# Lecture 6

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Sunday 30th March, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

# Review

- Duhamel's Principle: 非齐次方程的解可以由齐次方程的解导出.

$$y(x) = y_0 \exp\left\{\int_{x_0}^{x} P(s)\mathrm{d}s\right\} + \int_{x_0}^{x} Q(t)\exp\left\{\int_{t}^{x} P(s)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t.$$

- 几类换元方法：Riccati, Bernoulli, 齐次方程；
- 尝试构造积分因子：

$$y' - P(x)y = Q(x) \rightsquigarrow \mu(x) = \exp\left\{\int_{x}^{x_0} P(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

# Review

(1) $y^{(n)} = f(x)$;

(2) $y'' = f(x, y')$;

(3) 自治/驻定方程 $F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$.

前两类是基本的，我们只看第三类，考虑 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z$，那么

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \rightsquigarrow y^{(3)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right\} = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left\{z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right\}.$$

利用微分的运算性质，即

$$y^{(3)} = z\left\{\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 + z\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2}\right\}.$$

# Review

对于 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}.$

- 特征方程为 $y^{(k)} \rightsquigarrow \lambda^k$;
- $\lambda$ 为 $k$ 重根对应 $e^{\lambda x}(1, x, \cdots, x^{k-1})$;
- $\lambda \in \mathbb{C}$ 为 $k$ 重根，则 $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ 也为 $k$ 重根；
- 对 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的情形，$e^{\lambda x}$ 和 $e^{\overline{\lambda} x}$ 一般取为

$$e^{\mathrm{Re}\lambda\, x} \cos(\mathrm{Im}\lambda\, x),\ e^{\mathrm{Re}\lambda\, x} \sin(\mathrm{Im}\lambda\, x).$$

# Review

对于 $x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + x a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in \mathbb{R}$.

- $x = e^t \rightsquigarrow t = \ln x (x > 0), D = \mathrm{d}/\mathrm{d}t, x^k y^{(k)} = (D - k + 1) \cdots (D - 1) D y$;
- 特征方程为 $x^k y^{(k)} \rightsquigarrow \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - k + 1)$;
- $\lambda$ 为 $k$ 重根对应 $e^{\lambda t}(1, t, \cdots, t^{k-1}) \rightsquigarrow x^\lambda (1, \ln|x|, \ln^2|x|, \cdots, \ln^{k-1}|x|)$;
- 对 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的情形，$e^{\lambda t}$ 和 $e^{\overline{\lambda} t}$ 一般取为

$$|x|^{\mathrm{Re}\lambda} \cos(\mathrm{Im}\lambda \ \ln|x|), \ |x|^{\mathrm{Re}\lambda} \sin(\mathrm{Im}\lambda \ \ln|x|).$$

**Case I:** $f(x) = (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)e^{\lambda x}, b_i \in \mathbf{R}$.

特解可以选取为

$$y^* = x^k (B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0)e^{\lambda x}.$$

其中 $B_1, \cdots, B_m \in \mathbf{R}$，$k$ 为 $L[y] = 0$ 对应特征方程中 $\lambda$ 的重数.

**Case II:** $f(x) = [P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$.

记 $\max\{\deg P(x), \deg Q(x)\} = n$，则特解可以选取为

$$y^* = x^k \{A_1(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\}e^{\alpha x}.$$

其中 $\deg A(x) = \deg B(x) = n$，$A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$，$k$ 为 $L[y] = 0$ 对应特征方程中 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 的重数.

# Problems For Further Discussion

**例 1**

Solve $y'' + 4y = 0$. If we let $y' = p$, we will have $p\,\mathrm{d}p = -4y\,\mathrm{d}y \rightsquigarrow p^2 = -4y^2 + C$.

**例 2**

设右手直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. 给定 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$, $\quad \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{c}$, 使得 $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{3}$, 且由 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 三向量所张成的平行六面体的体积最大.

Note: 也可使用 Lagrange 乘数法来解决.

