§7.7-7.9 Ordinary Differential Equations IV, §8.1-8.4 Vectors, Lines and Planes in $\mathbf{R}^3$

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Sunday 16^{th} March, 2025

http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/

可分离

一阶线性 ← Ber

∈ Ri

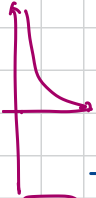
齐次 → 非齐次

Duhamel

常数变易

一阶线性组 → 高阶线性

全微分方程 ∨ $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$



$x_0 \to$ 开邻域 δ

$f\in C[a,b] \xrightarrow{\text{Cantor}}$ f 在 $[a,b]$ 上一致连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$a \quad \delta_{x_2} < \delta_{x_1} \quad b$

$\forall x_0\in[a,b]$

$\frac{1}{x}$

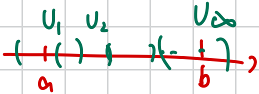
一致连续

与 x

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0,\ \forall x\in U(x_0,\delta),\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

pf: 闭区间 ⇒ $\boxed{\text{紧集}}$ (Heine-Borel)

开覆盖必有有限子覆盖



$$[a,b] \subseteq \boxed{\bigcup_{n\geq 1} U_i} \text{ 开区间}$$

$$\Rightarrow [a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{S} U_i.$$

一、极限

Heine

2.极限

$\forall \{x_k\} \to a$

$\{f(x_k)\} \to A$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A.$

连续函数 闭区间 —— 紧 有界闭集 $\Leftarrow$ 紧集 (拓扑)

$\mathbb{C}$ i ✓

同构

isomorphism

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2.$

$i > 1$

$i^2 > i$

$-1 > i$ ✗

$i^2 < i$

$\boxed{-1 < i}$

$-i > i^2$

$-i > -1$

$i < 1$ ✗

函数2

导数 可导 ⟺ 可微 → 线性化 替换

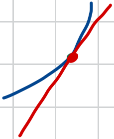
线性映射 $\frac{df}{dx}$

多元 A_x

微分 Δ

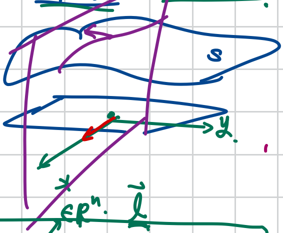
Jacobi

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ i,j



9.1 9.7

偏导数 ⇐ 方向导数



$\in \mathbb{R}^n$. $\vec{l}$

$\lim\limits_{t\to 0}$ $\frac{f(x_0+tl)-f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial l}$

$t\in\mathbb{R}$. t.

$t\to 0$? 0^+

$\mathrm{div} f = \nabla\cdot f$.

$\mathrm{rot} f = \nabla\times\nabla f = \mathrm{curl} f$.

$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\nabla f = \mathrm{grad} f$. $\Delta f = \nabla\cdot\nabla f$.

$\boxed{\text{隐函数}}$ → 隐映射，逆映射. ✓

链式法则 → Jacobi 矩阵相乘

反函数 → 矩阵的逆

$\boxed{\text{极值}}$ ✓ → $\boxed{\nabla f=0}$ 必要条件 $\boxed{\text{证明条件}}$

Taylor公式. 中值定理 　 $\boxed{\text{Hesse}}$ 矩阵 充分条件 $\boxed{\text{检验条件}}$

$\nabla^2 f$.

⇒ Lagrange 乘数法

$\boxed{\text{凸函数}}$

$\boxed{\text{区域}}$ ☆ 　 道路连通的开集.

⇕

$\forall a,b\in D(\text{omain})$，在D内存在折线段将a,b连接. ✓

~之 　 $f'\equiv 0 \Rightarrow f$ 为常值.

区域

多元 　 $Jf\equiv 0 \Rightarrow f$ 为常向量 ☆

例 1

设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解，令

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

证明：

$$W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1'y_2' - y_1''y_2 = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

(1) $W(x)$ 满足方程 $W' = -p(x)W$;

$$= y_1(-py_2' - qy_2) - (-py_1' - qy_1)y_2$$

(2) $W(x) = W(x_0)\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right\}$.

$$= -py_1y_2' + py_1'y_2 = -pW$$

(Liouville) $W' = \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}(x)]W \rightsquigarrow W = W(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}(t)]\,\mathrm{d}t\right\}$

