 $N(t,\omega) = i$. 这里注意 $N(t)$ 的取值是离散的. 特别地，由于有理数集的稠密性，取 $\mathbb{Q} \ni t_1 \in [t_0, t_0+\delta)$ 有 $N(t_1,\omega) = i$. 故 $\omega \in B$. □

Chapter 4

更新过程

§4.1 定义和基本性质

【定义 4.1】(更新过程, 定义 3.12 的推广) 设非负 D.R.V. 列 $\{\tau_k\}_{k\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F(\cdot)$ 分布函数, 即 $\mathbb{P}(\tau_1 \leq t) = F(t)$. 其中, 约定 $F(0) = 0$, 则 $0 < \mathbb{E}\tau_1 \leq +\infty$. 令 $T_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$, $n \geq 1$. 约定 $T_0 = 0$. 则称由 $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}\mathbf{1}_{\{t>0\}}$ 定义的计数过程为更新过程.

【引理 4.2】(强大数定律, SLLN) 设$\{X_k\}_{k\geq 1}$ i.i.d. 且 $\mathbb{E}|X_1| < +\infty$. 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 则 $S_n/n \overset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}X_1$ a.s.

【命题 4.3】 对任意 $t \geq 0$ 都有 $N(t) < \infty$ a.s. 即存在零测集 $\widetilde{\Omega}^c$ 使得对任意 $\omega \in \widetilde{\Omega}$ 都有 $N(t,\omega) < \infty$. 进一步, 若 $\{N(t) < \infty\}$ 可测, 那么 $\mathbb{P}(N(t) < \infty) = 1$.

证明. 应用引理 4.2, 存在零测集 $\widetilde{\Omega}^c$ 使得对任意 $\omega \in \widetilde{\Omega}$ 都有 $T_n(\omega)/n \to \mathbb{E}\tau_1$. 因 $T_n \geq 0$ 为单调递增序列, 故只能 $T_n(\omega) \to +\infty$, $\omega \in \widetilde{\Omega}$. 这说明对给定的 $t \geq 0$ 至多只有有限个 n 使得 $T_n(\omega) \leq t$, $\omega \in \widetilde{\Omega}$. 换言之, $N(t,\omega) < \infty$, $\omega \in \widetilde{\Omega}$. □

【推论 4.4】 在定义 4.1 的假设下, 对任意 $t \geq 0$, 有 $\lim_{n\to\infty} F^{*n}(t) = 0$. 这里 $F^{*n}(t)$ 表示分布函数 $F(t)$ 的 n 重卷积.

【注 4.5】 命题 4.3 说明更新过程的轨道在有限时间内以概率 1 只会跳有限次.

§4.2 更新过程的极限定理

【引理 4.6】 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 为更新过程, 那么 $N(t) \overset{t\to\infty}{\to} +\infty$ a.s. 即存在零测集 $\widetilde{\Omega}^c$ 使得对任意 $\omega \in \widetilde{\Omega}$ 都有 $\lim_{t\to+\infty} N(t,\omega) = \infty$. 进一步, 由于 $N(t)$ 的轨道右连左极 (càdlàg) 的, 则 $\lim_{t\to+\infty} N(t) \in \mathscr{F}$, 那么 $\mathbb{P}(\{\lim_{t\to+\infty} N(t) = \infty\}) = 1$.

证明. 考察 $\omega \in \{\lim_{t\to\infty} N(t) < \infty\}$. 因 $N(t)$ 关于 t 不减. 即存在 $M > 0$ 对任意 $t \geq 0$ 有 $N(t) \leq M$. 即 $T_M \leq t < T_{M+1}$. 又 $t \geq 0$ 为任意的, 那么 $T_{M+1} = +\infty$. 即

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lim_{t\to+\infty} N(t) < \infty) &= \mathbb{P}(\exists\, n, T_n = \infty) = \mathbb{P}(\exists\, n, \tau_n = \infty) \\ &\leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\tau_n = \infty) = \sum_{n\geq 1} [1 - \mathbb{P}(\tau_n < \infty)] = \sum_{n\geq 1} [1 - \lim_{t\to+\infty} F(t)] = 0.\end{aligned}$$

□

【定理 4.7】(LLN) 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 为更新过程，那么

$$\frac{N(t)}{t} \overset{t\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{\mathbb{E}\tau_1}\ a.s.$$

证明. 取 $\widetilde{\Omega}_1 := \{\omega : \lim_{t\to\infty} N(t) = \infty\}$, $\widetilde{\Omega}_2 := \{\omega : \lim_{n\to\infty} T_n/n = \mathbb{E}\tau_1\}$. 由引理 4.2 和引理 4.6 知 $\widetilde{\Omega}_1^c, \widetilde{\Omega}_2^c$ 均为零测集. 令 $\omega \in \widetilde{\Omega}_1 \cap \widetilde{\Omega}_2$ 取足够大的 t 使 $N(t) > 0$. 成立

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1} \rightsquigarrow \frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

此时由我们对 $\widetilde{\Omega}_1, \widetilde{\Omega}_2$ 的选取，轻易得到

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{T_{N(t)}}{N(t)} = \mathbb{E}\tau_1. \rightsquigarrow \lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \mathbb{E}\tau_1.$$

利用概率测度的次可列可加性，即命题 1.5 (2)，得到可列个零测集的并为零测集. 即 $\widetilde{\Omega}^c := \widetilde{\Omega}_1^c \cup \widetilde{\Omega}_2^c$ 为零测集. 对 $\omega \in \widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_1 \cap \widetilde{\Omega}_2$，已经证明 $N(t)/t \to 1/\mathbb{E}\tau_1$. □

4.2.1 更新报酬过程

【定义 4.8】(更新报酬过程) 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 为更新过程，$\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ 为其更新时间间隔序列，$\{r_k\}_{k\geq 1}$ i.i.d. 这里未必有 $\{r_k\}_{k\geq 1} \perp\!\!\!\perp \{N(t)\}_{t\geq 0}$. 则称 $R(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} r_k \mathbf{1}_{\{N(t)\neq 0\}}$ 为更新报酬过程.

【定理 4.9】(LLN I) 在定义 5.12 的假设下，若 $\mathbb{E}|r_1| < +\infty, \mathbb{E}\tau_1 < \infty$. 那么

$$\frac{R(t)}{t} \overset{t\to\infty}{\rightarrow} \frac{\mathbb{E}r_1}{\mathbb{E}\tau_1}\ a.s.$$

证明. 定义

$$\widetilde{\Omega}_1 := \left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n r_k}{n} = \mathbb{E}r_1\right\}, \widetilde{\Omega}_2 := \{\omega : \lim_{t\to\infty} N(t)/t = 1/\mathbb{E}\tau_1\}.$$

由引理 4.2 和定理 4.7 知 $\widetilde{\Omega}_1^c, \widetilde{\Omega}_2^c$ 均为零测集. 且对任意 $\omega \in \widetilde{\Omega}_2$ 必定有 $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$. 那么取 $\omega \in \widetilde{\Omega}_1 \cap \widetilde{\Omega}_2$ 就有

$$\frac{R(t)}{t} = \frac{R(t)}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t} \to \frac{\mathbb{E}r_1}{\mathbb{E}\tau_1}.$$

利用概率测度的次可列可加性，即命题 1.5 (2)，得到可列个零测集的并为零测集. 即 $\widetilde{\Omega}^c := \widetilde{\Omega}_1^c \cup \widetilde{\Omega}_2^c$ 为零测集. 对 $\omega \in \widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_1 \cap \widetilde{\Omega}_2$，已经证明 $R(t)/t \to \mathbb{E}r_1/\mathbb{E}\tau_1$. □

【定理 4.10】(LLN II) 在定理 5.12 的假设下，再设 $\{(r_k, \tau_k)\}_{k\geq 1}$ i.i.d. 那么

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}R(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}r_1}{\mathbb{E}\tau_1}.$$

证明. 这个定理不证. □

4.2.2 交替更新过程

【定义 4.11】 **(交替更新过程)** 设 $\{(s_k,u_k)_{k\geq 1}\}$ i.i.d. R.V. 列. 其中 $s_k,u_k\geq 0$ 对任意 $k\geq 1$ 成立. 令 $\tau_k:=s_k+u_k$, $k\geq 1$. 定义 $N(t):=\max\{n:\sum_{k=1}^{n}\tau_k\leq t\}\mathbf{1}_{\{t>0\}}$, 则称 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 为交替更新过程.

【定理 4.12】 **(LLN)** 在定义 4.11 的前提下, 设 $\mathbb{E}s_1,\mathbb{E}u_1<\infty$，那么

(1) $\sum_{k=1}^{N(t)} s_k/t \overset{t\to\infty}{\to} \dfrac{\mathbb{E}s_1}{\mathbb{E}s_1+\mathbb{E}u_1}$ a.s.

(2) 任意 $[0,t]$ 中系统处于状态 1(对应 s_k) 的时长比例 $\overset{t\to\infty}{\to} \dfrac{\mathbb{E}s_1}{\mathbb{E}s_1+\mathbb{E}u_1}$ a.s.

<u>证明.</u> (1) 直接由定理 4.9 得到. (2) 注意 (1) 中事实上刻画的是 $[0,T_{N(t)}]$ 中系统处于状态 1 的时长比例. 令 $U(t)$ 表示 $[0,t]$ 中系统处于状态 1 的时长比例, 由放缩

$$\frac{\sum_{k=1}^{N(t)} s_k}{t}\leq\frac{U(t)}{t}\leq\frac{\sum_{k=1}^{N(t)+1} s_k}{t}.$$

两边取极限，即得. □

4.2.3 使用年龄和剩余寿命

【定义 4.13】 在定义 4.1 下，设 $t\in[T_{N(t)},T_{N(t)+1}]$，定义设备的使用年龄 $A(t):=t-T_{N(t)}$ 以及剩余寿命 $Z(t):=T_{N(t)+1}-t$.

【命题 4.14】 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 为更新过程，$\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ 为其更新时间间隔序列，设 $\mathbb{E}\tau_1^2<\infty$, $0<\mathbb{E}\tau_1<\infty$，则设备的长程平均使用年龄

$$\frac{1}{t}\int_0^t A(s)ds \overset{t\to\infty}{\to} \frac{\mathbb{E}\tau_1^2}{2\mathbb{E}\tau_1}\quad \text{a.s.}$$

<u>证明.</u> 放缩

$$\int_0^{T_{N(t)}} A(s)ds\leq\int_0^t A(s)ds\leq\int_0^{T_{N(t)+1}} A(s)\,ds.$$

规定 $T_0=0$. 考察

$$\int_0^{T_{N(t)}} A(s)\,ds=\sum_{k=1}^{N(t)}\int_{T_{k-1}}^{T_k}(s-T_{k-1})\,ds=\sum_{k=1}^{N(t)}\frac{1}{2}(s-T_{k-1})^2\Big|_{T_{k-1}}^{T_k}=\sum_{k=1}^{N(t)}\frac{\tau_k^2}{2}.$$

应用定理 4.9 得到

$$\frac{1}{t}\int_0^{T_{N(t)}} A(s)ds=\frac{\sum_{k=1}^{N(t)}\tau_k^2}{2t}\overset{t\to\infty}{\to}\frac{\mathbb{E}\tau_1^2}{2\mathbb{E}\tau_1}\quad\text{a.s.}$$

同理

$$\int_0^{T_{N(t)+1}} A(s)ds \overset{t\to\infty}{\to} \frac{\mathbb{E}\tau_1^2}{2\mathbb{E}\tau_1}\quad\text{a.s.}$$

□

Chapter 5

连续时间 Markov 链

§5.1 概念和例子

【定义 5.1】 (马氏性) 称 S 值过程 $\{X_t : t \geq 0\}$ 具有马氏性，若对任意 $n \geq 1$, $i, j, i_0, \cdots, i_n \in S$, $0 \leq s_0 < \cdots < s_n < s$ 以及 $t > 0$ 有

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i, X_{s_0} = i_0, X_{s_k} = i_k,\ 1 \leq k \leq n) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i).$$

其中称 $\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i) = p_{s,t+s}(i,j)$ 为转移概率.