# The Method of Lagrange Multipliers

## Thm 3

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$f : U \to \mathbb{R}$ 为可微函数，$\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ 为 $C^1$ 映射. 记

$$\Sigma = \Phi^{-1}(0) = \{x \in U \mid \Phi(x) = 0\}.$$

设 $a \in \Sigma$ 为极值点.如果 $\text{rank}(J\Phi(a)) = m$，则存在 $\lambda \in \mathbb{R}^m$，使得

$$\nabla f(a) = \lambda^T J\Phi(a).$$

注意，这里等式右边是 $1 \times m$ 矩阵 $\lambda^T$ 与 $m \times n$ 矩阵 $J\Phi(a)$ 相乘.此 $\lambda$ 也称为 Lagrange 乘数.

Note:

- 使用时一般作 Lagrange 辅助函数 $F(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot \Phi(x)$;
- 注意求出的 $x$ 未必为极值点，需要检验 Hesse 矩阵的正定性，同时也未必是最值点，需要具体讨论.

# Multiple Limits

## 例 4

下列重极限存在吗？若存在，求出其值，不存在，说明理由.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \rightsquigarrow$ (Try!) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$;

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

Summary:

- 存在：定义，极坐标代换，放缩，变量替换为一元情形；
- 不存在：找沿着两个集合的极限不同，Heine 归结原理.

# Heine's Theorem

## Thm 5

(一元) 设函数 $f$ 在 $x_0$ 的一个空心开邻域内有定义，则 $f$ 在 $x_0$ 处的极限为 $A$ 当且仅当对于任何收敛点列 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ 且 $x_n \neq x_0$ $(\forall n)$，均有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

## Thm 6

(多元) $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$. 函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ 的充分必要条件是：对于任何点列 $\{x^{(k)}\} \subset D \setminus \{a\}$ 且 $x^{(k)} \to a$ $(k \to \infty)$，数列极限

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = l.$$

一般情况下，重极限和累次极限的存在没有什么关系.就算两个累次极限都存在，也不一定相等(需要一致性条件)

**例 7**

讨论下列函数在 $(0,0)$ 处的两个累次极限和重极限：

(1) $$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(2) $$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

有一个比较简单的命题给出了一定刻画

**Prop. 8**

设 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的一个去心邻域上有定义，且重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$

存在，则

- 如果 $y \neq y_0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在，则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \ell$;
- 如果 $x \neq x_0$ 时，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \ell$.

**例 9**

令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 在其定义域上是连续的.

**Prop. 10**

设 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个（非空）开集，$f: D\to\mathbb{R}^m$. 则 $f$ 在 $D$ 上连续的充分必要条件是：对于任意 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 $V$，$f^{-1}(V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.简言之，映射连续当且仅当开集的原像是开集.

# Relationship

关于二元函数的连续性、可导性（即偏导数存在）与可微性之间的关系可总结如下：

- 二元函数 $f(x,y)$ 可微必连续，可微必可导. 偏导数不连续也有可能可微.
- 二元函数 $f(x,y)$ 可导未必连续，也未必可微. 若偏导数均存在且有界，则必定连续. 若偏导数均存在且连续(或至多一个不连续)，则必定可微.
- 二元函数 $f(x,y)$ 连续未必可导，也未必可微.
- 两个混合二阶偏导数不一定相等，除非其中 $f_x, f_y$ 存在，且 $f_{xy}$ 连续.

**Prop. 11**

函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(x_0,y_0)$ 点的某个邻域内存在且连续，则 $f$ 在 $(x_0,y_0)$ 点连续.

# Differentiable

## Def 12

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$f : D \to \mathbb{R}$ 为多元函数，$a \in D$.如果存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得

$$f(a+h) = f(a) + \lambda \cdot h + o(|h|), \quad (|h| \to 0), \tag{1}$$

那么就称 $f$ 在点 $a$ 处可微，并称线性函数 $h \mapsto \lambda \cdot h$ 为 $f$ 在点 $a$ 处的微分，记作 $\mathrm{d}f(a)$.

Note: (1) 式右端 $o(|h|)$ 表示当 $|h| \to 0$ 时，该项的模是 $|h|$ 的高阶无穷小量，也就是说

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda \cdot h|}{|h|} = 0.$$

# Differentiable

## Prop. 13

若 $f$ 在 $a$ 处可微，且 $\mathrm{d}f|_{x=a} : h \mapsto \lambda \cdot h$. 那么

- $f$ 在 $a$ 处连续；
- $\lambda = \nabla f(a)$;
- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{x=a} = \nabla f(a) \cdot \ell$.

