§7.7, 7.9 Ordinary Differential Equations III

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Wednesday 5th March, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

Review

- 可降阶的高阶微分方程 $\rightsquigarrow$ 尤其注意驻定方程 $F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$;
- 高阶线性微分方程 $\rightsquigarrow$ 线性微分方程组

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x) \rightsquigarrow \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x).$$

- 令 $y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)}$ 那么有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Review

存在唯一性定理：对线性微分方程组

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x),\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0,\ x_0 \in (a,b) \tag{2}$$

若 $\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{f}(x) \in C[a,b]$，方程 (2) 满足初始条件 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$ 的解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在且唯一。

$\rightsquigarrow$ 对高阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{3}$$

若 $a_i(x), f(x) \in C[a,b]$, 则方程 (3) 在给定初值条件 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}$, $\cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ 下存在唯一解 $y = y(x),\ x \in [a,b]$.

Review

解的线性叠加原理：

Thm 1

设 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_k(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的解，$\boldsymbol{\varphi}(x), \boldsymbol{\kappa}(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}_1(x)$ 的解，$\boldsymbol{\psi}(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}_2(x)$ 的解。那么

(1) $c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_k\boldsymbol{y}_k(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的解；

(2) $c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_k\boldsymbol{y}_k(x) + \boldsymbol{\varphi}(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$ 的解；

(3) $\boldsymbol{\varphi}(x) + \boldsymbol{\psi}(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}_1(x) + \boldsymbol{f}_2(x)$ 的解；

(4) $\boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{\kappa}(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的解.

例 2

求解下列微分方程:

(1) $y'' + 2x\,(y')^2 = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = -1/2$;

(2) $y'' - (y')^2 - 2y' - 1 = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0.$

例 3

设可微函数 $y = f(x)$ 对于任意 $x, h \in (-\infty, +\infty)$，恒满足关系式:

$$f(x+h) = \frac{f(x) + f(h)}{1 + f(x)f(h)}.$$

已知 $f'(0) = 1$，试求 $f(x)$.

Hint: 可以求出 $f(0) = ?$

Lecture 3

初等积分方法：

- 可分离变量的微分方程 $\rightsquigarrow$ 一阶线性微分方程
- 变量代换法：齐次方程，Bernoulli 方程
- 全微分方程，积分因子法 $\rightsquigarrow$ (Chapter 9) 多元函数微分学
- 几类可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程：

- 齐次线性微分方程解的结构和性质 $\rightsquigarrow$ 齐次线性微分方程组
- 非齐次线性微分方程：常数变易法
- 常系数齐次线性微分方程 $\rightsquigarrow$ 变系数：Euler 方程
- 两类特殊的常系数非齐次线性微分方程

Structure of Solutions to $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$

我们首先引入线性相关和线性无关的定义。称向量函数 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是线性相关的，若存在不全为 0 的常数 $c_1, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = 0, \ \forall\, x \in [a,b].$$

否则称为线性无关，i.e.,

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = 0, \ \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

记 Wronsky 行列式 $W(x) = \det[\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)]$.

Try

(1) $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上线性相关 $\Rightarrow W(x) \equiv 0$.

(2) 上述结论的逆定理不成立。

但当向量函数 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 为方程 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的解时，线性无关就等价到 $W(x) \neq 0$ 恒成立了，也等价于存在一点 x_0 满足 $W(x_0) \neq 0$.

Thm 4

若 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}(x) \in C[a, b]$ 的 n 个解，那么 $W(x)$ 在 $[a, b]$ 上要么恒为 0，要么处处不为 0！

接下来我们给出解的结构定理，注意体会 **初值条件决定解** 的作用。

Thm 5

方程 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}(x) \in C[a, b]$ 存在至多 n 个线性无关解 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$，且若 $\boldsymbol{y}(x)$ 为任意一解，则必定存在常数 $c_1, \cdots, c_n$ 满足

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + c_2\boldsymbol{y}_2(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x). \tag{4}$$

称 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 为方程的一个基本解组。

Summary I

给定 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{A}(x) \in C[a,b],\ x_0 \in (a,b)$.