【定义 5.2】 (连续时间 Markov 链) 称 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 是一个连续时间 Markov 链 (Continuous Time Markov Chain, CTMC)，若其具有马氏性且轨道右连续.

【定义 5.3】 (时齐性) 称 CTMC $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 的转移概率具有时齐性，若 $p_{s,s+t}(i,j) = p_{0,t}(i,j)$ $(\forall\, i, j \in S,\ s, t \geq 0)$. 此时称过程 X 为时齐的，并简记 $p_t(i,j) := p_{0,t}(i,j) = p_{s,s+t}(i,j)$.

【定义 5.4】 (正则性) 称 $\{X_t\}_{t\geq 0} \sim \mathrm{CTMC}((p_t(i,j))_{i,j\in S})$ 具有正则性，若 $\lim\limits_{t\to 0^+} p_t(i,j) = \delta_{ij}$.

【定义 5.5】 (转移半群) 称矩阵族 $\{P_t = (p_t(i,j))_{i,j\in S} : t \geq 0\}$ 为过程的转移半群，若

(1) $\lim\limits_{t\to 0^+} P_t = I$;

(2) 每一个 P_t 都是随机矩阵;

(3) (C-K 方程/半群性质) $P_{s+t} = P_s P_t$ 对任意 $s, t \geq 0$ 成立. 即 $p_{s+t}(i,j) = \sum\limits_{k\in S} p_s(i,k) p_t(k,j)$.

【例 5.6】 Poisson 过程为一个时齐的 CTMC.

<u>证明.</u> 由命题 3.11 即得 Markov 性质. 下证时齐性. 由引理 3.14 知 $\mathbb{P}(N_{t+s} = j \mid N_s = i) = \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = j - i \mid N_s = i) = \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = j - i) = \mathbb{P}(N_t = j - i$. 最后一个等号运用了 Poisson 过程的平稳增量性质，即定义 3.8 (3). $\square$

【例 5.7】 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0} \sim \mathrm{PP}(\lambda)$, $\{Y_n\}_{n\geq 0} \sim \mathrm{Markov}(\mu, P)$ 且 $\{N(t)\}_{t\geq 0} \perp\!\!\!\perp \{Y_n\}_{n\geq 1}$. 记 $X(t) := Y_{N(t)}$, $t \geq 0$. 则过程 $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ 为一个时齐的 CTMC.

<u>证明.</u> 分两步验证.

(Step I) 先验证转移概率的表达式为 $\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i) = \sum\limits_{n\geq 0} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n u^{(n)}(i,j)/n!$ 仅与时间差 t 有关. 由 $\{N(t)\}_{t\geq 0} \perp\!\!\!\perp \{Y_n\}_{n\geq 1}$，那么 $\mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_s = i \mid N(s) = m,\ N(t+s) = \tilde{m},\ 0 \leq m \leq \tilde{m}) = \mathbb{P}(Y_{\tilde{m}} =$

$j, Y_m = i \mid N(s) = m,\ N(t+s) = \tilde{m},\ 0 \le m \le \tilde{m}) = \mathbb{P}(Y_{\tilde{m}} = j, Y_m = i)$. 考察联合概率

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_s = i) &= \sum_{0\le m\le\tilde{m}} \mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_s = i \mid N(s) = m,\ N(t+s) = \tilde{m})\mathbb{P}(N(s) = m,\ N(t+s) = \tilde{m}) \\
&= \sum_{0\le m\le\tilde{m}} \mathbb{P}(Y_{\tilde{m}} = j, Y_m = i)\mathbb{P}(N(s) = m,\ N(t+s) - N(s) = \tilde{m} - m) \\
&= \sum_{0\le m\le\tilde{m}} \mathbb{P}(Y_{\tilde{m}} = j \mid Y_m = i)\mathbb{P}(Y_m = i)\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = \tilde{m} - m)\mathbb{P}(N(s) = m) \\
&= \sum_{m\ge 0}\left(\sum_{\tilde{m}-m\ge 0} u^{(\tilde{m}-m)}(i,j)\frac{(\lambda t)^{\tilde{m}-m}}{(\tilde{m}-m)!}e^{-\lambda t}\right)\mathbb{P}(Y_m = i)\mathbb{P}(N(s) = m) \\
&= \sum_{m\ge 0}\left(\sum_{\tilde{m}-m\ge 0} u^{(\tilde{m}-m)}(i,j)\frac{(\lambda t)^{\tilde{m}-m}}{(\tilde{m}-m)!}e^{-\lambda t}\right)\mathbb{P}(X_s = i, N(s) = m) \\
&= \left(\sum_{n\ge 0} u^{(n)}(i,j)\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\right)\mathbb{P}(X_s = i).
\end{aligned}$$

(Step II) 验证 Markov 性质. 只需要验证对任意 $n \ge 0,\ i, j, i_0, i_1, i_2, \cdots, i_n \in S,\ 0 \le s_0 < s_1 < \cdots < s_n < s,\ t > 0$ 成立

$$\mathbb{P}\{X_{t+s=j} \mid X_s = i, X_{s_0} = i_0, \cdots, X_{s_k} = i_k,\ 0 \le k \le n\} = \sum_{n\ge 0} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}u^{(n)}(i,j).$$

不妨固定 $0 \le k \le n$，取单调不减非负整数序列 $\{m_p\}_{p=1}^k\}$,再取整数 $\tilde{m} \ge m \ge m_p$，考虑如下事件

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\{X_{t+s} = j, X_s = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^k \{X_{s_p} = i_p\}\right] \middle| \{N(t+s) = \tilde{m}, N(s) = m\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^k \{N(s_p) = m_p\}\right]\right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{\{Y_{\tilde{m}} = j, Y_m = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^k \{Y_{m_i} = i_p\}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

那么联合概率

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\{X_{t+s} = j, X_s = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^k \{X_{s_p} = i_p\}\right]\right\} \\
&= \sum_{\substack{\tilde{m}\ge m\ge m_p \\ 0\le p\le k}} \mathbb{P}\left\{\{Y_{\tilde{m}} = j, Y_m = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^k \{Y_{m_i} = i_p\}\right]\right\}\mathbb{P}\left\{\{N(t+s) = \tilde{m}, N(s) = m\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^k \{N(s_p) = m_p\}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

利用 $\{Y_n\}_{n\ge 1}$ 为 DTMC，以及由例 5.7 知 $\{N(t)\}_{t\ge 0}$ 为 CTMC，都具有 Markov 性质，得到

$$\mathbb{P}\left\{\{Y_{\tilde{m}} = j, Y_m = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^k \{Y_{m_i} = i_p\}\right]\right\} = \mathbb{P}\{Y_{\tilde{m}} = j \mid Y_m = i\}\mathbb{P}\left\{\{Y_m = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^k \{Y_{m_i} = i_p\}\right]\right\}. \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\{N(t+s) = \tilde{m}, N(s) = m\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^k \{N(s_p) = m_p\}\right]\right\} \\
&= \mathbb{P}\{N(t+s) = \tilde{m} \mid N(s) = m\}\mathbb{P}\left\{\{N(s) = m\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^k \{N(s_p) = m_p\}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

利用独立性得到式 (5.2) 和 (5.3) 的第二项的乘积为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\{Y_m = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^{k}\{Y_{m_i} = i_p\}\right]\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{\{N(s) = m\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^{k}\{N(s_p) = m_p\}\right]\right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{\{Y_m = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^{k}\{Y_{m_i} = i_p\}\right] \cap \{N(s) = m\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^{k}\{N(s_p) = m_p\}\right]\right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{\{X_s = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^{k}\{X_{s_p} = i_p\}\right] \cap \{N(s) = m\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^{k}\{N(s_p) = m_p\}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

利用 Poisson 过程的平稳增量性质得到

$$\mathbb{P}\{Y_{\tilde{m}} = j \mid Y_m = i\} \cdot \mathbb{P}\{N(t+s) = \tilde{m} \mid N(s) = m\} = u^{\tilde{m}-m}(i,j) \cdot \frac{(\lambda t)^{\tilde{m}-m}}{(\tilde{m}-m)!} e^{-\lambda t}.$$

将以上结果带入 (5.1) 式中，右式对 $m_k \geq m_{k-1} \geq \cdots \geq m_0 \geq 0$ 求和得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\{X_{t+s} = j, X_s = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^{k}\{X_{s_p} = i_p\}\right]\right\} \\
&= \sum_{\tilde{m} \geq m \geq 0} u^{\tilde{m}-m}(i,j) \cdot \frac{(\lambda t)^{\tilde{m}-m}}{(\tilde{m}-m)!} e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{P}\left\{\{X_s = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^{k}\{X_{s_p} = i_p\}\right] \cap \{N(s) = m\}\right\} \\
&= \sum_{m \geq 0} \left[\sum_{n := \tilde{m}-m \geq 0} u^{\tilde{m}-m}(i,j) \cdot \frac{(\lambda t)^{\tilde{m}-m}}{(\tilde{m}-m)!} e^{-\lambda t}\right] \cdot \mathbb{P}\left\{\{X_s = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^{k}\{X_{s_p} = i_p\}\right] \cap \{N(s) = m\}\right\} \\
&= \left[\sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} u^{(n)}(i,j)\right] \cdot \mathbb{P}\left\{\{X_s = i\} \cap \left[\bigcap_{p=0}^{k}\{X_{s_p} = i_p\}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

移项后得到

$$\mathbb{P}\{X_{t+s=j} \mid X_s = i, X_{s_0} = i_0, \cdots, X_{s_k} = i_k,\ 0 \leq k \leq n\} = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} u^{(n)}(i,j).$$

□

§5.2

转移速率矩阵和嵌入链

5.2.1 转移概率的连续性

【命题 5.8】 设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 为 S 上转移半群，则

(1) $\forall\, t \geq 0,\ i \in S$ 有 $p_t(i,i) > 0$;

(2) 若存在 $s > 0$ 使得 $p_s(i,i) = 1$，则对任意 $t \geq 0$ 都有 $p_t(i,i) = 1$;

(3) 若存在 $s > 0$ 使得 $p_s(i,j) > 0$，则对任意 $t \geq s$ 都有 $p_t(i,j) > 0$.

证明. (1) 利用正则性，即定义 5.4 可知 $\lim\limits_{t\to 0^+} p_t(i,i) = 1$. 即存在 $\delta > 0$, 对任意 $t \in (0,\delta]$ 都有 $p_t(i,i) > 0$. 而对 $t > \delta$，取 $s \in (0,\delta]$, $n \in \mathbb{N}^*$ 使 $t = s + n\delta$. 由 C-K 方程知 $p_t(i,i) \geq p_\delta^n(i,i) p_s(i,i) > 0$. (2) 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$,

由 C-K 方程知 $1 \geq p_{ns}(i,i) \geq p_s^n(i,i) = 1$. 故 $p_{ns}(i,i) = 1$. 接下来反证. 若存在 $t > 0$ 使 $0 < p_t(i,i) < 1$. 由 P_t 为随机矩阵，则 $\sum_{k\neq i} p_t(i,k) > 0$. 也即存在 $j \neq i$ 使 $p_t(i,j) > 0$. 取 $n \in \mathbb{N}^*$ 满足 $ns \geq t$，并注意到由 (1) 有 $p_{ns-t}(j,j) > 0$. 由下导出矛盾:

$$1 = p_{ns}(i,i) = 1 - \sum_{k\neq i} p_{ns}(i,k) \leq 1 - p_{ns}(i,j) \leq 1 - p_t(i,j)p_{ns-t}(j,j) < 1.$$

(3) 由 C-K 方程知 $p_t(i,j) \geq p_s(i,j)p_{t-s}(j,j) > 0$ 当 $t \geq s$. □

【定理 5.9】(一致连续性) 设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 为 S 上随机半群，则对 $t \geq s \geq 0$, $i,j \in S$ 有 $|p_t(i,j) - p_s(i,j)| \leq |1 - p_{t-s}(i,i)|$. 自然地，由上述不等式知 $p_t(i,j)$ 关于 $t \geq 0$ 一致连续.

