

Exercise 1 设二维函数 $f(x, y)$ 在平面 \mathbb{R}^2 上有连续的一阶偏导数，且满足：

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 1, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

证明：

(1) $\frac{\partial f}{\partial \rho} \geq \frac{1}{2\rho};$

(2) $f(x, y)$ 在平面 \mathbb{R}^2 上能取得最小值.

Exercise 2 已知二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

判定在点 $(0, 0)$ 处:

- (1) 是否连续?
- (2) 一阶偏导数是否存在?
- (3) 是否可微?