## Prop. 14

设开集 $D \subset \mathbb{R}^n$，函数 $f : D \to \mathbb{R}$，点 $a \in D$.如果 $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ 在点 $a$ 的一个开邻域中存在，且至多有一个不在 $a$ 处连续，则 $f$ 在点 $a$ 处可微.

(Cor.) 若偏导数均存在且连续，那么 $f$ 在点 $a$ 处可微.

# Examples

## 例 15

试证:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处存在偏导数，但不可微.

## 例 16

已知函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

试证: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数不连续，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

# Differentiation of Vector-Valued Functions

**Def 17**

设 $a \in D$. 如果存在 $A \in M_{m\times n}$，使得

$$f(a+h) = f(a) + Ah + o(|h|), \quad (|h| \to 0),$$

那么就称 $f$ 在点 $a$ 处可微，并称线性映射 $h \mapsto Ah$ 为 $f$ 在点 $a$ 处的微分，也记作 $\mathrm{d}f(a)$.

Note:

- 上式右端的 $o(|h|)$ 表示的是一个误差向量，而非一个实数.
- (Cor.) $f$ 在 $a$ 处可微当且仅当它的所有分量函数在 $a$ 处可微.
- (Def) $A := Jf(a) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$

# Tangent Line and Surface

设 $\sigma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ 为连续映射，我们称 $\sigma$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的连续参数曲线. 记

$$\sigma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

设 $t$ 为参数.如果 $x_i(t)$ $(1 \le t \le n)$ 均在 $t = t_0$ 处可导，则称 $\sigma$ 在 $t = t_0$ 处可导，记

$$\sigma'(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = (x_1'(t_0), x_2'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)),$$

称 $\sigma'(t_0)$ 为 $\sigma$ 在 $t_0$ 处的切向量. 设 $\sigma'(t_0) \neq 0$. 当 $t' \neq t_0$ 时，记

$$\gamma_{t'}(t) = \sigma(t_0) + (t - t_0)\frac{\sigma(t') - \sigma(t_0)}{t' - t_0}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\gamma_{t'}$ 是经过 $\sigma(t')$ 和 $\sigma(t_0)$ 两点的直线(称为 $\sigma$ 的割线). 当 $t' \to t_0$ 时，割线的极限记为 $\gamma_{t_0}(t) = \sigma(t_0) + (t - t_0)\sigma'(t_0)$. 称 $\gamma_{t_0}$ 为 $\sigma$ 在 $t_0$ 处的切线.切线可视为参数曲线的线性化.

# Tangent Line and Surface

设 $D$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中开集，$\varphi: D \to \mathbb{R}^3$ 为连续映射.我们称 $\varphi$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的连续参数曲面. 记

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D.$$

假定 $\varphi$ 的三个分量都在 $(u_0, v_0)$ 处可微，则在 $(u_0, v_0)$ 附近，成立

$$\varphi(u,v) = \varphi(u_0,v_0) + (u-u_0)\varphi_u(u_0,v_0) + (v-v_0)\varphi_v(u_0,v_0) + o(|(u-u_0, v-v_0)|),$$

其中 $\varphi_u = (x_u, y_u, z_u), \varphi_v = (x_v, y_v, z_v)$. $\varphi_u$ 是曲线 $\varphi(u,v)$ 在 $u = u_0$ 处的切向量，$\varphi_v$ 是曲线 $\varphi(u,v)$ 在 $v = v_0$ 处的切向量. 记

$$\varphi_*(u,v) = \varphi(u_0,v_0) + (u-u_0)\varphi_u(u_0,v_0) + (v-v_0)\varphi_v(u_0,v_0), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

当 $\varphi_u(u_0,v_0)$ 与 $\varphi_v(u_0,v_0)$ 线性无关时，$\varphi_*$ 的像是经过 $\varphi(u_0,v_0)$ 的平面，称为 $\varphi$ 在 $(u_0,v_0)$ 处的切面.切面的向量称为切向量.

