1. 设 $a>0$，函数 $y=\sin x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最小值为 s_a，在 $[2a,3a]$ 上的最小值为 t_a。当 a 变化时，以下不可能的情形是

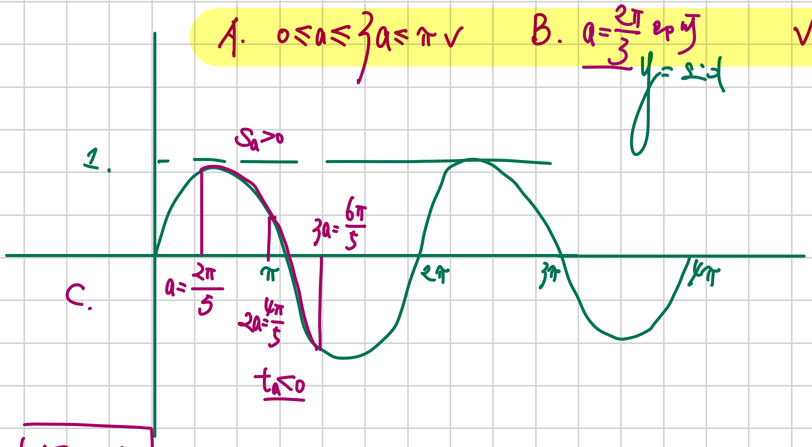
A. $s_a>0$ 且 $t_a>0$ B. $s_a<0$ 且 $t_a<0$ C. $s_a>0$ 且 $t_a<0$ D. $s_a<0$ 且 $t_a>0$

D

证明

A. $0\le a\le 3a\le\pi$ ✓ B. $a=\frac{2\pi}{3}$ 即可 ✓

$y=\sin x$



反证法

D.

$s_a<0$ 但 $t_a>0$ ⇝ $\sin x$ 在 $[2a,3a]$ 上恒正 $(\sin x)_{min}>0$

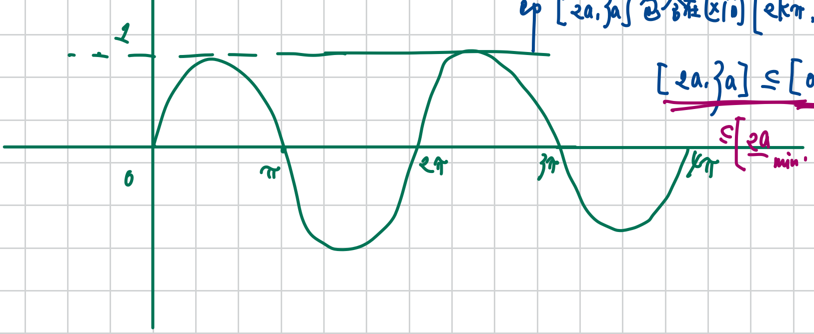
即 $[2a,3a]$ 包含在区间 $[2k\pi,\ \pi+2k\pi]$ 中 $\Rightarrow 0<a\le\pi$

$[2a,3a]\subseteq[0,3\pi]\Rightarrow[2a,3a]\subseteq[0,\pi]$ ⇝ $[a,2a]$ 恒正 ×

$\subseteq[2a_{min},3a_{max}]$ 或 $[2a,3a]\subseteq[2\pi,3\pi]$ ⇝ $2\pi\le 2a\le 3a\le 3\pi$

$\Rightarrow a=\pi$

[显然 $[2\pi,3\pi]$ 上 $\sin$ min=0 $s>0$ 矛盾!

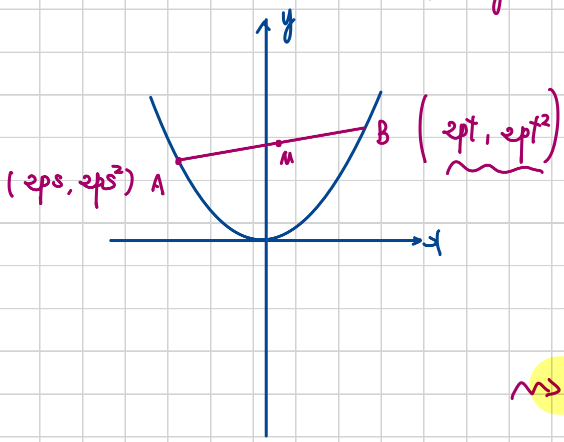


2. 已知抛物线 $x^2=2py\,(p>0)$ 上两点 A,B 满足 $|AB|=12$，若线段 AB 的中点 M 的纵坐标的最小值为 4，则 $p=$

A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

B

$x^2=2py$



$|AB|=2p\sqrt{(t-s)^2+(t^2-s^2)^2}=12$

$y_M=2p\cdot\frac{t^2+s^2}{2}=p(t^2+s^2)\ge 6-\frac{p}{2}=4$

$\boxed{p=4}<6$

⇝ 设 $(t-s)^2+(t^2-s^2)^2=\left(\frac{6}{p}\right)^2$ $\Rightarrow\begin{cases}t-s=\frac{6}{p}\cos\theta\\ \frac{6}{p}\cos\theta\cdot(t+s)=\frac{6}{p}\sin\theta\end{cases}$

求 t^2+s^2 最小值.

