§7.7, 7.9 Ordinary Differential Equations III

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Sunday 23^{rd} February, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

Review

- 可降阶的高阶微分方程 $\rightsquigarrow$ 尤其注意驻定方程 $F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$;
- 高阶线性微分方程 $\rightsquigarrow$ 线性微分方程组

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)y = f(x) \rightsquigarrow \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x).$$

- 令 $y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)}$ 那么有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Review

给定 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{A}(x) \in C[a,b],\ x_0 \in (a,b)$.

- 方程的所有解构成 n 维线性空间 $\mathcal{S} \rightsquigarrow$ 叠加原理；
- 解 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 构成 $\mathcal{S}$ 的一组基 $\Leftrightarrow \boldsymbol{y}_1(x_0), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x_0)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基；
- 称矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(x) = [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n]$ 为原方程的基解矩阵，那么对方程的任意解 $\boldsymbol{y}$，都存在常向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}.$$

- 设 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 为上述方程的一个基本解组。设 $\boldsymbol{\varphi}$ 为 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$, $\boldsymbol{A}(t) \in C[a,b]$ 的一个特解，那么 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$ 的任意一个解 $\boldsymbol{y}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{\varphi}. \tag{2}$$

Review

给定 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$

- 方程的所有解构成 n 维线性空间 $\mathcal{S} \rightsquigarrow$ 叠加原理；
- 解 $y_1, \cdots, y_n$ 构成 $\mathcal{S}$ 的一组基 $\Leftrightarrow$ $y_1(x_0), \cdots, y_n(x_0)$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基；
- n 个线性无关解 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 构成原方程的一个基本解组，那么对方程的任意解 y，都存在常向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]\boldsymbol{c} = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n.$$

- φ 为 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(t)$ 的一个特解，那么 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(t)$ 通解可表示为

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n + \varphi.$$

Review

给定 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$

- n 个解的 Wronsky 行列式定义为

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

在系数连续的区间上，要么恒为0 （解线性相关），要么恒不为0（解线性无关）。

Review

- Duhamel's Principle: 非齐次方程的解可以由齐次方程的解导出。

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

- Liouville 公式

$$W' = \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}(x)]W \rightsquigarrow W = W(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}(t)]\,\mathrm{d}t\right\}.$$

初等积分方法：

- 可分离变量的微分方程 $\rightsquigarrow$ 一阶线性微分方程
- 变量代换法：齐次方程，Bernoulli 方程
- 全微分方程，积分因子法 $\rightsquigarrow$ (Chapter 9) 多元函数微分学
- 几类可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程：

- 齐次线性微分方程解的结构和性质 $\rightsquigarrow$ 齐次线性微分方程组
- 非齐次线性微分方程：常数变易法
- 常系数齐次线性微分方程 $\rightsquigarrow$ 变系数：Euler 方程
- 两类特殊的常系数非齐次线性微分方程

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

给定 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}$.

对 $y' - ay = 0$ 我们已经知道它有形如 e^{ax} 的解，我们考虑待定 λ，将 $y = e^{\lambda x}$ 带入到方程中，观察 λ 需要满足怎样的条件。容易得到

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda t} = 0.$$

称 $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ 为该微分方程的一个特征方程。

考虑 $F(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的标准分解式

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

Cases I: 如果 $F(\lambda)$ 没有重根，即 $k_1 = \cdots = k_s = 1, s = n$，那么容易观察到 $y = e^{\lambda_i x}$ 都是原方程的解。

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

为了说明此时 $e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$ 构成一个基本解组，也即解集 $\mathcal{S}$ 的一组基，我们考察 Wronsky 行列式

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x\right\} \prod_{1 \le i \ne j \le n} (\lambda_i - \lambda_j).$$

而在标准分解中我们已经假定 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 所以上式不为 0 是显然的。

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

Cases II: 现在考虑更一般的情形，即 $F(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有重根。先从一个特殊情况入手，不妨 $\lambda_1 = 0$，这说明特征方程变为

$$\lambda^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s} = 0 \rightsquigarrow a_{n-k_1+1} = \cdots = a_n = 0.$$