- 方程的所有解构成 n 维线性空间 $\mathcal{S} \rightsquigarrow$ 叠加原理；
- 解 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 构成 $\mathcal{S}$ 的一组基 $\Leftrightarrow \boldsymbol{y}_1(x_0), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x_0)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基；
- 称矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(x) = [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n]$ 为原方程的基解矩阵，那么对方程的任意解 $\boldsymbol{y}$，都存在常向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}.$$

- 设 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 为上述方程的一个基本解组。设 φ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$, $\boldsymbol{A}(t) \in C[a,b]$ 的一个特解，那么 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$ 的任意一个解 $\boldsymbol{y}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n + \varphi. \tag{5}$$

Summary II

给定 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0.$

- 方程的所有解构成 n 维线性空间 $\mathcal{S} \rightsquigarrow$ 叠加原理；
- 解 $y_1,\cdots,y_n$ 构成 $\mathcal{S}$ 的一组基 $\Leftrightarrow y_1(x_0),\cdots,y_n(x_0)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基；
- n 个线性无关解 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 构成原方程的一个基本解组，那么对方程的任意解 y，都存在常向量 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_n]\boldsymbol{c}=c_1y_1+\cdots+c_ny_n.$$

- φ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(t)$ 的一个特解，那么 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(t)$ 通解可表示为

$$y=c_1y_1+\cdots+c_ny_n+\varphi.$$

Summary II

给定 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$

- n 个解的 Wronsky 行列式定义为

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

在系数连续的区间上，要么恒为 0（解线性相关），要么恒不为 0（解线性无关）。

Examples

例 6

设二阶线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的 3 个特解为 $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$, 试求此方程满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 3$ 的特解。

例 7

已知 $y_1(x) = e^x, y_2(x) = u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ 的解, 其中 $u(x)$ 满足 $u(-1) = e, u(0) = -1$. 求该微分方程的通解。

Fundamental Matrix $\Phi(x)$

给定 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{A}(x) \in C[a,b]$，初值条件为 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$，$x_0 \in (a,b)$.

- $\boldsymbol{\Phi}(x), \boldsymbol{\Psi}(x)$ 均为原方程的基解矩阵，那么存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}.$$

- 反之，若 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 为原方程的基解矩阵，那么对任意 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 均有 $\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$ 为原方程的基解矩阵；
- 特别地，当取 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)$ 时，

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0).$$

此时称 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 为标准基解矩阵，满足 $\det \boldsymbol{\Psi}(x_0) = 1$.

The Method of Variation of Parameters

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} \rightsquigarrow \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$$

两个方程的初值条件均给定为 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. 齐次方程的一个基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(x)$.

- 齐次方程的解为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0$.
- 非齐次方程的解设为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x) \rightsquigarrow \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{f}(x)$.

$$\text{(Duhamel) } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

The Method of Variation of Parameters

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

初值条件给定为 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. 原方程的一个基本解组为 $y_1, \cdots, y_n$.

- 齐次: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \rightsquigarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}$.
- 非齐次: $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n \rightsquigarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x)$.

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{f}(x) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

例 8

设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解，令

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

证明：

(1) $W(x)$ 满足方程 $W' = -p(x)W$;

(2) $W(x) = W(x_0)\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}$.

(Liouville) $W' = \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}(x)]W \rightsquigarrow W = W(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}(t)]\,\mathrm{d}t\right\}$

Preparation

定义复值函数 $z:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\,\psi(t)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 都是实值函数，那么类似定义如下概念：

(1) $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)+\mathrm{i}\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)$;

(2) $z(t)$ 在 t_0 处连续 $\Leftrightarrow \varphi(t),\ \psi(t)$ 在 t_0 处连续;

(3) $z'(t)=\varphi'(t)+\mathrm{i}\,\psi'(t)$.

容易验证下面的求导法则也成立：

- $(\alpha z_1(t)\pm\beta z_2(t))'=\alpha z_1'(t)\pm\beta z_2'(t),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$;
- $(z_1(t)z_2(t))'=z_1'(t)z_2(t)+z_1(t)z_2'(t)$.

