§7.7-7.9 Ordinary Differential Equations IV, §8.1-8.4 Operators on Vectors, Equations of Lines and Planes in $\mathbf{R}^3$

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Sunday 16th March, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

Review

给定 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{A}(x) \in C[a,b],\ x_0 \in (a,b)$.

- 方程的所有解构成 n 维线性空间 $\mathcal{S} \rightsquigarrow$ 叠加原理；
- 解 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 构成 $\mathcal{S}$ 的一组基 $\Leftrightarrow \boldsymbol{y}_1(x_0), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x_0)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基；
- 称矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(x) = [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n]$ 为原方程的基解矩阵，那么对方程的任意解 $\boldsymbol{y}$，都存在常向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}.$$

- 设 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 为上述方程的一个基本解组。设 $\boldsymbol{\varphi}$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$, $\boldsymbol{A}(t) \in C[a,b]$ 的一个特解，那么 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$ 的任意一个解 $\boldsymbol{y}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{\varphi}. \tag{1}$$

Review

给定 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$.

- 方程的所有解构成 n 维线性空间 $\mathcal{S} \rightsquigarrow$ 叠加原理;
- 解 $y_1,\cdots,y_n$ 构成 $\mathcal{S}$ 的一组基 $\Leftrightarrow$ $y_1(x_0),\cdots,y_n(x_0)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基;
- n 个线性无关解 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 构成原方程的一个基本解组，那么对方程的任意解 y，都存在常向量 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]\boldsymbol{c}=c_1y_1+\cdots+c_ny_n.$$

- φ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(t)$ 的一个特解，那么 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(t)$ 通解可表示为

$$y=c_1y_1+\cdots+c_ny_n+\varphi.$$

Review

给定 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$

- n 个解的 Wronsky 行列式定义为

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

在系数连续的区间上，要么恒为 0（解线性相关），要么恒不为 0（解线性无关）。

Review

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} \rightsquigarrow \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$$

两个方程的初值条件均给定为 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. 齐次方程的一个基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(x)$.

- 齐次方程的解为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0$.
- 非齐次方程的解设为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x) \rightsquigarrow \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{f}(x)$.

$$\text{(Duhamel) } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Review

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

初值条件给定为 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. 原方程的一个基本解组为 $y_1, \cdots, y_n$.

- 齐次: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \leftrightsquigarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}$.
- 非齐次: $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n \leftrightsquigarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x)$.

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{f}(x) \leftrightsquigarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

HW-3: Liouville's Theorem

例 1

设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解，令

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

证明：

(1) $W(x)$ 满足方程 $W' = -p(x)W$;

(2) $W(x) = W(x_0)\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}$.

$$\text{(Liouville) } W' = \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}(x)]W \rightsquigarrow W = W(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}(t)]\,\mathrm{d}t\right\}$$

HW-3: The Method of Variation of Parameters

例 2

求解下列微分方程的通解：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 2e^x \cos x \cos 2x.$$

例 3

给定方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 6t = f(t)$$

其中 $f(t) \in C[0, +\infty)$，若 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$，求证：对方程的任意解 $x(t)$ 都有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Lecture 4

初等积分方法:

- 可分离变量的微分方程 $\rightsquigarrow$ 一阶线性微分方程
- 变量代换法：齐次方程，Bernoulli 方程
- 全微分方程，积分因子法 $\rightsquigarrow$ (Chapter 9) 多元函数微分学
- 几类可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程:

- 齐次线性微分方程解的结构和性质 $\rightsquigarrow$ 齐次线性微分方程组
- 非齐次线性微分方程：常数变易法
- 常系数齐次线性微分方程 $\rightsquigarrow$ 变系数：Euler 方程
- 两类特殊的常系数非齐次线性微分方程

Preparation

定义复值函数 $z:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\ \psi(t)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 都是实值函数，那么类似定义如下概念：

(1) $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)+\mathrm{i}\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)$;

(2) $z(t)$ 在 t_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $\varphi(t),\ \psi(t)$ 在 t_0 处连续;

(3) $z'(t)=\varphi'(t)+\mathrm{i}\ \psi'(t)$.