<u>**证明.**</u> 首先还是利用 C-K 方程

$$\begin{aligned} p_t(i,j) - p_s(i,j) &= \sum_{k\neq i} p_{t-s}(i,k)p_s(k,j) + p_{t-s}(i,i)p_s(i,j) - p_s(i,j) \\ &= \sum_{k\neq i} p_{t-s}(i,k)p_s(k,j) - [1 - p_{t-s}(i,i)]p_s(i,j) := I_1 - I_2 \end{aligned}$$

注意到 $I_1 \leq \sum_{k\neq i} p_{t-s}(i,k) = 1 - p_{t-s}(i,i)$, $I_2 \leq 1 - p_{t-s}(i,i)$ 也是自然的. 故 $|I_1 - I_2| \leq \max\{|I_1|, |I_2|\} \leq 1 - p_{t-s}(i,i)$. 即证. □

5.2.2 转移概率的可微性: Kolmogorov 方程

本小节所有结论不证.

【定义 5.10】(密度矩阵/Q矩阵) 称 S 上的矩阵 $Q = (q(i,j))_{i,j\in S}$ 为密度矩阵，若

(1) $\forall\, i \in S$, $q_i := -q(i,i) \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$;

(2) $\forall\, i \neq j \in S$, $q(i,j) \in [0,+\infty)$;

(3) $\forall\, i \in S$, $\sum_{k\neq i} q(i,k) \leq q_i$.

【定义 5.11】(保守 Q 矩阵) 在定义 5.10 前提下，若 $\forall i$, $q_i := |q(i,i)| = \sum_{k\neq i} q(i,k) < \infty$，则称密度矩阵 Q 保守，即行和为 0.

【定理 5.12】(可微性) 设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 为 S 上随机半群，则 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 在 $t = 0$ 处的右导数存在，具体地，下列两个极限存在:

(1) $\forall\, i \in S$, $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{p_t(i,i) - 1}{t} := q(i,i) = -\sup_{t\geq 0} \dfrac{1 - p_t(i,i)}{t} \in (-\infty, 0] \cup \{-\infty\}$;

(2) $\forall\, j \neq i \in S$, $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{p_t(i,j)}{t} := q(i,j) \in [0,+\infty)$;

(3) $\forall\, i \in S$, $\sum_{k\neq i} q(i,k) \leq -q(i,i)$.

【定义 5.13】(转移速率矩阵) 设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 为 S 上随机半群，则由定理 5.12 和定义 5.12 知 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 在 $t = 0$ 处的右导数矩阵 $Q := P_t' = (p_t'(i,j))_{i,j\in S}$ 存在且其为密度矩阵. 称此 Q 为 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 或马氏过程 X 的转移速率矩阵或无穷小生成元. 当 $\#S < \infty$ 时，Q 必定是保守的.

【定理 5.14】(Kolmogorov) 对具有保守的 Q 的 S 上随机半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 成立

$$\begin{cases} P_t' = QP_t, \\ P_0 = I \end{cases} \quad \begin{cases} P_t' = P_tQ, \\ P_0 = I \end{cases}$$

其中第一个方程被称为 Kolmogorov 向后方程; 第二个方程被称为 Kolmogorov 向前方程.

【定理 5.15】 在适当的正则性条件下，定理 5.14 中的两个方程存在唯一解.

【推论 5.16】 若状态空间 S 有限，则定理 5.14 中的两个方程的解可以写为形式矩阵级数 $P_t = e^{tQ} = \sum_{n\geq 0}(tQ)^n/n!$.

5.2.3 轨道的跳跃性质

【定理 5.17】 设 S 值右连续马氏链 $\{X_t : t \geq 0\} =: X$ 具有保守的转移速率矩阵 $Q = (q(i,j)_{i,j\in S})$. 定义首跳时间 $\eta := \inf\{t > 0 : X_t \neq X_0\}$. 其中 $\inf\varnothing = \infty$. 那么对任意 $t \geq 0$ 有 $\mathbb{P}_i(\eta > t) = \mathbb{P}(\eta > t \mid X_0 = i) = e^{-q_i t}$. 即在 $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$ 下有 $\eta \sim \mathrm{Exp}(q_i)$, 其中 $q_i := -q(i,i)$.

<u>**证明.**</u> 首先考察

$$\lim_{s\to 0^+}[p_{st}(i,i)]^{1/s} = \lim_{s\to 0^+}\exp\left(\frac{\ln p_{st}(i,i) - 1}{st}\cdot t\right) = \exp\left(\lim_{s\to 0^+}\frac{\ln p_{st}(i,i) - 1}{st}\cdot t\right) = e^{-q_i t}.$$

断言 $\mathbb{P}(\eta > t \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(X_s = i, \forall s \in [0,t] \mid X_0 = i)$. 只验证右边包含在左边. 由 $X_t = i$ 并利用右连续性，那么存在 $\delta > 0$, 使得对 $u \in [t, t+\delta]$ 有 $X_u = i$. 那么 $\eta \geq t + \delta > t$. 再次利用右连续性，

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(X_s = i, \forall s \in [0,t]) &= \mathbb{P}\left(\cap_{n\geq 1}\{X_{\frac{kt}{2^n}} = i,\ k = 0, 1, \cdots, 2^n\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_i\left(X_{\frac{kt}{2^n}} = i,\ k = 0, 1, \cdots, 2^n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}(p_{t/2^n}(i,i))^{2^n} = e^{-q_i t}. \end{aligned}$$

这里的第一个等号类似命题 3.32 的处理，考察 $\omega \in \{X_s(\omega) = i, \forall s \in [0,t]\}$. 那么对任意 $\ell \in [0,t]$，存在 $\delta_\ell > 0$，使得对 $u \in [\ell, \ell+\delta)$ 成立 $X_u(\omega) = i$. 总可以找到 $N_\ell \geq 1$ 使得 $\delta > t/2_\ell^N$. 此时 $\omega \in \cap_{n\geq 1}\{X_{kt/2^{N_\ell}}, k = 0, 1, \cdots, 2^{N_\ell}\}$，即 $kt/2^{N_\ell}$ 至少有一个落在区间 $[\ell, \ell+\delta)$. 根据 ℓ 的任意性，

$$\cap_{s\in[0,t]}\{X_s = i\} \subseteq \cap_{n\geq 1}\{X_{\frac{kt}{2^n}} = i,\ k = 0, 1, \cdots, 2^n\}.$$

□

【推论 5.18】 在定理 5.17 条件下，若 $q(i,i) = 0$，那么 $\mathbb{P}_i(\eta > t) = 1$ 对任意 $t \geq 0$ 成立. 即 $\mathbb{P}_i(\eta = \infty) = 1$. 说明 $\mathbb{P}(X_t = i, t \geq 0 \mid X_0 = i) = 1$, 换言之 i 为吸收态.

令 $T_0 = 0$. 归纳定义第 n 次跳跃时间 $T_n := \inf\{t > 0 \mid X_t \neq X_{T_{n-1}}\}$ $(n \geq 1)$. 其中 $T_1 = \eta$.

【定理 5.19】(嵌入链) 设 S 值右连续马氏链 $\{X_t : t \geq 0\} =: X$ 具有保守的转移速率矩阵 $Q = (q(i,j)_{i,j\in S})$. 则

(1) 在 $[0, \lim_{n\to\infty} T_n)$ 上，X 的轨道为阶梯函数，即 $X_t = X_{T_n}$，$t \in [T_n, T_{n+1})$;

(2) 若 $q_i > 0$，则 $\{X_{T_n}\}_{n\geq 0} \sim \mathrm{DTMC}(\hat{P})$，其中 $\hat{P}_{i,j} := \hat{p}_{i,j} = (q(i,j)/q_i)[1 - \delta_{ij}]$. 此时称 $\{X_{T_n}\}_{n\geq 0}$ 为 CTMC X 的嵌入链.

5.2.4 利用跳过程构造 CTMC

一个自然的问题，若已知保守的密度矩阵 Q，那么我们可以构造一个嵌入链 $\mathrm{DTMC}(\hat{P})$. 若还有等待时间 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是否可以构造出 CTMC. 本节的定理回答了这个问题.

设 $Q = (q(i,j)_{i,j\in S})$ 为保守的密度矩阵，其中 $q_i := -q(i,i) = \sum_{k\neq i} q(i,k)$. 假定 $q_i > 0$. 定义 $\hat{P}$ 满足 $\hat{P}_{i,j} := \hat{p}_{i,j} = (q(i,j)/q_i)[1-\delta_{ij}]$. 则 $\hat{P}$ 为随机矩阵，且称其为路径矩阵. 给出如下假设：

(1) $\{Y_n\}_{n\geq 0} \sim \mathrm{DTMC}(\hat{P})$;

(2) $\tau_0, \tau_1, \cdots \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Exp}(1)$. 利用命题 3.2 可知 $\tau_k/q_i \sim \mathrm{Exp}(q_i)$ 对任意 $k \geq 0$ 成立;

(3) $\{Y_n\}_{n\geq 0} \perp\!\!\!\perp \{\tau_k\}_{k\geq 0}$.

$t = 0$ 时，处于状态 Y_0, $\eta_1 := \tau_0/q(Y_0) \sim \mathrm{Exp}(q(i))$ 在 $\mathbb{P}(\cdot \mid Y_0 = i)$ 下成立，记作 $\eta_1 \sim \mathrm{Exp}(Y_0)$. $t = T_1 = \eta_1$ 时跳到状态 Y_1，同理构造 $\eta_2 = \tau_1/q(Y_1) \sim \mathrm{Exp}(Y_1)$. 以此类推，归纳构造 $\eta_n := \tau_{n-1}/q(Y_{n-1})$ $(\forall\, n \geq 2)$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$, $T_0 = 0$. $X_t = Y_n$ 当 $t \in [T_n, T_{n+1})$.

【定义 5.20】(爆炸) 令 $\tau := \lim_{n\to\infty} T_n$. 若上述定义满足 $\mathbb{P}(\tau = +\infty \mid Y_0 = i) = 1$ 则称构造的过程 X 是非爆炸的，否则称 X 为爆炸，此时在 $t > \tau$ 时过程是没有定义的.

【定义 5.21】(跳过程) 若上述定义的过程非爆炸，则称 X 为以 Q 为转移速率矩阵的跳过程. Y 为 X 的嵌入链. $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ 为 X 的等待时间序列, T_n 为第 n 次跳的时刻.

【定理 5.22】 以 Q 为转移速率矩阵的跳过程 X 是一个 CTMC 且 $X \sim \mathrm{CTMC}(Q)$ 以及 $P_t' = QP_t$, $P_t' = P_tQ$ 成立，其中 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 为 X 的转移半群.

【定理 5.23】 若 $\{q_i\}_{i\in S}$ 有界或状态空间 S 有限，则用跳过程定义的 X 非爆炸.

