1 概率统计 回归教材训练 1

1. 四名同学各抛骰子 5 次，分别记录每次骰子出现的点数。根据四名同学的统计结果，可以判断出一定没有出现点数 6 的是

C

A. 平均数为 3，中位数为 2 　15　✓ 2 2 2 3 6

B. 中位数为 3，众数为 2 　✓ 2 2 3 6 6

C. 平均数为 2，方差为 2.4 　×

D. 中位数为 3，方差为 2.8 　×5　$\boxed{1\ 2\ 3\ 3\ 6}$ 36 ✓ $\bar{x}=3$

$\frac{1}{5}(6-2)^2=\frac{1}{5}\cdot 16=3.2>2.4$

$\sum x_i^2-5\bar{x}^2=\sum(x_i-\bar{x})^2=14.0$

$\bar{x}=3$ 　$\sum x_i^2=14+45=59$ 　$14=1+4+9$

2. 已知总体划分为 3 层，通过分层随机抽样，各层抽取的样本、样本均值和样本方差分别为：$l,\bar{x},s_1^2;m,\bar{y},s_2^2;n,\bar{z},s_3^2$，记总体的样本均值为 $\bar{w}$，样本方差为 s^2，证明：

$$\bar{w}=\frac{l}{l+m+n}\bar{x}+\frac{m}{l+m+n}\bar{y}+\frac{n}{l+m+n}\bar{z},$$

get it! ✓

$$s^2=\frac{1}{l+m+n}\{l[s_1^2+(\bar{x}-\bar{w})^2]+m[s_2^2+(\bar{y}-\bar{w})^2]+n[s_3^2+(\bar{z}-\bar{w})^2]\}.$$

$$\bar{w}=\frac{\sum x_i+\sum y_i+\sum z_i}{l+m+n}=\frac{l\bar{x}+m\bar{y}+n\bar{z}}{l+m+n}$$

$$s^2=\frac{1}{l+m+n}\left[\sum(x_i-\bar{w})^2+\sum(y_i-\bar{w})^2+\sum(z_i-\bar{w})^2\right]=\frac{1}{l+m+n}\left[l\left(s_1^2+(\bar{x}-\bar{w})^2\right)+m\left(s_2^2+(\bar{y}-\bar{w})^2\right)+n\left(s_3^2+(\bar{z}-\bar{w})^2\right)\right]$$

$$\sum(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\bar{w})^2=\underbrace{\sum(x_i-\bar{x})^2}_{ls_1^2}+\boxed{2(\bar{x}-\bar{w})\underbrace{\sum(x_i-\bar{x})}_{0}}+\underbrace{\sum(\bar{x}-\bar{w})^2}_{=l(\bar{x}-\bar{w})^2}=l\left[s_1^2+(\bar{x}-\bar{w})^2\right]$$

3. 在对树人中学高一年级学生身高的调查中，采用样本量比例分配的分层随机抽样。如果不知道样本数值，只知道抽取了男生 25 人，均值和方差分别为 170 和 10，抽取了女生 25 人，均值和方差分别为 160 和 40。你能由这些数据计算出总样本的方差，并对高一年级全体学生的身高方差作出估计吗？

$\bar{w}=\frac{1}{2}(170+160)=165$ 　$s^2=\frac{1}{2}\left[10+(170-165)^2+40+(160-165)^2\right]=\frac{1}{2}\times 100=50$

4. 从两名男生（记为 B_1 和 B_2）、两名女生（记为 G_1 和 G_2）中抽取两人。

(1) 分别计算有放回简单随机抽样、不放回简单随机抽样和按性别等比例分层随机抽样下，抽到的两人都是男生的概率；

$\frac{2^2}{4^2}=\frac{1}{2}$ 　$\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6}$ 　$\frac{0}{(C_2^1)^2}=0$

(2) 比较这三种抽样方式在避免极端样本（例如全是男生的样本）上的优劣。

有放回 < 不放回 < 分层

5. 从 1～20 这 20 个整数中随机选择一个数，设事件 A 表示选到的数能被 2 整除，事件 B 表示选到的数能被 3 整除。求下列事件的概率：

(1) 这个数既能被 2 整除也能被 3 整除；

$(2,3)=1$ 　$6\mid$ Number 　$\frac{\lfloor\frac{20}{6}\rfloor}{20}$ → 向下取整 $=\frac{3}{20}$

(2) 这个数能被 2 整除或能被 3 整除；

容斥原理

$\frac{\lfloor\frac{20}{2}\rfloor+\lfloor\frac{20}{3}\rfloor-\lfloor\frac{20}{6}\rfloor}{20}=\frac{10+6-3}{20}=\frac{13}{20}$

(3) 这个数既不能被 2 整除也不能被 3 整除。 $1-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}$