Lemma 9

设 $t\in\mathbb{R}$，那么

$$e^{(z_1+z_2)t}=e^{z_1t}\cdot e^{z_2t},\ \frac{\mathrm{d}e^{zt}}{\mathrm{d}t}=ze^{zt}\rightsquigarrow\frac{\mathrm{d}^ne^{zt}}{\mathrm{d}t^n}=z^ne^{zt}.$$

An important Lemma

Lemma 10

设 $z(x)=\varphi(x)+\mathrm{i}\psi(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 的一个复值解，其中 $\varphi(x),\psi(x),a_i(x)\ (1\le i\le n)$ 均为实值函数，那么

(1) $\varphi(x),\psi(x)$ 也为原方程的解；

(2) $\overline{z(x)}$ 也为原方程的解.

Note: 若方程有两解 $z_{1,2}=e^{(a\pm b\mathrm{i})x}=e^{ax}(\cos bx\pm \mathrm{i}\sin bx)\rightsquigarrow z_3=e^{ax}\cos bx$, $z_4=e^{ax}\sin bx$ 也为原方程的解。且 z_3,z_4 可以表示为 z_1,z_2 的线性组合。

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

给定 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}$.

对 $y' - ay = 0$ 我们已经知道它有形如 e^{ax} 的解，我们考虑待定 λ，将 $y = e^{\lambda x}$ 带入到方程中，观察 λ 需要满足怎样的条件。容易得到

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda t} = 0.$$

称 $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ 为该微分方程的一个特征方程。

考虑 $F(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的标准分解式

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

Cases I: 如果 $F(\lambda)$ 没有重根，即 $k_1 = \cdots = k_s = 1, s = n$，那么容易观察到 $y = e^{\lambda_i x}$ 都是原方程的解。

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

为了说明此时 $e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$ 构成一个基本解组，也即解集 $\mathcal{S}$ 的一组基，我们考察 Wronsky 行列式

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x\right\} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j).$$

而在标准分解中我们已经假定 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 所以上式不为 0 是显然的。

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

Cases II: 现在考虑更一般的情形，即 $F(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有重根。先从一个特殊情况入手，不妨 $\lambda_1 = 0$，这说明特征方程变为

$$\lambda^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s} = 0 \rightsquigarrow a_{n-k_1+1} = \cdots = a_n = 0.$$

回到原微分方程，变为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-k_1} y^{(k_1)} = 0 \rightsquigarrow y^{(k_1)} = 0 \text{ in particular!}$$

这说明 $1, x, x^2, \cdots, x^{k_1-1}$ 都是原方程的解，更重要的它们都是线性无关的！进一步，你可以把它们看成 $1\cdot e^{0x}, xe^{0x}, \cdots, x^{k_1-1}e^{0x}$。这给我们启发：当 λ_t 为 $F(\lambda)$ 的 k 重根时，是否 $1\cdot e^{\lambda_t x}, xe^{\lambda_t x}, \cdots, x^{k_t-1}e^{\lambda_t x}$ 均为方程的解？

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

接下来考察 $\lambda_1 \neq 0$，为了化归到我们刚才讨论的 $\lambda_1 = 0$ 的情形，使用变量代换 $y = ze^{\lambda_1 x}$，高阶导数的 Leibniz 公式告诉我们

$$\begin{aligned} y^{(m)} &= (ze^{\lambda_1 x})^{(m)} \\ &= z^{(m)}e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_m^k z^{(m-k)} \cdot (\lambda_1^k e^{\lambda_1 x}) + \cdots + \lambda_1^m z e^{\lambda_1 x} \\ &= e^{\lambda_1 x}\left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)} \lambda_1^{m-j}\right]. \end{aligned}$$

带入原微分方程 $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0,\ a_0 = 1$，即

$$e^{\lambda_1 x}\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)} \lambda_1^{m-j}\right] = 0.$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

变量代换 $y = ze^{\lambda_1 x}$ 后我们得到

$$e^{\lambda_1 x}\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)}\lambda_1^{m-j}\right] = 0.$$

这个新的微分方程的特征方程无非就是把 $z^{(j)}$ 变成 λ^j，这巧妙让我们可以使用二项式定理，新的特征方程为

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j \lambda^j\lambda_1^{m-j}\right] = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(\lambda+\lambda_1)^m = G(\lambda) = 0.$$

注意到

$$G(\lambda) = F(\lambda+\lambda_1) \rightsquigarrow G(0) = F(0+\lambda_1) = 0.$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

