

# §7.5, 7.6, 7.10 Ordinary Differential Equations II

illusion

Especially made for zqc

School of Mathematical Science, XMU

Wednesday 26<sup>th</sup> February, 2025

<http://illusion-hope.github.io/25-Spring-ZQC-Calculus/>

- 变量分离方程  $\rightsquigarrow$  特解;
- (Picard) 解的存在唯一性定理: 对可解出导数的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

若满足:

- (1)  $f(x, y)$  在包含  $[x_0, y_0]$  的一个闭矩形区域  $K$  上连续;
- (2)  $f(x, y)$  对  $y$  满足 Lipschitz 条件, i.e., 存在常数  $L > 0$  满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in K.$$

那么方程 (1) 在  $x_0$  的一个邻域中 **存在唯一** 满足  $y(x_0) = y_0$  的解  $y = y(x)$ .

- 实际操作中往往利用  $f_y(x, y)$  存在且连续  $\rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$ .

# Review II

- Duhamel's Principle: 非齐次方程的解可以由齐次方程的解导出。

$$y(x) = y_0 \exp \left\{ \int_{x_0}^x P(s) ds \right\} + \int_{x_0}^x Q(t) \exp \left\{ \int_t^x P(s) ds \right\} dt.$$

- 几类换元方法: Riccati, Bernoulli, 齐次方程;
- 尝试构造积分因子:

$$y' - P(x)y = Q(x) \rightsquigarrow \mu(x) = \exp \left\{ \int_x^{x_0} P(x) dx \right\}.$$

# Examples

(1) (Riccati)  $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) \rightsquigarrow$  Attention is all you need!

$\rightsquigarrow$  If you find one solution  $\tilde{y}$ , then let  $y = z + \tilde{y} \rightsquigarrow$  Bernoulli.

(2)  $\frac{xdy}{ydx} = f(xy) \rightsquigarrow u = xy, \frac{du}{dx} = y + x \frac{dy}{dx}$

(3)  $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \rightsquigarrow u = ax + by + c, \frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$

(4)  $\frac{x^2 dy}{dx} = f(xy)$

(5)  $\frac{dy}{dx} = xf\left(\frac{y}{x^2}\right)$

(6) ...

## 例 1

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^6 - 2x^2}{2xy^5 + x^2y^2};$$

$$(1') \quad (\text{Similar!}) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + 3xy^2 + x}{3x^2y + 2y^3 - y};$$

$$(2) \quad y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1.$$

## 例 2

已知微分方程  $y' + y = f(x)$ ,  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ . 若  $f(x)$  是以周期为  $T$  的函数, 证明: 方程存在唯一以  $T$  为周期的解。

# Examples

## 例 3

(Gronwall) 设  $f(t), g(t), x(t) \in C[t_0, t_1]$  且非负, 求证: 若  $x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(\tau)x(\tau) d\tau, t_0 \leq t \leq t_1$ , 则

$$x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau}^t f(s) ds \right\} d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

## 例 4

设可微函数  $y = f(x)$  对于任意  $x, h \in (-\infty, +\infty)$ , 恒满足关系式:

$$f(x+h) = \frac{f(x) + f(h)}{1 + f(x)f(h)}.$$

已知  $f'(0) = 1$ , 试求  $f(x)$ .

# Lecture 2

## 初等积分方法:

- 可分离变量的微分方程  $\rightsquigarrow$  一阶线性微分方程
- 变量代换法: 齐次方程, Bernoulli 方程
- 全微分方程, 积分因子法  $\rightsquigarrow$  (Chapter 9) 多元函数微分学
- 几类可降阶的高阶微分方程

## 高阶微分方程:

- 齐次线性微分方程解的结构和性质  $\rightsquigarrow$  齐次线性微分方程组
- 非齐次线性微分方程: 常数变易法
- 常系数齐次线性微分方程  $\rightsquigarrow$  变系数: Euler 方程
- 两类特殊的常系数非齐次线性微分方程

# Differential Equations That Can Be Reduced In Order

- (1)  $y^{(n)} = f(x)$ ;
- (2)  $y'' = f(x, y')$ ;
- (3) 自治/驻定方程  $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

前两类是基本的，我们只看第三类，考虑  $\frac{dy}{dx} = z$ ，那么

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy} \rightsquigarrow y^{(3)} = \frac{d}{dx} \left\{ z \frac{dz}{dy} \right\} = z \frac{d}{dy} \left\{ z \frac{dz}{dy} \right\}.$$