$\Rightarrow\begin{cases}t-s=\frac{6}{p}\cos\theta\\ t+s=\tan\theta\end{cases}$

$t^2+s^2=\frac{1}{2}\left[\frac{36}{p^2}\cos^2\theta+\tan^2\theta\right]$

$\frac{36}{p^2}\cos^2\theta+\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\frac{36}{p^2}\cos^2\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}-1\ge 2\cdot\frac{6}{p}-1$

$\ge\frac{6}{p}-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow t=\frac{1}{2}\left[\frac{6}{p}\cos\theta+\tan\theta\right]$

$s=\frac{1}{2}\left[\tan\theta-\frac{6}{p}\cos\theta\right]$

隐含 $p<6$

$\left(\cos^2\theta=\frac{p}{6}>0\right)$

⇝ $\cos\theta=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{6}}$ 可.

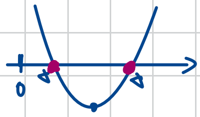
3. (多选) 若函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\ (a\neq 0)$ 既有极大值也有极小值，则 BCD

A. $bc>0$　　B. $ab>0$　　C. $b^2+8ac>0$　　D. $ac<0$

$\Delta>0$

$$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}=\frac{ax^2-bx-2c}{x^3}\quad ax^2-bx-2c\triangleq g(x)$$

$\Delta=b^2+8ac>0$



$g(0)=-2c>0\ (a>0) \rightsquigarrow ac<0$

$-2c<0\ (a<0)$

① $\begin{cases}\Delta>0\\ \text{对称轴}>0\\ g(0)>0\end{cases}$　② $\begin{cases}g_{min}<0\\ \ \\ \ \end{cases}$

$-\frac{-b}{2a}=\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow ab>0$

$$g(x)_{min}=\frac{-8ac-b^2}{4a}<0\qquad -8ac-b^2=-\Delta$$

4. 现有 7 张卡片，分别写上数字 1,2,2,3,4,5,6。从这 7 张卡片中随机抽取 3 张，记所抽取卡片上数字的最小值为 ξ，则 $P(\xi=2)=$ $\frac{16}{35}$，$E(\xi)=$ $\frac{12}{7}$。

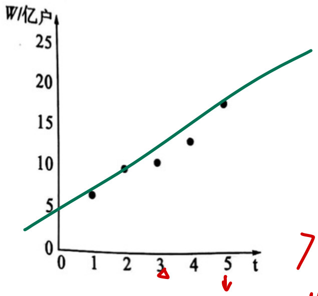
1张2 + 2张2

$$P(\xi=2)=\frac{C_2^1\cdot C_4^2+C_4^1}{C_7^3}=\frac{2\times\frac{12}{2}+4}{\frac{7\times6\times5}{3\times2}}=\frac{16}{35}$$

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{C_6^2=15}{35}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{C_3^2=3}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(\xi)=\frac{15+32+9+4}{35}=\frac{60}{35}=\frac{12}{7}$$

5. 移动物联网广泛应用于生产制造、公共服务、个人消费等领域。截至 2022 年底，我国移动物联网连接数达 18.45 亿，成为全球主要经济体中首个实现“物超人”的国家。下图是 2018–2022 年移动物联网连接数 w 与年份代码 t 的散点图，其中年份 2018–2022 对应的 t 分别为 1–5。



7

2022　2024 具有

$$r = \frac{27.2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{76.9}} = \frac{27.2}{27.7} \approx 0.982 \to 1$$

(1) 根据散点图判断两个变量是否具有线性相关性，计算样本相关系数（精确到 0.01），并判断它们的相关性强度；

强

(2) (i) 假设变量 x 与变量 Y 的 n 对观测数据为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$，两个变量满足一元线性回归模型：

$$\begin{cases} Y = bx + e, \\ E(e) = 0,\ D(e) = \sigma^2. \end{cases}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2 - 2y_i x_i b + x_i^2 b^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) b^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} 2x_i y_i\right) b + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

请推导：当随机误差平方和 $Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$ 取得最小值时，参数 b 的最小二乘估计。$(e_i = y_i - bx_i)$

(ii) 令变量 $x = t - \bar{t}$, $y = w - \bar{w}$，求 y 关于 x 的经验回归方程，并预测 2024 年移动物联网连接数。

$$Q_{min} \rightsquigarrow b = -\frac{-\sum_{i=1}^{n} 2x_i y_i}{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

附：样本相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})(w_i - \bar{w})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(w_i - \bar{w})^2}},$$

$$\bar{w} = \frac{60.8}{5} = 12.16$$

$$\sum_{i=1}^{5}(w_i - \bar{w})^2 = 76.9,\quad \sum_{i=1}^{5}(t_i - \bar{t})(w_i - \bar{w}) = 27.2,\quad \sum_{i=1}^{5} w_i = 60.8,\quad \sqrt{769} \approx 27.7.$$

$$\sum_{i=1}^{5}(t_i - \bar{t})^2 = 2\times(4+1) = 10$$

由 $\bar{x} = \bar{t} - \bar{t} = 0$, $\bar{y} = \bar{w} - \bar{w} = 0$

$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ 在回归直线上.

☆ y 关于 x 的线性回归模型与(i)吻合.

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t - \bar{t})(w - \bar{w})}{\sum_{i=1}^{n}(t - \bar{t})^2} = \frac{27.2}{10} = 2.72$$

从而 $\hat{y} = 2.72x \rightsquigarrow \hat{w} - \bar{w} = 2.72(t - \bar{t})$

令 $t - \bar{t} = 4$, $\bar{w} = 12.16$

$\Rightarrow \hat{w} = 2.72\times 4 + 12.16 = 23.04$