

5 每日练习 5 (Due: 2025/1/17 22:00)

1. 若 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 在区间 $[-\theta, \theta]$ 上是增函数, 则 $\tan \theta$ 的最大值是

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

\checkmark (A) $2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \uparrow$
 $\downarrow \frac{\pi}{3}$
 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}]$

C. 1 $\tan \frac{\pi}{6}$

D. $\sqrt{3}$

2. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且

$$\frac{S_2}{2} = \frac{S_6}{6} = 2,$$

则 $a_{2025} =$

A. $\frac{1}{2^{2024}}$

B. 2

$\Rightarrow q^4 + q^2 + 1 = 3$

C. 2025

D. 2^{2024}

$\cdot q=1, a_{2025}=a_1=a_2=\frac{S_2}{2}=2$

$\cdot q=-1, a_{2025}=(-1)^{2024} a_1=a_1$

$a_1+a_2=S_2=a_1-a_1=0 \neq 4$

B $\Rightarrow q^4 + q^2 = 2 \Rightarrow (q^2+2)(q^2-1)=0 \Rightarrow q^2=1 \Rightarrow q=1$

3. (多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 若存在常数 T 与 H , 且 $T > 0$, 使得任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒有

$$f(x+T) = f(x) + H,$$

ABC

则称函数 $f(x)$ 是广义周期函数。下列说法正确的是:

A. 一次函数 $f(x) = kx + b$ (k, b 为常数) 是广义周期函数

$f(x+T) = f(x) + \frac{H}{k} \checkmark$

B. 若 $f(x)$ 是广义周期函数, 则存在实数 k , 使得 $f(x) - kx$ 是周期函数

$f(x+T) - k(x+T) = f(x) - kx$

C. 若 $f(x)$ 有两个不同的对称中心, 则 $f(x)$ 是广义周期函数

$\Rightarrow f(x+T) = f(x) + kT$
Let $k = \frac{H}{T} \checkmark$

D. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是广义周期函数, 则 $f(x) + g(x)$ 也是广义周期函数

4. 已知长为 2 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动, 则线段 AB 的中点的轨迹方程是 _____

$x^2 + y^2 = 1$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 且 $c = 5$ 。

(1) 若 $\frac{a}{4b} = \frac{\sin B}{\sin A}$, $C = \frac{\pi}{2}$, 求 a 的值;

(2) 若 $ab = 20$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值。

(1) $\begin{cases} a^2 = 4b^2 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow b^2 = 5 \quad a^2 = 20 \quad a = 2\sqrt{5}$

(2) $25 = a^2 + b^2 - 40 \cos C \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C = 10 \sin C = \frac{5}{4} \sqrt{5}$

$\geq 2ab - 40 \cos C$

$= 40(1 - \cos C) \Rightarrow \cos C \geq \frac{3}{8} \quad \sin C \leq \frac{\sqrt{55}}{8}$

3. (多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 若存在常数 T 与 H , 且 $T > 0$, 使得任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒有

$$f(x+T) = f(x) + H,$$

则称函数 $f(x)$ 是广义周期函数。下列说法正确的是:

A. 一次函数 $f(x) = kx + b$ (k, b 为常数) 是广义周期函数

$$f(x+T) = f(x) + \frac{H}{T} \quad \checkmark$$

B. 若 $f(x)$ 是广义周期函数, 则存在实数 k , 使得 $f(x) - kx$ 是周期函数

$$f(x+T) - k(x+T) = f(x) - kx$$

C. 若 $f(x)$ 有两个不同的对称中心, 则 $f(x)$ 是广义周期函数 \checkmark

$$\leadsto f(x+T) = f(x) + kT$$

$$\text{let } k = \frac{H}{T} \quad \checkmark$$

D. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是广义周期函数, 则 $f(x) + g(x)$ 也是广义周期函数 \times

C. $f(x)$ 有两个对称中心 $(a, b), (c, d)$ (不妨设 $c > a$)

$$\text{则 } f(2a+x) + f(-x) = 2b$$

$$\Rightarrow f(2a+x) - f(2c+x) = 2b - 2d$$

$$f(2c+x) + f(-x) = 2d$$

$$\Rightarrow f(x) - f\left(\underbrace{2c-2a+x}_{T}\right) = \underbrace{2b-2d}_{H} \quad \checkmark$$

D.

$$\text{1. B} \quad f(x) \text{ 周期} \Leftrightarrow f(x) - kx \text{ 周期} \quad (\Leftrightarrow \text{命题})$$

$$\text{2. } f(x) - k_1 x \text{ 周期}, g(x) - k_2 x \text{ 周期} \leadsto \text{周期函数之和为周期函数}$$

$$\text{let } f(x) = \sin x + k_1 x, g(x) = \sin \pi x + k_2 x \quad \text{例如}$$