利用微分的运算性质，即

$$y^{(3)} = z \left\{ \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 + z \frac{d^2z}{dy^2} \right\}.$$



# Examples

## 例 5

$$(1) \quad y'' = \frac{1}{(1+x^2)^2};$$

$$(2) \quad yy'' + 2(y')^2 = 0;$$

$$(3) \quad (22-23 \text{ Midterm}) \quad yy'' + (y')^2 - 2yy' = 0.$$

Note: 除了  $y' = z$ , 你能给出类似积分因子法的思路吗? 注意  $(yy')' = ?$

# From High-Order L.D.E. to Systems of L.D.E.

给定一个高阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \quad (2)$$

令  $y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)}$  那么有

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x).$$

# From High-Order L.D.E. to Systems of L.D.E.

存在唯一性定理：对线性微分方程组

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, x_0 \in (a, b) \quad (4)$$

若  $\mathbf{A}(x), \mathbf{f}(x) \in C[a, b]$ , 方程 (2) 满足初始条件  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$  的解  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$  在  $[a, b]$  上存在且唯一。

↪ 对高阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \quad (5)$$

若  $a_i(x) \in C(a, b)$ , 则方程 (5) 在给定初值条件  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$  下存在唯一解  $y = y(x), x \in [a, b]$ .

# Examples

在求解某些线性微分方程组时，也可以将其化为高阶线性微分方程来处理。

## 例 6

转化为高阶线性微分方程：

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - z. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - x = e^t, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + y = 0. \end{cases}$$

为了书写上的方便, 我们只讨论线性微分方程组:

## Thm 7

设  $y_1(x), \dots, y_k(x)$  为  $y' = A(x)y$  的解,  $\varphi(x), \kappa(x)$  为  $y' = A(x)y + f_1(x)$  的解,  $\psi(x)$  为  $y' = A(x)y + f_2(x)$  的解。那么

- (1)  $c_1 y_1(x) + \dots + c_k y_k(x)$  为  $y' = A(x)y$  的解;
- (2)  $c_1 y_1(x) + \dots + c_k y_k(x) + \varphi(x)$  为  $y' = A(x)y + f(x)$  的解;
- (3)  $\varphi(x) + \psi(x)$  为  $y' = A(x)y + f_1(x) + f_2(x)$  的解;
- (4)  $\varphi(x) - \kappa(x)$  为  $y' = A(x)y$  的解.

上述定理称为解的叠加原理, 高阶线性微分方程的表述我们会在最后汇总。

# Structure of Solutions to $y' = A(x)y$

我们首先引入线性相关和线性无关的定义。称向量函数  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  在  $[a, b]$  上是线性相关的, 若存在不全为 0 的常数  $c_1, \dots, c_n$  使得

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

否则称为线性无关, i.e.,

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0.$$

记 Wronsky 行列式  $W(x) = \det[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ .

Try

(1)  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  在  $[a, b]$  上线性相关  $\Rightarrow W(x) \equiv 0$ .

(2) 上述结论的逆定理不成立。

# Structure of Solutions to $y' = A(x)y$

但当向量函数  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  为方程  $y' = A(x)y$  的解时, 线性无关就等价到  $W(x) \neq 0$  恒成立了, 也等价于存在一点  $x_0$  满足  $W(x_0) \neq 0$ .

## Thm 8

若  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  为  $y' = A(x)y$ ,  $A(x) \in C[a, b]$  的  $n$  个解, 那么  $W(x)$  在  $[a, b]$  上要么恒为 0, 要么处处不为 0!

接下来我们给出解的结构定理, 注意体会 **初值条件决定解** 的作用。

## Thm 9

若  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  为  $y' = A(x)y$ ,  $A(x) \in C[a, b]$  的  $n$  个线性无关解, 设  $y(x)$  为方程的任意一个解, 则必定存在常数  $c_1, \dots, c_n$  满足

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x). \quad (6)$$

称  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  为方程的一个基本解组。

# Summary I

给定  $y' = A(x)y$ ,  $A(x) \in C[a, b]$ ,  $x_0 \in (a, b)$ .

