Lecture 5

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Saturday 29th March, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

Review

对于 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0,\ a_i\in\mathbb{R}.$

- 特征方程为 $y^{(k)}\rightsquigarrow\lambda^k$;
- λ 为 k 重根对应 $e^{\lambda x}(1,x,\cdots,x^{k-1})$;
- $\lambda\in\mathbb{C}$ 为 k 重根，则 $\overline{\lambda}\in\mathbb{C}$ 也为 k 重根；
- 对 $\lambda\in\mathbb{C}$ 的情形，$e^{\lambda x}$ 和 $e^{\overline{\lambda}x}$ 一般取为

$$e^{\mathrm{Re}\lambda\ x}\cos(\mathrm{Im}\lambda\ x),\ e^{\mathrm{Re}\lambda\ x}\sin(\mathrm{Im}\lambda\ x).$$

Review

对于 $x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + x a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in \mathbb{R}.$

- 特征方程为 $x^k y^{(k)} \rightsquigarrow \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)$;
- λ 为 k 重根对应 $e^{\lambda t}(1, t, \cdots, t^{k-1}) \rightsquigarrow x^{\lambda}(1, \ln|x|, \ln^2|x|, \cdots, \ln^{k-1}|x|)$;
- 对 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的情形，$e^{\lambda t}$ 和 $e^{\bar{\lambda} t}$ 一般取为

$$x^{\mathrm{Re}\lambda} \cos(\mathrm{Im}\lambda\ \ln|x|),\ e^{\mathrm{Re}\lambda} \sin(\mathrm{Im}\lambda\ \ln|x|).$$

Review

Case I: $f(x) = (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)e^{\lambda x}, b_i \in \mathbf{R}$.

特解可以选取为

$$y^* = x^k (B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0)e^{\lambda x}.$$

其中 $B_1, \cdots, B_m \in \mathbf{R}$，$k$ 为 $L[y] = 0$ 对应特征方程中 λ 的重数。

Case II: $f(x) = [P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$.

记 $\max\{\deg P(x), \deg Q(x)\} = n$，则特解可以选取为

$$y^* = x^k \{A_1(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\}e^{\alpha x}.$$

其中 $\deg A(x) = \deg B(x) = n$，$A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$，$k$ 为 $L[y] = 0$ 对应特征方程中 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 的重数。

例 1

求微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = x, & x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ y'' + 4y = 0, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

满足条件 $y|_{x=0} = 0$，$y'|_{x=0} = 0$，且在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 处可导的解。

Hint：隐含的初值条件是什么？

More Examples

例 2

求微分方程的通解： $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$.

例 3

给定微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

设 $y = f(x)$ 为上述方程的解，证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Outline of Chapter 8: Operators on Vectors and Analytical Geometry in Space

向量代数：

- 线性运算：加法，数乘 $\rightsquigarrow \mathbf{R}^3$ 成为线性空间；
- 欧氏空间 $E^3 = (\mathbf{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$：内积，投影，Schmidt 正交化；
- 其他运算：叉乘（向量积），混合积，双重向量积；
- 上述运算的坐标表示.

空间中的直线和平面：

- 平面方程的建立：点法式，法式，参数方程；
- 直线方程的建立：点向式，一般式，参数方程；
- 位置关系，距离和夹角的讨论;
- 平面束方程.

Outline of Chapter 8: Operators on Vectors and Analytical Geometry in Space

空间中的曲线和曲面:

- 柱面，锥面和旋转曲面，常见二次曲面;
- 投影柱面 $\rightsquigarrow$ 空间曲线在坐标面上的投影;
- 补充：实对称矩阵的正交相似对角化，正交变换;
- 空间直角坐标变换 $\rightsquigarrow$ 化二次型为标准型.

