1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x\le 0,\\ -\ln x, & x>0\end{cases}$。若函数 $g(x)=f(x)-a$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是（ ）

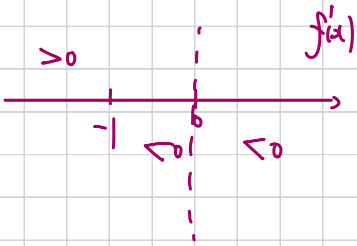
$=0$

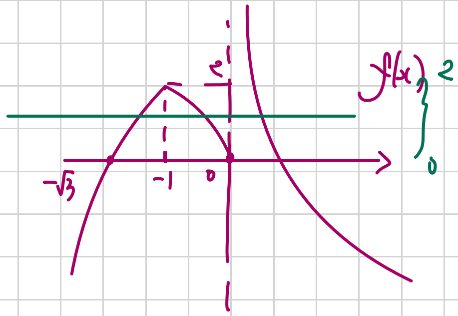
$\dfrac{f(x)=a}{0}$

A. [0,4]　　B. [0,2] ✓　　C. (-∞, 4]　　D. (-∞, 2]

B

$f'(x)=\begin{cases}3x^2-3, & x<0\\ -\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ $=3(x-1)(x+1)$ → 注意 $x=0$ 处 $f(x)$ 的定义（大学）





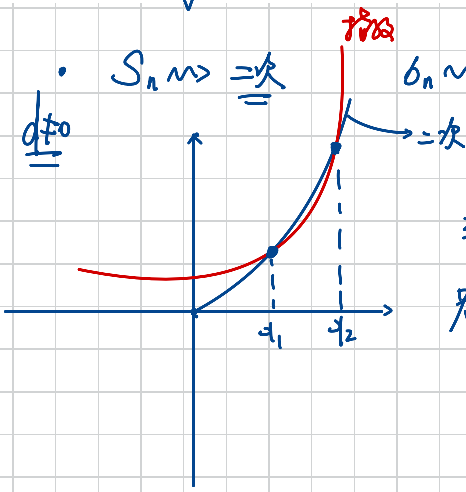
2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，则使得 $S_m=b_m$ 成立的正整数 m 的个数的最大值是（ ）

A. 1　　B. 2 ✓　　C. 3　　D. 4

B

- S_n ~> 二次　　b_n ~> 指数

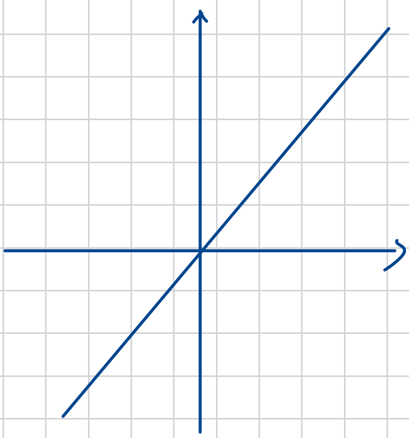
$d\ne0$



找两个交点

若 $x_1, x_2\in N^*$，则可取到

- $d=0$，S_n ~> 一次　同理 ✓



3. (多选) 已知圆 $O_1:(x-1)^2+y^2=4$，圆 $O_2:(x-5)^2+y^2=4m$，下列说法正确的是（ AC ）

A. 若 $m=4$，则圆 O_1 与圆 O_2 相交 ✓

B. 若 $m=4$，则圆 O_1 与圆 O_2 外离 ✗

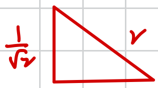
C. 若直线 $x-y=0$ 与圆 O_2 相交，则 $m>\frac{25}{8}$

D. 若直线 $x-y=0$ 与圆 O_1 相交于 M,N 两点，则 $|MN|=\frac{\sqrt{14}}{2}$ ✗ 2 ✗

$d=4$ $\quad R_1=2,\ R_2=2\sqrt{m}$

$d=\frac{5}{\sqrt{2}}<2\sqrt{m}\Rightarrow m>\frac{25}{8}$ ✓

$d=\frac{1}{\sqrt{2}}$



$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

A. 相交 $\Leftrightarrow$ $|2\sqrt{m}-2|<4<2(1+\sqrt{m})$ 即 $1<m<9$

$m>1$

$|m-2\sqrt{m}+1|<4$

$m-2\sqrt{m}-3<0$

$(\sqrt{m}-3)(\sqrt{m}+1)<0$

$\Rightarrow m<9$

$m+n=5$

4. 袋中有 6 个大小相同的球，其中 1 个红球，m 个白球，n 个黑球，现依次取球，每次取出一个，取出不放回，直到取出的球中有两种不同颜色的球时结束。已知取到 1 个红球，1 个白球的概率为 $\frac{1}{5}$，则 $m=$ 3，用 X 表示终止时取球的次数，则随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\frac{139}{60}$。

