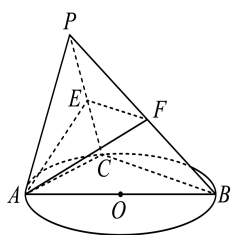


目录

1 每日练习 1 (Due: 2025/1/11 22:00)	2
2 每日练习 2 (Due: 2025/1/12 22:00)	3
3 每日练习 3 (Due: 2025/1/13 22:00)	4
4 每日练习 4 (Due: 2025/1/14 22:00)	6
5 每日练习 5 (Due: 2025/1/17 22:00)	7
6 每日练习 6 (Due: 2025/1/18 22:00)	8
7 每日练习 7 (Due: 2025/1/19 22:00)	9

1 每日练习 1 (Due: 2025/1/11 22:00)

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq 0, \\ -\ln x, & x > 0 \end{cases}$ 。若函数 $g(x) = f(x) - a$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是 ()
- A. $[0, 4]$ B. $[0, 2]$ C. $(-\infty, 4]$ D. $(-\infty, 2]$
2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，则使得 $S_m = b_m$ 成立的正整数 m 的个数的最大值是 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
3. (多选) 已知圆 $O_1: (x-1)^2 + y^2 = 4$ ，圆 $O_2: (x-5)^2 + y^2 = 4m$ ，下列说法正确的是 ()
- A. 若 $m = 4$ ，则圆 O_1 与圆 O_2 相交
- B. 若 $m = 4$ ，则圆 O_1 与圆 O_2 外离
- C. 若直线 $x - y = 0$ 与圆 O_2 相交，则 $m > \frac{25}{8}$
- D. 若直线 $x - y = 0$ 与圆 O_1 相交于 M, N 两点，则 $|MN| = \frac{\sqrt{14}}{2}$
4. 袋中有 6 个大小相同的球，其中 1 个红球， m 个白球， n 个黑球，现依次取球，每次取出一个，取出不放回，直到取出的球中有两种不同颜色的球时结束。已知取到 1 个红球 1 个白球的概率为 $\frac{1}{5}$ ，则 $m = \underline{\hspace{1cm}}$ ，用 X 表示终止时取球的次数，则随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。
5. 如图， C 是以 AB 为直径的圆 O 上异于 A, B 的点，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ， $\triangle PAC$ 中， $PA = PC = AC = 2$ ， $BC = 4$ ， E, F 分别是 PC, PB 的中点：
- (1) 证明： $BC \perp$ 平面 PAC ；
- (2) 记平面 AEF 与平面 ABC 的交线为直线 l ，点 Q 为直线上动点，求直线 PQ 与平面 AEF 所成的角的取值范围。

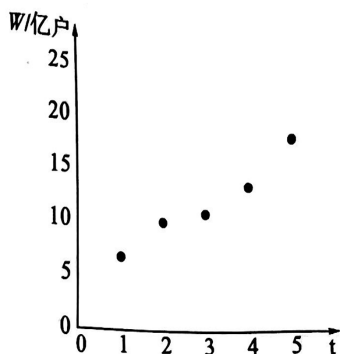


2 每日练习 2 (Due: 2025/1/12 22:00)

1. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 若不等式 $\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) - a\right] \left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) - a - 1\right] < 0$ 在 $(0, 2025)$ 中整数解有 m 个, 则 m 的个数不可能是 ()
- A. 0 B. 338 C. 674 D. 1012
2. 已知函数 $f(x) = x|x - a| - 2a^2$. 若当 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, 1]$ B. $[-2, 1]$ C. $[-1, 2]$ D. $[-1, +\infty)$
3. (多选) 已知 $F(2, 0)$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点, M 是 C 上的点, O 为坐标原点。则
- A. $p = 4$
- B. $|MF| \geq |OF|$
- C. 以 M 为圆心且过 F 的圆与 C 的准线相切
- D. 当 $\angle OFM = 120^\circ$ 时, $\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$
4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6-a^2} = 1$ ($a > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 通过 F_2 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与双曲线交于第一象限的点 A , 延长 AF_2 至 B 使得 $AB = AF_1$. 若 $\triangle BF_1F_2$ 的面积为 $3\sqrt{6}$, 则 a 的值为_____。
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 证明: $b_n < b_{n+1} < 1$.