(Liouville) $W' = \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}(x)]W \rightsquigarrow W = W(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}(t)]\,\mathrm{d}t\right\}$

$$\frac{d}{dt}\det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\sum_{i_1\cdots i_n} a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}\cdots a_{ni_n}}_{n!\text{项}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i_1\cdots i_n}(a_{ji_j})'(a_{1i_1}\cdots a_{j-1\,i_{j-1}}a_{j+1\,i_{j+1}}\cdots a_{ni_n})$$

$$\sum_{j=1}^{n}\det\begin{pmatrix} & \text{不变} & \\ a_{j1}' & \cdots & a_{jn}' \\ & \text{不变} & \end{pmatrix}$$

$$\underline{y' = A(x)y} \qquad \underline{A(x) = (a_{ij}(x))_{n\times n}}$$

$i\{$

$$y_j = [y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{nj}]^T$$

$$\frac{d}{dx} \det \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ y_{i1}' & \cdots & y_{in}' \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11}' \\ \vdots \\ y_{n1}' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y_{i1}' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_{j1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & \cdots & y_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{ii}(x)\, y_{i1} & \cdots & \cdots & \underline{\underline{a_{ii}(x)}}\, y_{in} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & \cdots & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \text{剩余行被它们消掉}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{a_{ii}(x)}}\ \underline{\underline{W(x)}}} = \underline{W(x)}\ \underline{\underline{tr}}\left[A(x)\right]$$

$tr \downarrow$ <u>trace</u>

<u>对角元之和</u>

<u>相似不变量</u>

(必考)

例 2

求解下列微分方程的通解：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=2e^x\cos x\cos 2x.$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos(2x-x)+\cos(2x+x)\right]\cdot 2e^x$$

$$=\boxed{e^x\cos x}+e^x\cos 3x.$$

$$\lambda^2-2\lambda+2=0 \qquad (\lambda-1)^2=-1 \Rightarrow \lambda=1\pm i$$

$$x e^x\cos x\cdot\lambda \qquad e^x\cos 3x\cdot\mu$$

$$\mathrm{Re}\left[e^{(1+i)x}\right]$$

$$e^{(1\pm i)x}=e^x(\cos x\pm i\sin x)$$

y_1. y_2

$+$ $-$

$$e^x\cos x,\quad e^x\sin x$$

y_1^* y_2^*

$$\begin{cases} e^x\cos x=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \\ e^x\sin x=\dfrac{y_1-y_2}{2i} \end{cases}$$

$$\left[y_1^*\ \ y_2^*\right]=\left[y_1\ \ y_2\right]\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2i}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i}\end{bmatrix}}_{A}$$

基解 ✓.

$$\det A=-\frac{1}{4i}-\frac{1}{4i}=-\frac{1}{2i}\neq 0.$$

$$C_1(x)\, e^{x}\cos x + C_2(x)\, e^{x}\sin x.$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, e^{x}\cos x + C_2'(x)\, e^{x}\sin x = 0 \\[2em] C_1'(x)\, e^{x}(\cos x - \sin x) + C_2'(x)\, e^{x}(\sin x + \cos x) = e^{x}\cos x \cos 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2'(x)\, e^{x}\cos x - C_1'(x)\, e^{x}\sin x = e^{x}\cos x \cos 2x.$$

$$\Rightarrow C_2'(x)\cos x - C_1'(x)\sin x = \cos x \cos 2x. \quad ①$$

& $C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0.$

$$\Rightarrow \underline{c_1'(x) = -c_2'(x)\tan x.}$$ 代入①

$$\Rightarrow c_2'(x)\cos x + c_2'(x)\tan x\sin x$$

$$\underline{= c_2'(x)\left(\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos x}\right)} = \cos x\cos 2x.$$

$$\Rightarrow c_2'(x) = \cos^2 x\cos 2x.$$

$$c_1'(x) = -\cos^2 x\cos 2x\tan x = -\sin x\cos x\cos 2x.$$

$C_2(x) =$

$$\int \cos^2 x\cos 2x\, dx = \int \frac{\cos 2x + 1}{2}\cos 2x\, dx.$$

$$= \int \frac{1}{2}\cos 2x \, dx + \int \frac{\cos 4x + 1}{4} \, dx$$

$$= + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{4}x + C_2$$

$$G_1(x) = -\int \sin x \cos x \cos 2x \, dx = -\int \cos x \cos 2x \, d\cos x$$

$$= -\int t(2t^2-1)\,dt$$

$$= -\frac{2}{4}\cos^4 x + \frac{1}{2}\cos^2 x + C_1$$

Preparation

定义复值函数 $z:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\,\psi(t)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 都是实值函数，那么类似定义如下概念：

(1) $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)+\mathrm{i}\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)$; ✓ $= a+ib$. ✓ $\lambda = a \pm ib$. $e^{\lambda x}$

(2) $z(t)$ 在 t_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $\varphi(t),\ \psi(t)$ 在 t_0 处连续; ✓

(3) $z'(t)=\varphi'(t)+\mathrm{i}\,\psi'(t)$. ✓

Fermat Lemma.

