# §8.5-8.6 Quadric Surfaces, §9.1-9.3, §9.6-9.7 Differential Calculus of Multivariable Functions I

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Sunday 16$^{\text{th}}$ March, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

# Review

**Case I:** $f(x) = (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)e^{\lambda x}, b_i \in \mathbf{R}.$

特解可以选取为

$$y^* = x^k(B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0)e^{\lambda x}.$$

其中 $B_1, \cdots, B_m \in \mathbf{R}$，$k$ 为 $L[y] = 0$ 对应特征方程中 $\lambda$ 的重数。

**Case II:** $f(x) = [P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x].$

记 $\max\{\deg P(x), \deg Q(x)\} = n$，则特解可以选取为

$$y^* = x^k\{A_1(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\}e^{\alpha x}.$$

其中 $\deg A(x) = \deg B(x) = n$，$A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$，$k$ 为 $L[y] = 0$ 对应特征方程中 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 的重数。

# Review

**Q:** 在空间 $E^3 = (\mathbf{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中有三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$，如何操作能让它们两两正交?

- $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$;
- $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\,\boldsymbol{a} \rightsquigarrow \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}'}{|\boldsymbol{b}'|}$;
- $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} - \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\,\boldsymbol{a} - \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}'}{|\boldsymbol{b}'|^2}\,\boldsymbol{b}' \rightsquigarrow \boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{c}'}{|\boldsymbol{c}'|}$.

Notes:

- $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 是正交矩阵 $\rightsquigarrow$ 未必右手系，即未必 $\det Q = 1$；
- QR 分解：设 $\boldsymbol{P}$ 可逆，那么必定存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，和一个上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$，使得 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$，且这种分解是唯一的。

# Review

给定 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1), \boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2), \boldsymbol{c} = (x_3, y_3, z_3) \in E^3$.

混合积:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$;
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \pm 1 \cdot V_{\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}}$，其中正负号取决于左手系还是右手系;
- $\rightsquigarrow \det[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = 1,\ \det[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] = -1,\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$;
- Q: 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面，那么任意 $\boldsymbol{r} \in E^3$ 都有分解

$$\boldsymbol{r} = \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{c}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

# Review

Suppose two lines $l_1$ and $l_2$ are given by the symmetric equations:

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1}, \boldsymbol{u}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2}, \boldsymbol{u}_2 = (X_2, Y_2, Z_2).$$

Set $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2)$, then $\det[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \neq 0$ implies $l_1, l_2$ are skew lines.

(1) **Distance:** $d = \dfrac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}$;

(2) **The line intersecting both of them at right angles**:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = 0. \end{cases}$$

## HW-4

### 例 1

求微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = x, & x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ y'' + 4y = 0, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

满足条件 $y|_{x=0} = 0$，$y'|_{x=0} = 0$，且在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 处可导的解。

Hint：隐含的初值条件是什么？

# HW-4

## 例 2

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 均为非零向量，且两两不共线。但 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线。试证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

## 例 3

求与平面 $\pi_1 : 2x+3y-5=0$ 及 $\pi_2 : y+z=0$ 平行，与直线 $L_1 : \frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-2}$ 及 $L_2 : \frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$ 均相交的直线 $L$.

# Lecture 5

空间中的曲线和曲面：

- 柱面，锥面和旋转曲面，常见二次曲面；
- 投影柱面 $\rightsquigarrow$ 空间曲线在坐标面上的投影；
- 补充：实对称矩阵的正交相似对角化，正交变换；
- 空间直角坐标变换 $\rightsquigarrow$ 化二次型为标准型.

# Cylindrical Surface

## Def 4

由平行于定方向与一条定曲线相交的一族平行直线所张成的曲面成为柱面。其中每条平行直线称为**柱面的直母线**，定曲线称为曲面的**准线**。

## Try

在空间直角坐标系中，不含坐标 $z$ 的方程 $F(x,y)=0$ 表示一个柱面 $S$，它具有如下的 2 个性质：

(1) $S$ 的直母线平行于 $z$ 轴；

(2) $S$ 的准线是 $xOy$ 平面上的曲线 $C$.

