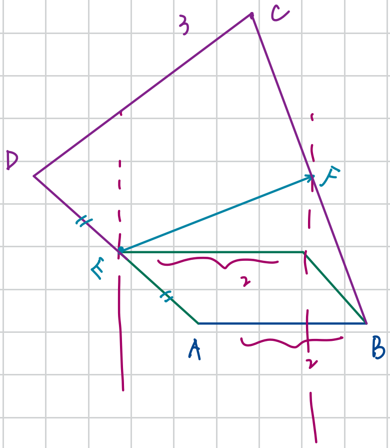
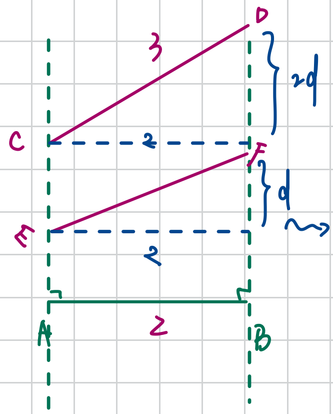
1. 在平面四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别为 AD,BC 的中点。若 $AB=2$，$CD=3$，且 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB}=4$, 则 $|EF|=$

A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$ ✓　　B　　C. $\frac{\sqrt{42}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

$|\vec{EF}|\cos\langle\vec{EF},\vec{AB}\rangle=$ $\vec{EF}$ 在 $\vec{AB}$ 上的投影 $\frac{4}{|\vec{AB}|}=2$



特殊化



$4+4d^2=9 \Rightarrow d^2=\frac{5}{4}$

$\rightsquigarrow EF^2=2^2+d^2=4+\frac{5}{4}=\frac{21}{4}$

$|EF|=\frac{\sqrt{21}}{2}$ ✓

$\vec{CD}=\vec{CB}+\vec{BA}+\vec{AD} \rightsquigarrow \vec{CD}^2=4+\vec{CB}^2+\vec{AD}^2+\cancel{2\vec{CB}\cdot\vec{BA}+2\vec{BA}\cdot\vec{AD}}+2\vec{CB}\cdot\vec{AD}$

$\vec{FE}=\frac{1}{2}\vec{CB}+\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{AD} \rightsquigarrow \vec{FE}^2=4+\frac{1}{4}\vec{CB}^2+\frac{1}{4}\vec{AD}^2+\cancel{\frac{1}{2}\cdot2\cdot\vec{CB}\cdot\vec{BA}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\vec{BA}\cdot\vec{AD}}+\frac{1}{4}\cdot2\vec{CB}\cdot\vec{AD}$

$\Rightarrow \vec{FE}^2-4=\frac{1}{4}(\vec{CD}^2-4)=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$

$\rightsquigarrow \vec{FE}^2=4+\frac{5}{4}=\frac{21}{4}$

即 $|\vec{FE}|=\frac{\sqrt{21}}{2}$

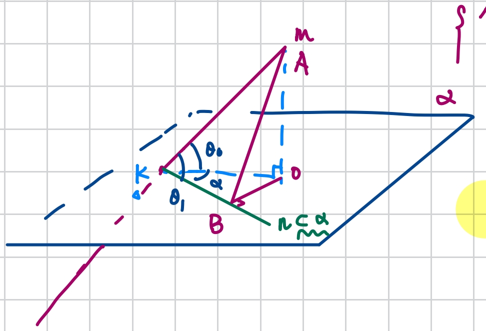
$\vec{FE}\cdot\vec{BA}=4=\vec{FB}\cdot\vec{BA}+4+\vec{AE}\cdot\vec{BA}$

即 $\vec{CB}\cdot\vec{BA}+\vec{BA}\cdot\vec{AD}=0$

2. 已知直线 m 与平面 α 所成的角为 θ_0，若直线 $n \subseteq \alpha$，直线 $m \subseteq \beta$，设 m 与 n 的夹角为 θ_1，α 与 β 的夹角为 θ_2，则

A. $\theta_1 \geq \theta_0$, $\theta_2 \geq \theta_0$ B. $\theta_1 \geq \theta_0$, $\theta_2 \leq \theta_0$ C. $\theta_1 \leq \theta_0$, $\theta_2 \geq \theta_0$ D. $\theta_1 \leq \theta_0$, $\theta_2 \leq \theta_0$

A



$\begin{cases} AO\perp\alpha \Rightarrow AO\perp n \\ OB\perp n \end{cases} \Rightarrow n\perp$平面$AOB$