例 4

设右手直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$. 给定 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦和向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影;

(2) 求向量 $\boldsymbol{c}$，使得 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$，且由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量所张成的平行六面体的体积最大。

例 5

已知 O 为正多边形 $A_1A_2\dots A_n$ 的中心，P 为其外接圆上一点，证明:

(1) $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$;

(2) $|\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}|$ 为常数。

Hint: $\overrightarrow{OA_{k-1}}+\overrightarrow{OA_{k+1}}=\lambda\overrightarrow{OA_k}$, $2\le k\le n-1$.

Projection and Schmidt Orthogonalization Process

Q: 在空间 $E^3 = (\mathbf{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中有三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$，如何操作能让它们两两正交?

- $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$;
- $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\,\boldsymbol{a} \rightsquigarrow \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}'}{|\boldsymbol{b}'|}$;
- $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} - \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\,\boldsymbol{a} - \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}'}{|\boldsymbol{b}'|^2}\,\boldsymbol{b}' \rightsquigarrow \boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{c}'}{|\boldsymbol{c}'|}$.

Notes:

- $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 是正交矩阵 $\rightsquigarrow$ 未必右手系，即未必 $\det Q = 1$;
- QR 分解：设 $\boldsymbol{P}$ 可逆，那么必定存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，和一个上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$，使得 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$，且这种分解是唯一的。

给定 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2),\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)\in E^3$.

叉乘(外积，向量积)：

- 运算律 I： $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;
- 运算律 II： $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;
- $\rightsquigarrow \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{a}_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_j\boldsymbol{b}_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\mu_j(\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{b}_j)$;
- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$;
- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$.

Common Operators On Vectors

给定 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1), \boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2), \boldsymbol{c} = (x_3, y_3, z_3) \in E^3$.

混合积:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$;
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \pm 1 \cdot V_{\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}}$，其中正负号取决于左手系还是右手系;
- $\rightsquigarrow \det[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = 1,\ \det[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] = -1,\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$;
- Q: 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面，那么任意 $\boldsymbol{r} \in E^3$ 都有分解

$$\boldsymbol{r} = \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{c}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

Examples

例 6

证明：对任意的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in E^3$，有

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

例 7

(Lagrange) 证明：对任意四个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in E^3$，有

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} \end{vmatrix}.$$

Positional Relationships: Planes

Suppose two planes π_1 and π_2 are given by the equations:

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : \quad & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}$$

(1) **Intersection:** $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$;

(2) **Parallel:** $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$;

(3) **Coincidence:** $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Positional Relationships: Planes and Lines

Suppose a line l and a plane π are given by the equations:

$$\begin{aligned} l: &\quad \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}, \\ \pi: &\quad Ax+By+Cz+D=0. \end{aligned}$$

(1) **Intersection:** $AX+BY+CZ\neq 0$;

(2) **Parallel:** $\begin{cases} AX+BY+CZ=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0. \end{cases}$;

(3) $l\subseteq\pi$**:** $\begin{cases} AX+BY+CZ=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$.

Positional Relationships: Lines

Suppose two lines l_1 and l_2 are given by the symmetric equations:

$$\begin{aligned} l_1: \quad & \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1}, \\ l_2: \quad & \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2}. \end{aligned}$$

(1) **Skew:** $D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0;$

(2) **Intersection:** $D = 0, \quad X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2;$

(3) **Parallel:** $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 \neq (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1);$

(4) **Coincidence:** $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1).$

More About Skew Lines

Suppose two lines l_1 and l_2 are given by the symmetric equations:

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}, \boldsymbol{u}_1=(X_1,Y_1,Z_1)$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}, \boldsymbol{u}_2=(X_2,Y_2,Z_2).$$

Set $\boldsymbol{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2)$, then $\det[\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]\neq 0$ implies l_1, l_2 are skew lines.

(1) **Distance:** $d=\dfrac{|(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}$;

(2) **The line intersecting both of them at right angles**:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)=0,\\ (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)=0.\end{cases}$$

Equation of A Bundle of Planes

Suppose the equation of a line l is given by:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Then, the equation of the axial plane family passing through the line l is:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

where $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ and not both zero.