容易验证下面的求导法则也成立：

- $(\alpha z_1(t)\pm\beta z_2(t))'=\alpha z_1'(t)\pm\beta z_2'(t),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$; ✓
- $(z_1(t)z_2(t))'=z_1'(t)z_2(t)+z_1(t)z_2'(t)$. ✓.

Lemma 4

设 $t\in\mathbb{R}$，那么 $e^{zt} = e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$.

引理. Lem.

$$e^{(z_1+z_2)t}=e^{z_1t}\cdot e^{z_2t},\quad \frac{\mathrm{d}e^{zt}}{\mathrm{d}t}=ze^{zt}\rightsquigarrow\frac{\mathrm{d}^n e^{zt}}{\mathrm{d}t^n}=z^ne^{zt}.$$

Lemma 5

设 $z(x) = \varphi(x) + \mathrm{i}\psi(x)$ 为 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ 的一个复值解，其中 $\varphi(x), \psi(x), a_i(x)$ $(1 \le i \le n)$ 均为实值函数，那么

$L[y]$ 线性

(1) $\varphi(x), \psi(x)$ 也为原方程的解；

$L[\varphi(x)] + i L[\psi(x)] = 0.$

(2) $\overline{z(x)}$ 也为原方程的解.

$L[y] = e^{x}\cos x = \mathrm{Re}\left[e^{(1+i)x}\right]$

保证我们也是实解

Notes:

- 若方程有两解 $z_{1,2} = e^{(a\pm b\mathrm{i})x} = e^{ax}(\cos bx \pm \mathrm{i}\sin bx) \rightsquigarrow z_3 = e^{ax}\cos bx$, $z_4 = e^{ax}\sin bx$ 也为原方程的解。且 z_3, z_4 可以表示为 z_1, z_2 的线性组合。
- 记 $L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$，若上述引理的方程修改为 $L(y) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$，那么 $y_1 = \varphi(x), y_2 = \psi(x)$ 分别为 $L[y] = u(x)$ 和 $L(y) = v(x)$ 的解。

$L[\varphi(x)] + i L[\psi(x)] = u(x) + i v(x)$

要解 $L[y] = \underline{\mathrm{Re}\left[e^{(1+i)x} \right]}$.

先解 $\underline{L[z] = e^{(1+i)x}}$. $\xrightarrow{\text{Lemma}}$ $y = \mathrm{Re}(z)$.

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

给定 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}$.

$n=1$

对 $y' - ay = 0$ 我们已经知道它有形如 e^{ax} 的解，我们考虑待定 λ，将 $y = e^{\lambda x}$ 带入到方程中，观察 λ 需要满足怎样的条件。容易得到

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda x} = 0.$$

称 $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ 为该微分方程的一个特征方程。

考虑 $F(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的标准分解式 $\boxed{\lambda_1 —— \lambda_s \text{ 互不相同}}$

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

Case I: 如果 $F(\lambda)$ 没有重根，即 $k_1 = \cdots = k_s = 1, s = n$，那么容易观察到 $y = e^{\lambda_i x}$ 都是原方程的解。

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

为了说明此时 $e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$ 构成一个基本解组，也即解集 $\mathcal{S}$ 的一组基，我们考察 Wronsky 行列式

$$\underline{W(x)} = \det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

$\neq 0$

$$\underbrace{\det\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}}= \boxed{\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x\right\}} \boxed{\prod_{1 \le j < i \le n} (\lambda_i - \lambda_j).} \neq 0.$$

而在标准分解中我们已经假定 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 所以上式不为 0 是显然的。

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

Case II: 现在考虑更一般的情形，即 $F(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有重根。先从一个特殊情况入手，不妨 $\lambda_1 = 0$，这说明特征方程变为

$$\lambda^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s} = 0 \rightsquigarrow a_{n-k_1+1} = \cdots = a_n = 0.$$

