目录

1 概率统计 回归教材训练 1

1. 四名同学各抛骰子 5 次，分别记录每次骰子出现的点数。根据四名同学的统计结果，可以判断出一定没有出现点数 6 的是

A. 平均数为 3，中位数为 2　　B. 中位数为 3，众数为 2

C. 平均数为 2，方差为 2.4　　D. 中位数为 3，方差为 2.8

2. 已知总体划分为 3 层，通过分层随机抽样，各层抽取的样本、样本均值和样本方差分别为：$l, \bar{x}, s_1^2; m, \bar{y}, s_2^2; n, \bar{z}, s_3^2$，记总体的样本均值为 $\bar{w}$，样本方差为 s^2，证明：

$$\bar{w} = \frac{l}{l+m+n}\bar{x} + \frac{m}{l+m+n}\bar{y} + \frac{n}{l+m+n}\bar{z},$$

$$s^2 = \frac{1}{l+m+n}\left\{l[s_1^2 + (\bar{x}-\bar{w})^2] + m[s_2^2 + (\bar{y}-\bar{w})^2] + n[s_3^2 + (\bar{z}-\bar{w})^2]\right\}.$$

3. 在对树人中学高一年级学生身高的调查中，采用样本量比例分配的分层随机抽样。如果不知道样本数值，只知道抽取了男生 25 人，均值和方差分别为 170 和 10，抽取了女生 25 人，均值和方差分别为 160 和 40。你能由这些数据计算出总样本的方差，并对高一年级全体学生的身高方差作出估计吗？

4. 从两名男生（记为 B_1 和 B_2）、两名女生（记为 G_1 和 G_2）中抽取两人。

(1) 分别计算有放回简单随机抽样、不放回简单随机抽样和按性别等比例分层随机抽样下，抽到的两人都是男生的概率；

(2) 比较这三种抽样方式在避免极端样本（例如全是男生的样本）上的优劣。

5. 从 1～20 这 20 个整数中随机选择一个数，设事件 A 表示选到的数能被 2 整除，事件 B 表示选到的数能被 3 整除。求下列事件的概率：

(1) 这个数既能被 2 整除也能被 3 整除；

(2) 这个数能被 2 整除或能被 3 整除；

(3) 这个数既不能被 2 整除也不能被 3 整除。

6. 互为对立的两个事件是非常特殊的一种事件关系。请分别证明如果事件 A 与事件 B 相互独立，那么 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 是独立的。

7. 一个均匀的正八面体，八个面分别标以数字 1 到 8，任意拨捏一次这个正八面体，观察它与地面接触的面上的数字，得到样本空间为 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$。构造适当的事件 A,B,C，使得 $P(A)P(B)P(C) = P(ABC)$ 成立，但不满足 A,B,C 三个事件是**两两独立**的。

8. “用事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 估计概率 $P(A)$，重复试验次数 n 越大，估计的就越精确”，判断这种说法是否正确，并举例说明。

9. 有两个盒子，其中 1 号盒子中有 95 个红球，5 个白球；2 号盒子中有 5 个红球，95 个白球。现从两个盒子中任意选择一个，再从中任意摸出一个球。如果摸到的是红球，你认为选择的是哪个盒子？做出你的推断，你的推断犯错误的概率是多少？

10. (1) 4 名同学分别报名参加学校的足球队、篮球队、乒乓球队，每人限报其中的一个运动队，不同报法的种数是 3^4 还是 4^3？

(2) 3 个班分别从 5 个景点中选择一处游览，不同选择的种数是 3^5 还是 5^3？

11. 在国庆长假期间，要从 7 人中选择若干人在 7 天假期值班（每天只需 1 人值班），不出现同一人连续值班 2 天，有多少种可能的安排方法？

12. 2160 有多少个不同的正因数？这些正因数的和是多少？

13. 用 $0 \sim 9$ 这 10 个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

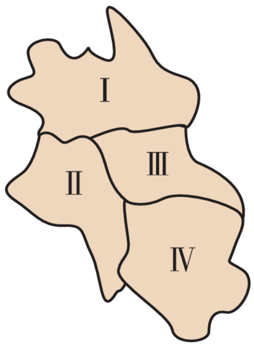
14. 求证：

(1) $1+\sum_{k=1}^{n} k \cdot A_{k}^{k}=A_{k+1}^{k+1}$;

(2) $\dfrac{(n+1)!}{k!}-\dfrac{n!}{(k-1)!}=\dfrac{(n-k+1) \cdot n!}{k!} \quad (k \leq n)$.

15. 证明等式 $C_{n}^{k} \cdot C_{n-k}^{m-k}=C_{m}^{k} \cdot C_{n}^{m}$ 并构造一个实际背景，说明这个等式的意义。

16. 如图，现要用 5 种不同的颜色对某市的 4 个区县地图进行着色，要要求有公共边的两个地区不能用同一种颜色，共有几种不同的着色方法？



17. (1) 平面内有两组平行线，一组有 m 条，另一组有 n 条，这两组平行线相交，可以构成多少个平行四边形？

(2) 空间有三组平行平面，第一组有 m 个，第二组有 n 个，第三组有 l 个，不同两组的平面都相交，且交线不都平行，可以构成多少个平行六面体？

18. 证明：

(1) $(n+1)^{n}-1$ 能被 n^{2} 整除；

(2) $99^{10}-1$ 能被 1000 整除；

(3) 55^{55} 除以 8 所得的余数是 7。

19. 求证：

$$2^n - C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \times 2 + (-1)^n = 1.$$

20. (1) 求 $\left(9x + \dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式的常数项；

(2) 已知 $(1+\sqrt{x})^n$ 的展开式中第 9 项、第 10 项、第 11 项的二项式系数构成等差数列，求 n；

(3) 求 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数；

(4) 求 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数。

21. 在 $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 的展开式中，含 x^2 项的系数是多少？

2 概率统计 回归教材训练 2

1. 证明：当 $P(AB) > 0$ 时，$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$。进一步，你能归纳出 $P(A_1A_2\cdots A_n)$ 的公式吗？