其中

$$C:\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

# Cylindrical Surface

若准线 $C$ 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

柱面方向为 $\boldsymbol{a}=(l,m,n)$，事实上，设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任一点，过点 $M$ 的直母线与准线 $C$ 的交点记为 $P(x_1,y_1,z_1)$，则点 $M$ 的坐标满足方程

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=:-t,$$

又 $F(x_1,y_1,z_1)=0, \quad G(x_1,y_1,z_1)=0.$ 联立消去参数 $x_1,y_1,z_1$

$$\begin{cases} F(x+tl,y+tm,z+tn)=0, \\ G(x+tl,y+tm,z+tn)=0. \end{cases}$$

再消去 $t$，得柱面 $S$ 的一般方程。

# Projection Cylinder

空间曲线形如

$$\Gamma : \begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

的方程不是唯一的。常常将上述方程化为等价的方程组

$$\Gamma : \begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ G_1(x,z) = 0. \end{cases}$$

曲线 $\Gamma$ 表示这两个柱面

$$S_1 : F(x,y) = 0, \quad S_2 : G_1(x,z) = 0$$

的交线。这两个柱面称为曲线 $\Gamma$ 分别在 $xOy$ 平面和 $xOz$ 平面上的投影柱面。利用投影柱面，比较容易作出空间曲线的图形。

## 例 5

已知柱面 $S$ 的准线为曲线 $\Gamma$：

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9, \\ x^2+y^2+z^2=9. \end{cases}$$

母线垂直于准线.

(1) 求 $S$ 的方程；

(2) 求 $\Gamma$ 在 $yOz$ 平面上投影曲线的方程。

# Conical Surface

## Def 6

过一定点 $M_0$ 且与不过 $M_0$ 的定曲线相交的一族直线构成的曲面称为锥面，其中这族直线中的每一条直线称为锥面的**直母线**，定曲线称为锥面的**准线**，定点称为锥面的顶点，简称**锥顶**。

若准线 $C$ 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

锥顶为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$。设 $M(x,y,z)$ 为锥面上任一点，过 $M$ 点的直母线 $M_0M$ 与准线 $C$ 的交点为 $P(x_1,y_1,z_1)$，设 $|M_0P|=t|M_0M|$，则

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + t(x-x_0) = (1-t)x_0 + tx, \\ y_1 = y_0 + t(y-y_0) = (1-t)y_0 + ty, \\ z_1 = z_0 + t(z-z_0) = (1-t)z_0 + tz. \end{cases}$$

# Conical Surface

又

$$
\begin{cases}
F(x_1, y_1, z_1) = F((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty, (1-t)z_0 + tz) = 0, \\
G(x_1, y_1, z_1) = G((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty, (1-t)z_0 + tz) = 0.
\end{cases} \tag{1}
$$

消去 $t$，可得锥面的一般方程。而对锥顶为 $O$，准线落在平行坐标面的平面上时，不妨取准线

$$
C : \begin{cases}
f(x, y) = 0, \\
z = h.
\end{cases}
$$

那么方程(1)化为

$$
\begin{cases}
f(tx, ty) = 0, \\
tz = h.
\end{cases}
\rightsquigarrow f\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0.
$$

为去掉锥顶的锥面方程。

# Conical Surface

若 $f(x,y)$ 是 $n$ 次多项式，可有理化一个 $n$ 次齐次方程

$$z^n f\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0,$$

它的图像多了锥顶，但要注意，也可能增加了一些别的点。

e.g.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

表示锥顶在原点，以平面 $z = c$ 上椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

为准线的二次锥面。

# Conical Surface

**Try**

一个关于 $x, y, z$ 的齐次方程总表示一个锥顶在原点的二次锥面。

设齐次方程为 $S: F(x, y, z) = 0$，且 $F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z)$. 首先 $F(0, 0, 0) = 0$ 自然成立，对任意 $P(x_1, y_1, z_1) \neq O$ 在 $S$ 上，有 $P(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = \lambda^n F(x_1, y_1, z_1) = 0$. 即过原点和 $P$ 的整条直线都在 $S$ 上。