回到原微分方程，变为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-k_1} y^{(k_1)} = 0 \rightsquigarrow y^{(k_1)} = 0 \text{ in particular!}$$

这说明 $1, x, x^2, \cdots, x^{k_1-1}$ 都是原方程的解，更重要的它们都是线性无关的！进一步，你可以把它们看成 $1\cdot e^{0x}, xe^{0x}, \cdots, x^{k_1-1}e^{0x}$。这给我们启发：当 λ_t 为 $F(\lambda)$ 的 k 重根时，是否 $1\cdot e^{\lambda_t x}, xe^{\lambda_t x}, \cdots, x^{k_t-1}e^{\lambda_t x}$ 均为方程的解？

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

接下来考察 $\lambda_1 \neq 0$，为了化归到我们刚才讨论的 $\lambda_1 = 0$ 的情形，使用变量代换 $y = ze^{\lambda_1 x}$，高阶导数的 Leibniz 公式告诉我们

$$\begin{aligned} y^{(m)} &= (ze^{\lambda_1 x})^{(m)} \\ &= z^{(m)} e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_m^k z^{(m-k)} \cdot (\lambda_1^k e^{\lambda_1 x}) + \cdots + \lambda_1^m z e^{\lambda_1 x} \\ &= e^{\lambda_1 x} \left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)} \lambda_1^{m-j} \right]. \end{aligned}$$

带入原微分方程 $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,\ a_0 = 1$，即

$$e^{\lambda_1 x} \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} \left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)} \lambda_1^{m-j} \right] = 0.$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

变量代换 $y = ze^{\lambda_1 x}$ 后我们得到

$$e^{\lambda_1 x} \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} \left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)} \lambda_1^{m-j} \right] = 0.$$

这个新的微分方程的特征方程无非就是把 $z^{(j)}$ 变成 λ^j，这巧妙让我们可以使用二项式定理，新的特征方程为

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} \left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j \lambda^j \lambda_1^{m-j} \right] = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} (\lambda + \lambda_1)^m = G(\lambda) = 0.$$

注意到

$$G(\lambda) = F(\lambda + \lambda_1) \rightsquigarrow G(0) = F(0 + \lambda_1) = 0.$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

这就说明变换后我们有解 $z = 1, x, x^2, \cdots, x^{k_1-1}$，也就对应上我们想要的 $y = e^{\lambda_t x}, xe^{\lambda_t x}, \cdots, x^{k_t-1}e^{\lambda_t x}$. 我们于是得到了 n 个解，为了说明它们是线性无关的，下面采用反证法：设存在不全为 0 的数 c_{rj} 满足

$$\sum_{r=1}^{s}(c_{r0} + c_{r1}x + \cdots + c_{r,k_r-1}x^{k_r-1})e^{\lambda_r x} := \sum_{r=1}^{s} P_r(x)e^{\lambda_r x} = 0.$$

两边同除 $e^{\lambda_1 x}$ 求导 k_1 次得到

$$(c_{10} + c_{11}x + \cdots + c_{1,k_1-1}x^{k_1-1})^{(k_1)} + \left\{\sum_{r=2}^{s} P_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_1)x}\right\}^{(k_1)} = 0.$$

记为

$$\sum_{r=2}^{s} Q_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_1)x} = 0.$$

注意这里如果 $P_r(x)$ 不为 0 的话，$Q_r(x)$ 也必不为0，且保持次数！对下面的式子两边同除 $(\lambda_2 - \lambda_1)$ ，再求导 k_2 次，得到

$$\left\{\sum_{r=2}^{s} Q_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_2)x}\right\}^{(k_2)} = 0 \rightsquigarrow \sum_{r=3}^{s} R_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_2)x} = 0.$$

重复这样的操作，直到只剩下一种 r，不妨就设定为 s，那么得到

$$V_s(x)e^{(\lambda_s-\lambda_{s-1})x} = 0.$$

但是按照原设定，左边必定是一个非零数，导出矛盾！