$(\lambda-0)^{k_1}$ $\quad k_1 \geq 2$

回到原微分方程，变为

$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$

$= \lambda^{k_1}(\lambda^{n-k_1} + a_1\lambda^{n-k_1-1} + \cdots + \boxed{a_{n-k_1}})$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-k_1} y^{(k_1)} = 0 \rightsquigarrow y^{(k_1)} = 0 \text{ in particular!}$$

这说明 $1, x, x^2, \cdots, x^{k_1-1}$ 都是原方程的解，更重要的它们都是线性无关的！进一步，你可以把它们看成 $1\cdot e^{0x}, xe^{0x}, \cdots, x^{k_1-1}e^{0x}$。这给我们启发：当 λ_t 为 $F(\lambda)$ 的 k 重根时，是否 $1\cdot e^{\lambda_t x}, xe^{\lambda_t x}, \cdots, x^{k_t-1}e^{\lambda_t x}$ 均为方程的解？

接下来考察 $\lambda_1 \neq 0$，为了化归到我们刚才讨论的 $\lambda_1 = 0$ 的情形，使用变量代换 $y = ze^{\lambda_1 x}$，高阶导数的 Leibniz 公式告诉我们

$$
\begin{aligned}
y^{(m)} &= (ze^{\lambda_1 x})^{(m)} \\
&= z^{(m)}e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_m^k z^{(m-k)} \cdot (\lambda_1^k e^{\lambda_1 x}) + \cdots + \lambda_1^m z e^{\lambda_1 x} \\
&= e^{\lambda_1 x}\left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j \boxed{z^{(j)}} \lambda_1^{m-j}\right].
\end{aligned}
$$

λ^j

$y^{(n)} \to \lambda^n$

带入原微分方程 $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$，$a_0 = 1$，即

$$
e^{\lambda_1 x}\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)} \lambda_1^{m-j}\right] = 0.
$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

变量代换 $y = ze^{\lambda_1 x}$ 后我们得到

$$e^{\lambda_1 x}\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j z^{(j)}\lambda_1^{m-j}\right] = 0.$$

这个新的微分方程的特征方程无非就是把 $z^{(j)}$ 变成 λ^j，这巧妙让我们可以使用二项式定理，新的特征方程为

$\lambda = 0.$

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\left[\sum_{j=0}^{m} C_m^j \lambda^j\lambda_1^{m-j}\right] = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(\lambda+\lambda_1)^m = G(\lambda) = 0.$$

$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\lambda^m.$ $\boxed{\lambda=\lambda_1}$

注意到

$$G(\lambda) = F(\lambda+\lambda_1) \rightsquigarrow G(0) = F(0+\lambda_1) = 0.$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

这就说明变换后我们有解 $z = 1, x, x^2, \cdots, x^{k_1-1}$，也就对应上我们想要的 $y = e^{\lambda_t x}, xe^{\lambda_t x}, \cdots, x^{k_t-1}e^{\lambda_t x}$. 我们于是得到了 n 个解，为了说明它们是线性无关的，下面采用反证法：设存在不全为 0 的数 c_{rj} 满足

k_r 0.

$$\sum_{r=1}^{s}(c_{r0} + c_{r1}x + \cdots + c_{r,k_r-1}x^{k_r-1})e^{\lambda_r x} = \sum_{r=1}^{s} P_r(x)e^{\lambda_r x} = 0.$$

两边同除 $e^{\lambda_1 x}$ 求导 k_1 次得到

λ_r

$\lambda_1 - - - \lambda_s$

$0 \quad \lambda_2-\lambda_1 - - \lambda_s-\lambda_1$

$$\underbrace{(c_{10} + c_{11}x + \cdots + c_{1,k_1-1}x^{k_1-1})^{(k_1)}}_{=0} + \left\{\sum_{r=2}^{s} P_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_1)x}\right\}^{(k_1)} = 0.$$

保持形式!