§5.3 平稳分布与极限行为

【注 5.24】(CTMC 非周期性质) 首先我们推广 DTMC 中状态的周期性，即定义 2.51. 由命题 5.8 知道对任意 $t > 0$, $i \in S$ 都成立 $p_t(i,i) > 0$. 所以 $d(i) = 1$ 是恒成立的.

【定义 5.25】(不可约链) 称 S 值的 CTMC $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 不可约，若对任意 $i,j \in S$ 都存在一个状态序列 $k_0 = i, k_1, \cdots, k_n = j$ 使 $q(k_{m-1}, k_m) > 0$, $1 \leq m \leq n$.

为了说明这样定义的合理性，给出下面两个命题.

【命题 5.26】 若 $q(i,j) > 0$ $(i \neq j)$，那么 $p_t(i,j) > 0$ $(\forall\, t > 0)$.

<u>**证明.**</u> 由 $q(i,j) = \lim_{h\to 0^+} p_h(i,j)/h > 0$. 由极限的保号性质得到存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $s \in (0,\delta]$ 都成立 $p_s(i,j) > 0$. 再利用命题 5.8 (3) 得到 $p_t(i,j) > 0$, $\forall\, t > 0$). □

【命题 5.27】 若 S 值的 CTMC $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 不可约，则 $p_t(i,j) > 0$ $(\forall\, t > 0, i.j \in S)$.

<u>**证明.**</u> 只考虑 $i \neq j$. 由定义，存在一个状态序列 $k_0 = i, k_1, \cdots, k_n = j$ 使 $q(k_{m-1}, k_m) > 0$, $1 \leq m \leq n$. 由命题 5.26 知道 $p_t(k_{m-1}, k_m) > 0$ 恒成立. 那么由 C-K 方程

$$p_t(i,j) \geq \prod_{m=1}^{n} p_{t/n}(k_{m-1}, k_m) > 0,\ \forall\, t > 0.$$

□

在 DTMC 中我们用一步转移概率矩阵来定义平稳分布，但是在 CTMC 中无法定义最小步长. 但是注意到 DTMC 中 $\pi = \pi P^n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立，这一点可以推广.

【定义 5.28】(平稳分布) 称概率分布 π 为转移半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 的平稳分布，若 $\pi P_t = \pi$ 对任意 $t \geq 0$ 成立.

【命题 5.29】 概率分布 π 为转移半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 的平稳分布 $\Leftrightarrow \pi Q = \mathbf{0}$. 此时也称 π 为保守的转移速率矩阵 Q 的平稳分布.

证明. 证明主要利用 Kolmogorov 向前向后方程，即定理 5.14. $(\Rightarrow)$: $(\pi P_t)' = \pi P_t' = \pi P_t Q = \pi Q = (\pi)' = \mathbf{0}$. $(\Leftarrow)$: $(\pi P_t)' = \pi P_t' = (\pi Q)P_t = \mathbf{0}$. $\rightsquigarrow \pi P_t = \pi P_0 = \pi I = \pi$. □

【定义 5.30】(DBC) 设概率分布 π 对任意 $j \neq k$ 满足 $\pi_j q(j,k) = \pi_k q(k,j)$，则称 π 与转移速率矩阵 Q 满足满足细致平衡条件(DBC).

【命题 5.31】 若 π 与保守的转移速率矩阵 Q 满足 DBC，则 π 为过程的平稳分布.

证明. 直接验证. $\sum\limits_{k\in S}\pi_k q(k,j) = \sum\limits_{k\in S}\pi_j q(j,k) = \pi_j \sum\limits_{k\in S} q(j,k) = 0$. 即 $\pi Q = \mathbf{0}$. 由命题 5.29 即得. □

最后简单给出几个极限行为相关的定理.

【定理 5.32】(收敛定理) 设 S 值的 CTMC $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 不可约，转移速率矩阵为 Q 且存在平稳分布 π. 那么 $\lim\limits_{t\to+\infty} p_t(i,j) = \pi_j$, $\forall\, i,j \in S$. 由极限的唯一性也说明了平稳分布的唯一性.

证明. 由命题 5.27 有对任意 $t>0$, $i,j\in S$ 成立 $p_t(i,j)>0$. 固定 $h>0$，考虑 $h-$骨架 $\{Z_n := X_{nh},\ n\geq 0\}$. 那么 $\{Z_n\}_{n\geq 0} \sim \text{Markov}(P_h)$ 且不可约，非周期，存在平稳分布 π. 由定理 2.54 得到 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{nh}(i,j) = \pi_j$. 考察

$$|p_t(i,j)-\pi_j| \leq |p_t(i,j)-p_{nh}(i,j)| + |p_{nh}(i,j)-\pi_j| \leq 1-p_{|t-nh|}(i,i) + |p_{nh}(i,j)-\pi_j|.$$

这里最后一个不等号由定理 5.9 给出. 任取 $\varepsilon>0$，先取 $N>0$ 使得 $n>N$ 时成立 $|p_{nh}(i,j)-\pi_j|\leq \varepsilon/2$. 对上述 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，当 $0\leq \ell<\delta$ 时有 $1-p_\ell(i,i)\leq \varepsilon/2$. 也即当 $nh-\ell<t<nh+\ell$, $n>N$ 时有 $|p_t(i,j)-\pi_j|\leq\varepsilon$ 成立. 令 $n\to\infty$ 得到 $t\to\infty$ 时有 $p_t(i,j)\to\pi_j$. □

【定义 5.33】(首次访问时间) 在小节 5.2.4 叙述的前提下，仍然采用首跳时间 $\eta := \inf\{t\geq 0 : X_t \neq X_0\}$. 定义首次访问时间 $\sigma_i := \inf\{t\geq\eta : X_t = i\}$. 注意这不同于首达时 $\tau_i := \inf\{t\geq 0 : X_t = i\}$. 当 $X_0 = i$ 时有 $\sigma_i \neq \tau_i$.

【定理 5.34】(渐近频率) 设 S 值的 CTMC $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 不可约，转移速率矩阵为 Q 且存在平稳分布 π. 那么

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}}ds = \pi_i = 1/(q_i\mathbb{E}_i\sigma_i)\ \text{a.s.},\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}}ds\right] = \pi_i = 1/(q_i\mathbb{E}_i\sigma_i).$$

证明. 这个定理不证. □

§5.4 应用举例

5.4.1 转移概率的计算

【例 5.35】 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0}\sim \text{PP}(\lambda)$. 由例 5.7 知 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 为一个 CTMC 且 $p_t(i,j) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}\mathbf{1}_{\{j\geq i\}}$. 试求它的转移速率矩阵 Q.

解. 当 $j=i$ 时，$q_i := -q(i,i) = -\lim\limits_{t\to 0^+}(e^{-\lambda t}-1)/t = \lambda$. 当 $j>i+1$ 时，t 为 $p_t(i,j)$ 的至少二重根，故

$q(i,j)=0$. 最后求 $q(i,i+1)=\lim_{t\to 0^+}(\lambda t e^{-\lambda t}/t)=\lambda$. 因此有

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & & & \\ & -\lambda & \lambda & & \\ & & -\lambda & \lambda & \\ & & & \ddots & \ddots\end{bmatrix}.$$

□

【例 5.36】 考虑仅有两个状态 $S=\{1,2\}$ 的 CTMC，已知它的转移速率矩阵为

$$Q=\begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\quad\mathbf{0} & \quad\mathbf{1}\end{array}\\ \begin{pmatrix}-\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu\end{pmatrix}\end{array}$$

其中 $\lambda,\mu>0$. 求它的转移半群 P_t.

解. 显然看出这个转移速率矩阵是保守的，故 Kolmogorov 方程，即定理 5.14 成立. 取 Kolmogorov 向后方程求解.

$$\begin{cases}P_t'=QP_t\\ P_0=I\end{cases}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}P_t'(0,0) & P_t'(0,1)\\ P_t'(1,0) & P_t'(1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_t(0,0) & P_t(0,1)\\ P_t(1,0) & P_t'(1,1)\end{bmatrix}$$

利用转移半群中的每一个矩阵都是随机矩阵，只求解第一列，则

$$\begin{cases}P_t'(0,0)=-\lambda P_t(0,0)+\lambda P_t(1,0)\\ P_t'(1,0)=\mu P_t(0,0)-\mu P_t(1,0)\end{cases}\rightsquigarrow (P_t(0,0)-P_t(1,0))'=-(\lambda+\mu)(P_t(0,0)-P_t(1,0)).$$

那么 $P_t(0,0)-P_t(1,0)=e^{-(\lambda+\mu)t}$. 带回 $P_t'(1,0)=\mu P_t(0,0)-\mu P_t(1,0)$ 解得

$$P_t(0,0)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t},\ P_t(1,0)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

□

5.4.2 纯生过程和生灭过程

【定义 5.37】 **(纯生过程)** 设 $S=\mathbb{N}^*=\{1,2,\cdots\}$. $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\cdots$ 为一列正数. 令 $q_i=q(i,i+1):=\lambda_i(=-q(i,i))$ $(\forall\, i\geq 1)$，称之为出生速率. 即

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda_1 & \lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & \lambda_2 & & \\ & & -\lambda_3 & \lambda_3 & \\ & & & \ddots & \ddots\end{bmatrix}.$$

【定理 5.38】 当 $\sum_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n=\infty$ 时，用如同 5.2.4 构造出的跳过程是非爆炸的. 此时嵌入链为 $\{Y_n\}_{n\geq 0}\sim$ DTMC$(\hat{P})$. 其中 $\hat{p}_{i,j}=(q_{i,j}/q_i)(1-\delta_{i,j})=\mathbf{1}_{\{j=i+1\}}$.

【例 5.39】 由例 5.35 知 Poisson 过程为纯生过程.

【例 5.40】 **(Yule 过程)** 当定义 5.37 中的 $\lambda_k:=\lambda n^p$ 为幂速率且 $p\in[0,1]$ 时，由定理 5.38 知可以定义以 Q 为转移速率矩阵的跳过程. 特别地，当 $p=1$ 时，称为 Yule 过程.

【定义 5.41】**(生灭过程)** 设 $S = \mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$. $\{\lambda_i\}_{i\geq 0}$, $\{\alpha_i\}_{i\geq 1}$ 为两列非负数，允许为 0. 令 $q(i,i+1) := \lambda_i$, $i \geq 0$. $q(i,i-1) = \alpha_i$, $i \geq 1$. 称 λ_i 和 α_i 分别为出生速率和死亡速率. 取 $q_i = (\lambda_i + \alpha_i)\mathbf{1}_{\{i\geq 1\}} + \lambda_i \mathbf{1}_{\{i=0\}}$. 即

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \alpha_1 & -\lambda_1 - \alpha_1 & \lambda_1 & & \\ & \alpha_2 & -\lambda_2 - \alpha_2 & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

【定理 5.42】 若存在 $c > 0$ 使得 $\lambda_i \vee \alpha_i \leq ci$ $(\forall\, i \geq 1)$，则用如同 5.2.4 构造出的跳过程是非爆炸的. 此时嵌入链为 $\{Y_n\}_{n\geq 0} \sim \mathrm{DTMC}(\hat{P})$. 其中

$$\hat{p}_{i,j} = (q_{i,j}/q_i)(1-\delta_{i,j}) = \begin{cases} 1,\ i=0,\ j=1 \\ \lambda_i/(\lambda_i+\alpha_i),\ j=i+1,\ i\geq 1 \\ \alpha_i/(\lambda_i+\alpha_i),\ j=i-1,\ i\geq 1 \\ 0,\ \text{otherwise} \end{cases}$$

也即嵌入链 $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ 为离散时间 Markov 链中的生灭链.