$P\{一红一白\}=\frac{1\cdot C_m^1}{C_6^2}=\frac{1}{5}=\frac{m}{\frac{6\times5}{2}}\Rightarrow m=3$ 即 $n=2$

$E(X)=\frac{2\times44+13\times3+3\times4}{60}=\frac{88+39+12}{60}=\frac{139}{60}$

次数

2: 红白、红黑、白黑

$\frac{3+2+3\times2}{C_6^2}=\frac{11}{15}=\frac{44}{60}$

白黑白: $\frac{C_3^2C_2^1A_2^2}{A_6^3}$

3: 白黑

$\frac{A_3^2A_2^1+A_2^2A_3^1}{A_6^3}=\frac{12+6}{6\times5\times4}=\frac{3}{20}$

$\frac{C_3^2C_2^1+C_2^2C_3^1}{C_6^3}$ ✗

必须 最后一次 异色

此种方法包含有 白黑白、黑白白 两种已经结束的情形

4: 白白白黑 / 红

$\frac{A_3^3A_2^1+A_3^3}{A_6^4}=\frac{3\times2\times1\times2+3\times2\times1}{6\times5\times4\times3}=\frac{3}{5\times4\times3}=\frac{1}{20}=\frac{3}{60}$

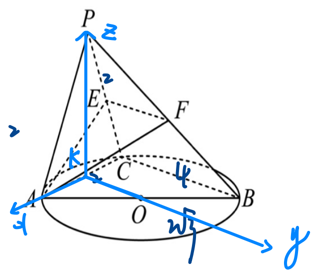
白红、黑红: $\frac{A_3^2+A_2^2}{A_6^3}=\frac{6+2}{6\times5\times4}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$

$\frac{1}{15}+\frac{3}{20}=\frac{13}{60}$

5. 如图，C 是以 AB 为直径的圆 O 上异于 A,B 的点，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$\triangle PAC$ 中，$PA=PC=AC=2$，$BC=4$，E,F 分别是 PC,PB 的中点：

(1) 证明：$BC\perp$ 平面 PAC；

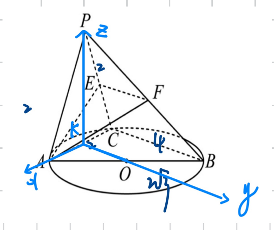
(2) 记平面 AEF 与平面 ABC 的交线为直线 l，点 Q 为直线上动点，求直线 PQ 与平面 AEF 所成的角的取值范围。



解：(1)

$$\left.\begin{array}{l} BC\perp AC \\ \text{平面}ABC\perp\text{平面}PAC \\ \text{平面}ABC\cap\text{平面}PAC=AC \\ BC\subset\text{平面}ABC \end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp\text{平面}PAC$$

(2) 如图，取 AC 中点 K，则 $OK\parallel BC\Rightarrow OK\perp$ 平面 PAC



又 $PA=PC\Rightarrow PK\perp AC\Rightarrow KA、KO、KP$ 两两垂直

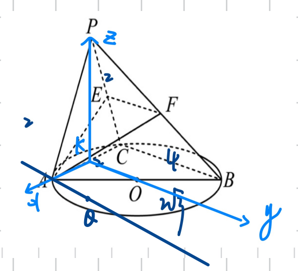
如图，以 K 为坐标原点，分别以 $KA、KO、KP$ 所在直线为 $x、y、z$ 轴，建立空间直角坐标系 $K-xyz$ 书写规范！

又 $EF\parallel BC$，$BC\subset$ 平面 ABC，$EF\not\subset$ 平面 $ABC\Rightarrow EF\parallel$ 平面 ABC

$EF\subset$ 平面 AEF，平面 $AEF\cap$ 平面 $ABC=l\Rightarrow EF\parallel l\parallel BC\parallel y$ 轴　又 $A\in l$

$\Rightarrow x_Q=x_A$　而 Q 在平面 xOy 中 $\Rightarrow z_Q=0$

设 $Q(1,y,0)$　　$A(1,0,0)$



$P(0,0,\sqrt{3})$　$E\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　$F\left(-\frac{1}{2},2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{PQ}=(1,y,-\sqrt{3})$　$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　$\overrightarrow{EF}=(0,2,0)$

设平面 ACF 的一个法向量为 $\vec{n}=(l,p,t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ -\sqrt{3}l+t=0 \end{cases} \quad 取 \vec{n}=(1,0,\sqrt{3})$$

设直线 PQ 与平面 ACF 所成角为 θ

$$\Rightarrow \sin\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{PQ}\rangle\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{PQ}|}=\frac{2}{\sqrt{4+y^2}\cdot 2}$$

$$\leq \frac{1}{2} \quad (y=0 取“=”)$$

$$\Rightarrow \theta\in(0,30^\circ]$$