- 方程的所有解构成  $n$  维线性空间  $S \rightsquigarrow$  叠加原理;
- 解  $y_1, \dots, y_n$  构成  $S$  的一组基  $\Leftrightarrow y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$  构成  $\mathbb{R}^n$  的一组基;
- 称矩阵  $\Phi(x) = [y_1, \dots, y_n]$  为原方程的基解矩阵, 那么对方程的任意解  $y$ , 都存在常向量  $c \in \mathbb{R}^n$  满足

$$y = \Phi(x)c.$$

- 设  $y_1, \dots, y_n$  为上述方程的一个基本解组。设  $\varphi$  为  $y' = A(x)y + f(x)$ ,  $A(t) \in C[a, b]$  的一个特解, 那么  $y' = A(x)y + f(x)$  的任意一个解  $y$  可以表示为

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + \varphi. \quad (7)$$



# Summary II

给定  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ .

- 方程的所有解构成  $n$  维线性空间  $\mathcal{S} \rightsquigarrow$  叠加原理;
- 解  $y_1, \cdots, y_n$  构成  $\mathcal{S}$  的一组基  $\Leftrightarrow y_1(x_0), \cdots, y_n(x_0)$  构成  $\mathbb{R}^n$  的一组基;
- $n$  个线性无关解  $y_1, y_2, \cdots, y_n$  构成原方程的一个基本解组, 那么对方程的任意解  $y$ , 都存在常向量  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  满足

$$\mathbf{y} = [y_1, \cdots, y_n]\mathbf{c} = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n.$$

- $\varphi$  为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(t)$  的一个特解, 那么  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(t)$  通解可表示为

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n + \varphi.$$

# Summary II

给定  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ .

- $n$  个解的 Wronsky 行列式定义为

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

在系数连续的区间上，要么恒为 0（解线性相关），要么恒不为 0（解线性无关）。

# Examples

## 例 10

设二阶线性微分方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的 3 个特解为  $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$ , 试求此方程满足条件  $y(0) = 1, y'(0) = 3$  的特解。

## 例 11

已知  $y_1(x) = e^x, y_2(x) = u(x)e^x$  是二阶微分方程  $(2x - 1)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$  的解, 其中  $u(x)$  满足  $u(-1) = e, u(0) = -1$ . 求该微分方程的通解。

# Fundamental Matrix $\Phi(x)$

给定  $y' = A(x)y$ ,  $A(x) \in C[a, b]$ , 初值条件为  $y(x_0) = y_0$ ,  $x_0 \in (a, b)$ .

- $\Phi(x), \Psi(x)$  均为原方程的基解矩阵, 那么存在  $n$  阶可逆矩阵  $C$  满足

$$\Psi(x) = \Phi(x)C.$$

- 反之, 若  $\Phi(x)$  为原方程的基解矩阵, 那么对任意  $n$  阶可逆矩阵  $C$  均有  $\Phi(x)C$  为原方程的基解矩阵;
- 特别地, 当取  $C = \Phi^{-1}(x_0)$  时,

$$\Psi(x) = \Phi(x)C = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0).$$

此时称  $\Psi(x)$  为标准基解矩阵, 满足  $\det \Psi(x_0) = 1$ .

# The Method of Variation of Parameters

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \rightsquigarrow \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

两个方程的初值条件均给定为  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ . 齐次方程的一个基解矩阵为  $\Phi(x)$ .

- 齐次方程的解为  $\mathbf{y} = \Phi(x)\mathbf{c} = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0$ .
- 非齐次方程的解设为  $\mathbf{y} = \Phi(x)\mathbf{c}(x) \rightsquigarrow \Phi(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x)$ .

$$(\text{Duhamel}) \quad \mathbf{y} = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.$$

# The Method of Variation of Parameters

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

初值条件给定为  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ . 原方程的一个基本解组为  $y_1, \dots, y_n$ .

- 齐次:  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \iff \mathbf{y} = \Phi(x)\mathbf{c}$ .
- 非齐次:  $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n \iff \mathbf{y} = \Phi(x)\mathbf{c}(x)$ .

$$\Phi(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x) \iff \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

# Liouville's Theorem

## 例 12

设  $y_1(x), y_2(x)$  是二阶齐次线性方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的两个解, 令

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

证明:

- (1)  $W(x)$  满足方程  $W' = -p(x)W$ ;
- (2)  $W(x) = W(x_0) \exp \left\{ - \int_{x_0}^x p(t) dt \right\}$ .

$$(\text{Liouville}) \quad W' = \text{tr}[\mathbf{A}(x)]W \rightsquigarrow W = W(x_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \text{tr}[\mathbf{A}(t)] dt \right\}$$