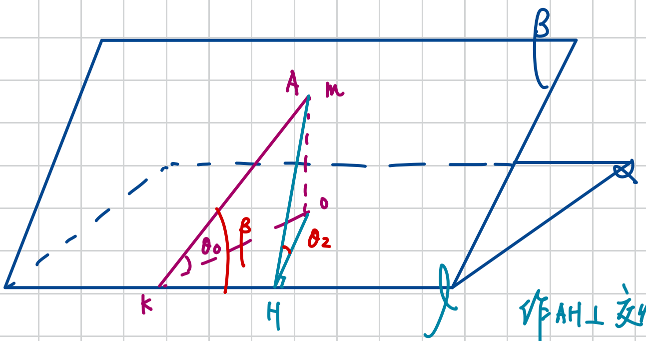
$\Rightarrow n\perp AB$

$\cos\theta_1 = \frac{KB}{KA} = \frac{KB}{KO}\cdot\frac{KO}{KA}$

$= \cos\theta_0\cdot\cos\alpha \leq \cos\theta_0$

$\Rightarrow \theta_1 \geq \theta_0$ (最小角定理)

线面角为 minimal 线线角



作AH⊥交线l 又$l\perp AO$

$\Rightarrow l\perp$平面$AOH \Rightarrow l\perp OH$

$\Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{AO}{AH} = \frac{AO}{AK}\cdot\frac{AK}{AH}$

$= \sin\theta_0\cdot\frac{1}{\sin\beta}$

$\rightsquigarrow \sin\theta_0 = \sin\theta_2\sin\beta \leq \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_0 \leq \theta_2$ (最大角定理)

3. (多选) 已知 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面上的动点，M, N 分别是线段 B_1C 和 C_1C 的中点，点 Q 满足 $\overrightarrow{MQ}=\lambda\overrightarrow{MN}$ $(0\le\lambda\le1)$, 且 $A_1P\perp DQ$，设 P 的轨迹围成的图形为多边形 Ω，则

A. Ω 为平行四边形 √

B. 存在 λ，使得 Ω 的面积为 $\sqrt{22}$ √

C. 存在 λ，使得 Ω 和底面 $ABCD$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ ✗

D. 点 B 和 Ω 形成的多面体的体积不变 √

$\sqrt{4+\mu^2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{9+\mu^2+2\mu}$, θ

$\cos\theta=\dfrac{9+\mu^2-(9+\mu^2+2\mu)}{2\sqrt{4+\mu^2}\cdot\sqrt{5}}$ $\quad\sin\theta=\dfrac{\sqrt{20+5\mu^2-\mu^2}}{\sqrt{4+\mu^2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{20+4\mu^2}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4+\mu^2}}$

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{20+4\mu^2}=\dfrac{\sqrt{22}}{2}\Rightarrow 2\mu=\sqrt{2}$

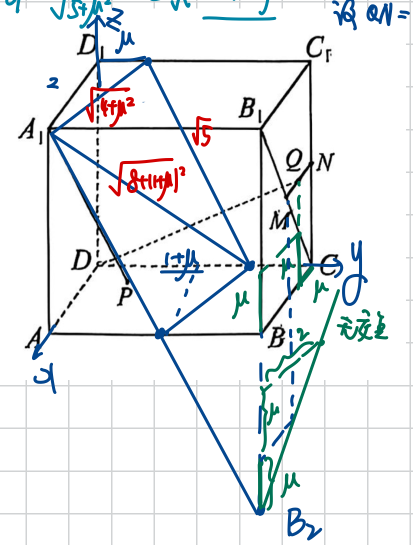
$\Rightarrow \mu=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in[0,1]$ √

$\vec{n}=(\mu,2,1)$ $\quad\vec{n}=(0,0,1)$

$\dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+5}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \mu^2+5=4$ ✗

$d=\dfrac{2}{\sqrt{5+\mu^2}}$ $\quad S_\Omega=2\sqrt{5+\mu^2}$

设 $\overrightarrow{QN}=\dfrac{\mu}{|\overrightarrow{MN}|}\overrightarrow{MN}=\mu\overrightarrow{MN}$ $\quad$ 则 $\mu=1-\lambda$



$A_1(2,0,2)$ $\quad Q(\mu,2,1)$ $\quad \overrightarrow{DQ}=(\mu,2,1)$

ABD

· P在侧面 ADD_1A_1 上 $\quad P(m,0,n)$ $\quad \overrightarrow{A_1P}=(m-2,0,n-2)$

✗ $\quad$ 而 $\mu>0,\ 1>0,\ m-2,\ n-2\le0\Rightarrow \overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{A_1P}\le0$ (取"="时仅当P与A_1重合)

· P在侧面 BCC_1B_1 上 $\quad P(m,2,n)$ $\quad \overrightarrow{A_1P}=(m-2,2,n-2)$

✗ $\quad\rightsquigarrow 4+\mu(m-2)+(n-2)=0$

$(2,2,-2)$ $\quad (1,2,\mu-2)$

· P在上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上 $\quad P(m,g,2)$ $\quad \overrightarrow{A_1P}=(m-2,g,0)$

