2025 年合肥市高三第一次教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.C　2.A　3.C　4.A　5.D　6.B　7.C　8.B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9.AB　10.ABD　11.AC

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. -80　13. $\frac{5}{18}$　14. $2\sqrt{2}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

【解析】

（1）因为 $a+b=2c\cos B$，

所以 $\sin A+\sin B=2\sin C\cos B$，即

$\sin(B+C)+\sin B=2\sin C\cos B$，即 $\sin B=\sin(C-B)$

所以 $C-B=B$，或 $C-B+B=\pi$（舍去）

所以 $C=2B$. ……………………………………6 分

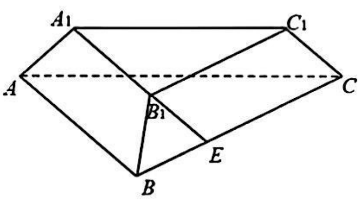
（2）由（1）知 $C=2B$，$A=\pi-3B$，

所以 $0<2B<\frac{\pi}{2}$，$0<\pi-3B<\frac{\pi}{2}$，故 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，

则 $\frac{c}{b\sin B}=\frac{\sin C}{\sin^2 B}=\frac{\sin 2B}{\sin^2 B}=\frac{2}{\tan B}\in\left(2,2\sqrt{3}\right)$. ……………………………………13 分

注：其他解法酌情给分.

16.（15 分）



【解析】（1）如图所示，过点 B_1 作 $B_1E\,/\!/\,CC_1$，交 BC 于点 E，在正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 B_1ECC_1 为平行四边形.

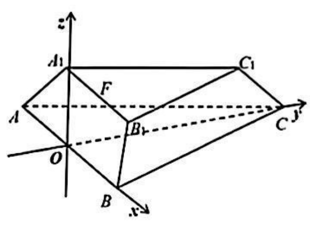
因为 $B_1E=\sqrt{2}$，$EC=4$，所以 $BE=2$.

又 $BB_1=\sqrt{2}$，所以 $B_1E^2+BB_1^2=BE^2$，即 $B_1E\perp BB_1$.

故 $CC_1\perp BB_1$，同理可得 $CC_1\perp AA_1$.

又直线 AA_1 与 BB_1 相交，所以 $CC_1\perp$ 平面 AA_1B_1B. ……………………………………6 分

（2）以 AB 的中点 O 为原点，OB，OC 所在直线分别为 x 轴，y 轴，过点 O 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系．取线段 A_1B_1 中点 F，因为 $A(-3,0,0)$，$B(3,0,0)$，$C(0,3\sqrt{3},0)$．所以 $\overrightarrow{AB}=(6,0,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,3\sqrt{3},0)$.



由条件可知 $F\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，则 $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FB_1}=\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

设平面 AA_1B_1B 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}6x=0\\ -x+\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{2\sqrt{6}}{3}z=0\end{cases}$，取 $z=1$，则 $y=-2\sqrt{2}$，

故$\overrightarrow{n_1}=(0,-2\sqrt{2},1)$.

设平面BB_1C_1C的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(m,n,t)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-3m+3\sqrt{3}n=0\\ -m+\dfrac{\sqrt{3}}{3}n+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}t=0\end{cases}$，取$m=\sqrt{3}$，则$n=1$，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故$\overrightarrow{n_2}=\left(\sqrt{3},1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

所以$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{-2\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{8+1}\cdot\sqrt{3+1+\dfrac{1}{2}}}=-\dfrac{1}{3}$.

所以平面AA_1B_1B与平面BB_1C_1C夹角的余弦值为$\dfrac{1}{3}$. ……………………………………15 分

注：其他解法酌情给分.

17.（15 分）

【解析】

（1）函数$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，且$a>0$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{-ax^2+x-a}{x^2}$，令$g(x)=-ax^2+x-a$，

当$1-4a^2\le 0$，即$a\ge\dfrac{1}{2}$时，$g(x)\le 0$恒成立，则$f'(x)\le 0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上是单调递减;

当$1-4a^2>0$，即$0<a<\dfrac{1}{2}$时，函数$g(x)$有两个零点：$x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，

当x变化时，$f(x)$，$f'(x)$的变化情况如下表所示：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	$f(x_1)$	单调递增	$f(x_2)$	单调递减

所以，当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$在$\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a},\dfrac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$内单调递增，在$\left(0,\dfrac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$和$\left(\dfrac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a},+\infty\right)$上单调递减;

当$a\ge\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. ……………………………………7 分

（2）由（1）知，当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$有两个极值点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，

则x_1，x_2是方程$g(x)=0$的两个根，由韦达定理，得$x_1x_2=1,x_1+x_2=\dfrac{1}{a}$.

所以$0<x_1<1<x_2$，

$f(x_1)+f(x_2)+f(x_1+x_2)=f(x_1)+f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)+f\left(\dfrac{1}{a}\right)=f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

$=\ln\frac{1}{a}-a\left(\frac{1}{a}-a\right)=-\ln a-1+a^2$.

