

1. 已知三次函数 $f(x) = 2ax(x-b)^2$ 的定义域和值域为 $[a, b]$, 则 $b =$

A. $\frac{1}{2}$

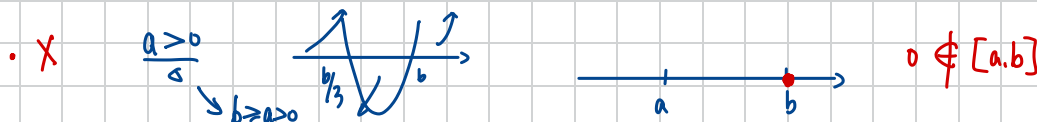
B. 0

C. 1

D. $\frac{3}{2}$

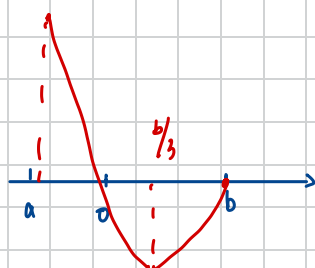
$$f'(x) = 2a(x-b)^2 + 4ax(x-b)$$

$$= (x-b) [2ax - 2ab + 4ax] = \frac{2a(x-b)(3x-b)}{2}$$



• $a = b = 0$ ✓

• $\underline{a \leq 0} \quad \underline{b \geq 0} \quad 0 \in [a, b]$



$$\begin{cases} f(a) = 2a^2(a-b)^2 = b \\ f(\frac{b}{3}) = \frac{2}{3}ab - \frac{4}{9}b^2 = a \Rightarrow b^3 = \frac{27}{8} \\ \Rightarrow \underline{b = \frac{3}{2}} \end{cases}$$

2. (多选) 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x) + [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[1.9] = 1, [3] = 3$. 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = x \ln x$, 设 x_n 为 $f(x)$ 从小到大的第 n 个极小值点, 则

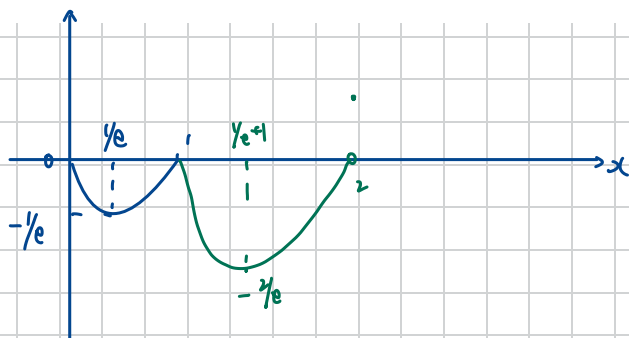
A. $f(2) = 2$ \times 1 \times

B. $f(n) = 2^n - n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$) ✓ $f(n) = 2f(n-1) + n-1 \Rightarrow f(n) + n+1 = 2[f(n-1) + n+1]$

C. 数列 $\{x_n\}$ 是等差数列 ✓

D. $f(x_n) < 0$ \times

BC



$$2^4 - 1 = 15$$

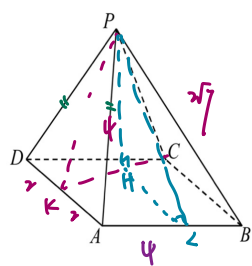
3. 从集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 的所有非空子集中任选两个，若选中的两个子集的交集为空集的概率为 $\frac{5}{21}$.

$$\frac{C_4^1 C_7^1 + \frac{C_4^2}{2} - 6}{C_7^2} = \frac{22+3}{15 \times \frac{1}{2}} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

4. 四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为菱形， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $PA = PD$ 。

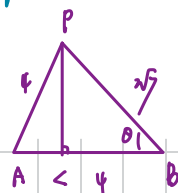
(1) 证明： $PC \perp AD$ ；

(2) 若 $PA = AD = 4$ ， $PB = 2\sqrt{7}$ ，求平面 PAB 与平面 $ABCD$ 所成二面角的正弦值。



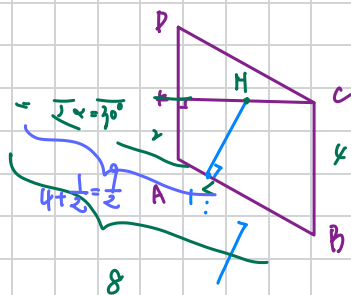
(1) $AD \perp \text{面} PCH \checkmark$

(2) 即 $\sin \theta = \frac{PH}{PC}$

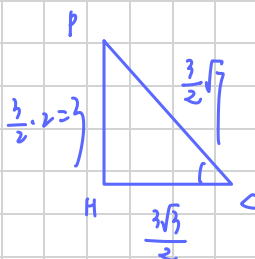


$$\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \sin \theta = \frac{3}{4}$$

$$PH = \frac{3}{2}\sqrt{7} \quad BH = \frac{7}{2} \quad AH = \frac{1}{2}$$



$$HC = \frac{1}{2} \tan 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



$$\sin \theta = \frac{PH}{PC} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$