2. 已知 3 张奖券中只有 1 张有奖，甲、乙、丙 3 名同学依次不放回地各随机抽取 1 张。

   (1) 他们中奖的概率与抽奖的顺序有关吗？

   (2) 推广到 n 张奖券和 n 名同学，请你验证 (1) 的结论是否仍然成立。

3. 已知 $P(A) > 0, P(B) > 0, P(B|A) = P(B)$ 等价于 $P(A|B) = P(A)$. 其中一式成立的情况下，还有 $P(B|\overline{A}) = P(B), P(A|\overline{B}) = P(A)$. $\rightsquigarrow$ 概率统计回归教材训练 1 Ex.6

4. 在 A、B、C 三个地区暴发了流感，这三个地区分别有 6%、5%、4% 的人患了流感。假设这三个地区的人数的比例为 5:7:8，现从这三个地区中任意选取一个人。

   (1) 求这个人患流感的概率；

   (2) 如果此人患流感，求此人选自 A 地区的概率。

5. 甲、乙、丙三人相互做乒乓球训练，第 1 次由甲将乒乓球传出，每次传球时，传球者都可能地将球传给两人中的任何一人。求 n 次乒乓球在甲手中的概率。

6. 证明： $E(aX+b) = aE(X)+b,\ D(aX+b) = a^2D(X)$.

7. 设 $E(X) = \mu$， $a \neq \mu$，证明 X 相对于 μ 的偏离程度 $E\left[(X-\mu)^2\right]$ 与 X 相对于 a 的偏离程度 $E\left[(X-a)^2\right]$ 满足

$$E\left[(X-\mu)^2\right] < E\left[(X-a)^2\right] \rightsquigarrow \mu = E(X) = \arg\min_{a\in\mathbb{R}} E\left[(X-a)^2\right].$$

8. 设 $X \sim B(n,p)$，求证：

(1) $\sum\limits_{k=0}^{n} P\{X=k\} = 1$;

(2) 先证明组合恒等式 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$，再证明

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP\{X=k\} = np.$$

(3) $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 P\{X=k\} - n^2p^2 = np(1-p)$ (Hint: $k^2 = (k-1)k + k$.)

9. 设 $X \sim B(n,p)$，求出使得 $P\{n=k\}$ 最大的 k 的值。

10. 一个数轴上的质点在随机外力的作用下，从原点 O 出发，每隔 1 秒随机向左或向右移动一个单位，设向右移动的概率为 p $(0<p<1)$，移动 n 次后位于位置 X_n.

(1) $p = 1/2$ 时，求 $P\{X_6 = 4\}$;

(2) 求 $E(X_n)$;

(3) 移动 n 次后质点最有可能位于哪个位置？即求使得 $P\{X_n = x\}$ 最大的 x.

11. 一般地，假设一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品。从 N 件产品中随机抽取 n 件（不放回），用 X 表示抽取的 n 件产品中的次品数，则 X 的分布列为：

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=m,m+1,m+2,\ldots,r.$$

其中，$n,N,M\in\mathbb{N}^*,M\le N,n\le N,m=\max(0,n-N+M),r=\min(n,M)$。即 X 服从超几何分布，求证：

(1) $\sum_{k=m}^{r}C_M^k C_{N-M}^{n-k}=C_N^n$;

(2) 利用组合恒等式 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$ 和 (1) 所证明结论证明

$$E(X)=\sum_{k=m}^{r}kP\{X=k\}=\frac{nM}{N}.$$

(3) $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\sum_{k=0}^{n}k^2P\{X=k\}-\frac{n^2M^2}{N^2}=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$. (Hint: $k^2=(k-1)k+k$.)

(4) 可以看出，当 $N>>n$ 时，不放回抽取几乎没有影响每次抽到次品的概率，于是可以用二项分布近似超几何分布，也即

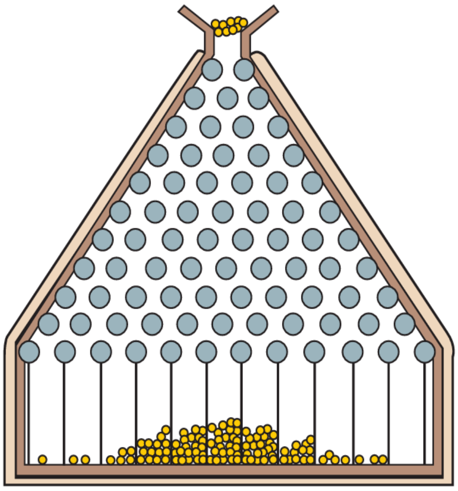
$$D(X)\approx n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)$$

12. 一个袋子中有 10 个大小相同的球，其中有 4 个黄色球，6 个白球，从中随机地抽出 5 个球作为样本。用 X 表示样本中黄色球的个数。

(1) 分别求有放回摸球和不放回摸球，求 X 的分布列；

(2) 若用样本中黄色球的比例估计总体黄色球的比例，为了使得估计**尽可能准确**，应该采用哪种摸球方式？

13. 下图是一块高尔顿板的示意图。在一块木板上钉着与排列相互平行但相互错开的圆柱形小木钉，小木钉之间留有适当的空隙作为通道，前面挡有一块玻璃。将小球从顶端放入，小球下落的过程中，每次碰到小木钉后都会等概率地向左或向右落下，最后落入底部的格子中。格子从左到右分别编号为 0，1，2，…，10，用 X 表示小球最后落入格子的编号，求 X 的分布列。



14. 甲、乙两人选手进行象棋比赛，如果每局比赛甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，那么采用 3 局 2 胜制还是采用 5 局 3 胜制对甲更有利？

15. 某单位有 10000 名职工，想通过检测的方法筛查乙肝病毒携带者。假定病毒在人群中的感染率为 5%。如果对每个人的血样采一化验，就需要化验 10000 次。统计专家提出了一种化验方法：随机地按 5 人一组分组，然后将各组 5 人的血样混合再化验。如果混合血样是阴性，说明这 5 个人全部阴性；如果混合血样是阳性，说明其中至少有一人的血样是阳性，需要再分别化验一次。按照这种化验方法能减少化验次数吗？(参考数据：$0.95^5 \approx 0.77.$)

16. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据，计算得到 $\chi^2 = 2.974$。依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验 $P\{\chi^2 \geq 3.841 = x_\alpha\} = 0.05 = \alpha$，结论为：

A. 变量 X 与 Y 不独立

B. 变量 X 与 Y 不独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.05

C. 变量 X 与 Y 独立

D. 变量 X 与 Y 独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.05

17. 根据变量 Y 和 x 的成对样本数据，由一元线性回归模型

$$\hat{y} = bx + a + e, \quad E(e) = 0, \quad D(e) = \sigma^2$$

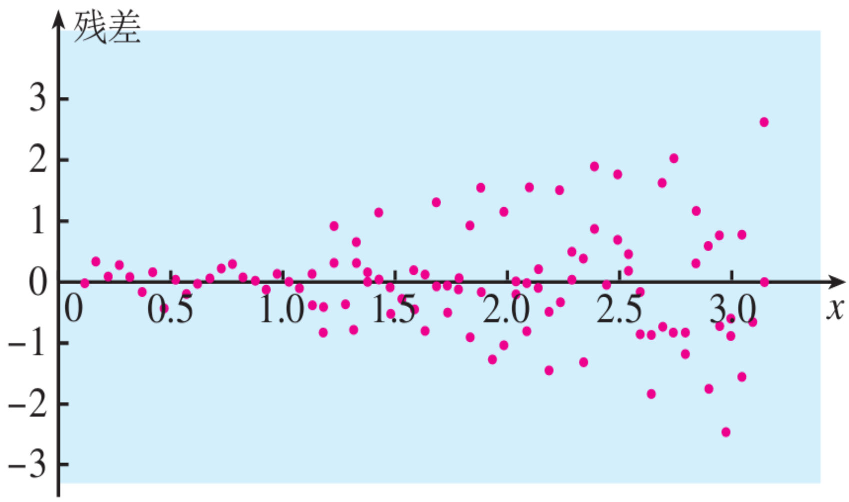
得到经验回归模型，模型误差如图所示。模型误差

A. 满足一元线性回归模型的所有假设

B. 不满足一元线性回归模型的 $E(e) = 0$ 的假设

C. 不满足一元线性回归模型的 $D(e) = \sigma^2$ 的假设

D. 不满足一元线性回归模型的 $E(e) = 0$ 和 $D(e) = \sigma^2$ 的假设



18. 如果散点图中所有的散点都落在一条斜率为非 0 的直线上，请回答下列问题：

(1) 解释变量和响应变量的关系是什么？

(2) R^2 是多少？

19. 设变量 Y 与 x 之间高度线性相关，且满足一元线性回归模型

$$\begin{cases} Y = bx + a + e \\ E(e) = 0,\, D(e) = \sigma^2 \end{cases}$$

$(x_i, y_i)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为已知样本数据。用使得残差平方和 $Q(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - bx_i - a)^2$ 取得最小值时的 $\hat{a}, \hat{b}$ 作为 a, b 的估计值，称为 a, b 的最小二乘估计值。证明：

(1) 对任意实数 k 都有 $\sum\limits_{i=1}^{n}[(y_i - \bar{y}) - k(x_i - \bar{x})] = 0$;

(2) $(\bar{x}, \bar{y})$ 在经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上；

(3) $\hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

20. 设 X 和 Y 为定义在样本空间 Ω 上取值于 $\{0, 1\}$ 的成对分类变量。$\{X = 0\}$ 和 $\{X = 1\}$，$\{Y = 0\}$ 和 $\{Y = 1\}$ 都是互为对立事件。记零假设 $H_0 : P(Y = 1 \mid X = 0) = P(Y = 1 \mid X = 1)$，这里，$P(Y = 1 \mid X = 0)$ 表示从 $X = 0$ 的条件下判断 $Y = 1$ 的概率。

(1) 叙述分类变量 X 与 Y 独立的定义；

(2) 证明 H_0 成立等价于分类变量 X 与 Y 独立。

21. 为比较甲、乙两所学校学生的数学水平，采用简单随机抽样的方法抽取88名学生．通过测验得到了如下数据。分别记学校和数学成绩为分类变量 X 与 Y。

学校	数学成绩		合计
	不优秀 ($Y=0$)	优秀 ($Y=1$)	
甲校 ($X=0$)	33	10	43
乙校 ($X=1$)	38	7	45
合计	71	17	88

(1) 若利用频率稳定于概率的原理，分类变量 X 与 Y 是否独立？

(2) 依据 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，证明：学校和数学成绩独立；

(3) 如果上表中所有数据都扩大的原来的 10 倍，在相同的检验标准下，再用 $\alpha=0.1$ 的独立性检验推断学校和数学成绩之间的关系，结论还一样吗？请你试着解释其中的原因。

附：

(a) $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$;

(b) χ^2 独立性检验中可能用到的小概率值 α 与对应的临界值 x_α 如下，即 $P\{\chi^2\geq x_\alpha\}=\alpha$:

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

3 数列 回归教材训练

1. 已知数列 S_n 是等比数列 a_n 的前 n 项和，S_3, S_9, S_6 成等差数列。求证：a_2, a_8, a_5 成等差数列。

2. 求该数列的一个通项公式和一个前 n 项和公式： $6, 66, 666, 6666, 66666, \ldots$.

3. 是否存在一个各项都小于 5 的无穷递增数列？如果存在，写出一个满足条件的数列的通项公式；如果不存在，说明理由。

4. 已知两个等比数列的公比不相等，但第 5 项相等，这两个等比数列中除第 5 项外，还有可能出现序号与数值都相等的项吗？

5. 如果等比数列 $\{a_n\}$ 中公比 $q > 1$，那么 $\{a_n\}$ 一定是递增数列吗？为什么？

6. 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式是
$$S_n = An^2 + Bn + C,$$
其中 A, B, C 都是常数，那么数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列吗？为什么？

7. 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式是
$$S_n = Aq^n + B,$$
其中 A, B 都是常数，且 $A \neq 0, q \neq 0$，那么数列 $\{a_n\}$ 一定是等比数列吗？为什么？

8. (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}, \cdots$ 是否成等差数列？

   (2) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}, \cdots$ 是否成等比数列？

9. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n = m, a_m = n$, 且 $n \neq m$, 求 a_{m+n}.