记为

$$\sum_{r=2}^{s} \boxed{Q_r(x)}e^{(\lambda_r-\lambda_1)x} = 0.$$

Euler's Undetermined Exponential Functions Method

$\lambda_2-\lambda_1,\ \lambda_3-\lambda_1\ -\ \lambda_n-\lambda_1$

$\lambda_3-\lambda_2\ -\ -\lambda_n-\lambda_2.$

注意这里如果 $P_r(x)$ 不为 0 的话，$Q_r(x)$ 也必不为0，且保持次数！对下面的式子两边同除 $(\lambda_2-\lambda_1)$ ，再求导 k_2 次，得到

Δ

$$\left\{\sum_{r=2}^{s} Q_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_2)x}\right\}^{(k_2)} = 0 \rightsquigarrow \sum_{r=3}^{s} R_r(x)e^{(\lambda_r-\lambda_2)x} = 0.$$

重复这样的操作，直到只剩下一种 r，不妨就设定为 s，那么得到

$\lambda_s-\lambda_{s-1}.$

$$V_s(x)\boxed{e^{(\lambda_s-\lambda_{s-1})x}} = 0.$$

保 $\neq 0$

但是按照原设定，左边必定是一个非零数，导出矛盾！

$\neq 0$

Summary I

对于 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}.$

- 特征方程为 $y^{(k)} \rightsquigarrow \lambda^k$;
- λ 为 k 重根对应 $e^{\lambda x}(1, x, \cdots, x^{k-1})$;　$e^{\lambda x} p(x)$　$\deg(\text{ree})\, p(x) = k-1$
- $\lambda \in \mathbb{C}$ 为 k 重根，则 $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ 也为 k 重根；(实系数)。
- 对 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的情形，$e^{\lambda x}$ 和 $e^{\overline{\lambda} x}$ 一般取为

$$e^{\mathrm{Re}\lambda\, x} \cos(\mathrm{Im}\lambda\, x),\ e^{\mathrm{Re}\lambda\, x} \sin(\mathrm{Im}\lambda\, x).$$

线性无关性！ 这两个都可选！

Examples

$y''+py'+q=f(x)$

$y''-y'-2=f(x)$ 代入 $y=xe^x$.

y_3-特解$-$齐$=e^{2x}$ 齐

例 6

已知

$(\lambda+1)(\lambda-2)$ $e^x(x+1)-2=f(x)$ $y_3-y_1=e^{-x}$ $y_2-(y_3-y_1)=xe^x$

$$y_1 = xe^x + e^{2x}, \quad y_2 = xe^x + e^{-x}, \quad y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$$

$e^x(x+1)$ $f(x)=0$ 特解 $=f(x)$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程。

例 7

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且存在常数 α,β ，满足对任意 $x\in(a,b)$，有 $f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x)$，证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。 CMC

形式 (建议)

- $\beta=0$ $f'(x)=\alpha f(x)$ $\Rightarrow$ $c\cdot e^{\alpha x}$ ✓.
- $\beta\neq0$ $f''(x)-\frac{1}{\beta}f'(x)+\frac{\alpha}{\beta}f(x)=0$ 特征 | 通项公式 ✓.

Euler's Ordinary Differential Equation

常数

下面我们使用变量代换方法求解一类特殊的变系数高阶齐次线性微分方程

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + x a_{n-1} y' + a_n y \overset{(0)}{=} 0, a_i \in \mathbb{R}.$$

不考虑特解 $\boxed{y=0}$，换元 $\boxed{x = e^t}$ $\rightsquigarrow t = \ln x (x > 0)$. $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

1° $x=0$? $\Rightarrow y(0)=0$

$$y' \overset{\text{V.}}{=} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \boxed{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

2° $x<0$?

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \boxed{\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\} = \frac{1}{x^2}\left\{\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\},$$

$\Rightarrow x = -e^t$.

$$y^{(3)} = \frac{1}{x^3}\left\{\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}.$$ 规律

$\Rightarrow t = \ln(-x)$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

回代时改成 $\ln|x|$ 即可!

下面我们使用变量代换方法求解一类特殊的变系数高阶齐次线性微分方程

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + x a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in \mathbb{R}.$$

不考虑特解 $y = 0$，换元 $x = e^t \rightsquigarrow t = \ln x (x > 0)$.