Examples

例 8

求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ 在平面 $x+y+2z-5=0$ 上的投影方程。

例 9

在直角坐标系中，平面 $\pi: Ax+By=0$. 求：平面 π 绕它与面 XOY 的交线旋转 α 度角后的新平面方程。

例 10

已知直线 $L_1: \dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 和 $L_2: \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$.

(1) 证明：L_1, L_2 异面；

(2) 求 L_1, L_2 之间的距离和公垂直线 L 的方程。

Cylindrical Surface

Def 11

由平行于定方向与一条定曲线相交的一族平行直线所张成的曲面成为柱面。其中每条平行直线称为**柱面的直母线**，定曲线称为曲面的**准线**。

Try

在空间直角坐标系中，不含坐标 z 的方程 $F(x,y)=0$ 表示一个柱面 S，它具有如下的 2 个性质：

(1) S 的直母线平行于 z 轴；

(2) S 的准线是 xOy 平面上的曲线 C.

其中

$$C:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Cylindrical Surface

若准线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

柱面方向为 $\boldsymbol{a}=(l,m,n)$，事实上，设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任一点，过点 M 的直母线与准线 C 的交点记为 $P(x_1,y_1,z_1)$，则点 M 的坐标满足方程

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=:-t,$$

又 $F(x_1,y_1,z_1)=0, \quad G(x_1,y_1,z_1)=0.$ 联立消去参数 x_1,y_1,z_1

$$\begin{cases} F(x+tl,y+tm,z+tn)=0, \\ G(x+tl,y+tm,z+tn)=0. \end{cases}$$

再消去 t，得柱面 S 的一般方程。

Projection Cylinder

空间曲线形如

$$\Gamma : \begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

的方程不是唯一的。常常将上述方程化为等价的方程组

$$\Gamma : \begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ G_1(x,z) = 0. \end{cases}$$

曲线 Γ 表示这两个柱面

$$S_1 : F(x,y) = 0, \quad S_2 : G_1(x,z) = 0$$

的交线。这两个柱面称为曲线 Γ 分别在 xOy 平面和 xOz 平面上的投影柱面。利用投影柱面，比较容易作出空间曲线的图形。

例 12

已知柱面 S 的准线为曲线 Γ：

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9, \\ x^2+y^2+z^2=9. \end{cases}$$

母线垂直于准线.

(1) 求 S 的方程；

(2) 求 Γ 在 yOz 平面上投影曲线的方程。

Def 13

过一定点 M_0 且与不过 M_0 的定曲线相交的一族直线构成的曲面称为锥面，其中这族直线中的每一条直线称为锥面的**直母线**，定曲线称为锥面的**准线**，定点称为锥面的顶点，简称**锥顶**。

若准线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

锥顶为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$。设 $M(x,y,z)$ 为锥面上任一点，过 M 点的直母线 M_0M 与准线 C 的交点为 $P(x_1,y_1,z_1)$，设 $|M_0P|=t|M_0M|$，则

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + t(x-x_0) = (1-t)x_0 + tx, \\ y_1 = y_0 + t(y-y_0) = (1-t)y_0 + ty, \\ z_1 = z_0 + t(z-z_0) = (1-t)z_0 + tz. \end{cases}$$

Conical Surface

又

$$\begin{cases} F(x_1,y_1,z_1)=F((1-t)x_0+tx,(1-t)y_0+ty,(1-t)z_0+tz)=0, \\ G(x_1,y_1,z_1)=G((1-t)x_0+tx,(1-t)y_0+ty,(1-t)z_0+tz)=0. \end{cases} \tag{1}$$

消去 t，可得锥面的一般方程。而对锥顶为 O，准线落在平行坐标面的平面上时，不妨取准线

$$C:\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=h. \end{cases}$$

那么方程(1)化为

$$\begin{cases} f(tx,ty)=0, \\ tz=h. \end{cases} \rightsquigarrow f\left(\frac{hx}{z},\frac{hy}{z}\right)=0.$$