5.4.3 排队论

【定义 5.43】**(排队系统)** 描述 t 时刻系统里的顾客数 (或队列长度)，为在等待的顾客数和正在被服务的顾客数的总和. 排队系统的构成要素有 (1) 到达过程或到达速率; (2) 服务时长或服务速率; (3) 服务台数/窗口数/服务员数量. 常常需要告知队列容量以及服务规则，一般有如下两个假设: (1) FCFS (First come, first served.) (2) 不同顾客的服务时长相互独立.

【定义 5.44】**(M/M/S: Markovian/Memoryless/Servers 排队系统)** 这一类排队系统的到达过程为 Poisson 过程，为一个 CTMC (Markovian). 服务时长服从具有无记忆性 (Memoryless) 的 $\mathrm{Exp}(\lambda)$. 服务台 (Servers) 的个数 $\mathrm{S} \in \mathbb{N}^*$. 一般当 $\mathrm{S} = \infty$ 时，直接记作 $\mathrm{M/M/\infty}$ 排队系统.

【命题 5.45】 M/M/S 和 $\mathrm{M/M/\infty}$ 排队系统均为生灭过程.

【例 5.46】 M/M/1: 状态空间 $S = \mathbb{N}$. $q(n,n+1) = \lambda$ $(\forall\, n \geq 0)$, $q(n,n-1) = \alpha$ $(\forall\, n \geq 1)$. 由定理 5.22 或者定理 5.42 知，此时构造的跳过程非爆炸.

【例 5.47】 $\mathrm{M/M/S} < \infty$: 状态空间 $S = \mathbb{N}$. $q(n,n+1) = \lambda$ $(\forall\, n \geq 0)$, $q(n,n-1) = s\alpha\mathbf{1}_{\{n>s\}} + n\alpha\mathbf{1}_{\{n\leq s\}}$ $(\forall\, n \geq 1)$. 由定理 5.22 或者定理 5.42 知，此时构造的跳过程非爆炸.

【例 5.48】 $\mathrm{M/M/\infty}$: 状态空间 $S = \mathbb{N}$. $q(n,n+1) = \lambda$ $(\forall\, n \geq 0)$, $q(n,n-1) = n\alpha$. 此时 $\lambda \vee n\alpha \leq (\lambda+\alpha)n$. 由定理 5.42 知，构造的跳过程非爆炸.

Chapter 6

离散时间鞅

§6.1 定义

【定义 6.1】(流) 称 Ω 上一列 σ 代数 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \cdots$ 为流，若 $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2 \subseteq \cdots$

【定义 6.2】(适应过程) 称一列随机变量 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 适应的，若 $\sigma(X_n) \subseteq \mathscr{F}_n$，即 $X_n \in \mathscr{F}_n$.

【例 6.3】 设 $\{X_n\}$ 为 D.R.V. 列. 对任意 $n \geq 0$，令 $\mathscr{F}_n^X := \sigma(X_0, \cdots, X_n) = (X_0, \cdots, X_n)^{-1}(2^{S_1} \times \cdots \times 2^{S_n})$. 则 $\mathscr{F}_n^X$ 为一流，称为 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 的自然流.

【定义 6.4】(离散时间鞅) 称 D.R.V. 列 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 的鞅，若

(1) (可积性) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$;

(2) (适应性) $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 适应;

(3) (鞅性) $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = X_n$ (a.s.)

【注 6.5】 在定义 6.4 (3) 中我们已知 $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \in \mathscr{F}_n$. 而适应性恰好保证了右端 $X_n \in \mathscr{F}_n$. 此处随机变量的相等是几乎处处意义下的.

【命题 6.6】(等价定义) $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 适应且$\mathbb{E}|X_n| < \infty$，则 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 的鞅 $\Leftrightarrow \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n) = 0$.

【例 6.7】 常数列 $\{c_n = c : n \geq 0\}$ 关于任意流都是鞅，因为 $\sigma(c) = \sigma(c\mathbf{1}_\Omega) = \{\Omega, \varnothing\} \subseteq \mathscr{F}$ 为最小的 σ 代数.

【定义 6.8】(关于过程的鞅) 称 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为关于过程 $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ 的鞅，若$\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于自然流 $\{\mathscr{F}_n^Y\}_{n\geq 0}$ 为鞅.

【定义 6.9】(上鞅和下鞅) 在定义 6.4 中 (3) 替换为 $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leq X_n$ 则称 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为上鞅; 若 (3) 替换为 $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \geq X_n$ 则称 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为下鞅.

【命题 6.10】 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为鞅当且仅当$\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为上鞅和下鞅.

【命题 6.11】 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为上鞅当且仅当$\{-X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为下鞅.

【定理 6.12】(鞅的期望性质) 设 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为(上,下)鞅，则 $\mathbb{E}X_{n+1}(\leq, \geq) = \mathbb{E}X_n$.

<u>证明.</u> 利用重期望公式(推论 1.39) 得到 $\mathbb{E}X_{n+1} = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)]$ 再利用鞅性即可. □

【定理 6.13】 设 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 和流 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\geq 0}$ 均适应, 且 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为鞅. 若 $\mathscr{G}_n \subseteq \mathscr{F}_n$ 对任意 $n \geq 0$ 成立，则

(1) $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\geq 0}$ 为鞅;

(2) 特别地，$\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于其自然流 $\{\mathscr{F}_n^X\}_{n\geq 0}$ 为鞅.

证明. 利用定理 1.37 得到 $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{G}_n) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \mid \mathscr{G}_n] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathscr{G}_n] = X_n$. 最后一步利用了提取已知量，即定理 1.36. □

【命题 6.14】 设 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为鞅，若 $k < n$，则 $\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_k) = X_k$.

证明. 再次利用定理 1.37 有 $\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_k) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \mid \mathscr{F}_k] = \mathbb{E}(X_{n-1} \mid \mathscr{F}_k) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-2}) \mid \mathscr{F}_k] = \cdots = X_k$. □

§6.2 基本性质和例子

6.2.1 鞅差和鞅增量

【命题 6.15】 设 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为鞅，则

(1) (鞅差) $\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}^2 - X_n^2 \mid \mathscr{F}_n]$;

(2) (鞅增量的正交性) 对任意 $0 \leq j \leq k < n$ 都有 $\mathbb{E}[(X_n - X_k)X_j] = 0$;

(3) 作为 (2) 的推论得到对任意 $0 \leq i \leq j \leq k < n$ 都有 $\mathbb{E}[(X_n - X_k)(X_j - X_i)] = 0$. 特别地，成立

$$\mathbb{E}[(X_n - X_0)^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]$$

.

证明. 只需要验证定义 6.4 (3). 综合使用定理 1.36, 命题 6.14 即可. □

6.2.2 Jensen 不等式和凸函数变换

【引理 6.16】 (Jensen 不等式) 设 $\Phi(\cdot)$ 为凸函数，那么对任意 $\mathscr{F} \subseteq \Omega$ 都有 $\mathbb{E}[\Phi(X) \mid \mathscr{F}] \geq \Phi(\mathbb{E}[X \mid \mathscr{F}])$.

【定理 6.17】 设 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为适应过程，$\Phi(\cdot)$ 为凸函数且 $\mathbb{E}|\Phi(X_n)| < \infty$ ($\forall\, n \geq 1$)，则

(1) 若 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为鞅，则 $\{\Phi(X_n)\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为下鞅;

(2) 若 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为下鞅，且 $\Phi(\cdot)$ 非降，则 $\{\Phi(X_n)\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为下鞅;

【例 6.18】 设 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为鞅，则 $\{|X_n|\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为下鞅. 进一步，若 $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ $(p \geq 2)$，那么 $\{|X_n|^p\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为下鞅.

【例 6.19】 设 x 的正部定义为 $x^+ := x \vee 0$. 这是一个非降凸函数. 即若 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为下鞅，则$\{X_n^+\}_{n\geq 0}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 为下鞅.

6.2.3 例子：随机游走，指数鞅

【引理 6.20】 (不等式估计) 设 $\{a_k\}_{k\geq 1}$ 为实数序列，$p > 1$. 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|^p \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p.$$

证明. 利用 Holder 不等式，取 $1/p+1/q=1$ 那么

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}1^q\right)^{1/q}\geq\sum_{k=1}^{n}|a_k|\geq\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|.$$

同时取 p 次幂得到

$$n^{p-1}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p=n^{p/q}\cdot\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\geq\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^p.$$

□

【例 6.21】(i.i.d.R.V. 之和/随机游走) 设 $\{X_n\}_{n\geq1}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathbb{E}X_1=\mu$. 令 $S_n=s_0+\sum\limits_{k=1}^{n}X_n\ (\forall n\geq1)$，其中 $s_0\in\mathbb{R}$，则

(1) $\{M_n\}:=\{S_n-n\mu:n\geq1\}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为鞅;

(2) 若另有 $\mathrm{Var}X_1=\sigma^2<\infty$，则 $\{\widetilde{M}_n:=M_n^2-n\sigma^2=(S_n-n\mu)^2-n\sigma^2,n\geq1\}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为鞅.

证明. 只证明 (2). 可积性利用上面的引理 6.20.

$$\mathbb{E}M_n^2=s_0+\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)\right]^2\leq s_0+n\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k-\mu)^2=s_0+n^2\sigma^2<\infty.$$

适应性显然. 可积性利用命题 6.15 (1) 得到 $\mathbb{E}(\widetilde{M}_{n+1}-\widetilde{M}_n\mid\mathscr{F}_n^X)=\mathbb{E}(M_{n+1}^2-M_n^2\mid\mathscr{F}_n^X)-\sigma^2=\mathbb{E}[(M_{n+1}-M_n)^2\mid\mathscr{F}_n^X]-\sigma^2=\mathbb{E}[(X_{n+1}-\mu)^2\mid\mathscr{F}_n^X]-\sigma^2=\mathbb{E}[(X_{n+1}-\mu)^2]-\sigma^2=0$. 倒数第二个等号利用 $\sigma(X_{n+1})\perp\!\!\!\perp\mathscr{F}_n^X$ 结合命题 1.34 得到. 最后由鞅的等价定义命题 6.6 证毕. □

【注 6.22】 在例 6.21 (2) 中，$\{\widetilde{M}_n\}_{n\geq0}$ 关于过程 $\{Y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\}_{n\geq1}$ 也为鞅.

【例 6.23】(i.i.d.R.V. 之积) 设 $\{X_n\}_{n\geq1}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathbb{E}X_1=1$. 令 $M_n:=\prod\limits_{k=1}^{n}X_n\ (\forall n\geq1)$，则$\{M_n\}_{n\geq1}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为鞅.

证明. 只验证鞅性，用命题 6.6. $\mathbb{E}(M_{n+1}-M_n\mid\mathscr{F}_n^X)=\mathbb{E}[(X_{n+1}-1)M_n\mid\mathscr{F}_n^X]=M_n\mathbb{E}(X_{n+1}-1\mid\mathscr{F}_n^X)=0$. □

【例 6.24】(指数鞅) 设 $\{X_n\}_{n\geq1}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\Phi(\theta)=\mathbb{E}e^{\theta X}<\infty$. 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$. 则 $\{M_n\}:=\{1/(\Phi^n(\theta))\exp\{\theta S_n\}\}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为鞅. 特别地，当 $\Phi(\theta)=1$ 时，$\{\exp\{\theta S_n\}\}_{n\geq1}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为鞅.