$D = d/dt$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$\Rightarrow xy' = \frac{dy}{dt} = Dy$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\} = \frac{1}{x^2}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\},$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{x^3}\left\{\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}.$$

$x^2 y'' = \frac{dy}{dt}\left[\frac{dy}{dt} - 1\right] = D[D-1]y.$

$x^3 y^{(3)} = \frac{dy}{dt}\left[\frac{dy}{dt} - 1\right]\left[\frac{dy}{dt} - 2\right] = [D-1][D-2]Dy$

$$\boxed{x^{k-1}y^{(k-1)}} = (D-k+2)\cdots Dy.$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{k-1}y^{(k-1)}\right) = (k-1)x^{k-2}y^{(k-1)} + \boxed{x^{k-1}y^{(k)}}$$

$$= \frac{dt}{dx}\cdot\frac{d}{dt}(D-k+2)\cdots Dy$$

$$= \frac{1}{x}(D-k+2)\cdots D^2y.$$

设微分算子 $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 那么

$$xy' = Dy,$$

$$x^2y'' = (D-1)Dy,$$

$$x^3y^{(3)} = (D-2)(D-1)Dy,$$

$$\cdots$$

$$x^ky^{(k)} = (D-k+1)\cdots(D-1)Dy\ ?$$

数学归纳

$3!$

$k!$

从而特征方程为

$$(\arcsin x)^{(n)}$$

$$(D-n+1)\cdots(D-1)D + a_1(D-n+2)\cdots(D-1)D + \cdots + a_{n-1}D + a_n = 0.$$

$$x^{k-1}y^{(k-1)} = (D-k+2)\cdots Dy.$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{k-1}y^{(k-1)}\right) = (k-1)x^{k-2}y^{(k-1)} + x^{k-1}y^{(k)}$$

$$= \frac{dt}{dx}\cdot\frac{d}{dt}(D-k+2)\cdots Dy.$$

$$= \frac{1}{x}(D-k+2)\cdots D^2y.$$

$Dy,$

$D-1)Dy,$

$D-2)(D-1)Dy,$

$$x^k y^{(k)} = x\cdot x^{k-1}y^{(k)}$$

$$= x\left[\frac{1}{x}(D-k+2)\cdots D^2y - (k-1)\cdot\frac{1}{x}(D-k+2)\cdots Dy\right].$$

$$= (D-k+2)\cdots Dy\left[D-(k-1)\right]$$

$$= (D-k+1)(D-k+2)\cdots Dy.$$

$\boxed{(1)}$.

Summary II

对于 $x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + x a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in \mathbb{R}.$

- 特征方程为 $x^k y^{(k)} \rightsquigarrow \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)$;
- λ 为 k 重根对应 $\boxed{e^{\lambda t}}(1, t, \cdots, t^{k-1}) \rightsquigarrow x^\lambda \underline{(1, \ln|x|, \ln^2|x|, \cdots, \ln^{k-1}|x|)}$;
- 对 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的情形，$e^{\lambda t}$ 和 $e^{\bar{\lambda} t}$ 一般取为

x^λ $[\ln x]^{k-1}$

$$x^{\mathrm{Re}\lambda} \cos(\mathrm{Im}\lambda \ \ln|x|),\ e^{\mathrm{Re}\lambda} \sin(\mathrm{Im}\lambda \ \ln|x|).$$

Outline of Chapter 8: Operators on Vectors and Analytical Geometry in Space

向量代数：

- 线性运算：加法，数乘 $\rightsquigarrow \mathbf{R}^3$ 成为线性空间；
- 欧氏空间 $E^3 = (\mathbf{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$：内积，投影，Schmidt 正交化；
- 其他运算：叉乘（向量积），混合积，双重向量积；
- 上述运算的坐标表示.

$Ax+By+Cz+D=0$

$\vec{n}=(A,B,C)$

空间中的直线和平面：

$\cos\alpha x+\cos\beta y+\cos\gamma z+p=0$

- 平面方程的建立：点~~法式，法式，参数方程~~；
- 直线方程的建立：点向式，一般式，参数方程；

$|p|=d_{O-\pi}$

- 位置关系，距离和夹角的讨论；

直线与直线 平面与直线 公垂线段，距离，直线方程.

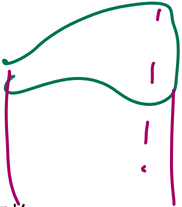
- 平面束方程.

$\lambda(\quad)+\mu(\quad)=1.$

$x^2+y^2=z^2$

空间中的曲线和曲面：

- 柱面，$\boxed{\text{锥面}}$和旋转曲面，常见二次曲面；
- 投影柱面 ⇝ 空间曲线在坐标面上的投影；
- 补充：实对称矩阵的正交相似对角化，正交变换；
- 空间直角坐标变换 ⇝ 化二次型为标准型.



$\boxed{\text{二次曲面方程}}$

$x^2+\square xy+\square y^2+\square yz+\square z^2+\square xz+\square x+\square y+\square z+\_=0$

$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$

柱面