6. 互为对立的两个事件是非常特殊的一种事件关系。请分别证明如果事件 A 与事件 B 相互独立，那么 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 是独立的。

√ 记住！

已知 $P(AB)=P(A)P(B) \Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$ $P(\overline{A}B)$ 同理

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=P(\overline{A})-P(\overline{A})P(B)=P(\overline{A})P(\overline{B})$ ✓

7. 一个均匀的正八面体，八个面分别标以数字 1 到 8，任意拨捏一次这个正八面体，观察它与地面接触的面上的数字，得到样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$。构造适当的事件 A,B,C，使得 $P(A)P(B)P(C)=P(ABC)$ 成立，但不满足 A,B,C 三个事件是**两两独立**的。

$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{1,2,3,5\}$, $C=\{1,5,6,7\}$

$P(ABC)=P(\{1\})=\frac{1}{8}=(\frac{1}{2})^3$ 但 $P(AB)=\frac{3}{8}\neq(\frac{1}{2})^2$!

8. “用事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 估计概率 $P(A)$，重复试验次数 n 越大，估计的就越精确”，~~判断这种说法是否正确~~，并举例说明。

的可能性越大

伯努利大数定律

$\forall \varepsilon>0,\ \lim\limits_{n\to\infty} P\{|f_n(A)-P(A)|<\varepsilon\}=1$ ⇐ 例如掷硬币 1000 次，仍有 $(\frac{1}{2})^{1000}$ 概率全为正面

此时不可能用频率估计概率，但应当看到 P 是很小的

9. 有两个盒子，其中 1 号盒子中有 95 个红球，5 个白球；2 号盒子中有 5 个红球，95 个白球。现从两个盒子中任意选择一个，再从中任意摸出一个球。如果摸到的是红球，你认为选择的是哪个盒子？做出你的推断，你的推断犯错误的概率是多少？

1

$P(红)=P(1)P(红|1)+P(2)P(红|2)=\frac{1}{2}\times\frac{95}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}=\frac{95}{200}+\frac{5}{200}=\frac{1}{2}$

$\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$

由 Bayes 公式，$P(1|红)=\frac{\frac{95}{200}}{\frac{95}{200}+\frac{5}{200}}=\frac{95}{100}$ $P(2|红)=\frac{5}{100}$

10. (1) 4 名同学分别报名参加学校的足球队、篮球队、乒乓球队，每人限报其中的一个运动队，不同报法的种数是 3^4 还是 4^3？ √

(2) 3 个班分别从 5 个景点中选择一处游览，不同选择的种数是 3^5 还是 5^3？ √

11. 在国庆长假期间，要从 7 人中选择若干人在 7 天假期值班（每天只需 1 人值班），不出现同一人连续值班 2 天，有多少种可能的安排方法？

$7\times 6^{7-1}=7\times 6^6$

12. 2160 有多少个不同的正因数？这些正因数的和是多少？

$2160=10\times2\times108=10\times2^2\times54=10\times2^2\times2\times27=\boxed{2^4\times3^3\times5}$ 标准分解式

正因数个数 $d(2160)=5\times4\times2=16$

↑ 选 $0\sim4$ 个 2，选 $0\sim3$ 个 3，$0\sim1$ 个 5；16 即可以

正因数之和 $=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^4)(3^0+\cdots+3^3)(5^0+5^1)$

$=\frac{1(1-2^5)}{1-2}\cdot\frac{1(1-3^4)}{1-3}\cdot6=3(2^5-1)(3^4-1)$

$=3\times31\times80=7440$

13. 用 0 ～ 9 这 10 个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

首位非0

$9 \times A_9^2$ 或用正难则反 首位为0 $A_{10}^3 - 1 \cdot A_9^2$

14. 求证：

$9 \times 9! = 10! - 9!$ ☆

(1) $1+\sum_{k=1}^{n} k \cdot A_k^k = \cancel{A_{k+1}^{k+1}}$; A_{n+1}^{n+1}

$1+\sum_{k=1}^{n}[(k+1)-1]k! = 1+\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!] = (n+1)!-1+1 = A_{n+1}^{n+1}$

(2) $\dfrac{(n+1)!}{k!}-\dfrac{n!}{(k-1)!}=\dfrac{(n-k+1)\cdot n!}{k!} \quad (k \leq n).$

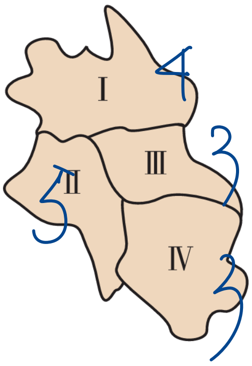
→ easy to check

从n个人中选m人，并将其分为k人与m-k人两队，有多少种组队方法 { 先选m人再分队 / 直接分队.