√ $\quad (0,\mu,2)$ $\quad\rightsquigarrow \mu(m-2)+2g=0$

· P在下底面 $ABCD$ 上, $\quad P(m,g,0)$ $\quad \overrightarrow{A_1P}=(m-2,g,-2)$

√ $\quad\rightsquigarrow \mu(m-2)+2g-2=0$

· P在前面 ABB_1A_1 上 $\quad P(2,g,n)$ $\quad \overrightarrow{A_1P}=(0,g,n-2)$

√ $\quad\rightsquigarrow 2g+(n-2)=0$

· P在后面 DCC_1D_1 上. $\quad P(0,g,n)$ $\quad \overrightarrow{A_1P}=(-2,g,n-2)$

√ $\quad\rightsquigarrow -2\mu+2g+(n-2)=0$

4. 已知实数 $a>0$，i 是虚数单位。设集合

$$A=\left\{z \mid z=w+\frac{1}{w},\ |w|>1,\ w\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{C}\right\},$$

$-(1-i)$

集合 $B=\{z \mid |z-1+i|=a,\ z\in\mathbb{C}\}$，如果 $B\subseteq A$，则 a 的取值范围为 $\underline{(0,1)\cup}(\sqrt{10},+\infty)$

$(x-1)^2+(y+1)^2=a^2$

$A^c\subseteq B^c$

$\|$

$[-2,2]$

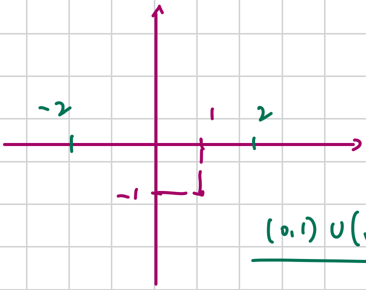
$w=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r>1)$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$=\left(r\cos\theta+\frac{1}{r}\cos\theta\right)+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$

$\Downarrow$

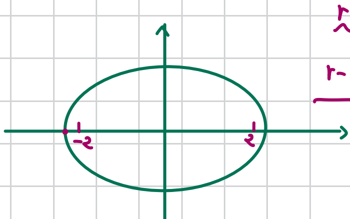
$$\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1$$



$\frac{(0,1)\cup(\sqrt{10},+\infty)}{a}$

$r>1 \rightsquigarrow r+\frac{1}{r}>2$

$r-\frac{1}{r}\uparrow \ >1-1=0$



$\rightsquigarrow$? $\forall a>2,\ b>0$，是否存在 θ 使 $\begin{cases}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta=a\\ \left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta=b\end{cases}$

$r=\dfrac{\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}}{2}\qquad r=\dfrac{2}{\frac{a}{\cos\theta}-\frac{b}{\sin\theta}}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{\cos^2\theta}-\frac{b^2}{\sin^2\theta}=4$

$\Leftrightarrow a^2(1-\cos^2\theta)-b^2\cos^2\theta=4\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)$

即 $a^2-a^2\cos^2\theta-b^2\cos^2\theta=4\cos^2\theta-4\cos^4\theta$

$\Rightarrow \underline{4t^2+(4+a^2+b^2)t-a^2=0}=f(t)$

$t=\cos^2\theta\in[0,1]$ 有解？

$f(0)=-a^2<0,\ f(1)=8+b^2>0$ ✓

5. 已知函数 $f(x)=e^{ax}\ln x$，其中 $a>0$。

(1) 若 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线与两坐标轴所围成三角形的面积为 $\frac{e}{2}$，求 a 的值。

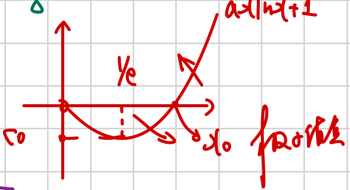
(2) 若 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，证明：$f(x_0)<-e$.

(1) $f(1)=0$, $f'(x)=ae^{ax}\ln x+\frac{e^{ax}}{x}$ $f'(1)=e^a$

即 $l: x=\frac{1}{e^a}y+1$ 过 $(1,0),(0,-e^a)$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot e^a=\frac{e}{2} \Rightarrow a=1$

(2) $f'(x)=\frac{ae^{ax}x\ln x+e^{ax}}{x}=\underbrace{\boxed{\frac{e^{ax}}{x}}}_{>0}(\underbrace{ax\ln x+1}_{\Delta})$

$a>0$



$1-\frac{a}{e}<0$

$\Rightarrow \boxed{a>e}$

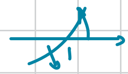
即 $x_0\ln x_0=-\frac{1}{a}$, $x_0>\frac{1}{e}$

$\ln x_0=-\frac{1}{ax_0}$

$f(x_0)=e^{ax_0}\ln x_0=e^{ax_0}\cdot -\frac{1}{ax_0}$

Goal: $-\frac{e^{ax_0}}{ax_0}<-e \Leftrightarrow \frac{e^{ax_0}}{ax_0}>\frac{e^1}{1}$

而 $g(x)=\frac{e^x}{x}$ $g'(x)=e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$



即 $\frac{e^x}{x}\geqslant\frac{e^1}{1}$ 恒成立

只需证明 $ax_0\neq 1$

若 $ax_0=1 \Leftrightarrow \ln x_0=-1 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{e}$ 矛盾！

$\boxed{\text{此时 } x_0 \text{ 不为极小值}}$