10. 已知等差数列 $-4.2, -3.7, -3.2, \ldots$ 的前 n 项和为 S_n, S_n 是否存在最大（小）值？如果存在，求出取最值时 n 的值。

11. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_9 < 0, S_{10} > 0$，则此等差数列的前多少项和最小？

12. 已知函数 $f(n) = |n-1| + |n-2| + \cdots + |n-20|$，其中 n 是自然数。当 n 为何值时，$f(n)$ 取得最小值？最小值是多少？

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_1 = 1024$，公比 $q = \dfrac{1}{2}$。若 T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积，求 T_n 的最大值。

14. 已知两个等差数列 $2, 6, 10, \cdots, 190$ 及 $2, 8, 14, \cdots, 200$，将这两个等差数列的公共项按从小到大的顺序组成一个新数列。求这个新数列的各项之和。

15. 数列 $\{a_n\}$ 共有 5 项，前三项成等比数列，后三项成等差数列，第 3 项等于 80，第 2 项与第 4 项的和等于 136，第 1 项与第 5 项的和等于 132。求这个数列。

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 A_n，等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n，且

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{2n+3}{3n+2},$$

求 a_8/b_8 的值。

17. 已知等比数列的首项为 1，前 n 项和为 S_n. 若 $\dfrac{S_{10}}{S_5} = \dfrac{31}{32}$，求公比 q.

18. 已知 $a \neq b$，且 $ab \neq 0$. 对于 $n \in \mathbb{N}^*$，证明：

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$S_n + S_m = S_{n+m}$，$a_1 = 1$，求 a_{10} 的值。

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$，求 S_8 的值。

21. 数列 $\{a_n\}$ 满足下列关系式时，求 a_n.

(1) $a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n = 3n^2$;

(2) $a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}a_n = n^2$.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$, 求它的通项公式。(Hint: focus on $\left\{\dfrac{1}{1-a_n}\right\}$) .

23. 除数函数（divisor function）$y=d(n)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ 的函数值等于 n 的正因数的个数，例如 $d(1)=1$，$d(4)=3$. 求 $\sum\limits_{n=1}^{k} d(2^{n-1}5^n)$.

24. 已知数列 a_n 的通项公式为 $a_n=\dfrac{n-2}{2n-15}$，前 n 项和为 S_n。求 S_n 取最小值时 n 的值。

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{n^3}{3^n}$，求使得 a_n 取得最大值时的 n 的值。

26. a,b,c 不全相等.

(1) 若 a,b,c 成等差数列，$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ 能构成等差数列吗？你能用函数图像解释一下吗？

(2) 若 a,b,c 成等比数列，$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ 能构成等比数列吗？为什么？

27. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=3$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d=2$，证明数列 $\{3^{a_n}\}$ 为等比数列；

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比 $q=\dfrac{1}{9}$，证明数列 $\{\log_3 a_n\}$ 为等差数列.

28. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。

(1) 证明 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列；

(2) 设 T_n 为数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=12$，$S_8=40$，求 T_n.

29. 在数列 a_n 中，已知 $a_{n+1}+a_n=3\cdot 2^n$, $a_1=1$.

(1) 求证：$\{a_n - 2^n\}$ 是等比数列；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

30. 已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 2^n, b_n = n^4$，其中 $n \in \mathbb{N}^*$。试推断 $a_n > b_n$ 对哪些正整数 n 成立。

31. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 1, x_n = x_{n+1} + \ln(1 + x_{n+1})$ $(n \in \mathbb{N})$。试用数学归纳法证明 $x_n > 0$，并比较 x_n 与 x_{n+1} 的大小关系。

32. 已知 $n \geq 2$，且平面内有 n 条直线，其中任意两条不平行，任意三条不共点，证明：这些直线的交点的个数为

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

33. 求证：平面上 n 个圆最多把平面划分成 $n^2 - n + 2$ 个区域，其中 $n \geq 1$.

34. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1} = 2S_n + 2$（$n \in \mathbb{N}^*$）。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入一个数，使得 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列，在数列 $\{d_n\}$ 中是否存在 3 项 d_m, d_k, d_p（其中 m, k, p 成等差数列）成等比数列？若存在，请说明理由。

35. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1 = 1$，$a_3 = 2\sqrt{2} + 1$，前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \dfrac{S_n}{n}$.

(1) 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中的任意三个项不能构成等比数列。

36. 有理数都能表示成 $\dfrac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}$，且 $n \neq 0, m$ 与 n 互质的形式，进而有理数集

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,\ \gcd(m, n) = 1 \right\}.$$

任何有理数 $\dfrac{m}{n}$ 都可以化为有限小数或无限循环小数。反之，任何有限小数也可以化为有理数；那么无限循环小数是否为有理数？

(1) $1.\dot{2}$ 是有理数吗？请说明理由。

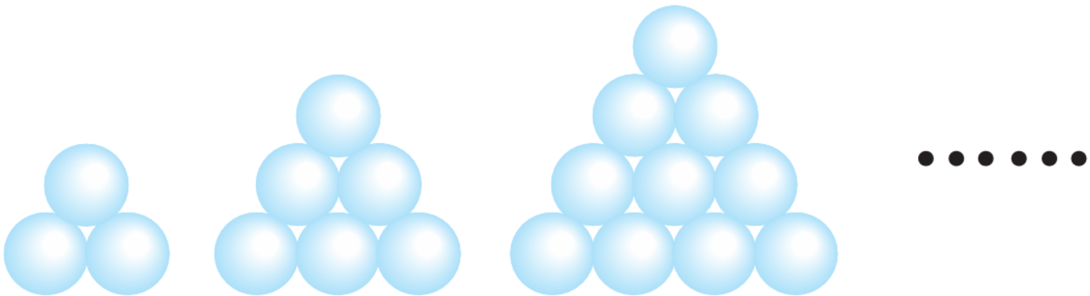
(2) $1.\dot{2}\dot{4}$ 是有理数吗？请说明理由。

37. 在 2015 年苏州世乒赛期间，某景点用乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的装饰品，其中第 1 堆只有 1 层，就是一个球；第 2、3、4、...堆是底层（第一层）分别按图中所示方式固定摆放，从第二层开始，每层的小球自然堆放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球。记第 n 堆的乒乓球总数为 $f(n)$。