# Tangent Line and Surface

设 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 为 $C^1$ 函数. 当 $c\in\mathbb{R}$ 时，记

$$S=F^{-1}(c)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid F(x,y,z)=c\}.$$

称 $S$ 为 $F$ 的等值面。如果对于任意的 $(x,y,z)\in S$，均有 $\nabla F(x,y,z)\neq 0$，则称 $S$ 为由 $F$ 决定的隐式曲面。设 $(x_0,y_0,z_0)\in S$，不妨设 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. 由隐射定理，在 $(x_0,y_0,z_0)$ 附近，$S$ 可用参数曲面 $z=z(x,y)$ 表示，并且

$$F(x,y,z(x,y))=F(x_0,y_0,z_0)=c.$$

在 $(x_0,y_0,z_0)$ 处曲面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(1,z_x(x_0,y_0),0)\times(0,1,z_y(x_0,y_0))=(-z_x(x_0,y_0),-z_y(x_0,y_0),1).\rightsquigarrow\nabla F.$$

# Higher Order Partial Derivatives

**Thm 18**

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为开集，函数 $f : D \to \mathbb{R}$，$(x_0, y_0) \in D$. 如果 $\partial_x f$, $\partial_y f$ 及 $\partial_{xy} f$ 在 $D$ 上存在，并且 $\partial_{xy} f$ 在 $(x_0, y_0)$ 处连续，那么：$\partial_{yx} f(x_0, y_0)$ 存在且

$$\partial_{xy} f(x_0, y_0) = \partial_{yx} f(x_0, y_0).$$

Note:

- 如果 $f$ 的直到 $k$ 阶的各种偏导数在 $D$ 中都存在且连续，则称 $f$ 为 $C^k$ 函数，记作 $f \in C^k(D)$. 当 $k \geq 2$ 时，$C^k$ 函数的偏导数与求次序无关.
- (Schwarz) $\partial_{xy} f, \partial_{yx} f$ 在 $(x_0, y_0)$ 处存在且连续，两个混合偏导数也相等.

# Taylor Formula

$$f \in C^2, f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(a) h + o(|h|^2).$$

极值的必要条件：$\nabla f = \mathbf{0}$;

极值的充分条件：

**Prop. 19**

设 $a$ 是函数 $f$ 的一个临界点，$f$ 在 $a$ 的某一邻域内连续的二阶偏导数.

(1) 如果 $\nabla^2 f(a)$ 是正 (负) 定方阵，则 $a$ 为 $f$ 的极小 (大) 值点；

(2) 如果 $\nabla^2 f(a)$ 是不定方阵，则 $a$ 不是 $f$ 的极值点。

# Cauchy Proposition and Stolz Theorem

## Prop. 20

(Cauchy) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a(< \infty \text{ or } \infty)$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Notes:

- 逆命题未必成立，如 $a_n = (-1)^n$;
- 若 $\{a_n\}$ 单调增加，逆命题成立 ✓

## Try

设 $\{a_n\}$ 为正数列，且存在极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

# Cauchy Proposition and Stolz Theorem

## Thm 21

(Stolz I) 设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 为数列，且 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 $+\infty$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

## Thm 22

(Stolz II) 设数列 $\{y_n\}$ 严格单调递减于 0，数列 $\{x_n\}$ 也收敛到 0. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

# Examples

## 例 23

设 $k$ 为正整数，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

## 例 24

设 $x_1\in(0,1), x_{n+1}=x_n(1-x_n), \forall n\geq 1.$ 证明

$$\lim_{n\to\infty} nx_n=1.$$

# Positional Relationships: Lines

Suppose two lines $l_1$ and $l_2$ are given by the symmetric equations:

$$\begin{aligned} l_1 : \quad & \frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} = \frac{z - z_1}{Z_1}, \\ l_2 : \quad & \frac{x - x_2}{X_2} = \frac{y - y_2}{Y_2} = \frac{z - z_2}{Z_2}. \end{aligned}$$

(1) **Skew:** $D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0;$

(2) **Intersection:** $D = 0, \quad X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2;$

(3) **Parallel:** $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 \neq (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1);$

(4) **Coincidence:** $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1).$

# More About Skew Lines

Suppose two lines $l_1$ and $l_2$ are given by the symmetric equations:

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1}, \boldsymbol{u}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2}, \boldsymbol{u}_2 = (X_2, Y_2, Z_2).$$

Set $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2)$, then $\det[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \neq 0$ implies $l_1, l_2$ are skew lines.

