§7.7, 7.9 Ordinary Differential Equations III

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Wednesday 5th March, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

Structure of Solutions to $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$

我们首先引入线性相关和线性无关的定义。称向量函数 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是线性相关的，若存在不全为 0 的常数 $c_1, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = 0, \ \forall\, x \in [a,b].$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad f(x) = \begin{cases} x^2, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} = x^2 \mathbb{1}\{x>0\}$$

否则称为线性无关，i.e.,

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = 0, \ \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x>0 \\ x^2, & x\le 0 \end{cases}$$

记 Wronsky 行列式 $W(x) = \det[\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)]$.

Try

(1) $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上线性相关 $\Rightarrow W(x) \equiv 0$.

(2) 上述结论的逆定理不成立。

$$\begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix}$$

Thm 4. 线性相关 $\Rightarrow W(x)\equiv 0$

$\exists x_0,\ W(x_0)=0 \Leftrightarrow$ 线性相关 $\Leftrightarrow W(x)\equiv 0$

$\det[y_1(x_0)\ \cdots\ y_n(x_0)]=0$ 　无关 $\Leftrightarrow \forall x_0,\ W(x)\neq 0$

$\| \triangle$ 　即 $W(x)\neq 0$ 恒成立

A

$AX=0$ 有非零解 $X=[c_1 \cdots c_n]^T\neq 0$

证明条件 $c_1y_1(x_0)+\cdots+c_ny_n(x_0)=0$ 也满足 $y=0$

考虑 $c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)$ 为 $y'=Ay$ 的解

[存在性 证明条件中的唯一确定解 $\Rightarrow c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)\equiv 0,\ \forall x\in[a,b]$

$W(x)=\det[y_1(x)\cdots y_n(x)]\equiv 0,\ \forall x\in[a,b]$

1° 存在 n 个线性无关解

$y_1, \cdots, y_n$

$\Updownarrow$

只需给出 n 个线性无关的初值向量

$$\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix} \quad \checkmark$$

2° $c_1y_1+\cdots+c_ny_n$, $\forall c_i\in\mathbb{R}$.

恰好给出 $y'=Ay$ 的所有解

① 线性 -- $c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ 也解 √

② ∀一解 $\boxed{\tilde{y}}$ 设 $\tilde{y}(x_0)=\tilde{y}_0$.

待定 $\tilde{c}_1\cdots\tilde{c}_n$，使 $[\tilde{c}_1y_1+\cdots+\tilde{c}_ny_n](x_0)=\tilde{y}_0$

$Ax=\beta$

$\det[y_1(x_0)\ \cdots\ y_n(x_0)]\neq 0$

$\Rightarrow$ $\tilde{c}_1\cdots\tilde{c}_n$ 存在唯一

$\Rightarrow$ $y\equiv\tilde{c}_1y_1+\cdots+\tilde{c}_ny_n$

Summary I

$+: V\times V\to V$ $\quad \mathbb{R}\times V\to V$ $\quad +$ 数乘 $\quad \mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$

加 $\begin{cases} ① \ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \\ ② \ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \\ ③ \ \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0},\ \exists -\vec{a} \\ ④ \ \vec{a}+\vec{0}=\vec{a} \quad \exists\vec{0} \end{cases}$

给定 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{A}(x) \in C[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$.

- 方程的所有解构成 n 维线性空间 $\mathcal{S} \rightsquigarrow$ 叠加原理;+ 2对闭
- 解 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 构成 $\mathcal{S}$ 的一组基 $\Leftrightarrow \boldsymbol{y}_1(x_0), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x_0)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基;
- 称矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(x) = [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n]$ 为原方程的基解矩阵，那么对方程的任意解 $\boldsymbol{y}$，都存在常向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 满足

+ 数乘 $k,l\in F$ $\begin{cases} ① \ (kl)\vec{a}=k(l\vec{a}) \\ ② \ (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a} \\ ③ \ k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b} \\ ④ \ \exists 1.\ 1\cdot\vec{a}=\vec{a} \end{cases}$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}.$$

- 设 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 为上述方程的一个基本解组。设 φ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$, $\boldsymbol{A}(t) \in C[a,b]$ 的一个特解，那么 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$ 的任意一个解 $\boldsymbol{y}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n + \varphi. \tag{5}$$

Examples

1° $\frac{e^x-x}{e^{2x}-e^x}$ 无关 $y = C_1(e^x-x)+C_2(e^{2x}-x)+x$

由 $y(0)=1$, $y'(0)=3$ 得

例 6

设二阶线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的 3 个特解为 $y_1=x, y_2=e^x$, $y_3=e^{2x}$, 试求此方程满足条件 $y(0)=1, y'(0)=3$ 的特解。