(1) 求 $f(3)$；

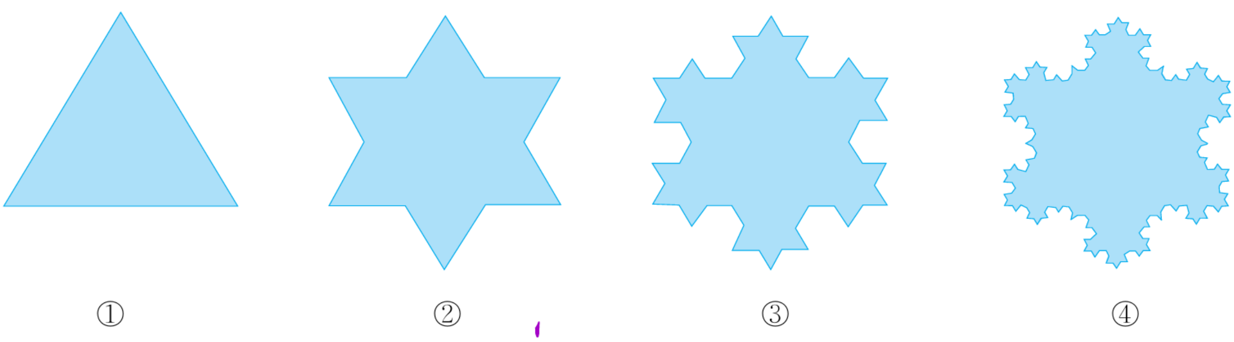
(2) 试归纳出 $f(n+1)$ 与 $f(n)$ 的关系式，并根据你得到的关系式探求 $f(n)$ 的表达式。

参考公式：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.



38. 如图是瑞典数学家赫尔在 1904 年构造的能够描述雪花形状的图案。图形的作法是：从一个正三角形开始，把每条边分成三等份，然后以各边的中点为底向外作正三角形，再去掉底边。反复进行这一过程，就得到一条“雪花”状的曲线。设原正三角形（图①）的边长为 1，把图①、图②、图③、图④中图形的周长依次记为 C_1,C_2,C_3,C_4，则 $C_4=$

A. $\frac{128}{9}$　B. $\frac{64}{9}$　C. $\frac{64}{27}$　D. $\frac{128}{27}$



39. 任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘 3 再加上 1；若是偶数，就将该数除以 2。反复进行上述两种运算，经由有限步跃后，必进入循环圈 $1 \to 4 \to 2 \to 1$。这是数学史上著名的“冰雹猜想”（又称“角谷猜想”）等。如取正整数 $m = 6$，根据上述运算则得出 $6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$，共需经过 8 个步骤变成 1（简称为 8步“电程”）。

已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1 = m$ (m 为整数)，$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数时}, \\ 3a_n + 1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数时}. \end{cases}$

(1) 当 $m = 17$ 时，试确定使得 $a_n = 1$ 需要多少步电程；

(2) 若 $a_8 = 1$，求所有可能的取值集合 M。

4 函数与导数 回归教材训练

1. (1) 如果 $y=f(x)$ 存在反函数，则 $y=f(x)$ 一定是单调函数吗？

   (2) 如果 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，写出 $f[f^{-1}(x)]$ 与 $f^{-1}[f(x)]$ 的值。

2. 作出函数 $f(x)=x^2-2|x|-1$ 的图像。

3. 已知 $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}$，已知 $f(x)\geq m$ 恒成立，求自然数 m 的值。

4. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，区间 $D\subseteq I$，记 $\Delta x=x_1-x_2$，$\Delta y=f(x_1)-f(x_2)$。证明：

   (1) 函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上单调递增的充要条件是：对 $x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$；

   (2) 函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上单调递减的充要条件是：对 $x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$.

5. 判断 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性，并证明：$y'\sqrt{1+x^2}=1$.

6. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，$f(2)=0$，求不等式 $f(x)<0$ 的解集。

7. 我们知道，函数 $y=f(x)$ 的图像关于坐标原点中心对称图形的充要条件是 $y=f(x)$ 为奇函数。有同学发现可以将其推广为：函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a,b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数。

   (1) 求函数 $f(x)=x^3-3x^2$ 图像的对称中心 (Note: 最好不要使用导数来完成本题)；

   (2) 类比上述推导，写出“函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴成对称图形的充要条件是函数 $y=f(x)$ 为偶函数”的一个推导结论。

8. 当 $f(\cdot)$ 为下列函数，对任意 $x_1, x_2 \in D$，比较 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 与 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 的大小关系。

(1) $f(x) = x^2 + 2x + 3,\ D = \mathbb{R};$

(2) $f(x) = 3^x,\ D = \mathbb{R};$

(3) $f(x) = \log_3 x,\ D = (0, +\infty).$

9. 设 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，求证：

(1) $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$；

(2) $f(2x) = 2f(x)g(x)$；

(3) $g(2x) = [g(x)]^2 + [f(x)]^2$。

10. 已知 $a^{2x} = 3$，求 $\dfrac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 的值。

11. 设函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = 2^{x+a}$ 的图像关于直线 $y = -x$ 对称，并且 $f(-2) + f(-4) = 1$，求 a 的值。

12. 已知函数 $y = f(x), x \in \mathbb{R}$，且 $f(0) = 3, \dfrac{f(0.5)}{f(0)} = 2, \dfrac{f(1)}{f(0.5)} = 2, \ldots, \dfrac{f(0.5n)}{f(0.5(n-1))} = 2, n \in \mathbb{N}^*$，求函数 $y = f(x)$ 的一个解析式。

13. 当 n 越来越大时，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的底数越来越小，而指数越来越大，那么 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 是否也会越来越大？有没有最大值？ (Hint: 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调递增的，数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是单调递减的)

14. 比较大小：

(1) $\log_{0.2} 6, \log_{0.3} 6, \log_{0.4} 6$；

(2) $\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5$。

15. 求证：方程 $3^x + 4^x = 5^x$ 只有一个实数解。

16. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a > 0, b, c \in \mathbb{R})$，且 $f(1) = -\dfrac{a}{2}$，求证：函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内至少有一个零点。

17. 如果关于 x 的方程 $7x^2 - (a+13)x + a^2 - a - 2 = 0$ 的两根分别在区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内，求实数 a 的取值范围。

18. 已知 α 是第一象限角，那么 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是

A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第一或第二象限角 D. 第一或第三象限角

19. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2\sin x \cos x - \sin^4 x$，

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 当 $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的最小值以及取得最小值时 x 的集合。

20. 已知直线 $l_1 \parallel l_2$，A 是 l_1, l_2 之间的一点，并且点 A 到 l_1, l_2 的距离分别为 h_1, h_2. B 是直线 l_2 上一点，作 $AC \perp AB$，且使得直线 AC 与直线 l_1 交于点 C. 设 $\angle ABD = \alpha$.