容易验证下面的求导法则也成立：

- $(\alpha z_1(t)\pm\beta z_2(t))'=\alpha z_1'(t)\pm\beta z_2'(t),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$;
- $(z_1(t)z_2(t))'=z_1'(t)z_2(t)+z_1(t)z_2'(t)$.

Lemma 4

设 $t\in\mathbb{R}$，那么

$$e^{(z_1+z_2)t}=e^{z_1t}\cdot e^{z_2t},\ \frac{\mathrm{d}e^{zt}}{\mathrm{d}t}=ze^{zt}\rightsquigarrow\frac{\mathrm{d}^n e^{zt}}{\mathrm{d}t^n}=z^ne^{zt}.$$

An important Lemma

Lemma 5

设 $z(x)=\varphi(x)+\mathrm{i}\psi(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 的一个复值解，其中 $\varphi(x),\psi(x),a_i(x)$ $(1\le i\le n)$ 均为实值函数，那么

(1) $\varphi(x),\psi(x)$ 也为原方程的解；

(2) $\overline{z(x)}$ 也为原方程的解.

Notes:

- 若方程有两解 $z_{1,2}=e^{(a\pm b\mathrm{i})x}=e^{ax}(\cos bx\pm\mathrm{i}\sin bx)\rightsquigarrow z_3=e^{ax}\cos bx$, $z_4=e^{ax}\sin bx$ 也为原方程的解。且 z_3,z_4 可以表示为 z_1,z_2 的线性组合。
- 记 $L[y]=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y$，若上述引理的方程修改为 $L(y)=u(x)+\mathrm{i}v(x)$，那么 $y_1=\varphi(x),y_2=\psi(x)$ 分别为 $L[y]=u(x)$ 和 $L(y)=v(x)$ 的解。

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

给定 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}$.

对 $y' - ay = 0$ 我们已经知道它有形如 e^{ax} 的解，我们考虑待定 λ，将 $y = e^{\lambda x}$ 带入到方程中，观察 λ 需要满足怎样的条件。容易得到

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n) e^{\lambda x} = 0.$$

称 $F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ 为该微分方程的一个特征方程。

考虑 $F(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的标准分解式

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

Case I: 如果 $F(\lambda)$ 没有重根，即 $k_1 = \cdots = k_s = 1, s = n$，那么容易观察到 $y = e^{\lambda_i x}$ 都是原方程的解。

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

为了说明此时 $e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$ 构成一个基本解组，也即解集 $\mathcal{S}$ 的一组基，我们考察 Wronsky 行列式

$$
\begin{aligned}
W(x) &= \det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \\
&= \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x\right\} \prod_{1 \le j < i \le n} (\lambda_i - \lambda_j).
\end{aligned}
$$

而在标准分解中我们已经假定 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 所以上式不为 0 是显然的。

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

Case II: 现在考虑更一般的情形，即 $F(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有重根。先从一个特殊情况入手，不妨 $\lambda_1 = 0$，这说明特征方程变为

$$\lambda^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}=0 \rightsquigarrow a_{n-k_1+1}=\cdots=a_n=0.$$

回到原微分方程，变为

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-k_1}y^{(k_1)}=0 \rightsquigarrow y^{(k_1)}=0 \text{ in particular!}$$

这说明 $1, x, x^2, \cdots, x^{k_1-1}$ 都是原方程的解，更重要的它们都是线性无关的！进一步，你可以把它们看成 $1\cdot e^{0x}, xe^{0x}, \cdots, x^{k_1-1}e^{0x}$。这给我们启发：当 λ_t 为 $F(\lambda)$ 的 k 重根时，是否 $1\cdot e^{\lambda_t x}, xe^{\lambda_t x}, \cdots, x^{k_t-1}e^{\lambda_t x}$ 均为方程的解？

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

接下来考察 $\lambda_1 \neq 0$，为了化归到我们刚才讨论的 $\lambda_1 = 0$ 的情形，使用变量代换 $y = ze^{\lambda_1 x}$，高阶导数的 Leibniz 公式告诉我们

$$
\begin{aligned}
y^{(m)} &= (ze^{\lambda_1 x})^{(m)} \\
&= z^{(m)} e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_m^k z^{(m-k)} \cdot (\lambda_1^k e^{\lambda_1 x}) + \cdots + \lambda_1^m z e^{\lambda_1 x} \\
&= e^{\lambda_1 x} \left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)} \lambda_1^{m-j} \right].
\end{aligned}
$$