Note: 一个关于 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ 的齐次方程总表示一个锥顶在 $(x_0, y_0, z_0)$ 的二次锥面。

# Rotational Surface

**Def 7**

一条曲线 $C$ 绕一条定直线 $\ell$ 旋转所产生的曲面称为旋转曲面，其中曲线 $C$ 称为旋转曲面的**母线**，定直线 $\ell$ 称为旋转轴。

Note: 过旋转面上一点作垂直于旋转轴的平面，它与旋转曲面的交线是一个圆，该圆称为旋转曲面的**纬圆**。

设旋转面的母线为

$$C : \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

旋转轴的方程为

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

# Rotational Surface

设 $M(x,y,z)$ 为旋转面上的任一点，过点 $M$ 的纬圆与母线 $C$ 交于点 $P(x_1,y_1,z_1)$. 过点 $P$ 的纬圆可视为过点 $P$ 且与轴垂直的平面与以 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\ell$ 为球心、以 $|M_0P|$ 为半径的球面的交线，于是过点 $P$ 的纬圆方程可表示为

$$\begin{cases} k(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2. \end{cases} \tag{2}$$

由于点 $M$ 在纬圆上，故点 $M$ 的坐标满足 (2). 又点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 在母线 $C$ 上，于是有

$$\begin{cases} F(x_1,y_1,z_1)=0, \\ G(x_1,y_1,z_1)=0. \end{cases} \tag{3}$$

联立 (2),(3) 消去参数 $x_1,y_1,z_1$，即得旋转面的方程。

# Rotational Surface

若母线落在坐标轴上，不妨

$$C : \begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

且旋转轴为 $Oz$ 轴，即 $\ell : x/0 = y/0 = z/1$. 那么 (2) 即

$$\begin{cases} z - z_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \rightsquigarrow x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2. \end{cases} \tag{4}$$

(3) 化为

$$\begin{cases} F(y_1, z_1) = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases} \rightsquigarrow y_1^2 = x^2 + y^2. \tag{5}$$

综合 (4),(5) 得到 $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

## Examples

### 例 8

求球面

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=4$$

的以原点为顶点的外切锥面。

### 例 9

设直线

$$l_1:\quad \frac{x-a}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1},$$

$$l_2:\quad \begin{cases} x-z=0, \\ y=1. \end{cases}$$

若 $l_1, l_2$ 相交，求 $a$ 及 $l_2$ 绕 $l_1$ 旋转所得的曲面方程。

# Examples

## 例 10

由椭球面 $S: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的中心 $O$ 任意引三条相互垂直的射线，与 $S$ 分别交于点 $P_1, P_2, P_3$，设 $\left|\overrightarrow{OP_i}\right| = r_i, i=1,2,3$. 证明:

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

## 例 11

已知椭球面

$$S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ c<a<b.$$

试求过 $x$ 轴且与 $S$ 的交线是圆的所有平面。

# Coordinate Transformation

下面研究如何确定一个一般的二元二次方程表示的曲面形状。引入直角坐标变换。设空间直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. 取 $\boldsymbol{A} \in O(3)$，令

$$[\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]\boldsymbol{A}.$$

那么 $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一组规范基。取新的空间直角坐标系 $\{O^*; \boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*\}$，设

$$O^* = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

# Coordinate Transformation

取 $P \in \mathbf{R}^3$. 那么由 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*P}$ 得到

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix}.$$

自然导出点坐标变换公式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

在空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}\}$ 中，由 $x,y,z$ 的二次方程

$$F(x,y,z)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2$$

$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

所表示的曲面称为二次曲面，这里 $a_{11},a_{12},a_{22},a_{13},a_{23},a_{33}$ 是不全为零的实数，$a_{14},a_{24},a_{34},a_{44}$ 也都为实数。