(1) 写出 $\triangle ABC$ 面积 S 关于角 α 的函数解析式 $S(\alpha)$；

(2) 求 $S(\alpha)$ 的最小值。

21. 英国数学家泰勒发现了如下公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

这些公式被编入计算工具，计算工具计算所够多的项就可以确保显示值的精准性。例如，用前两项计算 $\cos 0.3$，就得到 $\cos 0.3 \approx 1 - \frac{0.3^2}{2!} + \frac{0.3^4}{4!} = 0.9553375.$

(1) 令 $f_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$，记 $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]', f^{(1)}(x) = f'(x)$. 证明：$(\sin x)^{(k)} = f_5^{(k)}(x),\ k = 1, \cdots, 5.$

(2) 比较 $\sin x$ 和 $f_5(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的大小关系。

22. 求下列函数的导数：

(1) $y = 3^x \log_4 x;$

(2) $y = x^{\tan x};$

(3) $y = \ln \frac{1+x}{1-x} \cos(-x^2 + x).$

23. 理解下列极限（也被称为第一重要极限）

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ \sin x < x < \tan x \rightsquigarrow 1 < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \rightsquigarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

利用上式作为已知，证明

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos x,$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\sin x.$$

(Hint: $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.)

24. 可导函数在闭区间内的最大值必在________取得。

A. 极值点 B. 导数为 0 的点 C. 极值点或区间端点 D. 区间端点

25. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增，那么在区间 (a,b) 内是否有 $f'(x)>0$ 恒成立？

26. 用测量工具测量某物体的长度，由于工具的精度以及测量技术的原因，测得 n 个数据 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$. 证明：用 n 个数据的平均值

$$x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

表示这个物体的长度，能使这 n 个数据的方差

$$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$$

最小。

27. 已知曲线 $C_1:y=x^2+2x$ 和 $C_2:y=-x^2+a$ ，当a 取什么值时，C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线？

28. 已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 在 $(-\infty,0]$ 上是增函数，在 $[0,2]$ 上是减函数，且方程 $f(x)=0$ 有 3 个实数根，它们分别是 $\alpha,\beta,2$。

(1) 求实数 c 的值；

(2) 求证：$f(1)\geq 2$；

(3) 求 $|\alpha-\beta|$ 的取值范围。

29. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 设 $a=b=4$，若函数 $f(x)$ 有 3 个不同零点，求实数 c 的取值范围；

(3) 证明：$a^2-3b>0$ 是 $f(x)$ 有 3 个不同零点的必要不充分条件。

30. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$，若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，试求实数 a 的取值范围。

31. 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$. 当 $m\leq 2$ 时，求证 $f(x)>0$.

32. 求证：$x\geq 0$ 时，有 $xe^{-x}\leq \ln(1+x)$.

33. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且满足 $f(x)-xf'(x)>0$，判断 $3f(1)$ 与 $f(3)$ 的大小。

34. 设函数 $f(x)=|axe^{-x}-a^2e^{-2}|$ 在 $(0,+\infty)$ 上有**唯一点** x_0 **取到**最大值 $f(x_0)$，求 a 的取值范围。

35. 已知函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，求实数 a 的取值范围。

36. 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

    (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

    (2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围。

5 集合，不等式，复数 回归教材训练

1. 求集合 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x-1| + |x-2| \le 7\}$.

2. 若 $\{0, -1, 2a\} = \{a-1, -|a|, a+1\}$，求 a 的值。

3. 已知 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A, x - y \in A\}$，求 B 中所含元素的个数。

4. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x, y \in \mathbb{Z}\}$，$B = \{(x, y) \mid |x| \le 2, x, y \in \mathbb{Z}\}$，定义集合

$$A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \mid (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$$

求 $A \oplus B$ 中元素的个数。

5. 对下列情形证明 $B \subsetneqq A$：

(1) $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$，$B = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$;

(2) $A = \{x \mid x = 3m - 1, m \in \mathbb{N}\}$ 和 $B = \{x \mid x = 3m + 2, m \in \mathbb{N}\}$.

6. 设全集 $U = \mathbb{Z}$，$A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$，$B = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$，求 $\complement_U(A \cup B)$.

7. 设 U 为全集，也记 $\complement_U A = A^c$，证明：

(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(3) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

8. 已知全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$， $A \cap (\complement_U B) = \{1,3,5,7\}$，试求集合 B.

9. 已知 M, N 为全集 U 的非空真子集，且 M 与 N 不相等，若 $(\complement_U M) \cap N = \varnothing$，证明 $N \subsetneqq M$ 并求 $M \cup N$.

10. 设 U 为全集，A, B 为集合，判断“存在集合 C，使得 $A \subseteq C, B \subseteq \complement_U C$”是“$A \cap B = \varnothing$”的什么条件。

11. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$。证明：

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

的充要条件是 $a = b = c$.