令 $h(x)=-\ln x-1+x^2$，$0<x<\frac{1}{2}$，

则 $h'(x)=-\frac{1}{x}+2x=\frac{2x^2-1}{x}$，当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上是单调递减，

从而 $h(x)>h\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{3}{4}$，

故 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_1+x_2)>\ln 2-\frac{3}{4}$. ……………………………………15 分

注：其他解法酌情给分.

18.（17 分）

【解析】（1）设圆 C_1，C_2 的交点为 M，则 $|MC_1|=r_1$，$|MC_2|=r_2$，

因为 $|r_1-r_2|=2\sqrt{3}$，所以 $\left||MC_1|-|MC_2|\right|=2\sqrt{3}<|C_1C_2|=4$，故点 M 的轨迹（曲线 T）是以 C_1，C_2 为焦点的双曲线，从而 $2a=2\sqrt{3},a^2+b^2=4$，即 $a=\sqrt{3},b=1$，

故曲线 T 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. ……………………………………4 分

（2）（i）要证 $|P_1Q_1|=|P_2Q_2|$，只要证线段 P_1P_2 的中点与线段 Q_1Q_2 的中点重合.

设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，其中 $x_1<0<x_2$，

由条件，直线 l 的斜率存在，设 l 的方程为 $y=kx+m$.

因为直线 l 与圆 $x^2+y^2=3$ 相切，所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$，即 $m^2=3(1+k^2)$.

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1\end{cases}$，消去 y 并整理得 $(3k^2-1)x^2+6kmx+(3m^2+3)=0$，

所以 $\begin{cases}3k^2-1\neq 0\\ \Delta=36m^2k^2-4(3k^2-1)(3m^2+3)=12(m^2-3k^2+1)=48>0\\ x_1+x_2=-\frac{6mk}{3k^2-1}\\ x_1x_2=\frac{3m^2+3}{3k^2-1}<0\end{cases}$，

从而线段 P_1P_2 的中点横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3km}{1-3k^2}$.

又直线 $y=kx+m$ 与直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 交点的横坐标分别为 $-\frac{\sqrt{3}m}{1+\sqrt{3}k}$ 和 $\frac{\sqrt{3}m}{1-\sqrt{3}k}$，则线段 Q_1Q_2 中点的横坐标为 $\frac{-\frac{\sqrt{3}m}{1+\sqrt{3}k}+\frac{\sqrt{3}m}{1-\sqrt{3}k}}{2}=\frac{3km}{1-3k^2}$，

所以 $|P_1Q_1|=|P_2Q_2|$. ……………………………………10 分

(ii)由条件 $x_1<0<x_2$，$x_1x_2=\frac{3m^2+3}{3k^2-1}<0$，即 $3k^2-1<0$，

所以$x_2-x_1=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{12(m^2-3k^2+1)}}{|3k^2-1|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{1-3k^2}$，

由题意知，$A\left(-\sqrt{3},0\right)$，$B\left(\sqrt{3},0\right)$.

所以$k_1\cdot k_2=\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-\sqrt{3}}=\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{\left(x_1+\sqrt{3}\right)\left(x_2-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2+\sqrt{3}(x_2-x_1)-3}$

$$=\frac{\dfrac{k^2\left(3m^2+3\right)}{3k^2-1}-\dfrac{6m^2k^2}{3k^2-1}+m^2}{\dfrac{3m^2+3}{3k^2-1}+\dfrac{12}{1-3k^2}-3}=\frac{3m^2k^2+3k^2-6m^2k^2+3m^2k^2-m^2}{3m^2+3-12-9k^2+3}$$

$$=\frac{3k^2-m^2}{3m^2-6-9k^2}=\frac{-3}{3}=-1,$$

即k_1k_2为定值-1. ……………………………………17 分

注：其他解法酌情给分.

19.（17 分）

【解析】（1）6 的所有3 部划分为：$(4,1,1),(3,2,1),(2,2,2)$；5 的所有 2 部划分为：$(4,1),(3,2)$.

所以$p_3(6)=3,p_2(5)=2$. ……………………………………4 分

（2）设$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$是$n$的一个$k$部划分.分两种情形讨论.

①若$\lambda_k=1$，则$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{k-1})$为$n-1$的一个$k-1$部划分.故满足$\lambda_k=1$的$n$的所有$k$部划分有$p_{k-1}(n-1)$.

②若$\lambda_k>1$，则$(\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots,\lambda_k-1)$为$n-k$的一个$k$部划分.故满足$\lambda_k>1$的$n$的所有$k$部划分有$p_k(n-k)$个.

综上可知，$p_k(n)=p_{k-1}(n-1)+p_k(n-k)$. ……………………………………10 分

（3）由（2）可知，

$$p_k(n)=p_{k-1}(n-1)+p_k(n-k)$$
$$p_{k-1}(n-1)=p_{k-2}(n-2)+p_{k-1}(n-k)$$
$$\cdots\cdots$$
$$p_2(n-k+2)=p_1(n-k+1)+p_2(n-k)$$

上述各式左右对应相加可得

$$p_k(n)=p_k(n-k)+p_{k-1}(n-k)+\cdots+p_2(n-k)+p_1(n-k+1)$$

又因为$p_1(n-k+1)=p_1(n-k)=1$，

所以$p_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(n-k)$. ……………………………………17 分

注：其他解法酌情给分.