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_{14}\\a_{24}\\a_{34}\end{bmatrix}.$$

# Simplification of the General Quadratic Equation

于是 $F(x,y,z)$ 中的二次齐次部分可表示为

$$\Phi(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}.$$

此时 $F(x,y,z)$ 可表示为

$$F(x,y,z) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\alpha} + a_{44} = 0.$$

由于实对称矩阵必定可正交相似实对角化，也即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，作正交线性替换 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}$，使 $\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵。那么剩下的操作只需要对 $2\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\alpha} + a_{44} = 2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\alpha} + a_{44}$ 配方即可。也就相当于作平移变换消去一次项。

# An Example

## Try

化简下列二次曲面为标准型，写出坐标变换公式，指出这是什么曲面。

$$S: 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 4yz + 6x + 4y - 4z + 12 = 0.$$

定义二次型部分

$$\Phi(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 4yz,$$

矩阵表示

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

# An Example

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 2-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda+1).$$

特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=2,\lambda_3=-1.$

对于 $\lambda_1=5$，特征向量 $\boldsymbol{X_1}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0,\quad \boldsymbol{X_1}=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

# An Example

类似地，$\lambda_2 = 2$ 和 $\lambda_3 = -1$ 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

由于特征值两两不同，归一化特征向量，即得到标准正交基：

$$\boldsymbol{e_1^*} = \frac{\boldsymbol{X_1}}{|\boldsymbol{X_1}|} = \left[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^T$$
$$\boldsymbol{e_2^*} = \frac{\boldsymbol{X_2}}{|\boldsymbol{X_2}|} = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right]^T$$
$$\boldsymbol{e_3^*} = \frac{\boldsymbol{X_3}}{|\boldsymbol{X_3}|} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]^T$$

# An Example

从坐标系 $\{O;\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}\}$ 到 $\{O;\boldsymbol{e_1^*},\boldsymbol{e_2^*},\boldsymbol{e_3^*}\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix}.$$

在新坐标系下，原方程化为

$$5{x^*}^2 + 2{y^*}^2 - {z^*}^2 + 8y^* + 2z^* + 12 = 0.$$

配方得

$$5{x^*}^2 + 2(y^* + 2)^2 + (z^* - 1)^2 + 5 = 0.$$

# An Example

引进新坐标系 $\{O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\}$，使得

$$\begin{cases} x' = x^*, \\ y' = y^* + 2, \\ z' = z^* - 1. \end{cases}$$

则标准化后方程为

$$5{x'}^2 + 2{y'}^2 - {z'}^2 + 5 = 0,$$

它表示双叶双曲面。

# Outline of Chapter 9: Differential Calculus of Multivariable Functions

多元函数的极限和连续性:

- 欧氏空间 $E^n = (\mathbf{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的点集拓扑，点列的极限 $\rightsquigarrow$ Heine;
- 多元数量值函数和向量值函数;
- 沿集合 $S$ 的极限，累次极限;
- 有界闭集上连续函数的性质.

# Outline of Chapter 9: Differential Calculus of Multivariable Functions

偏导数及其应用：

- 方向导数，偏导数；
- 可微，全微分和线性化方法 $\rightsquigarrow \nabla f$，Jacobi 阵;
- 链式法则和一阶微分的形式不变性；
- 逆映射定理和隐映射定理；
- 几何学应用：曲线的切线和法平面，曲面的切平面和法线；
- 应用：全微分方程 $\rightsquigarrow$ Chapter 11 Green Formula.

# Outline of Chapter 9: Differential Calculus of Multivariable Functions

从一元函数而来的想法推广：

- Lagrange 中值定理；
- Taylor 公式；
- 极值和条件极值，Lagrange 乘数法 $\rightsquigarrow$ 最小二乘法；
- 凸函数.