## §7.7, 7.9 Ordinary Differential Equations III

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Wednesday 5<sup>th</sup> March, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

# Structure of Solutions to y' = A(x)y

我们首先引入线性相关和线性无关的定义。称向量函数  $y_1(x), \cdots, y_n(x)$  在 [a,b] 上是线性相关的,若存在不全为 0 的常数  $c_1, \dots, c_n$  使得

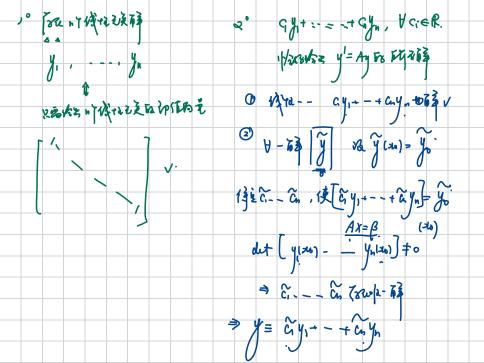
$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$$
、  $\forall x \in [a,b]$ . 否则称为线性无关,i.e., は  $\begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{J} & \mathbf{J}^2 \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{pmatrix}$  =  $\mathbf{J}$  は  $\mathbf{J}$  な  $\mathbf{J}$  は  $\mathbf{J}$  は  $\mathbf{J}$  な  $\mathbf{J}$  は  $\mathbf{J}$  な  $\mathbf{J}$  は  $\mathbf{J}$  な  $\mathbf{J}$  は  $\mathbf{J}$  な  $\mathbf{J}$   $\mathbf{J}$  な  $\mathbf{J}$   $\mathbf{J}$ 

记 Wronsky 行列式  $W(x) = \det[\mathbf{y}_1(x), \cdots, \mathbf{y}_n(x)].$ 

- 「ry  $(1) y_1(x), \cdots, y_n(x)$  在 [a,b] 上线性相关  $\Rightarrow W(x) \equiv 0$ . ( f ) ( f' )

7/30

Wednesday 5<sup>th</sup> March, 2025 (illusion) Lecture 3



# Summary I

• 设  $y_1,\cdots,y_n$  为上述方程的一个基本解组。设  $\varphi$  为 y'=A(x)y+f(x),  $A(t)\in C[a,b]$  的一个特解,那么 y'=A(x)y+f(x) 的任意一个解 y 可以表示为

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + \varphi. \tag{5}$$

# Examples

### 例 6

设二阶线性微分方程 y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) 的 3 个特解为  $y_1=x,y_2=e^x$  ,  $y_3=e^{2x}$  , 试求此方程满足条件 y(0)=1,y'(0)=3 的特解。

#### 例 7

已知  $y_1(x) = e^x, y_2(x) = u(x)e^x$  是二阶微分方程 (2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0 的解, 其中 u(x) 满足 u(-1) = e, u(0) = -1 求该微分方程的通解。

$$0 = \sqrt{2} \left( \frac{|x|}{|x|} + \frac{|x|}{|x|} \right) \left( \frac{|x|}{|x|} - \frac{|x|}{|x|} \frac{|x|}{|x|} + \frac{|x|}{|x|} \right) + \frac{|x|}{|x|} \left( \frac{|x|}{|x|} + \frac{|x|}{|x|} \right) = 0$$

$$U = C_1 \quad (23-1) e^{-3} d_3.$$

$$= -C_1 \quad (23-1) e^{-3} + (2e^{-3})$$

$$= -C_1 \quad (23-1) e^{-3} + (2e^{-3})$$

$$= \frac{-c_1}{(24-1)}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x} dx$$

$$-2e^{-x} + c_2.$$

# Fundamental Matrix $\Phi(x)$

$$egin{align*} egin{align*} egin{align*}$$

•  $\Phi(x)$ ,  $\Psi(x)$  均为原方程的基解矩阵,那么存在 n 阶可逆矩阵 C 满足 光C可は 単いC 名解 V

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{2}$$

 $\Psi_{(A)} = \overline{\Phi}_{(A)} \chi_{(A)}$ 

$$\Psi(x) = \Phi(x)C$$

$$\Psi(x)$$

• 反之,若  $\Phi(x)$  为原方程的基解矩阵,那么对任意 n 阶可逆矩阵 C 均有 A (1) \$ (14) X (14) + \$ (14) X (14) = A (14) \$ (14) X (14)  $\Phi(x)C$  为原方程的基解矩阵;

特别地,当取 
$$C=\Phi^{-1}(x_0)$$
 时, 
$$\Psi(x)=\Phi(x)C=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0).$$
 中  $\Psi(x)=\Phi(x)C=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0).$ 

此时称  $\Psi(x)$  为标准基解矩阵,满足  $\det \Psi(x_0) = 1$ .

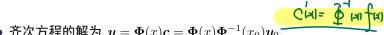
$$\Psi(x_0) = E_0 = I_0 = I_0$$

(illusion) Lecture 3

#### The Method of Variation of Parameters

$$y' = A(x)y \rightsquigarrow y' = A(x)y + f(x)$$

两个方程的初值条件均给定为  $y(x_0) = y_0$ . 齐次方程的一个基解矩阵为  $\Phi(x)$ .



- 齐次方程的解为  $y = \Phi(x)c = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0$ .
- 非齐次方程的解设为  $y = \Phi(x)c(x) \rightsquigarrow \Phi(x)c'(x) = f(x)$ .

(Duhamel) 
$$\mathbf{y} = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau$$
.

# 例 13 设 f(x) 是 $[0, +\infty)$ 上的有界连续函数,证: 方程 y'' + 14y' + 13y = f(x) 的每 一个解在 $[0, +\infty)$ 上都是有界函数。

$$= -\frac{1}{(2)} e^{-\frac{1}{2}x} \left( -e^{-\frac{1}{2}x} f(x) \right)$$

$$= -\frac{1}{(2)} e^{-\frac{1}{2}x} f(x)$$

$$\frac{1}{12}e^{\frac{1}{12}}\int_{0}^{1}\frac{dt}{t} dt + \frac{1}{12}e^{\frac{1}{12}}\int_{0}^{1}\frac{dt}{t} dt + \frac{1}{12}e^{\frac{1}{12}}\int_{$$