§7.5—§7.7 Ordinary Differential Equations II

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Wednesday 19^{th} February, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

Review

- 解的存在唯一性定理；
- Duhamel's Principle: 非齐次方程的解可以由齐次方程的解导出。

$$y(x)=y_0\exp\left\{\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s\right\}+\int_{x_0}^{x}Q(t)\exp\left\{\int_{t}^{x}P(s)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t.$$

- 几类换元方法：Riccati, Bernoulli, 齐次方程；
- 尝试构造积分因子：

$$y'-P(x)y=Q(x)\rightsquigarrow\mu(x)=\exp\left\{\int_{x}^{x_0}P(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

Examples

(1) (Riccati) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) \rightsquigarrow$ Attention is all you need!

$\rightsquigarrow$ If you find one solution $\tilde{y}$, then let $y = z + \tilde{y} \rightsquigarrow$ Bernoulli.

(2) $\dfrac{x\mathrm{d}y}{y\mathrm{d}x} = f(xy) \rightsquigarrow u = xy,\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = y + x\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c) \rightsquigarrow u = ax + by + c,\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + b\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(4) $\dfrac{x^2\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(xy)$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xf\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$

(6) $\cdots$

HW-1

例 1

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^6 - 2x^2}{2xy^5 + x^2y^2}$;

(1') (Similar!) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x^3 + 3xy^2 + x}{3x^2y + 2y^3 - y}$;

(2) $y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1$.

例 2

已知微分方程 $y' + y = f(x)$, $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$. 若 $f(x)$ 是以周期为 T 的函数，证明：方程存在唯一以 T 为周期的解。

Examples

例 3

(Gronwall) 设 $f(t), g(t), x(t) \in C[t_0, t_1]$ 且非负，求证：若 $x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $t_0 \leq t \leq t_1$，则

$$x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)g(\tau)\exp\left\{\int_{\tau}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

例 4

设可微函数 $y = f(x)$ 对于任意 $x, h \in (-\infty, +\infty)$，恒满足关系式：

$$f(x+h) = \frac{f(x) + f(h)}{1 + f(x)f(h)}.$$

已知 $f'(0) = 1$，试求 $f(x)$.

Lecture 2

初等积分方法：

- 可分离变量的微分方程 $\rightsquigarrow$ 一阶线性微分方程
- 变量代换法：齐次方程，Bernoulli 方程
- 全微分方程，积分因子法 $\rightsquigarrow$ (Chapter 9) 多元函数微分学
- 几类可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程：

- 齐次线性微分方程解的结构和性质
- 非齐次线性微分方程：常数变易法
- 常系数齐次线性微分方程 $\rightsquigarrow$ 变系数：Euler 方程
- 两类特殊的常系数非齐次线性微分方程