例 7

已知 $y_1(x)=e^x, y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的解, 其中 $u(x)$ 满足 $u(-1)=e, u(0)=-1$, 求该微分方程的通解。

$$(2x-1)\cancel{e^x}\left[u(x)+2u'(x)+u''(x)\right]-(2x+1)\left[u'(x)+u(x)\right]\cancel{e^x}+2u(x)\cancel{e^x}=0$$

$$(2x-3)u'(x)+(2x-1)u''(x)=0$$

令 $y = u'(x)$

$$(2x-3)y + (2x-1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$(2x-3)y = -(2x-1)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}dy = -\frac{\overset{-1-2}{2x-3}}{2x-1}dx$$

$$\ln|y| = \int\left(\frac{2}{2x-1} - 1\right)dx$$

$$\ln|2x-1| - \ln|e^x| + c.$$

$$y = C\frac{2x-1}{e^x} = \frac{du}{dx}$$

$$u = c_1 \int (2x-1) e^{-x} \, dx.$$

$$= -c_1 \int (2x-1) \, d(e^{-x})$$

$$= \underline{-c_1} \; (2x-1) e^{-x} + \underline{\int 2e^{-x} \, dx}$$

$$-2e^{-x} + c_2.$$

$$= -c_1 (2x-1) e^{-x} - 2e^{-x} + c_2$$

代入 $u(-1)$. $u(0)$ 即可

Fundamental Matrix $\Phi(x)$

$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$ ✓　　令 $C(t)=A(t)B(t)$.　$C_{ij}'=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)' = \sum a'_{ik}b_{kj} + \sum a_{ik}b'_{kj}$

给定 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{A}(x) \in C[a,b]$，初值条件为 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$, $x_0 \in (a,b)$.

- $\boldsymbol{\Phi}(x), \boldsymbol{\Psi}(x)$ 均为原方程的基解矩阵，那么存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足

  证：令 $\Phi^{-1}(x)\Psi(x) = X(x)$　　若 C 可逆 $\Phi(x)C$ 也可逆 ✓

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$$

$\Psi(x) = \Phi(x)X(x)$　　$\Psi'(x) = \Phi'(x)X(x) + \Phi(x)X'(x) = A(x)\Psi(x) = A(x)\Phi(x)X(x)$

- 反之，若 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 为原方程的基解矩阵，那么对任意 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 均有 $\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$ 为原方程的基解矩阵；

  $A(x)\Phi(x)X(x) + \Phi(x)X'(x) = A(x)\Phi(x)X(x)$

  $\Phi(x)X'(x) = 0 \Rightarrow X'(x) = 0$
  $\Phi(x)$ 可逆
  $\Rightarrow X(x)$ 为常矩阵

- 特别地，当取 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)$ 时，

  $y' = Ay$　$y(x_0) = y_0$

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0).$$

$y = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0) \cdot y_0$

此时称 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 为标准基解矩阵，满足 $\det \boldsymbol{\Psi}(x_0) = 1$.

$\Psi(x_0) = E_n = I_n = 1_n$

The Method of Variation of Parameters

$\cancel{\Phi'(x)c(x)} + \Phi(x)c'(x) = \cancel{A(x)\Phi(x)c(x)} + f(x)$

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} \rightsquigarrow \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$$

两个方程的初值条件均给定为 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. 齐次方程的一个基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(x)$.

$c'(x) = \Phi^{-1}(x) f(x)$

- 齐次方程的解为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0$.
- 非齐次方程的解设为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x) \rightsquigarrow \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{f}(x)$.

$$\text{(Duhamel) } \boldsymbol{y} = \boxed{\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)}\boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boxed{\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)}\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

$e^{Ax} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-\tau)} f(\tau)\, d\tau$

例 13

设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的有界连续函数，证：方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数。

pf:

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-13x} \\ -e^{-x} & -13e^{-13x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{e^{-x}e^{-13x}}[-13+1]}\begin{pmatrix} -13e^{-13x} & -e^{-13x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-12e^{-14x}}\begin{pmatrix} -e^{-13x}f(x) \\ e^{-x}f(x) \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{12} e^{14x} \begin{pmatrix} -e^{-13x} f(x) \\ e^{-x} f(x) \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -e^{x} f(x) \\ e^{13x} f(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) = +\frac{1}{12} e^{x} f(x) \\ c_2'(x) = -\frac{1}{12} e^{13x} f(x) \end{cases}$$

$$c_1(x) = \int_0^x \frac{1}{12} e^{t} f(t)\, dt + C_1$$

$$c_2(x) = \int_0^x -\frac{1}{12} e^{13t} f(t)\, dt + C_2$$

$$y = \left(\int_0^x \frac{1}{12} e^{t} f(t)\,dt + C_1 \right) e^{-x} + \left(\int_0^x -\frac{1}{12} e^{13t} f(t)\,dt + C_2 \right) e^{-13x}$$

有界   有界 ≤ 1 ≤ 1

$[0,+\infty)$ def

$$|y| \leq 2|y(0)| + \frac{1}{12} e^{-x} \int_0^x \left| e^{t} f(t) \right| dt + \frac{1}{12} e^{-13x} \int_0^x \left| e^{13t} f(t) \right| dt$$

$|c_1| + |c_2|$ $|f(x)| \leq M$

$$\frac{1}{12} M e^{-x} \left(e^{x} - 1 \right) + \frac{1}{12 \times 13} M e^{-13x} \left(e^{13x} - 1 \right)$$

$\int_0^x e^{t}\,dt$

$$< 2|y(0)| + \frac{1}{12} M \cdot \underbrace{(1-e^{x})}_{<1} + \frac{1}{12\times 13} M \underbrace{(1-e^{-13x})}_{<1.}$$

$$< 2|y(0)| + \frac{1}{12} M + \frac{1}{12\times 13} M$$ 有界

皿.