§7.5, 7.6, 7.10 Ordinary Differential Equations II

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Sunday 23rd February, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

Review I

- 变量分离方程 $\rightsquigarrow$ 特解;
- (Picard) 解的存在唯一性定理：对可解出导数的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

若满足:

(1) $f(x, y)$ 在包含 $[x_0, y_0]$ 的一个闭矩形区域 K 上连续;

(2) $f(x, y)$ 对 y 满足 Lipschitz 条件，i.e., 存在常数 $L > 0$ 满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,\ \forall\ y_1, y_2 \in K.$$

那么方程 (1) 在 x_0 的一个邻域中存在唯一满足 $y(x_0) = y_0$ 的解 $y = y(x)$.

- 实际操作中往往利用 $f_y(x, y)$ 存在且连续 $\rightsquigarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)$.

Review II

- Duhamel's Principle: 非齐次方程的解可以由齐次方程的解导出。

$$y(x) = y_0 \exp\left\{\int_{x_0}^{x} P(s)\mathrm{d}s\right\} + \int_{x_0}^{x} Q(t)\exp\left\{\int_{t}^{x} P(s)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t.$$

- 几类换元方法：Riccati, Bernoulli, 齐次方程；
- 尝试构造积分因子：

$$y' - P(x)y = Q(x) \rightsquigarrow \mu(x) = \exp\left\{\int_{x}^{x_0} P(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

Examples

(1) (Riccati) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) \rightsquigarrow$ Attention is all you need!

$\rightsquigarrow$ If you find one solution $\tilde{y}$, then let $y = z + \tilde{y} \rightsquigarrow$ Bernoulli.

(2) $\dfrac{x\mathrm{d}y}{y\mathrm{d}x} = f(xy) \rightsquigarrow u = xy,\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = y + x\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax+by+c) \rightsquigarrow u = ax+by+c,\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + b\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(4) $\dfrac{x^2\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(xy)$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xf\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$

(6) $\cdots$

HW-1

例 1

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^6 - 2x^2}{2xy^5 + x^2y^2}$;

(1') (Similar!) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x^3 + 3xy^2 + x}{3x^2y + 2y^3 - y}$;

(2) $y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1.$

例 2

已知微分方程 $y' + y = f(x)$, $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$. 若 $f(x)$ 是以周期为 T 的函数，证明：方程存在唯一以 T 为周期的解。

Examples

例 3

(Gronwall) 设 $f(t), g(t), x(t) \in C[t_0, t_1]$ 且非负，求证：若 $x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $t_0 \leq t \leq t_1$，则

$$x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)g(\tau)\exp\left\{\int_{\tau}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

例 4

设可微函数 $y = f(x)$ 对于任意 $x, h \in (-\infty, +\infty)$，恒满足关系式：

$$f(x+h) = \frac{f(x) + f(h)}{1 + f(x)f(h)}.$$

已知 $f'(0) = 1$，试求 $f(x)$.

Lecture 2

初等积分方法：

- 可分离变量的微分方程 $\rightsquigarrow$ 一阶线性微分方程
- 变量代换法：齐次方程，Bernoulli 方程
- 全微分方程，积分因子法 $\rightsquigarrow$ (Chapter 9) 多元函数微分学
- 几类可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程：

- 齐次线性微分方程解的结构和性质 $\rightsquigarrow$ 齐次线性微分方程组
- 非齐次线性微分方程：常数变易法
- 常系数齐次线性微分方程 $\rightsquigarrow$ 变系数：Euler 方程
- 两类特殊的常系数非齐次线性微分方程

(1) $y^{(n)} = f(x)$;

(2) $y'' = f(x, y')$;

(3) 自治/驻定方程 $F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$.

前两类是基本的，我们只看第三类，考虑 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z$，那么

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \rightsquigarrow y^{(3)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right\} = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left\{z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right\}.$$

利用微分的运算性质，即

$$y^{(3)} = z\left\{\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 + z\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2}\right\}.$$

Examples

例 5

(1) $y'' = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$;

(2) $yy'' + 2(y')^2 = 0$;

(3) (22-23 Midterm) $yy'' + (y')^2 - 2yy' = 0$.

Note: 除了 $y' = z$，你能给出类似积分因子法的思路吗？注意 $(yy')' =$?

From High-Order L.D.E. to Systems of L.D.E.

给定一个高阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{2}$$

令 $y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)}$ 那么有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

$$\rightsquigarrow \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x).$$

From High-Order L.D.E. to Systems of L.D.E.

存在唯一性定理：对线性微分方程组

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x),\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0,\ x_0 \in (a, b) \tag{4}$$

若 $\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{f}(x) \in C[a, b]$，方程 (2) 满足初始条件 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$ 的解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在且唯一。

$\rightsquigarrow$ 对高阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{5}$$

若 $a_i(x) \in C(a, b)$, 则方程 (5) 在给定初值条件 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, \cdots,$ $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ 下存在唯一解 $y = y(x),\ x \in [a, b]$.