3 每日练习 3 (Due: 2025/1/13 22:00)

1. 设 $a > 0$, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $[a, 2a]$ 上的最小值为 s_a , 在 $[2a, 3a]$ 上的最小值为 t_a 。当 a 变化时, 以下不可能的情形是
 A. $s_a > 0$ 且 $t_a > 0$ B. $s_a < 0$ 且 $t_a < 0$ C. $s_a > 0$ 且 $t_a < 0$ D. $s_a < 0$ 且 $t_a > 0$
2. 已知抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上两点 A, B 满足 $|AB| = 12$, 若线段 AB 的中点 M 的纵坐标的最小值为 4, 则 $p =$
 A. 2 B. 4 C. 5 D. 6
3. (多选) 若函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ ($a \neq 0$) 既有极大值也有极小值, 则
 A. $bc > 0$ B. $ab > 0$ C. $b^2 + 8ac > 0$ D. $ac < 0$
4. 现有 7 张卡片, 分别写上数字 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6。从这 7 张卡片中随机抽取 3 张, 记所抽取卡片上数字的最小值为 ξ , 则 $P(\xi = 2) =$ _____, $E(\xi) =$ _____。
5. 移动物联网广泛应用于生产制造、公共服务、个人消费等领域。截至 2022 年底, 我国移动物联网连接数达 18.45 亿, 成为全球主要经济体中首个实现“物超人”的国家。下图是 2018–2022 年移动物联网连接数 w 与年份代码 t 的散点图, 其中年份 2018–2022 对应的 t 分别为 1–5。



- (1) 根据散点图判断两个变量是否具有线性相关性, 计算样本相关系数 (精确到 0.01), 并判断它们的相关性强弱;
- (2) (i) 假设变量 x 与变量 Y 的 n 对观测数据为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 两个变量满足一元线性回归模型:

$$\begin{cases} Y = bx + e, \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2. \end{cases}$$

请推导：当随机误差平方和 $Q = \sum_{i=1}^n e_i^2$ 取得最小值时，参数 b 的最小二乘估计。 $(e_i = y_i - bx_i)$

(ii) 令变量 $x = t - \bar{t}$, $y = w - \bar{w}$, 求 y 关于 x 的经验回归方程，并预测 2024 年移动物联网连接数。

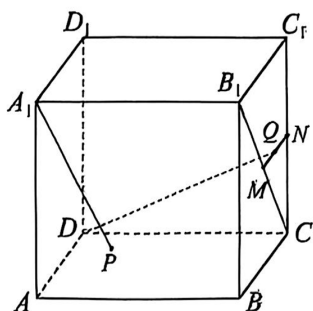
附：样本相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(w_i - \bar{w})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2}},$$

$$\sum_{i=1}^5 (w_i - \bar{w})^2 = 76.9, \quad \sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(w_i - \bar{w}) = 27.2, \quad \sum_{i=1}^5 w_i = 60.8, \quad \sqrt{76.9} \approx 27.7.$$

4 每日练习 4 (Due: 2025/1/14 22:00)

1. 在平面四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别为 AD, BC 的中点. 若 $AB = 2$, $CD = 3$, 且 $\vec{EF} \cdot \vec{AB} = 4$, 则 $|EF| =$
- A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{42}}{2}$ D. $\sqrt{5}$
2. 已知直线 m 与平面 α 所成的角为 θ_0 , 若直线 $n \subseteq \alpha$, 直线 $m \subseteq \beta$, 设 m 与 n 的夹角为 θ_1 , α 与 β 的夹角为 θ_2 , 则
- A. $\theta_1 \geq \theta_0, \theta_2 \geq \theta_0$ B. $\theta_1 \geq \theta_0, \theta_2 \leq \theta_0$ C. $\theta_1 \leq \theta_0, \theta_2 \geq \theta_0$ D. $\theta_1 \leq \theta_0, \theta_2 \leq \theta_0$
3. (多选) 已知 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 表面上的动点, M, N 分别是线段 B_1C 和 C_1C 的中点, 点 Q 满足 $\vec{MQ} = \lambda \vec{MN}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 且 $A_1P \perp DQ$, 设 P 的轨迹围成的图形为多边形 Ω , 则
- A. Ω 为平行四边形
- B. 存在 λ , 使得 Ω 的面积为 $\sqrt{22}$
- C. 存在 λ , 使得 Ω 和底面 $ABCD$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$
- D. 点 B 和 Ω 形成的多面体的体积不变



4. 已知实数 $a > 0$, i 是虚数单位. 设集合

$$A = \left\{ z \mid z = w + \frac{1}{w}, |w| > 1, w \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \right\},$$

集合 $B = \{ z \mid |z - 1 + i| = a, z \in \mathbb{C} \}$, 如果 $B \subseteq A$, 则 a 的取值范围为 _____.

