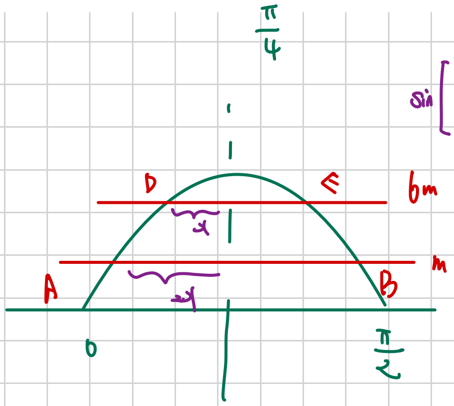
1. 记函数 $f(x)=\sin 2x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的图像为曲线 C，直线 $y=m$ 与曲线 C 交于两点 A,B，直线 $y=6m$ 与曲线 C 交于两点 C,D，若 $|AB|=2|DE|$，则 $m=$

C

$6m<1$

A. $\frac{1}{2}$ D, E   B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ √   D. $\frac{1}{16}$



$\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=6\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right]=\cos 2x=6m>0$ $\Rightarrow 6m=\frac{3}{4}\Rightarrow m=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow \cos 2x=6\cos 4x=6\left[2\cos^2 2x-1\right]$

$\Rightarrow 12t^2-t-6=0$ $t=-\frac{2}{3}$ 或 $t=\frac{3}{4}$

+3   +2   X

+4   −3

2. (多选) 有一组成对样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$，设 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$，通过这些数据可以得到新成对样本数据 $(x_1-\bar{x},y_1-\bar{y}),(x_2-\bar{x},y_2-\bar{y}),\ldots,(x_n-\bar{x},y_n-\bar{y})$，接下来就这两个组数据分别先计算样本相关系数，再根据最小二乘法计算经验回归直线，最后计算残差平方和，则

$x_i'-\bar{x}'=0$ 即 $\hat{b}=\hat{b}'$ 不变

$\hat{a}'=0-\hat{b}'0=0$

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘计算公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\quad \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

从 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}+e$

$(\hat{y}-\bar{y})=\hat{b}'(x-\bar{x})+e \rightsquigarrow \hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}+e$

$\Rightarrow e$ 不变 $\hat{a}$ 不同

相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$.

A. 两组数据的残差平方和相同 √   B. 两组数据的相关系数相同 √

C. 两组经验回归直线的斜率相同 √   D. 两组经验回归直线的截距相同 ✗

ABC

3. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且

$$\frac{1}{\tan A}+\frac{2}{\tan B}=\frac{3}{\tan C},$$

即 $3c^2+a^2-b^2=3a^2+3b^2-3c^2$

$\Rightarrow 2a^2+4b^2-6c^2=0$

$\Rightarrow a^2+2b^2=3c^2$

则 $\dfrac{c^2}{a^2+2b^2}=$ $\frac{1}{3}$.

$b^2+c^2-a^2+2a^2+2c^2-2b^2=3a^2+3b^2-3c^2$

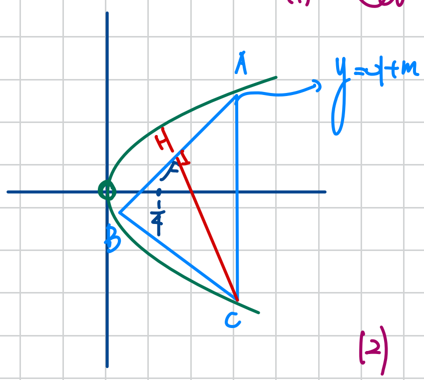
$\frac{1}{\tan A}:\frac{1}{\tan B}:\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{a}:\frac{\cos B}{b}:\frac{\cos C}{c}$

$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}:\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}:\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$

4. 已知 $\triangle DEF$ 的顶点 E 在 x 轴上，$F\left(\frac{1}{4},0\right)$，$|DF|=|EF|$，且边 DE 的中点 M 在 y 轴上，设 D 的轨迹为曲线 Γ.

(1) 求 Γ 的方程；

(2) 若正三角形 ABC 的三个顶点都在 Γ 上，且直线 AB 的倾斜角为 45°，求 $|AB|$.



(1) Let $D(x,y)$ 则 $E(-x,0)$

$\leadsto (x-\frac{1}{4})^2+y^2=(x+\frac{1}{4})^2$

$\Rightarrow y^2=x \quad (x\neq 0)$ → 否则 $\triangle DEF$ 不成立

(2) 设 $A(y_1^2,y_1)$，$B(y_2^2,y_2)$

$k_{AB}=\frac{1}{y_1+y_2}=1 \Rightarrow y_1+y_2=1$

$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}}\,|y_1-y_2|=\sqrt{2}|y_1-y_2|$ 令 $y_1-y_2=t>0$

$y_1^2+y_2^2=[(y_1+y_2)^2+(y_1-y_2)^2]\frac{1}{2}=\frac{1+t^2}{2}$

$H\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ $\quad \vec{HA}=\left(\frac{y_1^2-y_2^2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right)=\left(\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)$

用复数改写 $\vec{HA}\to\vec{HC}$ 相当于乘以 $\sqrt{3}[\cos(-90^\circ)+\sin(-90^\circ)i]$，模长变为 $\sqrt{3}$ 倍

$\Rightarrow \vec{HC} \leadsto \sqrt{3}\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}i\right)\cdot(-i)=\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}t}{2}i$

即 $\vec{HC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t,-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ 即 $C\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$\Rightarrow \frac{y_1^2+y_2^2}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{3}{4}t^2$

$\Rightarrow y_1^2+y_2^2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t^2-2\sqrt{3}t=\frac{1+t^2}{2}$

$\Rightarrow t^2-2\sqrt{3}t=0 \Rightarrow t=2\sqrt{3}$

从而 $|AB|=2\sqrt{6}$

抓住几何！

本质上为旋转变换 但高考不常用.