带入原微分方程 $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,\ a_0 = 1$，即

$$
e^{\lambda_1 x} \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} \left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)} \lambda_1^{m-j} \right] = 0.
$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

变量代换 $y = ze^{\lambda_1 x}$ 后我们得到

$$e^{\lambda_1 x}\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)}\lambda_1^{m-j}\right] = 0.$$

这个新的微分方程的特征方程无非就是把 $z^{(j)}$ 变成 λ^j，这巧妙让我们可以使用二项式定理，新的特征方程为

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j \lambda^j \lambda_1^{m-j}\right] = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(\lambda+\lambda_1)^m = G(\lambda) = 0.$$

注意到

$$G(\lambda) = F(\lambda+\lambda_1) \rightsquigarrow G(0) = F(0+\lambda_1) = 0.$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

这就说明变换后我们有解 $z = 1, x, x^2, \cdots, x^{k_1-1}$，也就对应上我们想要的 $y = e^{\lambda_t x}, xe^{\lambda_t x}, \cdots, x^{k_t-1}e^{\lambda_t x}$. 我们于是得到了 n 个解，为了说明它们是线性无关的，下面采用反证法：设存在不全为 0 的数 c_{rj} 满足

$$\sum_{r=1}^{s}(c_{r0} + c_{r1}x + \cdots + c_{r,k_r-1}x^{k_r-1})e^{\lambda_r x} := \sum_{r=1}^{s} P_r(x)e^{\lambda_r x} = 0.$$

两边同除 $e^{\lambda_1 x}$ 求导 k_1 次得到

$$(c_{10} + c_{11}x + \cdots + c_{1,k_1-1}x^{k_1-1})^{(k_1)} + \left\{\sum_{r=2}^{s} P_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_1)x}\right\}^{(k_1)} = 0.$$

记为

$$\sum_{r=2}^{s} Q_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_1)x} = 0.$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

注意这里如果 $P_r(x)$ 不为 0 的话，$Q_r(x)$ 也必不为0，且保持次数！对下面的式子两边同除 $(\lambda_2 - \lambda_1)$ ，再求导 k_2 次，得到

$$\left\{\sum_{r=2}^{s} Q_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_2)x}\right\}^{(k_2)} = 0 \rightsquigarrow \sum_{r=3}^{s} R_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_2)x} = 0.$$

重复这样的操作，直到只剩下一种 r，不妨就设定为 s，那么得到

$$V_s(x)e^{(\lambda_s-\lambda_{s-1})x} = 0.$$

但是按照原设定，左边必定是一个非零数，导出矛盾!

Summary I

对于 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}$.

- 特征方程为 $y^{(k)} \rightsquigarrow \lambda^k$;
- λ 为 k 重根对应 $e^{\lambda x}(1, x, \cdots, x^{k-1})$;
- $\lambda \in \mathbb{C}$ 为 k 重根，则 $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ 也为 k 重根；
- 对 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的情形，$e^{\lambda x}$ 和 $e^{\overline{\lambda} x}$ 一般取为

$$e^{\mathrm{Re}\lambda\ x} \cos(\mathrm{Im}\lambda\ x),\ e^{\mathrm{Re}\lambda\ x} \sin(\mathrm{Im}\lambda\ x).$$

例 6

已知

$$y_1 = xe^x + e^{2x}, \quad y_2 = xe^x + e^{-x}, \quad y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程。

例 7

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且存在常数 α, β ，满足对任意 $x \in (a,b)$，有 $f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x)$，证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。

Euler's Ordinary Differential Equation

下面我们使用变量代换方法求解一类特殊的变系数高阶齐次线性微分方程

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + x a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in \mathbb{R}.$$

不考虑特解 $y = 0$，换元 $x = e^t \rightsquigarrow t = \ln x (x > 0)$.