15. 证明等式 $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$ 并构造一个实际背景，说明这个等式的意义。→ 组合论证

$\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \dfrac{(n-k)!}{(n-m)!\,(m-k)!} = \dfrac{n!}{(n-m)!\,(m-k)!\,k!} = \dfrac{n!}{(n-m)!\,m!} \cdot \dfrac{m!}{k!\,(n-k)!} = C_m^k C_n^m$

16. 如图，现要用 5 种不同的颜色对某市的 4 个区县地图进行着色，要要求有公共边的两个地区不能用同一种颜色，共有几种不同的着色方法？



$5 \times 4 \times 3 \times 3$

$C_m^2 C_n^2$

17. (1) 平面内有两组平行线，一组有 m 条，另一组有 n 条，这两组平行线相交，可以构成多少个平行四边形？

(2) 空间有三组平行平面，第一组有 m 个，第二组有 n 个，第三组有 l 个，不同两组的平面都相交，且交线不都平行，可以构成多少个平行六面体？ $C_m^2 C_n^2 C_l^2$

18. 移动互联网给人们的沟通交流带来了方便。某种移动社交软件平台，既可以供用户彼此添加“好友”单独交流，又可以供多个用户建立一个“群”（“群里”的人彼此不一定是“好友”关系）共同交流。如果某人在平台上发了信息，其他的“好友”都可以看到，但“群”里的非“好友”不能看到。现~~在这个“群”里~~有一个 10 人的“群”，其中 1 人在平台上发了一条信息，“群”里有 3 人说看到，不能看到的有 ~~7~~ 6 人。那么这个“群”里与信息发送人是“好友”关系的情况可能有多少种？

C_9^3

19. 证明：

(1) $(n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除；

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k n^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k n^k = C_n^1 n + \sum_{k=2}^{n} C_n^k n^k$

(2) $99^{10}-1$ 能被 1000 整除；

$99^{10}-1 = (100-1)^{10}-1$

$= \sum_{k=1}^{10} C_{10}^k \cdot 100^k = 1000 + \sum_{k=2}^{10} C_{10}^k 100^k$ ✓

(3) 55^{55} 除以 8 所得的余数是 7。

$55^{55} = (8\times 7-1)^{55} = \sum_{k=0}^{55} C_{55}^k (8\times 7)^k \cdot (-1)^{55-k}$

$\equiv (-1)^{55} \equiv -1 \equiv 7 \pmod 8$

20. 求证：

$$2^n - C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \times 2 + (-1)^n = 1.$$

$(2-1)^n$ ✓

21. (1) 求 $\left(9x+\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式的常数项；

$C_{18}^k (9x)^k \left(\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18-k} = C_{18}^k \boxed{x^{k-9+\frac{k}{2}}} \cdot 3^{2k-18+k}$

$\frac{3k}{2}=9$ $\boxed{k=6}$

$C_{18}^6 \cdot 3^0$

(2) 已知 $(1+\sqrt{x})^n$ 的展开式中第 9 项、第 10 项、第 11 项的二项式系数构成等差数列，求 n；

C_n^8 C_n^9 C_n^{10}

Notice: 第1项=C_n^0

$2C_n^9 = C_n^8 + C_n^{10} \Rightarrow 2\cdot\frac{n!}{(n-9)!\,9!} = \frac{n!}{8!\,(n-8)!} + \frac{n!}{10!\,(n-10)!}$

$(n-9)9$ $(n-8)(n-9)$ 90

$\Rightarrow \frac{2}{9(n-9)} = \frac{1}{(n-8)(n-9)} + \frac{1}{90}$

$\Rightarrow \frac{20-(n-9)}{90(n-9)} = \frac{1}{(n-8)(n-9)}$

$90 = (29-n)(n-8)$

$\Rightarrow (n-29)(n-8)+90 = n^2-37n+322=0$

$\Rightarrow n=14$ 或 23 ✓

(3) 求 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数；

$C_{10}^4(-1)^4 + C_{10}^3(-1)^3 + C_{10}^2(-1)^2$

$= 210-(120+45)=135$

(4) 求 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数。

$(C_5^2 y^2)(C_3^2 (x^2)^2)\cdot x$

$=10\times 3\, x^5y^2$

22. 在 $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 的展开式中，含 x^2 项的系数是多少？

$C_3^2+\cdots+C_{n+2}^2 = C_3^2+C_4^2+C_5^3+C_6^4+\cdots+C_{n+2}^n$

Use: $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

$-1+C_4^1+C_4^2+C_5^3+\cdots+C_{n+2}^n$

$=-1+C_5^2+C_5^3+\cdots$

$=-1+C_6^3+C_6^4+\cdots$

$=-1+C_{n+3}^n = \frac{(n+3)!}{n!\,3!}-1 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1$