为去掉锥顶的锥面方程。

Conical Surface

若 $f(x,y)$ 是 n 次多项式，可有理化一个 n 次齐次方程

$$z^n f\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0,$$

它的图像多了锥顶，但要注意，也可能增加了一些别的点。

e.g.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

表示锥顶在原点，以平面 $z = c$ 上椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

为准线的二次锥面。

Try

一个关于 x, y, z 的齐次方程总表示一个锥顶在原点的二次锥面。

设齐次方程为 $S: F(x,y,z)=0$，且 $F(tx,ty,tz)=t^n F(x,y,z)$. 首先 $F(0,0,0)=0$ 自然成立，对任意 $P(x_1,y_1,z_1)\neq O$ 在 S 上，有 $P(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)=\lambda^n F(x_1,y_1,z_1)=0$. 即过原点和 P 的整条直线都在 S 上。

Note: 一个关于 $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ 的齐次方程总表示一个锥顶在 (x_0,y_0,z_0) 的二次锥面。

Rotational Surface

Def 14

一条曲线 C 绕一条定直线 ℓ 旋转所产生的曲面称为旋转曲面，其中曲线 C 称为旋转曲面的**母线**，定直线 ℓ 称为旋转轴。

Note: 过旋转面上一点作垂直于旋转轴的平面，它与旋转曲面的交线是一个圆，该圆称为旋转曲面的**纬圆**。

设旋转面的母线为

$$C: \begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

旋转轴的方程为

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Rotational Surface

设 $M(x, y, z)$ 为旋转面上的任一点，过点 M 的纬圆与母线 C 交于点 $P(x_1, y_1, z_1)$. 过点 P 的纬圆可视为过点 P 且与轴垂直的平面与以 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell$ 为球心、以 $|M_0P|$ 为半径的球面的交线，于是过点 P 的纬圆方程可表示为

$$\begin{cases} k(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2. \end{cases} \tag{2}$$

由于点 M 在纬圆上，故点 M 的坐标满足 (2). 又点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 在母线 C 上，于是有

$$\begin{cases} F(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

联立 (2),(3) 消去参数 x_1, y_1, z_1，即得旋转面的方程。

Rotational Surface

若母线落在坐标轴上，不妨

$$C : \begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

且旋转轴为 Oz 轴，即 $\ell : x/0 = y/0 = z/1$. 那么 (2) 即

$$\begin{cases} z - z_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \rightsquigarrow x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2. \end{cases} \tag{4}$$

(3) 化为

$$\begin{cases} F(y_1, z_1) = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases} \rightsquigarrow y_1^2 = x^2 + y^2. \tag{5}$$

综合 (4),(5) 得到 $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

Examples

例 15

求球面

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=4$$

的以原点为顶点的外切锥面。

例 16

设直线

$$l_1: \quad \frac{x-a}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1},$$

$$l_2: \quad \begin{cases} x-z=0, \\ y=1. \end{cases}$$

若 l_1, l_2 相交，求 a 及 l_2 绕 l_1 旋转所得的曲面方程。

Examples

例 17

由椭球面 $S: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的中心 O 任意引三条相互垂直的射线，与 S 分别交于点 P_1, P_2, P_3，设 $\left|\overrightarrow{OP_i}\right| = r_i, i=1,2,3$. 证明:

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

例 18

已知椭球面

$$S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ c<a<b.$$

试求过 x 轴且与 S 的交线是圆的所有平面。

Coordinate Transformation

下面研究如何确定一个一般的二元二次方程表示的曲面形状。引入直角坐标变换。设空间直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. 取 $\boldsymbol{A} \in O(3)$，令

$$[\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]\boldsymbol{A}.$$

那么 $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一组规范基。取新的空间直角坐标系 $\{O^*; \boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*\}$，设

$$O^* = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Coordinate Transformation