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\} = \frac{1}{x^2}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\},$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{x^3}\left\{\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}.$$

Euler's Ordinary Differential Equation

设微分算子 $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 那么

$$\begin{aligned} xy' &= Dy, \\ x^2y'' &= (D-1)Dy, \\ x^3y^{(3)} &= (D-2)(D-1)Dy, \\ &\cdots \\ x^ky^{(k)} &= (D-k+1)\cdots(D-1)Dy\ ? \end{aligned}$$

从而特征方程为

$$(D-n+1)\cdots(D-1)D + a_1(D-n+2)\cdots(D-1)D + \cdots + a_{n-1}D + a_n = 0.$$

Summary II

对于 $x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + x a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in \mathbb{R}$.

- 特征方程为 $x^k y^{(k)} \rightsquigarrow \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)$;
- λ 为 k 重根对应 $e^{\lambda t}(1, t, \cdots, t^{k-1}) \rightsquigarrow x^{\lambda}(1, \ln|x|, \ln^2|x|, \cdots, \ln^{k-1}|x|)$;
- 对 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的情形，$e^{\lambda t}$ 和 $e^{\bar{\lambda} t}$ 一般取为

$$x^{\mathrm{Re}\lambda} \cos(\mathrm{Im}\lambda\ \ln|x|),\ e^{\mathrm{Re}\lambda} \sin(\mathrm{Im}\lambda\ \ln|x|).$$

Exploration Of Special Nonhomogeneous Term $f(x)$

给定 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x),\ a_i \in \mathbb{R}$.

这是一个非齐次方程，结合我们前面给出的高阶微分方程理论，我们只需要找到它的一个特解即可，这往往可以通过常数变易法来完成，但在这里我们讨论两种特殊的情形：

Case I: $f(x) = (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)e^{\lambda x}$.

我们首先研究 $\lambda = 0$ 的情形，从前述齐次方程解的结构的研究中，我们发现对 $\lambda \neq 0$ 的情况，往往只需要通过一个变量代换 $y = ze^{\lambda x}$ 就可以划归到我们已经讨论过的情形。

Case I

Case I: $f(x) = (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0) e^{\lambda x}$.

当 $\lambda = 0$ 时，我们再分两种情况讨论，若 0 不为这个方程的特征方程的根，意味着 $a_n \neq 0$，我们猜测特解的形式也为某个多项式，那么等式左边多项式的最高此项必定是 $a_n y$ 产生的。于是设原非齐次方程的一个特解为

$$y^* = B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0.$$

带入后得到等式左右两边 x^k $(0 \leq k \leq m)$ 的系数相等有

$$B_k a_n + (k+1) B_{k+1} a_{n-1} + \cdots + m(m-1)\cdots(k+1) B_m a_{n-m+k} = b_k \ (n > m-k).$$

或者

$$B_k a_n + (k+1) B_{k+1} a_{n-1} + \cdots + (k+n)\cdots(k+1) B_{k+n} \cdot 1 = b_k \ (n \leq m-k).$$

Case I

写出这个线性方程组即

$$AX := \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & 2a_{n-2} & \cdots \\ 0 & a_n & 2a_{n-1} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} := \boldsymbol{\beta}.$$

容易发现 $\det \boldsymbol{A} = (a_n)^m \neq 0$，即这个方程必定有唯一解，那我们就找到了一个特解。对 $\lambda = 0$ 为特征根的情形，设 $\lambda = 0$ 为 k 重根，令 $z = y^{(k)}$, 原方程化为

$$z^{(n-k)} + a_1 z^{(n-k-1)} + \cdots + a_{n-k} z = f(x),\ a_{n-k} \neq 0.$$

那么这个方程可以化归为前面的讨论，有特解

$$z^* = y^{*(k)} = B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0.$$

Case I

对这个微分方程积分 k 次得到

$$y^* = \tilde{B}_m x^{m+k} + \cdots + \tilde{B}_0 x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \cdots + C_1 x + C_0.$$

但我们只需要一个特解，于是不妨取 $C_{k-1} = \cdots = C_0 = 0$，也即我们最开始只需要待定

$$y^* = x^k (B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0).$$

回到更一般的 $\lambda \neq 0$ 时，做代换 $y = ze^{\lambda x}$ 就回到了我们前面讨论的情形，也就是可以待定

$$z^* = x^k (B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0) \rightsquigarrow y^* = x^k (B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0) e^{\lambda x}.$$

Case II

Case II: $f(x)=[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, P(x),Q(x)\in\mathbf{R}[x]$.