证明. 设 $Y_k:=1/(\Phi(\theta))\exp\{\theta X_k\}$, $k\geq1$. 那么 $\mathbb{E}Y_1=1$ 且 $M_n=\prod\limits_{k=1}^{n}Y_k$. 由例 6.23 知 $\{M_n\}_{n\geq1}$ 关于过程 $\{Y_n\}_{n\geq1}$ 为鞅. 而 $f(x)=1/(\Phi(\theta))\exp\{\theta x\}$ 单调且存在反函数，那么 $\mathscr{F}_n^X=\mathscr{F}_n^Y$. 即 $\{M_n\}_{n\geq1}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 也为鞅. □

【例 6.25】(赌徒破产) 设 $\{X_n\}_{n\geq1}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathbb{P}(X_1=1)=p$, $\mathbb{P}(X_1=-1)=1-p$ ($p\neq1/2$, $p\in(0,1)$). 令 $\theta=\ln(1-p)/p$，容易验证 $\mathbb{E}e^{\theta X}=1$. 由例 6.24 可知 $\{\exp\{\theta S_n\}\}_{n\geq1}=\{[(1-p)/p]^{S_n}\}_{n\geq1}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq1}$ 为鞅.

§6.3 离散型随机积分

【定义 6.26】(可料过程 I) 称过程 $\{H_n\}_{n\geq1}$ 关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq0}$ 为可料过程，若 $H_n\in\mathscr{F}_{n-1}\ (\forall n\geq1)$.

【定义 6.27】**(可料过程 II)** 称过程 $\{H_n\}_{n\geq 1}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为可料过程，若 $\{H_n\}_{n\geq 1}$ 关于自然流 $\{\mathscr{F}_n^X\}_{n\geq 0}$ 为可料的

【定理 6.28】**(鞅变换/离散型随机积分 I)** 称 $\{M_n\}_{n\geq 0}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为上(下)鞅，过程 $\{H_n\}_{n\geq 1}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为可料的. 且 $0 \leq H_n \leq c_n$. 其中 c_n 为仅与 n 有关的常数. 设 $W_0 \in \sigma(X_0)$, $\mathbb{E}|W_0| < \infty$. 令

$$W_n := W_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m(M_m - M_{m-1}),\ n \geq 0.$$

则 $\{W_n\}_{n\geq 0}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为上(下)鞅.

【定理 6.29】**(鞅变换/离散型随机积分 II)** 称 $\{M_n\}_{n\geq 0}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为鞅，过程 $\{H_n\}_{n\geq 1}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为可料的. 且 $|H_n| \leq c_n$. 其中 c_n 为仅与 n 有关的常数. 设 $W_0 \in \sigma(X_0)$, $\mathbb{E}|W_0| < \infty$. 令

$$W_n := W_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m(M_m - M_{m-1}),\ n \geq 0.$$

则 $\{W_n\}_{n\geq 0}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为鞅.

证明. 证明非常容易，只需要用命题 6.6. □

【注 6.30】 在定理 6.28 中，可以将 $H_m(M_m - M_{m-1})$ 类比为 Riemann 积分中的 $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$. 只不过这时候“介点”选取为左端点 $H_m \in \mathscr{F}_{m-1}$. 这一点是构造随机积分和保证其鞅性的重要条件. 另外 $(H \cdot M)_n := W_n$ 为更通用的记号.

§6.4 停时定理

在本节一个重要的任务是将鞅满足的 $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$ 推广到随机时间下标. 问何时成立 $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$? 最基本的，如果要引入下角标的随机时间，那么至少要有 $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. 否则鞅是没有定义的.

6.4.1 可选停时定理

【定义 6.31】**(关于一般流的停时)** 设 R.V. $\tau : \Omega \to \{0, 1, 2, \cdots\} \cup \{+\infty\}$. 若满足 $\forall\, 0 \leq n < +\infty$ 时有 $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$ $(0 \leq n < +\infty)$，则称 τ 为关于 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 的停时.

上述定义是对定义 2.22 的推广.

【命题 6.32】 设 τ 为关于 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 的停时，则

(1) $\{\tau \geq m\} = \{\tau < m\}^c = \{\tau \leq m-1\}^c = (\cup_{k=0}^{m-1}\{\tau = k\})^c \in \mathscr{F}_{n-1}$;

(2) $\{\tau > m\} = \{\tau \geq m+1\} \in \mathscr{F}_n$.

【定理 6.33】**(可选停时定理)** 称 $\{M_n\}_{n\geq 0}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为(上/下)鞅，τ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为一停时，则

(1) 停止过程 $(M_{\tau\wedge n})_{n\geq 0}$ 关于 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为(上/下)鞅，故 $\mathbb{E}M_{\tau\wedge n}(\leq, \geq) = \mathbb{E}M_0$;

(2) 特别地，若 τ 为有界停时，即存在常数 $K \geq 0$ 满足 $\tau \leq K$ a.s.，则 $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_{\tau\wedge K}(\leq, \geq) = \mathbb{E}M_0$.

证明. 注意到 $M_{\tau\wedge n} = \sum_{k=1}^{\tau\wedge n}(M_k - M_{k-1}) + M_0 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{k\leq\tau\}}(M_k - M_{k-1}) + M_0$. 令 $H_k := \mathbf{1}_{\{k\leq\tau\}}$. 由定理 6.28 和命题 6.32 即得. □

【注 6.34】 定理 6.33 (2) 的条件往往很难验证，实际操作中可以探究 $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{\tau\wedge n} = M_\tau$ 是否成立.

6.4.2 鞅停时定理

可选停时定理对停时有比较高的要求，而下面的鞅停时定理将条件附加在鞅上.

【定理 6.35】(鞅停时定理) 称 $\{M_n\}_{n\geq 0}$ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为鞅，τ 关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为一有限停时，即$\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$. 若存在常数 $K \geq 0$ 满足 $|M_{\tau\wedge n}| \leq K$ $(\forall\, n \geq 0)$，则 $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$.

<u>**证明.**</u> 首先断言 $|M_\tau|\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \leq K\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}$. 注意到

$$|M_\tau|\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} = \sum_{n=0}^{+\infty}|M_\tau|\mathbf{1}_{\{\tau=n\}} = \sum_{n=0}^{+\infty}|M_{\tau\wedge n}|\mathbf{1}_{\{\tau=n\}} \leq K\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{1}_{\{\tau=n\}} = K\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}.$$

利用定理 6.33 知道 $|\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_0| = |\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_{\tau\wedge n}| \leq \mathbb{E}|M_\tau - M_{\tau\wedge n}| \leq \mathbb{E}|M_\tau - M_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\{\tau\leq n\}}| + \mathbb{E}|M_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}| = \mathbb{E}|M_\tau - M_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq n\}}| + \mathbb{E}|M_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}| \leq \mathbb{E}|M_\tau\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}| + K\mathbb{P}(\tau > n)$. 注意到

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0 \rightsquigarrow \mathbb{E}|M_\tau|\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} = \mathbb{E}|M_\tau|\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \leq K\mathbb{P}(\tau > n).$$

代入上式并利用 $\mathbb{P}(\cdot)$ 的连续性有 $|\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_0| \leq 2K\mathbb{P}(\tau > n) \to 0$ 当 $n \to +\infty$. □

【定理 6.36】(Wald 等式) 设 $\{X_n\}_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathbb{E}X_1 = \mu$. τ 为关于过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 的停时且 $\mathbb{E}\tau < \infty$. 则 $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\tau} X_k) = \mathbb{E}X_1\mathbb{E}\tau = \mu\mathbb{E}\tau$.

【推论 6.37】(更新过程中的 Wald 等式) 设 $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ 为更新过程，$\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ 为其更新时间间隔序列，更新时刻序列为 $\{T_n\}_{n\geq 0}$, 则

$$\mathbb{E}T_{N(t)+1} = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{N(t)+1}\tau_k) = \mathbb{E}\tau_1\mathbb{E}(N(t)+1).$$

<u>**证明.**</u> 为了应用定理 6.36，只需要说明 $N(t)+1$ 在给定 t 时刻时关于 $\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ 为停时. 注意到

$$\{N(t)+1 = n\} = \{T_{n-1} \leq t < T_n\} = \{\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k \leq t < \sum_{k=1}^{n}\tau_k\} \in \mathscr{F}_n^\tau.$$

□

§6.5 应用: 随机游走中的赌徒破产

6.5.1 离出分布

【例 6.38】(公平赌博) 设一列 $\{X_n\}_{n\geq 1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1/2$. 记过程 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 的自然流 $\mathscr{F}_n^X := \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ $(\forall n \geq 1)$. 并规定 $\mathscr{F}_0^X := \{\varnothing, \Omega\}$. 令 $S_n = x + \sum_{k=1}^{n} X_k$ $(\forall\, n \geq 0,\ x \in \mathbb{Z})$. 显然 $\mathbb{E}X_1 = 0$. 现在取 $a < x < b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. 求离出分布 $\mathbb{P}_x(V_a < V_b)$, $\mathbb{P}_x(V_b < V_a)$.

<u>**解.**</u> 利用同例 6.21 类似的方法，我们知道 $\{S_n - n\mathbb{E}X_1\}_{n\geq 0} = \{S_n\}_{n\geq 0}$ 在 $\mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = x) = \mathbb{P}(\cdot)$ 下关于流 $\{\mathscr{F}_n^X\}_{n\geq 0}$ 为鞅.(这里的下角标和例 6.21 略有不同.) 定义 $\tau := \min\{n \geq 0 : S_n \notin (a, b)\}$. 容易得到以下事实 $\tau = \min\{n \geq 0 : S_n = a \text{ or } S_n = b\} \rightsquigarrow S_\tau = a \text{ or } b$. 且 $\tau = V_a \wedge V_b$.

(Step I) 验证 τ 关于流 $\{\mathscr{F}_n^X\}_{n\geq 0}$ 为停时. 当 $n = 0$ 时，$\{\tau = 0\} = \{S_0 = a \text{ or } b\} = \varnothing \in \mathscr{F}_0^X$. 当 $n \geq 1$ 时，$\{\tau = n\} = \{S_k \in (a, b),\ 1 \leq k \leq n-1\} \cap \{S_n = a \text{ or } b\} \in \mathscr{F}_n^X$.

(Step II) 验证 τ 为有限停时，即 $\mathbb{P}_x(\tau = \infty) = 0$. 考察事件 $\{\tau > n|b-a|\}$. 注意到如下事实: 从 (a, b) 中的任意一点出发，往固定的方向移动，在 $|b-a|$ 步时一定在 (a, b) 之外. 那么对任意的 $m \geq 0$ 有 $\{S_m \in$

$(a,b)\}\cap\{X_{m+k}=1,\ 1\le k\le|b-a|\}\subseteq\{S_{m+|b-a|}\notin(a,b)\}\cap\{S_m\in(a,b)\}$. 也即 $\{S_{m+|b-a|}\in(a,b)\}\cap\{S_m\in(a,b)\}\subseteq\{S_m\in(a,b)\}\cap\{X_{m+k}=1,\ 1\le k\le|b-a|\}^c\subseteq\{X_{m+k}=1,\ 1\le k\le|b-a|\}^c$. 令 $m=0$ 得到

$$\{\tau>|b-a|\}\subseteq\{S_{|b-a|}\in(a,b)\}\cap\{S_0\in(a,b)\}\subseteq\{X_k=1,\ 1\le k\le|b-a|\}^c$$

$$\{\tau>2|b-a|\}\subseteq\bigcap_{m=0}^{1}\{S_{(m+1)|b-a|}\in(a,b)\}\cap\{S_{m|b-a|}\in(a,b)\}\subseteq\bigcap_{m=0}^{1}\{X_{m|b-a|+k}=1,\ 1\le k\le|b-a|\}^c.$$

以此类推得到

$$\{\tau>n|b-a|\}\subseteq\bigcap_{m=0}^{n-1}\{S_{(m+1)|b-a|}\in(a,b)\}\cap\{S_{m|b-a|}\in(a,b)\}\subseteq\bigcap_{m=0}^{n-1}\{X_{m|b-a|+k}=1,\ 1\le k\le|b-a|\}^c.$$

利用概率测度的连续性有 $\mathbb{P}_x(\tau=\infty)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_x(\cap_{m=0}^{n-1}\{X_{m|b-a|+k}=1,\ 1\le k\le|b-a|\}^c)=\lim_{n\to\infty}(1-1/2^{|b-a|})^n=0$.