(1) **Distance:** $d = \dfrac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}$;

(2) **The line intersecting both of them at right angles**:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = 0. \end{cases}$$

# Equation of A Bundle of Planes

Suppose the equation of a line $l$ is given by:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Then, the equation of the axial plane family passing through the line $l$ is:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

where $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ and not both zero.

## Examples

### 例 25

求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ 在平面 $x+y+2z-5=0$ 上的投影方程.

### 例 26

在直角坐标系中，平面 $\pi: Ax+By=0$. 求：平面 $\pi$ 绕它与面 $XOY$ 的交线旋转 $\alpha$ 度角后的新平面方程.

### 例 27

已知直线 $L_1: \dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 和 $L_2: \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$.

(1) 证明：$L_1, L_2$ 异面；

(2) 求 $L_1, L_2$ 之间的距离和公垂直线 $L$ 的方程.

# Cylindrical Surface

## Def 28

由平行于定方向与一条定曲线相交的一族平行直线所张成的曲面成为柱面.其中每条平行直线称为**柱面的直母线**，定曲线称为曲面的**准线**.

## Try

在空间直角坐标系中，不含坐标 $z$ 的方程 $F(x,y)=0$ 表示一个柱面 $S$，它具有如下的 2 个性质：

(1) $S$ 的直母线平行于 $z$ 轴；

(2) $S$ 的准线是 $xOy$ 平面上的曲线 $C$.

其中

$$C:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

# Cylindrical Surface

若准线 $C$ 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

柱面方向为 $\boldsymbol{a}=(l,m,n)$，事实上，设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任一点，过点 $M$ 的直母线与准线 $C$ 的交点记为 $P(x_1,y_1,z_1)$，则点 $M$ 的坐标满足方程

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=:-t,$$

又 $F(x_1,y_1,z_1)=0, \quad G(x_1,y_1,z_1)=0$. 联立消去参数 $x_1,y_1,z_1$

$$\begin{cases} F(x+tl,y+tm,z+tn)=0, \\ G(x+tl,y+tm,z+tn)=0. \end{cases}$$

再消去 $t$，得柱面 $S$ 的一般方程.

# Projection Cylinder

空间曲线形如

$$\Gamma : \begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

的方程不是唯一的.常常将上述方程化为等价的方程组

$$\Gamma : \begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ G_1(x,z) = 0. \end{cases}$$

曲线 $\Gamma$ 表示这两个柱面

$$S_1 : F(x,y) = 0, \quad S_2 : G_1(x,z) = 0$$

的交线.这两个柱面称为曲线 $\Gamma$ 分别在 $xOy$ 平面和 $xOz$ 平面上的投影柱面.利用投影柱面，比较容易作出空间曲线的图形.

## 例 29

已知柱面 $S$ 的准线为曲线 $\Gamma$:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9, \\ x^2+y^2+z^2=9. \end{cases}$$

母线垂直于准线.

(1) 求 $S$ 的方程;

(2) 求 $\Gamma$ 在 $yOz$ 平面上投影曲线的方程.

# Conical Surface

## Def 30

过一定点 $M_0$ 且与不过 $M_0$ 的定曲线相交的一族直线构成的曲面称为锥面，其中这族直线中的每一条直线称为锥面的**直母线**，定曲线称为锥面的**准线**，定点称为锥面的顶点，简称**锥顶**.

若准线 $C$ 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

锥顶为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$.设 $M(x,y,z)$ 为锥面上任一点，过 $M$ 点的直母线 $M_0M$ 与准线 $C$ 的交点为 $P(x_1,y_1,z_1)$，设 $|M_0P|=t|M_0M|$，则

$$\begin{cases} x_1=x_0+t(x-x_0)=(1-t)x_0+tx, \\ y_1=y_0+t(y-y_0)=(1-t)y_0+ty, \\ z_1=z_0+t(z-z_0)=(1-t)z_0+tz. \end{cases}$$

# Conical Surface

又

$$\begin{cases} F(x_1, y_1, z_1) = F((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty, (1-t)z_0 + tz) = 0, \\ G(x_1, y_1, z_1) = G((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty, (1-t)z_0 + tz) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

消去 $t$，可得锥面的一般方程.而对锥顶为 $O$，准线落在平行坐标面的平面上时，不妨取准线

$$C : \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = h. \end{cases}$$

那么方程(2)化为

$$\begin{cases} f(tx, ty) = 0, \\ tz = h. \end{cases} \rightsquigarrow f\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0.$$

为去掉锥顶的锥面方程.