12. 学校举办运动会时，高一（1）班共有 28 名同学参加比赛，有 15 人参加游泳比赛，有 8 人参加田径比赛，有 14 人参加球类比赛，同时参加游泳比赛和田径比赛的有 3 人，同时参加游泳比赛和球类比赛的有 3 人，没有人同时参加三项比赛。同时参加田径和球类比赛的有多少人？只参加游泳一项比赛的有多少人？

13. 配平化学方程式其实可以通过解方程组来完成。例如，Mg 在 O_2 中燃烧生成 MgO，可以设方程式为

$$x\text{Mg} + y\text{O}_2 \xlongequal{\text{燃烧}} z\text{MgO},$$

其中 $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ ，且**它们的最大公约数为 1**。由方程式两边的同种元素数目相等可得

$$\begin{cases} x = z, \\ 2y = z. \end{cases}$$

令 $y = 1$，则 $z = 2$，$x = 2$。因此，配平后的化学方程式为

$$2\text{Mg} + \text{O}_2 \xlongequal{\text{燃烧}} 2\text{MgO}.$$

用这种方法配平化学方程式：

$$\underline{\quad\quad}\mathrm{Fe} + \underline{\quad\quad}\mathrm{H_2O}(g) \xlongequal{高温} \underline{\quad\quad}\mathrm{Fe_3O_4} + \underline{\quad\quad}\mathrm{H_2}.$$

14. 比较下列各组中两个代数式的大小：

(1) $a^3 + b^3$ 与 $ab^2 + a^2b \ \ a \neq b, a, b > 0$；

(2) $x^2 + y^2 + 1$ 与 $2(x + y - 1)$.

15. 已知 $2 < a + b < 3$，$-2 < 2b - a < -1$，求 $2a + b$ 的取值范围。

16. (1) 已知 b 克糖水中含有 a 克糖（$b > a > 0$），再添加 m 克糖（$m > 0$）（假设全部溶解），糖水变甜了。请将这一事实表示为一个不等式，并证明这个不等式成立;

(2) 证明：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k - 1} < 1$.

17. 已知 x, y 都是正数，求证: $\dfrac{2xy}{x + y} \leq \sqrt{xy}$.

18. 求下列不等式的解集：

(1) $\dfrac{1 - x}{x + 2} \geq 0$;

(2) $(x + 3)(x^2 - 4) \leq 0$.

19. 已知 $x \in (1, +\infty)$，求 $y = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$ 的最小值，以及 y 取得最小值时 x 的值。

20. 设矩形 $ABCD$ $(AB > AD)$ 的周长为 24 cm，把 $\triangle ABC$ 沿 AC 向 $\triangle ADC$ 折叠，AB 折过去后交 DC 于点 P。设 $AB = x$ cm，求 $\triangle ADP$ 的最大面积及相应 x 的值。

21. 若 $a, b > 0$，且 $ab = a + b + 3$，求 ab 的取值范围。

22. 当 k 取什么值时，一元二次不等式 $2kx^2 + kx - \dfrac{3}{8} < 0$ 对一切实数 x 都成立？

23. 求证：

(1) $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

(3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$.

24. 设 $|z| = 1$，求 $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ 的最小值。

25. 证明等式 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ 对任意复数 z_1, z_2 都成立，并给出这个等式的一个几何意义。

26. 已知 $z^2 = 5 - 12i$，求 z.

27. 已知 $z_1 = 2, z_2 = 2i, |z| = 2\sqrt{2}$, $|z - z_1| = |z - z_2|$，求 z.

28. 已知 $z+\dfrac{4}{z}$ 为实数，且 $|z-2|=2$，求 z 的值。

29. (1) 求 $\sum\limits_{k=1}^{2025} i^k$;

(2) 推测 i^n（$n\in\mathbb{N}^*$）的值有什么变化规律，并把这个规律用式子表示出来。

30. 以前我们学过的函数，定义域都是实数集的子集。但函数范围还可以扩展；定义域是复数集的子集的函数称为复变函数。类似地，我们还可以得到多项式复变函数的概念。例如，$f(z)=z^2$ 就是一个多项式复变函数，此时

$$f(i)=i^2=-1,\quad f(1+i)=(1+i)^2=1+2i-1=2i.$$

给定多项式复变函数 $f(z)$ 之后，对任意一个复数 z_0，通过计算公式

$$z_{n+1}=f(z_n),\quad n\in\mathbb{N},$$

可以得到一列值

$$z_0,z_1,z_2,\dots,z_n,\dots.$$

如果存在一个正整数 M，使得 $|z_n|<M$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 都成立，则称 z_0 为 $f(z)$ 的收敛点；否则，称 z_0 为 $f(z)$ 的发散点。$f(z)$ 的所有收敛点组成的集合为 $f(z)$ 的 Filled Julia Set。对多项式复变函数 $f(z)=z^2$，证明：

(1) $z_0=i$ 为 $f(z)$ 的收敛点，$z_0=1+i$ 为 $f(z)$ 的发散点；

(2) $f(z)$ 的 Filled Julia Set 为单位圆盘 $\{z\mid |z|\le 1\}$.

31. 已知复数 $z_1=m+(4-m^2)i\ (m\in\mathbb{R})$, $z_2=2\cos\theta+(\lambda+3\sin\theta)i\ (\lambda,\theta\in\mathbb{R})$, 且 $z_1=z_2$，求 λ 的取值范围。

32. 已知 $2i-3$ 是关于 x 的方程 $2x^2+px+q=0$ 的一个根，求实数 p,q 的值。

33. 在复数范围内解下列方程：

(1) $x^2+4x+5=0$;

(2) $2x^2-3x+4=0$.

34. 下列关于方程 $4x^2+mx+1=0\ (m\in\mathbb{R})$ 的结论中，正确的有：

(1) 方程的两根互为共轭复数；

(2) 如果方程的两根互为共轭复数，则 $m=0$；

(3) 若 x 为方程的一个虚根，则 $\bar{x}$ 为方程的根；

(4) 若 $m<0$，则方程的两根一定都是正数。

35. 一般地，任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以表示成 $r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ 的形式。

其中，r 是复数 z 的模；θ 是以 x 轴的非负半轴为起点，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线（射线 OZ）为终边的角，叫做复数 $z=a+bi$ 的幅角。$r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ 叫做复数 $z=a+bi$ 的三角表示式，简称**三角形式**。为了与三角形式区分开，$a+bi$ 叫做复数的代数表示式，简称**代数形式**。

我们规定在 $0\le\theta<2\pi$ 范围内的角度 θ 的值为幅角的主值。通常记作 $\arg z$，即 $0\le\arg z<2\pi$. 例如，$\arg(-1)=\pi$，$\arg(-i)=3\pi/2$. 验证下列事实，并说明**几何意义**：