(Step III) 希望使用鞅停时定理，即定理 6.35，还需要验证停止过程 $\{S_{\tau\wedge n}\}$ 的有界性. 注意 $|S_{\tau\wedge n}|=|S_\tau|\mathbf{1}_{\{\tau\le n\}}+|S_n|\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}\le 2(|a|\vee|b|)$. 这里需要注意到 $S_n\in(a,b)$ 当 $\tau>n$.

(Step IV) 至此，我们验证了定理 6.35 中的所有条件，得到 $\mathbb{E}_xS_\tau=a\mathbb{P}_x(S_\tau=a)+b\mathbb{P}_x(S_\tau=b)=\mathbb{E}_xS_0=x$. 再注意 $\mathbb{P}_x(S_\tau=a)+\mathbb{P}_x(S_\tau=b)=1$. 联合上述两式，可以解出

$$\mathbb{P}_x(S_\tau=a)=\frac{b-x}{b-a},\ \mathbb{P}_x(S_\tau=b)=\frac{x-a}{b-a}.$$

再利用 $\mathbb{P}_x(V_a<V_b)=\mathbb{P}_x(S_\tau=a)$, $\mathbb{P}_x(V_b<V_a)=\mathbb{P}_x(S_\tau=b)$ 即可.

□

【例 6.39】(不公平赌博) 设一列 $\{X_n\}_{n\ge1}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathbb{P}(X_1=1)=p\in(0,1)\backslash\{1/2\}$, $\mathbb{P}(X_1=0)=1-p=:q$. 记过程 $\{X_n\}_{n\ge1}$ 的自然流 $\mathscr{F}_n^X:=\sigma(X_1,\cdots,X_n)$ $(\forall n\ge1)$. 并规定 $\mathscr{F}_0^X:=\{\emptyset,\Omega\}$. 令 $S_n=x+\sum_{k=1}^n X_k$ $(\forall\, n\ge0,\ x\in\mathbb{Z})$. 现在取 $a<x<b$, $a,b\in\mathbb{Z}$. 求离出分布 $\mathbb{P}_x(V_a<V_b)$, $\mathbb{P}_x(V_b<V_a)$.

解. 利用同例 6.25 类似的方法，我们知道 $\{M_n\}_{n\ge0}:=\{(q/p)^{S_n}\}_{n\ge0}$ 在 $\mathbb{P}(\cdot\mid X_0=x)=\mathbb{P}(\cdot)$ 下关于流 $\{\mathscr{F}_n^X\}_{n\ge0}$ 为鞅.(这里的下角标和例 6.25 略有不同.) 定义 $\tau:=\min\{n\ge0:S_n\notin(a,b)\}$. 容易得到以下事实 $\tau=\min\{n\ge0:S_n=a\text{ or }S_n=b\}\rightsquigarrow S_\tau=a\text{ or }b$. 且 $\tau=V_a\wedge V_b$.

(Step I) 和例 6.38 完全一致，得到 τ 关于流 $\{\mathscr{F}_n^X\}_{n\ge0}$ 为停时. 且τ 为有限停时，即 $\mathbb{P}_x(\tau=\infty)=0$.

(Step II) 希望使用鞅停时定理，即定理 6.35，还需要验证停止过程 $\{M_{\tau\wedge n}\}_{n\ge0}$ 的有界性. 由例 6.38 知停止过程 $\{S_{\tau\wedge n}\}_{n\ge0}$ 有界，即存在 $c>0$ 使得 $|S_{\tau\wedge n}|\le c\rightsquigarrow|M_{\tau\wedge n}|\le(q/p)^{-c}\vee(q/p)^c$.

(Step III) 至此，我们验证了定理 6.35 中的所有条件，得到 $\mathbb{E}_xM_\tau=(q/p)^a\mathbb{P}_x(S_\tau=a)+(q/p)^b\mathbb{P}_x(S_\tau=b)=\mathbb{E}_xM_0=(q/p)^x$. 再注意 $\mathbb{P}_x(S_\tau=a)+\mathbb{P}_x(S_\tau=b)=1$. 联合上述两式，可以解出

$$\mathbb{P}_x(S_\tau=a)=\frac{(q/p)^b-(q/p)^x}{(q/p)^b-(q/p)^a},\ \mathbb{P}_x(S_\tau=b)=\frac{(q/p)^x-(q/p)^a}{(q/p)^b-(q/p)^a}.$$

再利用 $\mathbb{P}_x(V_a<V_b)=\mathbb{P}_x(S_\tau=a)$, $\mathbb{P}_x(V_b<V_a)=\mathbb{P}_x(S_\tau=b)$ 即可.

□

在前面的叙述中，我们强调了在 $\mathbb{P}(\cdot\mid X_0=x)=\mathbb{P}(\cdot)$ 下鞅性的不变性，但是在上面的例子中，这是平凡的，因为概率测度实际上没有改变，因为 $\mathbb{P}(X_0=x)=1$. 对一般情况，我们有下面的命题：

【命题 6.40】 设过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 的鞅在概率测度 $\mathbb{P}(\cdot)$ 下. 则在概率测度 $\mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = y)$ 下，过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 仍为关于流 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 的鞅.

证明. 只需要验证可积性和鞅性. 记 $\mathbb{P}_y(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = y)$, $\mathbb{E}_y(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot \mid X_0 = y)$, $\mathbf{1}_y = \mathbf{1}_{\{X_0=y\}}$. 那么 $\mathbb{E}_y|X_n| = \mathbb{E}|\mathbf{1}_y X_n|/\mathbb{P}(X_0 = y) \leq \mathbb{E}|X_n|/\mathbb{P}(X_0 = y) < \infty$. 为此可积性成立. 设 $\mathscr{F}_n$ 是由划分 $\{\Lambda_k : k \geq 1\}$ 生成的 σ 代数.考察

$$\mathbb{E}_y(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}_y(X_{n+1} \mid \Lambda_k)\mathbf{1}_{\Lambda_k} = \sum_{k\geq 1} \frac{\mathbb{E}_y(X_{n+1}\mathbf{1}_{\Lambda_k})}{\mathbb{P}_y(\Lambda_k)}\mathbf{1}_{\Lambda_k}.$$

由定理 1.38 (3) 知，此时 $\Lambda_k \in \mathscr{F}_n$，那么 $\mathbb{E}_y(X_{n+1}\mathbf{1}_{\Lambda_k}) = \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbf{1}_y\mathbf{1}_{\Lambda_k})/\mathbb{P}(X_0 = y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}\mathbf{1}_y \mid \mathscr{F}_n)\mathbf{1}_{\Lambda_k})/\mathbb{P}(X_0 = y) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_y\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)\mathbf{1}_{\Lambda_k})/\mathbb{P}(X_0 = y) = \mathbb{E}_y(X_n\mathbf{1}_{\Lambda_k})$. 带回得到 $\mathbb{E}_y(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}_y(X_n \mid \Lambda_k)\mathbf{1}_{\Lambda_k} = \mathbb{E}_y(X_n \mid \mathscr{F}_n) = X_n$. 最后一个等号利用了定理 1.36，提取已知量. 虽然这里的概率测度为 $\mathbb{P}_y(\cdot)$，但是定理 1.36 的证明过程完全适用. □

6.5.2 平均首达时

【例 6.41】 在分别在例 6.38 和例 6.39 的前提下，求 $\mathbb{E}_x\tau$.

解. **(Case I)** 当 $p = 1/2$ 时，由例 6.21，令 $\{\widetilde{M}_n\}_{n\geq 0} := \{(S_n - n\mathbb{E}X_1)^2 - n\mathrm{Var}X_1\}_{n\geq 0} = \{S_n^2 - n\}_{n\geq 0}$ 在 $\mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = x) = \mathbb{P}(\cdot)$ 下关于流 $\{\mathscr{F}_n^X\}_{n\geq 0}$ 为鞅. 注意到这里很难对鞅附加有界的条件，于是才用可选停时定理，即定理 6.33，得到 $x^2 = \mathbb{E}_x\widetilde{M}_0 = \mathbb{E}_x\widetilde{M}_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}_x(S_{\tau\wedge n}^2) - \mathbb{E}_x(\tau \wedge n)$. 下面只需要证明 $\mathbb{E}_x S_{\tau\wedge n}^2 \to \mathbb{E}_x S_\tau^2$, $\mathbb{E}_x(\tau \wedge n) \to \mathbb{E}_x\tau$ 当 $n \to \infty$.

首先拆分 $\mathbb{E}_x S_{\tau\wedge n}^2 = \mathbb{E}_x(S_\tau^2\mathbf{1}_{\{\tau\leq n\}} + S_n^2\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}) := I_1 + I_2$. 一方面，$I_2 \leq (|a| \vee |b|)^2\mathbb{E}_x\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} = (|a| \vee |b|)^2\mathbb{P}_x(\tau > n) \to \infty$ 当 $n \to \infty$. 另一方面，$I_1 = a^2\mathbb{P}_x(S_\tau = a, \tau \leq n) + b^2\mathbb{P}_x(S_\tau = b, \tau \leq n) \to a^2\mathbb{P}_x(S_\tau = a, \tau < \infty) + b^2\mathbb{P}_x(S_\tau = b, \tau < \infty)$ 当 $n \to \infty$. 而 $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. 故 $I_1 \to a^2\mathbb{P}_x(S_\tau = a) + b^2\mathbb{P}_x(S_\tau = b) = \mathbb{E}_x S_\tau^2$.

对另一项 $\mathbb{E}_x(\tau \wedge n)$，注意到 $\tau \wedge n$ 是取非负整数值的 D.R.V. 利用命题 1.26 得到

$$\mathbb{P}_x(\tau \wedge n) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_x(\tau \wedge n \geq k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x(\tau \wedge n \geq k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x(\tau \geq k) \to \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_x(\tau \geq k) = \mathbb{E}_x\tau.\ (n \to \infty)$$

则 $x^2 = \mathbb{E}_x S_\tau^2 - \mathbb{E}_x\tau. \rightsquigarrow \mathbb{E}_x\tau = -x^2 + a^2\dfrac{b-x}{b-a} + b^2\dfrac{x-a}{b-a} = -ab.$

(Case II) 当 $(0,1) \ni p \neq 1/2$ 时，由例 6.21，令 $\{M_n\}_{n\geq 0} := \{S_n - n\mathbb{E}X_1\}_{n\geq 0} = \{S_n - n(p-q)\}_{n\geq 0}$ 在 $\mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = x) = \mathbb{P}(\cdot)$ 下关于流 $\{\mathscr{F}_n^X\}_{n\geq 0}$ 为鞅. 利用可选停时定理，得到 $x^2 = \mathbb{E}_x M_0 = \mathbb{E}_x M_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}_x(S_{\tau\wedge n}) - (p-q)\mathbb{E}_x(\tau \wedge n)$. 与 Case I 完全相同得到 $\mathbb{E}_x S_{\tau\wedge n} \to \mathbb{E}_x S_\tau$, $\mathbb{E}_x(\tau \wedge n) \to \mathbb{E}_x\tau$ 当 $n \to \infty$. 那么 $x^2 = \mathbb{E}_x S_\tau - (p-q)\mathbb{E}_x\tau$. 化简得到 $\mathbb{E}_x\tau = (\mathbb{E}_x S_\tau - x^2)/(p-q)$. 再带入例 6.39 计算出的结果即可.