5. 已知函数 $f(x) = e^{ax} \ln x$, 其中 $a > 0$.

- (1) 若 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线与两坐标轴所围成三角形的面积为 $\frac{e}{2}$, 求 a 的值.
- (2) 若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 证明: $f(x_0) < -e$.

5 每日练习 5 (Due: 2025/1/17 22:00)

1. 若 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 在区间 $[-\theta, \theta]$ 上是增函数, 则 $\tan \theta$ 的最大值是

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

2. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且

$$\frac{S_2}{2} = \frac{S_6}{6} = 2,$$

则 $a_{2025} =$

- A. $\frac{1}{2^{2024}}$ B. 2 C. 2025 D. 2^{2024}

3. (多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 若存在常数 T 与 H , 且 $T > 0$, 使得任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒有

$$f(x+T) = f(x) + H,$$

则称函数 $f(x)$ 是广义周期函数。下列说法正确的是:

- A. 一次函数 $f(x) = kx + b$ (k, b 为常数) 是广义周期函数
 B. 若 $f(x)$ 是广义周期函数, 则存在实数 k , 使得 $f(x) - kx$ 是周期函数
 C. 若 $f(x)$ 有两个不同的对称中心, 则 $f(x)$ 是广义周期函数
 D. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是广义周期函数, 则 $f(x) + g(x)$ 也是广义周期函数

4. 已知长为 2 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动, 则线段 AB 的中点的轨迹方程是 _____。

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 且 $c = 5$ 。

- (1) 若 $\frac{a}{4b} = \frac{\sin B}{\sin A}$, $C = \frac{\pi}{2}$, 求 a 的值;
 (2) 若 $ab = 20$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值。

6 每日练习 6 (Due: 2025/1/18 22:00)

1. 已知函数 $f(x) = \ln(e^{ax-6} + 1) - x$ 的图像关于直线 $x = 3$ 对称, 则 $f(x)$ 的值域为

- A. $[\ln 2 - 3, 0)$ B. $[\ln 2 - 3, +\infty)$ C. $[\ln 3 - 2, 0)$ D. $[\ln 3 - 2, +\infty)$

2. (多选) 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB$, E 为 CC_1 的中点, 则

- A. $A_1C_1 \parallel$ 平面 ABE B. $AC_1 \parallel$ 平面 BDE C. $BE \perp$ 平面 A_1B_1E D. $BE \perp$ 平面 B_1D_1E

3. 已知 $x^8 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_8(x-1)^8$, 则 a_2 的值为_____

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是公差为 6 的等差数列, 且 $\{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}\}$ 是公差为 9 的等差数列, 且 $a_1 = 1$.

(1) 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 设 b 是方程 $2x^3 + x - 2 = 0$ 的根, 数列 $\{b^{a_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $S_n < \frac{2}{3}$.

7 每日练习 7 (Due: 2025/1/19 22:00)

1. 记函数 $f(x) = \sin 2x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图像为曲线 C , 直线 $y = m$ 与曲线 C 交于两点 A, B , 直线 $y = 6m$ 与曲线 C 交于两点 C, D , 若 $|AB| = 2|DE|$, 则 $m =$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{16}$

2. (多选) 有一组成对样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 设 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, 通过这些数据可以得到新成对样本数据 $(x_1 - \bar{x}, y_1 - \bar{y}), (x_2 - \bar{x}, y_2 - \bar{y}), \dots, (x_n - \bar{x}, y_n - \bar{y})$, 接下来就这两个组数据分别先计算样本相关系数, 再根据最小二乘法计算经验回归直线, 最后计算残差平方和, 则

附: 回归直线的斜率和截距的最小二乘计算公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

$$\text{相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

- A. 两组数据的残差平方和相同 B. 两组数据的相关系数相同
C. 两组经验回归直线的斜率相同 D. 两组经验回归直线的截距相同

3. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且

$$\frac{1}{\tan A} + \frac{2}{\tan B} = \frac{3}{\tan C},$$

则 $\frac{c^2}{a^2 + 2b^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知 $\triangle DEF$ 的顶点 E 在 x 轴上, $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $|DF| = |EF|$, 且边 DE 的中点 M 在 y 轴上, 设 D 的轨迹为曲线 Γ .

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 若正三角形 ABC 的三个顶点都在 Γ 上, 且直线 AB 的倾斜角为 45° , 求 $|AB|$.