Examples

在求解某些线性微分方程组时，也可以将其化为高阶线性微分方程来处理。

例 6

转化为高阶线性微分方程：

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y - 2z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2y - z. \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - x = e^t, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y = 0. \end{cases}$$

Properties

为了书写上的方便，我们只讨论线性微分方程组：

Thm 7

设 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_k(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的解，$\boldsymbol{\varphi}(x), \boldsymbol{\kappa}(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}_1(x)$ 的解，$\boldsymbol{\psi}(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}_2(x)$ 的解。那么

(1) $c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_k\boldsymbol{y}_k(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的解；

(2) $c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_k\boldsymbol{y}_k(x) + \boldsymbol{\varphi}(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$ 的解；

(3) $\boldsymbol{\varphi}(x) + \boldsymbol{\psi}(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}_1(x) + \boldsymbol{f}_2(x)$ 的解；

(4) $\boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{\kappa}(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的解.

上述定理称为解的叠加原理，高阶线性微分方程的表述我们会在最后汇总。

Structure of Solutions to $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$

我们首先引入线性相关和线性无关的定义。称向量函数 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是线性相关的，若存在不全为 0 的常数 $c_1, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = 0, \ \forall\, x \in [a, b].$$

否则称为线性无关，i.e.,

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = 0, \ \forall\, x \in [a, b] \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

记 Wronsky 行列式 $W(x) = \det[\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)]$.

Try

(1) $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上线性相关 $\Rightarrow W(x) \equiv 0$.

(2) 上述结论的逆定理不成立。

Structure of Solutions to $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$

但当向量函数 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 为方程 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的解时，线性无关就等价到 $W(x) \neq 0$ 恒成立了。

Thm 8

若 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}(x) \in C[a,b]$ 的 n 个解，那么 $W(x)$ 在 $[a,b]$ 上要么恒为0，要么处处不为0!

接下来我们给出解的结构定理，注意体会 **初值条件决定解** 的作用。

Thm 9

若 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}(x) \in C[a,b]$ 的 n 个线性无关解，设 $\boldsymbol{y}(x)$ 为方程的任意一个解，则必定存在常数 $c_1, \cdots, c_n$ 满足

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + c_2\boldsymbol{y}_2(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x). \tag{6}$$

称 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$ 为方程的一个基本解组。

Summary I

给定 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{A}(x) \in C[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$.

- 方程的所有解构成 n 维线性空间 $\mathcal{S} \rightsquigarrow$ 叠加原理;
- 解 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 构成 $\mathcal{S}$ 的一组基 $\Leftrightarrow \boldsymbol{y}_1(x_0), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x_0)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基;
- 称矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(x) = [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n]$ 为原方程的基解矩阵，那么对方程的任意解 $\boldsymbol{y}$，都存在常向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}.$$

- 设 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 为上述方程的一个基本解组。设 $\boldsymbol{\varphi}$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$, $\boldsymbol{A}(t) \in C[a,b]$ 的一个特解，那么 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$ 的任意一个解 $\boldsymbol{y}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{\varphi}. \tag{7}$$

Summary II

给定 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$

- 方程的所有解构成 n 维线性空间 $\mathcal{S} \rightsquigarrow$ 叠加原理；
- 解 $y_1, \cdots, y_n$ 构成 $\mathcal{S}$ 的一组基 $\Leftrightarrow$ $y_1(x_0), \cdots, y_n(x_0)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基；
- n 个线性无关解 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 构成原方程的一个基本解组，那么对方程的任意解 y，都存在常向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]\boldsymbol{c} = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

- φ 为 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(t)$ 的一个特解，那么 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(t)$ 通解可表示为

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + \varphi.$$

Summary II

给定 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0.$

- n 个解的 Wronsky 行列式定义为

$$W(x)=\det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

  在系数连续的区间上，要么恒为0 （解线性相关），要么恒不为0（解线性无关）。

Fundamental Matrix $\Phi(x)$

给定 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{A}(x) \in C[a,b]$，初值条件给定为 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$, $x_0 \in (a,b)$.

- $\boldsymbol{\Phi}(x), \boldsymbol{\Psi}(x)$ 均为原方程的基解矩阵，那么存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}.$$

- 反之，若 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 为原方程的基解矩阵，那么对任意 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 均有 $\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$ 为原方程的基解矩阵；
- 特别地，当取 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)$ 时，

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0).$$

此时称 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 为标准基解矩阵，满足 $\det \boldsymbol{\Psi}(x_0) = 1$.

The Method of Variation of Parameters

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} \rightsquigarrow \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$$

两个方程的初值条件均给定为 $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. 齐次方程的一个基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(x)$.

- 齐次方程的解为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0$.
- 非齐次方程的解设为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x) \rightsquigarrow \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{f}(x)$.

(Duhamel) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau.$

The Method of Variation of Parameters

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

初值条件给定为 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. 原方程的一个基本解组为 $y_1, \cdots, y_n$.

- 齐次: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \leftrightsquigarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}$.
- 非齐次: $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n \leftrightsquigarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x)$.

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{f}(x) \leftrightsquigarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

例 10

设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解，令

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

证明：

(1) $W(x)$ 满足方程 $W' = -p(x)W$;

(2) $W(x) = W(x_0)\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}$.

$$\text{(Liouville) } W' = \operatorname{tr}[\boldsymbol{A}(x)]W \rightsquigarrow W = W(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr}[\boldsymbol{A}(t)]\,\mathrm{d}t\right\}$$