事实上, 我们在 Case I 中已经处理了下面的结果

$$f(x)=P(x)e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}.$$

对上述 $f(x)$ 稍微改写

$$\begin{aligned}f(x)&=P(x)\cdot\frac{e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}+e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}}{2}+Q(x)\cdot\frac{e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}-e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}}{2\mathrm{i}}\\&=\frac{P(x)-\mathrm{i}Q(x)}{2}\cdot e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}+\frac{P(x)+\mathrm{i}Q(x)}{2}\cdot e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}:=f_1(x)+f_2(x).\end{aligned}$$

记 $L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny$. 由线性叠加原理，我们只需要分别求解 $L[y]=f_i(x)$ $(i=1,2)$ 的特解，然后叠加即可。

Case II

不妨 $\max\{\deg P(x), \deg Q(x)\} = n$. 由 Case I 可以待定 $D(x) = x^k A(x) e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$ 为 $L[y] = f_1(x)$ 的特解，其中 $\deg A(x) = n$, $A(x) \in \mathbf{C}[x]$.

注意到 $\overline{f_1(x)} = f_2(x)$，这说明 $L[\overline{D(x)}] = \overline{f_1(x)} = f_2(x)$. 记 $A(x) = A_1(x) + \mathrm{i}\, A_2(x)$, $A_1(x), A_2(x) \in \mathbf{R}[x]$，那么原方程的一个特解可以选取为

$$
\begin{aligned}
y^* = D(x) + \overline{D(x)} &= x^k \{A(x) e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} + \overline{A(x)} e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}\} \\
&= x^k \{A_1(x) \cos \beta x - A_2(x) \sin \beta x\} e^{\alpha x}.
\end{aligned}
$$

其中 $A_1(x), A_2(x)$ 至多为 n 次实系数多项式，k 为 $L[y] = 0$ 对应特征方程中 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 的重数。

Summary III

Case I: $f(x) = (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)e^{\lambda x}, b_i \in \mathbf{R}$.

特解可以选取为

$$y^* = x^k(B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0)e^{\lambda x}.$$

其中 $B_1, \cdots, B_m \in \mathbf{R}$，$k$ 为 $L[y] = 0$ 对应特征方程中 λ 的重数。

Case II: $f(x) = [P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$.

记 $\max\{\deg P(x), \deg Q(x)\} = n$，则特解可以选取为

$$y^* = x^k\{A_1(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\}e^{\alpha x}.$$

其中 $\deg A(x) = \deg B(x) = n$，$A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$，$k$ 为 $L[y] = 0$ 对应特征方程中 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 的重数。

More Examples

例 8

求解下列微分方程的通解：

(1) $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2.$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 2e^x \cos x \cos 2x.$

More Examples

例 9

给定微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

设 $y = f(x)$ 为上述方程的解，证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Outline of Chapter 8: Operators on Vectors and Analytical Geometry in Space

向量代数：

- 线性运算：加法，数乘 $\rightsquigarrow \mathbf{R}^3$ 成为线性空间；
- 欧氏空间 $E^3 = (\mathbf{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$：内积，投影，Schmidt 正交化；
- 其他运算：叉乘（向量积），混合积，双重向量积；
- 上述运算的坐标表示.

空间中的直线和平面：

- 平面方程的建立：点法式，法式，参数方程；
- 直线方程的建立：点向式，一般式，参数方程；
- 位置关系，距离和夹角的讨论;
- 平面束方程.

Outline of Chapter 8: Operators on Vectors and Analytical Geometry in Space

空间中的曲线和曲面：

- 柱面，锥面和旋转曲面，常见二次曲面；
- 投影柱面 $\rightsquigarrow$ 空间曲线在坐标面上的投影；
- 补充：实对称矩阵的正交相似对角化，正交变换；
- 空间直角坐标变换 $\rightsquigarrow$ 化二次型为标准型.

Examples

例 10

设右手直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. 给定 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦和向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影;

(2) 求向量 $\boldsymbol{c}$，使得 $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{3}$，且由 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 三向量所张成的平行六面体的体积最大。

例 11

已知 O 为正多边形 $A_1A_2\ldots A_n$ 的中心，P 为其外接圆上一点，证明:

(1) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}$;

(2) $|\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_n}|$ 为常数。

Hint: $\overrightarrow{OA_{k-1}} + \overrightarrow{OA_{k+1}} = \lambda \overrightarrow{OA_k}$, $2 \le k \le n-1$.