# Conical Surface

若 $f(x, y)$ 是 $n$ 次多项式，可有理化一个 $n$ 次齐次方程

$$z^n f\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0,$$

它的图像多了锥顶，但要注意，也可能增加了一些别的点.

e.g.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

表示锥顶在原点，以平面 $z = c$ 上椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

为准线的二次锥面.

**Try**

一个关于 $x, y, z$ 的齐次方程总表示一个锥顶在原点的二次锥面.

设齐次方程为 $S : F(x, y, z) = 0$，且 $F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z)$. 首先 $F(0, 0, 0) = 0$ 自然成立，对任意 $P(x_1, y_1, z_1) \neq O$ 在 $S$ 上，有 $P(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = \lambda^n F(x_1, y_1, z_1) = 0$. 即过原点和 $P$ 的整条直线都在 $S$ 上.

Note: 一个关于 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ 的齐次方程总表示一个锥顶在 $(x_0, y_0, z_0)$ 的二次锥面.

**Def 31**

一条曲线 $C$ 绕一条定直线 $\ell$ 旋转所产生的曲面称为旋转曲面，其中曲线 $C$ 称为旋转曲面的**母线**，定直线 $\ell$ 称为旋转轴.

Note: 过旋转面上一点作垂直于旋转轴的平面，它与旋转曲面的交线是一个圆，该圆称为旋转曲面的**纬圆**.

设旋转面的母线为

$$C : \begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

旋转轴的方程为

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

设 $M(x,y,z)$ 为旋转面上的任一点，过点 $M$ 的纬圆与母线 $C$ 交于点 $P(x_1,y_1,z_1)$. 过点 $P$ 的纬圆可视为过点 $P$ 且与轴垂直的平面与以 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\ell$ 为球心、以 $|M_0P|$ 为半径的球面的交线，于是过点 $P$ 的纬圆方程可表示为

$$\begin{cases} k(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2. \end{cases} \tag{3}$$

由于点 $M$ 在纬圆上，故点 $M$ 的坐标满足 (3). 又点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 在母线 $C$ 上，于是有

$$\begin{cases} F(x_1,y_1,z_1)=0, \\ G(x_1,y_1,z_1)=0. \end{cases} \tag{4}$$

联立 (3),(4) 消去参数 $x_1,y_1,z_1$，即得旋转面的方程.

# Rotational Surface

若母线落在坐标轴上，不妨

$$C:\begin{cases} F(y,z)=0,\\ x=0. \end{cases}$$

且旋转轴为 $Oz$ 轴，即 $\ell: x/0=y/0=z/1$. 那么 (3) 即

$$\begin{cases} z-z_1=0,\\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2. \rightsquigarrow x^2+y^2=x_1^2+y_1^2. \end{cases} \tag{5}$$

(4) 化为

$$\begin{cases} F(y_1,z_1)=0,\\ x_1=0. \end{cases} \rightsquigarrow y_1^2=x^2+y^2. \tag{6}$$

综合 (5),(6) 得到 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

# Examples

## 例 32

求球面

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=4$$

的以原点为顶点的外切锥面.

## 例 33

设直线

$$l_1: \quad \frac{x-a}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1},$$

$$l_2: \quad \begin{cases} x-z=0, \\ y=1. \end{cases}$$

若 $l_1, l_2$ 相交，求 $a$ 及 $l_2$ 绕 $l_1$ 旋转所得的曲面方程.

# Examples

## 例 34

由椭球面 $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的中心 $O$ 任意引三条相互垂直的射线，与 $S$ 分别交于点 $P_1,P_2,P_3$，设 $\left|\overrightarrow{OP_i}\right|=r_i, i=1,2,3$. 证明:

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

## 例 35

已知椭球面

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ c<a<b.$$

试求过 $x$ 轴且与 $S$ 的交线是圆的所有平面.