取 $P \in \mathbf{R}^3$. 那么由 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*P}$ 得到

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix}.$$

自然导出点坐标变换公式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Simplification of the General Quadratic Equation

在空间直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ 中，由 x, y, z 的二次方程

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$
$$+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

所表示的曲面称为二次曲面，这里 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ 是不全为零的实数，$a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}$ 也都为实数。

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}.$$

Simplification of the General Quadratic Equation

于是 $F(x,y,z)$ 中的二次齐次部分可表示为

$$\Phi(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}.$$

此时 $F(x,y,z)$ 可表示为

$$F(x,y,z) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\alpha} + a_{44} = 0.$$

由于实对称矩阵必定可正交相似实对角化，也即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，作正交线性替换 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}$，使 $\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵。那么剩下的操作只需要对 $2\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\alpha} + a_{44} = 2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\alpha} + a_{44}$ 配方即可。也就相当于作平移变换消去一次项。

An Example

Try

化简下列二次曲面为标准型，写出坐标变换公式，指出这是什么曲面。

$$S : 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 4yz + 6x + 4y - 4z + 12 = 0.$$

定义二次型部分

$$\Phi(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 4yz,$$

矩阵表示

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

An Example

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 2-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda+1).$$

特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=2,\lambda_3=-1.$

对于 $\lambda_1=5$，特征向量 $\boldsymbol{X_1}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{X_1}=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}.$$

An Example

类似地，$\lambda_2 = 2$ 和 $\lambda_3 = -1$ 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

由于特征值两两不同，归一化特征向量，即得到标准正交基：

$$\boldsymbol{e_1^*} = \frac{\boldsymbol{X_1}}{|\boldsymbol{X_1}|} = \left[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^T$$

$$\boldsymbol{e_2^*} = \frac{\boldsymbol{X_2}}{|\boldsymbol{X_2}|} = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right]^T$$

$$\boldsymbol{e_3^*} = \frac{\boldsymbol{X_3}}{|\boldsymbol{X_3}|} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]^T$$

An Example

从坐标系 $\{O;\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}\}$ 到 $\{O;\boldsymbol{e_1^*},\boldsymbol{e_2^*},\boldsymbol{e_3^*}\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix}.$$

在新坐标系下，原方程化为

$$5{x^*}^2 + 2{y^*}^2 - {z^*}^2 + 8y^* + 2z^* + 12 = 0.$$

配方得

$$5{x^*}^2 + 2(y^* + 2)^2 + (z^* - 1)^2 + 5 = 0.$$

An Example

引进新坐标系 $\{O'; \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$，使得

$$\begin{cases} x' = x^*, \\ y' = y^* + 2, \\ z' = z^* - 1. \end{cases}$$

则标准化后方程为

$$5{x'}^2 + 2{y'}^2 - {z'}^2 + 5 = 0,$$

它表示双叶双曲面。

Outline of Chapter 9: Differential Calculus of Multivariable Functions

多元函数的极限和连续性：

- 欧氏空间 $E^n = (\mathbf{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的点集拓扑，点列的极限 $\rightsquigarrow$ Heine；
- 多元数量值函数和向量值函数；
- 沿集合 S 的极限，累次极限;
- 有界闭集上连续函数的性质.

Outline of Chapter 9: Differential Calculus of Multivariable Functions

偏导数及其应用：

- 方向导数，偏导数；
- 可微，全微分和线性化方法 $\rightsquigarrow \nabla f$，Jacobi 阵;
- 链式法则和一阶微分的形式不变性；
- 逆映射定理和隐映射定理；
- 几何学应用：曲线的切线和法平面，曲面的切平面和法线；
- 应用：全微分方程 $\rightsquigarrow$ Chapter 11 Green Formula.