□

§6.6 收敛定理

6.6.1 Doob 极大值不等式

【定理 6.42】**(上鞅版本)** 令 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为非负上鞅，给定 $\lambda > 0$，则 $\mathbb{P}(\sup_n X_n > \lambda) \leq \mathbb{E}X_0/\lambda$.

证明. 令 $\tau := \min\{n \geq 0 : X_n > \lambda\}$. 则 $\{\tau = n\} = \{X_n > \lambda,\ X_k \leq \lambda, 1 \leq k \leq n-1\} \in \mathscr{F}_n^X$. 则 τ 为过程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 的停时. 注意到 $\{\sup_n X_n > \lambda\} = \{\exists\, n > 0,\ X_n > \lambda\} = \{\tau < \infty\}$. 故 $\mathbb{P}(\sup_n X_n > \lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau \leq n)$. 只需要验证 $\mathbb{P}(\tau \leq n) \leq \mathbb{E}X_0/\lambda$ 恒成立. 由可选停时定理，即定理 6.33 知停止过程 $\{X_{\tau\wedge n}\}_{n\geq 0}$ 为上鞅，则

$$\mathbb{E}X_0 \geq \mathbb{E}X_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}(X_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq n\}} + X_n\mathbf{1}_{\tau>n)}) \geq \mathbb{E}(X_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq n\}}) > \lambda\mathbb{P}(\tau \leq n).$$

最后一个不等号利用我们对 τ 的定义，自然有 $X_\tau > \lambda$. □

【定理 6.43】(下鞅版本) 令 $\{Y_n\}_{n\ge0}$ 为下鞅，给定 $\lambda>0$，则对每一个 N 成立

$$\lambda\mathbb{P}(\max_{0\le k\le N} Y_k \ge \lambda) \le \mathbb{E}[Y_N\mathbf{1}_{\{\max_{0\le k\le N} Y_k\ge\lambda\}}] \le \mathbb{E}Y_N^+.$$

其中 $Y_N^+ = Y_N \vee 0$.

证明. 仍然选取停时 $\tau := \min\{n\ge 0 : Y_n \ge \lambda\}$. 注意到 $\{\max_{0\le k\le N} Y_k \ge \lambda\} = \{\tau \le N\} = \cup_{0\le k\le N}\{\tau = k\}$. 则 RHS=

$$\sum_{k=0}^{N}\mathbb{E}(Y_N\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}) = \sum_{k=0}^{N}\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y_N\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}) \mid \mathscr{F}_k^Y] = \sum_{k=0}^{N}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}\mathbb{E}(Y_N \mid \mathscr{F}_k^Y)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}Y_k] \ge \lambda\mathbb{P}(\tau\le N) = \text{LHS}.$$

其中第二个等号利用了停时的定义，即定义 6.31，第三个等号利用了命题 6.14. □

【注 6.44】 定理 6.43 是一个很强的结论. 其实我们还有下面的平凡事实给出了一个更宽的上界

$$\lambda\mathbb{P}(\max_{0\le k\le N} Y_k \ge \lambda) = \lambda\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\max_{0\le k\le N} Y_k\ge\lambda\}}] \le \lambda\mathbb{E}[\max_{0\le k\le N} Y_k/\lambda\mathbf{1}_{\{\max_{0\le k\le N} Y_k\ge\lambda\}}] = \mathbb{E}[\max_{0\le k\le N} Y_k\mathbf{1}_{\{\max_{0\le k\le N} Y_k\ge\lambda\}}].$$

6.6.2 鞅收敛定理

【定理 6.45】(鞅收敛定理) 设 $\{X_n\}_{n\ge0}$ 为上鞅/下鞅且 L^1 有界，即 $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$，则 (1) $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n < \infty$ a.s. 即极限存在; (2) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$.

证明. 这个定理不证. □

【推论 6.46】 令 $\{X_n\}$ 为非负上鞅，则 (1) $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n < \infty$ a.s. 即极限存在; (2) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$; (3) $\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathscr{F}_n^X) \le X_n$ 对任意 $n\ge 0$.

证明. L^1 有界由上鞅的期望递减即得. (3) 需要利用 Fatou's Lemma. □

6.6.3 应用: Polya 罐

考虑一个装有红，绿两色小球的罐子. 在 0 时刻至少有一个红球和一个绿球，总计 k (≥ 2) 个球. 在 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 时刻，抽取一个球观察其颜色后放回，再往罐子中放入一个同色球. 这意味着，第 n 次抽球时，罐子中共有 $k+(n-1)$ 个球；n 时刻动作结束后，罐中有 $n+k$ 个球. 设 $\{X_n\}_{n\ge0}$ 表示 n 时刻动作结束后罐中红球的比例，特别地，X_0 表示初始时刻罐中红球的比例. 那么 $X_n \in \{1/(n+k), 2/(n+k), \cdots, (n+k-1)/(n+k)\} =: S_n$.

【命题 6.47】 $\{X_n\}_{n\ge0}$ 关于其自然流 $\mathscr{F}_n^X$ 为非负鞅.

证明. 适应性和可积性是显然的. 只需要证明鞅性. 设 R_n 表示 n 时刻动作结束后罐中红球的个数. 则 $R_n = (n+k)X_n$; $R_{n+1} \in \{R_n, R_n+1\}$. 那么

$$X_{n+1} = \frac{(n+k)X_n}{n+k+1}\mathbf{1}_{\{R_{n+1}=R_n\}} + \frac{(n+k)X_n+1}{n+k+1}\mathbf{1}_{\{R_{n+1}=R_n+1\}}. \tag{6.1}$$

考虑划分 $\Pi_{(X_0,\cdots,X_n)} := \{(X_0,\cdots,X_n) = (x_0,\cdots,x_n) : (x_0,\cdots,x_n) \in S_0\times\cdots\times S_n\}$. 那么 $\mathscr{F}_n^X = \sigma(\Pi_{(X_0,0\cdots,X_n)})$. 利用条件概率的定义展开

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n^X) = \sum_{(x_0,\cdots,x_n)\in S_0\times\cdots\times S_n}\mathbb{E}[X_{n+1} \mid (X_0,\cdots,X_n) = (x_0,\cdots,x_n)]\mathbf{1}_{\{(X_0,\cdots,X_n)=(x_0,\cdots,x_n)\}}. \tag{6.2}$$

记 $\widetilde{\mathbb{E}}(\cdot) := \mathbb{E}(\cdot \mid (X_0, \cdots, X_n) = (x_0, \cdots, x_n))$. 将 (6.1) 带入 (6.2) 中有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid (X_0, \cdots, X_n) = (x_0, \cdots, x_n)\right] &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{(n+k)X_n}{n+k+1}\mathbf{1}_{\{R_{n+1}=R_n\}}\right] + \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{(n+k)X_n+1}{n+k+1}\mathbf{1}_{\{R_{n+1}=R_n+1\}}\right] \\ &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{(n+k)x_n}{n+k+1}\mathbf{1}_{\{\Omega\}}\right] + \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{n+k+1}\mathbf{1}_{\{R_{n+1}=R_n+1\}}\right] \\ &= \frac{(n+k)x_n}{n+k+1} + \frac{x_n}{n+k+1} = x_n.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n^X) &= \sum_{(x_0,\cdots,x_n)\in S_0\times\cdots\times S_n} \widetilde{\mathbb{E}}X_{n+1}\mathbf{1}_{\{(X_0,\cdots,X_n)=(x_0,\cdots,x_n)\}} \\ &= \sum_{(x_0,\cdots,x_n)\in S_0\times\cdots\times S_n} x_n\mathbf{1}_{\{(X_0,\cdots,X_n)=(x_0,\cdots,x_n)\}} \\ &= \sum_{x_n\in S_n} x_n\mathbf{1}_{\{X_n=x_n\}} = X_n.\end{aligned}$$

□

【命题 6.48】 由命题 6.47 知 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为非负上鞅. 再利用推论 6.46 知道 $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n < \infty$ a.s. 证明 $k=2$ 时 $X_\infty \sim \text{Uniform}[0,1]$.

证明. 由于 $X_n \in S_n = \{1/(n+2), 2/(n+2), \cdots, (n+1)/(n+2)\}$. 考察事件 $\{X_n = j/n+2\}$. 这说明在前 n 次抽球中有 $j-1$ 次抽到红球，其余次数抽到绿球. 不妨假设抽到红球的次数分别为 $n_1, \cdots, n_{j-1}$, 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_n = \frac{j}{n+2}\right) &= \sum_{1\leq n_1<\cdots<n_{j-1}\leq n}\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n_1-1}{n_1}\right)\times\frac{1}{n_1+1}\times\left(\frac{n_1}{n_1+2}\times\cdots\right)\cdots\times\frac{n+1-j}{n+1} \\ &= C_n^{j-1}\frac{(n-j+1)!(j-1)!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n-j+1)!(j-1)!}\cdot\frac{(n-j+1)!(j-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

由于 $0 \leq X_n \leq 1$. 自然 $0 \leq X_\infty \leq 1$ a.s. 对任意 $x \in [0,1]$，考察 $\mathbb{P}(X_\infty \leq x) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n \leq x) = \lim_{n\to\infty} 1/(n+1)\cdot\lfloor x(n+2)\rfloor = x$. 故 $X_\infty \sim \text{Uniform}[0,1]$. □

Chapter 7

一维 Brown 运动

§7.1 定义和基本性质

【定义 7.1】(一维 Brown 运动的定义) 称 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ 为方差为 σ^2 的 Brown Motion, 若

(1) $B_0 = 0$ (a.s.)且对任意 $\omega \in \Omega$ 都有 $t \mapsto B_t(\omega)$ 连续;

(2) (独立增量) $\forall t_1 < \cdots < t_n$ 有 $B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 相互独立;

(3) (平稳增量) $B_{t+s} - B_t \overset{(d)}{=} B_s \sim N(0, \sigma^2 s)$ 对任意 $s > 0, t \geq 0$ 成立.

特别地，若 $\sigma^2 = 1$，则称 B 为标准 Brown Motion.

【注 7.2】(Lévy 过程) Poisson 过程和 Brown Motion 都属于 Lévy 过程，即初值几乎必然为0，具有独立平稳增量，具有 càdlàg 轨道.

【命题 7.3】(标准BM基本性质) 设 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ 为方差为 1 标准 Brown Motion，则

(1) (数字特征) $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$;

(2) (尺度性质1) $\forall\, \alpha > 0$ 有 $\{\alpha B_t\}_{t\geq 0}$ 为方差为 α^2 的 BM;

(3) (尺度性质2) $\forall\, c > 0$ 有 $\{B_{ct}\}_{t\geq 0}$ 为方差为 c 的 BM;

(4) (尺度性质3) $\forall\, c > 0$ 有 $\{\sqrt{c} B_{t/c}\}_{t\geq 0}$ 为标准BM.

<u>**证明.**</u> (1) 注意到 $\mathrm{Cov}(B_{s\vee t} - B_{s\wedge t}, B_{s\wedge t} - B_0) = 0$. 那么 $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \mathrm{Cov}(B_{s\wedge t}, B_{s\wedge t}) = (s \wedge t) \times 1$. (2) $\alpha B_s \sim N(0, \alpha^2 s)$. (3) $B_{ct+cs} - B_{ct} \overset{(d)}{=} B_{cs} \sim N(0, cs)$; (4) 利用 (2)(3) 立即得到. □