这就说明变换后我们有解 $z=1,x,x^2,\cdots,x^{k_1-1}$，也就对应上我们想要的 $y=e^{\lambda_t x},xe^{\lambda_t x},\cdots,x^{k_t-1}e^{\lambda_t x}$. 我们于是得到了 n 个解，为了说明它们是线性无关的，下面采用反证法：设存在不全为 0 的数 c_{rj} 满足

$$\sum_{r=1}^{s}(c_{r0}+c_{r1}x+\cdots+c_{r,k_r-1}x^{k_r-1})e^{\lambda_r x}:=\sum_{r=1}^{s}P_r(x)e^{\lambda_r x}=0.$$

两边同除 $e^{\lambda_1 x}$ 求导 k_1 次得到

$$(c_{10}+c_{11}x+\cdots+c_{1,k_1-1}x^{k_1-1})^{(k_1)}+\left\{\sum_{r=2}^{s}P_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_1)x}\right\}^{(k_1)}=0.$$

记为

$$\sum_{r=2}^{s}Q_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_1)x}=0.$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

注意这里如果 $P_r(x)$ 不为 0 的话，$Q_r(x)$ 也必不为0，且保持次数！对下面的式子两边同除 $(\lambda_2-\lambda_1)$ ，再求导 k_2 次，得到

$$\left\{\sum_{r=2}^{s} Q_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_2)x}\right\}^{(k_2)} = 0 \rightsquigarrow \sum_{r=3}^{s} R_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_2)x} = 0.$$

重复这样的操作，直到只剩下一种 r，不妨就设定为 s，那么得到

$$V_s(x)e^{(\lambda_s-\lambda_{s-1})x} = 0.$$

但是按照原设定，左边必定是一个非零数，导出矛盾!

Summary I

对于 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}$.

- 特征方程为 $y^{(k)} \rightsquigarrow \lambda^k$;
- λ 为 k 重根对应 $e^{\lambda x}(1, x, \cdots, x^{k-1})$;
- $\lambda \in \mathbb{C}$ 为 k 重根，则 $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ 也为 k 重根；
- 对 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的情形，$e^{\lambda x}$ 和 $e^{\overline{\lambda} x}$ 一般取为

$$e^{\mathrm{Re}\lambda\ x} \cos(\mathrm{Im}\lambda\ x),\ e^{\mathrm{Re}\lambda\ x} \sin(\mathrm{Im}\lambda\ x).$$

Examples

例 11

已知

$$y_1 = xe^x + e^{2x}, \quad y_2 = xe^x + e^{-x}, \quad y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程。

例 12

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且存在常数 α, β ，满足对任意 $x \in (a,b)$，有 $f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x)$，证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。

例 13

设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的有界连续函数，证：方程 $y'' + 14y' + 13y = f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数。

Euler's Ordinary Differential Equation

下面我们使用变量代换方法求解一类特殊的变系数高阶齐次线性微分方程

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + x a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in \mathbb{R}.$$

不考虑特解 $y = 0$，换元 $x = e^t \rightsquigarrow t = \ln x (x > 0)$.

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\} = \frac{1}{x^2}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\},$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{x^3}\left\{\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}.$$

Euler's Ordinary Differential Equation

设微分算子 $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 那么

$$\begin{aligned} xy' &= Dy, \\ x^2y'' &= (D-1)Dy, \\ x^3y^{(3)} &= (D-2)(D-1)Dy, \\ &\cdots \\ x^ky^{(k)} &= (D-k+1)\cdots(D-1)Dy\ ? \end{aligned}$$

从而特征方程为

$$(D-n+1)\cdots(D-1)D + a_1(D-n+2)\cdots(D-1)D + \cdots + a_{n-1}D + a_n = 0.$$

Summary II

对于 $x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + x a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in \mathbb{R}$.

- 特征方程为 $x^k y^{(k)} \rightsquigarrow \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)$;
- λ 为 k 重根对应 $e^{\lambda t}(1, t, \cdots, t^{k-1}) \rightsquigarrow x^{\lambda}(1, \ln|x|, \ln^2|x|, \cdots, \ln^{k-1}|x|)$;
- 对 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的情形，$e^{\lambda t}$ 和 $e^{\bar{\lambda} t}$ 一般取为

$$x^{\mathrm{Re}\lambda} \cos(\mathrm{Im}\lambda \ \ln|x|),\ e^{\mathrm{Re}\lambda} \sin(\mathrm{Im}\lambda \ \ln|x|).$$