Outline of Chapter 9: Differential Calculus of Multivariable Functions

从一元函数而来的想法推广：

- Lagrange 中值定理；
- Taylor 公式；
- 极值和条件极值，Lagrange 乘数法 $\rightsquigarrow$ 最小二乘法；
- 凸函数.

例 19

下列重极限存在吗？若存在，求出其值，不存在，说明理由。

(1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2};$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \rightsquigarrow \text{(Try!)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2};$$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

Summary:

- 存在：定义，极坐标代换，放缩，等价；
- 不存在：找沿着两个集合的极限不同，Heine 归结原理.

Heine's Theorem

Thm 20

(一元）设函数 f 在 x_0 的一个空心开邻域内有定义，则 f 在 x_0 处的极限为 A 当且仅当对于任何收敛点列 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ 且 $x_n \neq x_0$ $(\forall n)$，均有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Thm 21

(多元）$D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$. 函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ 的充分必要条件是：对于任何点列 $\{x^{(k)}\} \subset D \setminus \{a\}$ 且 $x^{(k)} \to a$ $(k \to \infty)$，数列极限

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = l.$$

Successive Limits

一般情况下，重极限和累次极限的存在没有什么关系。就算两个累次极限都存在，也不一定相等(需要一致性条件)

例 22

讨论下列函数在 $(0,0)$ 处的两个累次极限和重极限：

(1) $$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(2) $$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Successive Limits

有一个比较简单的命题给出了一定刻画

Prop. 23

设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个去心邻域上有定义，且重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell$$

存在，则

- 如果 $y\neq y_0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在，则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\ell$;
- 如果 $x\neq x_0$ 时，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\ell$.

例 24

令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 在其定义域上是连续的。

Prop. 25

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个（非空）开集，$f:D\to\mathbb{R}^m$. 则 f 在 D 上连续的充分必要条件是：对于任意 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 V，$f^{-1}(V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。简言之，映射连续当且仅当开集的原像是开集。

Relationship

关于二元函数的连续性、可导性（即偏导数存在）与可微性之间的关系可总结如下：

- 二元函数 $f(x, y)$ 可微必连续，可微必可导. 偏导数不连续也有可能可微.
- 二元函数 $f(x, y)$ 可导未必连续，也未必可微. 若偏导数均存在且有界，则必定连续. 若偏导数均存在且连续(或至多一个不连续)，则必定可微.
- 二元函数 $f(x, y)$ 连续未必可导，也未必可微.
- 两个混合二阶偏导数不一定相等，除非其中 f_x, f_y 存在，且 f_{xy} 连续.

Differentiable

Def 26

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$f : D \to \mathbb{R}$ 为多元函数，$a \in D$。如果存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得

$$f(a+h) = f(a) + \lambda \cdot h + o(|h|), \quad (|h| \to 0), \tag{6}$$

那么就称 f 在点 a 处可微，并称线性函数 $h \mapsto \lambda \cdot h$ 为 f 在点 a 处的微分，记作 $\mathrm{d}f(a)$.

Note: (6) 式右端 $o(|h|)$ 表示当 $|h| \to 0$ 时，该项的模是 $|h|$ 的高阶无穷小量，也就是说

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda \cdot h|}{|h|} = 0.$$

Differentiable

Prop. 27

若 f 在 a 处可微，且 $\mathrm{d}f|_{x=a} : h \mapsto \lambda \cdot h$. 那么

- f 在 a 处连续；
- $\lambda = \nabla f(a)$;
- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{x=a} = \nabla f(a) \cdot \ell$.

Prop. 28

设开集 $D \subset \mathbb{R}^n$，函数 $f : D \to \mathbb{R}$，点 $a \in D$。如果 $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ 在点 a 的一个开邻域中存在，且至多有一个不在 a 处连续，则 f 在点 a 处可微.

(Cor.) 若偏导数均存在且连续，那么 f 在点 a 处可微.

Examples

例 29

试证:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处存在偏导数，但不可微。

例 30

已知函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

试证: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数不连续，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。