Projection and Schmidt Orthogonalization Process

Q: 在空间 $E^3 = (\mathbf{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中有三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$，如何操作能让它们两两正交?

- $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$;
- $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\,\boldsymbol{a} \rightsquigarrow \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}'}{|\boldsymbol{b}'|}$;
- $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} - \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\,\boldsymbol{a} - \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}'}{|\boldsymbol{b}'|^2}\,\boldsymbol{b}' \rightsquigarrow \boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{c}'}{|\boldsymbol{c}'|}$.

Notes:

- $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 是正交矩阵 $\rightsquigarrow$ 未必右手系，即未必 $\det Q = 1$;
- QR 分解：设 $\boldsymbol{P}$ 可逆，那么必定存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，和一个上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$，使得 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$，且这种分解是唯一的。

Common Operators On Vectors

给定 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1), \boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2), \boldsymbol{c} = (x_3, y_3, z_3) \in E^3$.

叉乘(外积，向量积)：

- 运算律 I：$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$;
- 运算律 II：$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$;
- $\rightsquigarrow \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \boldsymbol{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (\boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{b}_j)$;
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$;
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Common Operators On Vectors

给定 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2),\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)\in E^3$.

混合积:

- $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$;
- $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\pm 1\cdot V_{\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}}$，其中正负号取决于左手系还是右手系;
- $\rightsquigarrow \det[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]=1,\ \det[\boldsymbol{j},\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}]=-1,\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$;
- $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$;
- Q: 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，那么任意 $\boldsymbol{r}\in E^3$ 都有分解

$$\boldsymbol{r}=\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

例 12

证明：对任意的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in E^3$，有

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

例 13

(Lagrange) 证明：对任意四个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in E^3$，有

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} \end{vmatrix}.$$

Positional Relationships: Planes

Suppose two planes π_1 and π_2 are given by the equations:

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2: &\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}$$

(1) **Intersection:** $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$;

(2) **Parallel:** $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$;

(3) **Coincidence:** $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Positional Relationships: Planes and Lines

Suppose a line l and a plane π are given by the equations:

$$\begin{aligned} l: &\quad \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}, \\ \pi: &\quad Ax + By + Cz + D = 0. \end{aligned}$$

(1) **Intersection:** $AX + BY + CZ \neq 0$;

(2) **Parallel:** $\begin{cases} AX + BY + CZ = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases}$;

(3) $l \subseteq \pi$**:** $\begin{cases} AX + BY + CZ = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$.

Positional Relationships: Lines

Suppose two lines l_1 and l_2 are given by the symmetric equations:

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1},$$
$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2}.$$

(1) **Skew:** $D = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0;$

(2) **Intersection:** $D = 0, \quad X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2;$

(3) **Parallel:** $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 \neq (x_2-x_1) : (y_2-y_1) : (z_2-z_1);$

(4) **Coincidence:** $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 = (x_2-x_1) : (y_2-y_1) : (z_2-z_1).$

More About Skew Lines

Suppose two lines l_1 and l_2 are given by the symmetric equations:

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1}, \boldsymbol{u}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2}, \boldsymbol{u}_2 = (X_2, Y_2, Z_2).$$

Set $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2)$, then $\det[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \neq 0$ implies l_1, l_2 are skew lines.

(1) **Distance:** $d = \dfrac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}$;

(2) **The line intersecting both of them at right angles**:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = 0. \end{cases}$$

Equation of A Bundle of Planes

Suppose the equation of a line l is given by:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Then, the equation of the axial plane family passing through the line l is:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

where $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ and not both zero.

Examples

例 14

求直线 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ 在平面 $x + y + 2z - 5 = 0$ 上的投影方程。

例 15

在直角坐标系中，平面 $\pi : Ax + By = 0$. 求：平面 π 绕它与面 XOY 的交线旋转 α 度角后的新平面方程。

例 16

已知直线 $L_1 : \dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{1}$ 和 $L_2 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{9} = \dfrac{z-2}{2}$.

(1) 证明：L_1, L_2 异面；

(2) 求 L_1, L_2 之间的距离和公垂直线 L 的方程。