(1) $r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\cdot r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$;

(2) (1) 可以推广到 $n\ge 2, n\in\mathbb{N}$ 个复数相乘的情况，即若 $z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)$，$z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$，$\cdots$，$z_n=r_n\left(\cos\theta_n+i\sin\theta_n\right)$，则

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\left[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\right].$$

特别地，如果 $z_1=z_2=\cdots=z_n=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$，那么

$$z_1^n=\left[r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\right]^n=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right).$$

(3) 设 $r_2\ne 0,\theta_2\ne 2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$，$\dfrac{r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)}{r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)}=\dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right].$

36. 设数域 $\mathbb{C}$ 上的多项式 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\ (0\neq a_3\in\mathbb{C})$，由代数基本定理，$f(x)$ 在不考虑重根情形下在 $\mathbb{C}$ 上有三个根 x_1,x_2,x_3，那么 $f(x)=a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，请你利用这一恒等关系，验证下面的三次方程 Viéta 定理：

(1) $x_1+x_2+x_3=-a_2/a_3$;

(2) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a_1/a_3$;

(3) $x_1x_2x_3=-a_0/a_3$.

37. 在复平面内设复数 $z_1=1+2i$，$z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$，$z_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}i$，$z_4=-2+i$ 对应的点分别为 Z_1,Z_2,Z_3,Z_4。判断这 4 个点是否在同一个圆上，并证明你的结论。

38. 设 $z=\sqrt{3}-i$，其对应的向量为 $\overrightarrow{OZ}$，将 $\overrightarrow{OZ}$ 终点 O 按顺时针方向和逆时针方向分别旋转 45° 和 60°，求所得向量对应的复数。

39. 复平面内的三角形 $\triangle ABC$ 是等边三角形，它的两个顶点 A,B 的坐标分别为 $(1,0),(2,1)$，求点 C 的坐标。

40. 设 $z_i^3=1\ (i=1,2,\ 1\neq z_i\in\mathbb{C},\ z_1\neq z_2)$，求证：

(1) $\overline{z_1}=z_2,\ \overline{z_2}=z_1$;

(2) $z_i^2+z_i+1=0$.

(3) 分别求所有满足条件的 $n\in N^*$ 使得 $z_i^n+z_i+1=0\ (i=1,2)$.

41. 已知复数 z_1, z_2, z_1+z_2 在复平面上对应点分别为 A, B, C，设 O 为坐标原点。

(1) 若 $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$，向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点逆时针旋转 90° 且模变为原来的 2 倍后与向量 $\overrightarrow{OC}$ 重合，求 z_2;

(2) 若 $z_1 - z_2 = 2i(z_1+z_2)$，试判断四边形 $OABC$ 的形状。

42. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = \dfrac{\pi}{2}$，$BC = \dfrac{1}{3}AC$，点 E 在 AC 上，且 $EC = 2AE$。用复数证明：$\angle CBE + \angle CBA = 3\pi/4$.

6 三角恒等变换，平面向量和解三角形 回归教材训练

1. 定义正割 $\sec x = 1/\cos x$，证明同角三角函数的另一个恒等关系

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1.$$

2. 计算 $\tan 1^\circ \tan 2^\circ \cdots \tan 45^\circ \tan 46^\circ \cdots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$.

3. 用单位圆说明：对于任意角 α，均有 $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geq 1$.

4. 证明并**熟练背诵**：

(1) $\dfrac{1+\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(2) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \tan\dfrac{x}{2}$.

5. 记 $f^{(n)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 阶导数，证明：

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

从上述等式可以看出，三角函数的**导数的图像**大致相当于原函数**向左平移**，可能有伸缩变换例如 $(\sin 2x)' = 2\sin(2x+\pi/2)$.

6. 求证并**熟练掌握**下面的**和差化积**与**积化和差**公式，对其余情形自行推导：

(1) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$;

(2) $\sin\theta+\sin\varphi = 2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}$.

Notes：

(a) $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$;

(b) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$;

(c) $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$;

(d) $\sin\theta-\sin\varphi = 2\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}$;

(e) $\cos\theta+\cos\varphi = 2\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}$;

(f) $\cos\theta-\cos\varphi = -2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}$.

7. 证明下列**三倍角公式**：

(1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$;

(2) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

8. 已知正 n 边形的边长为 a，内切圆的半径为 r，外接圆的半径为 R。求 $R+r=\dfrac{a}{2\tan\frac{\pi}{2n}}$.

9. (1) 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{5}$, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$，求 $\tan\alpha\tan\beta$ 的值;

(2) 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

10. 求证：

(1) $3+\cos 4x-4\cos 2x = 8\sin^4 x$;

(2) $3+\cos 4x+4\cos 2x = 8\cos^4 x$;

(3) 基于上述，得到下面这个等式是自然的

$$\tan^4 x = \frac{3+\cos 4x - 4\cos 2x}{3+\cos 4x + 4\cos 2x}.$$

11. 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$，求下列各式的值：

(1) $\sin\alpha\cos\alpha$;

(2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$;

(3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;

(4) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

12. 观察以下各等式：

$$\begin{aligned}\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ &= \frac{3}{4},\\ \sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ &= \frac{3}{4},\\ \sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ \cos 45^\circ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

分析上述各式的共同特点，写出能反映一般规律的等式，并对等式的正确性作出证明。

13. 证明 $\tan\alpha + \tan\beta = \tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha\tan\beta\tan(\alpha+\beta)$ 并利用其求下列值：

(1) $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ$;

(2) $\dfrac{\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 120^\circ}{\tan 20^\circ \tan 40^\circ}$.

14. 求值：

(1) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$;

(2) $\dfrac{3-\sin 70^\circ}{2-\cos^2 10^\circ}$;

(3) $\tan 70^\circ \cos 10^\circ \left(\sqrt{3}\tan 20^\circ - 1\right)$;

(4) $\sin 50^\circ \left(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ\right)$.

15. 设 $f(\alpha)=\sin^x\alpha+\cos^x\alpha, x\in\{n \mid n=2k, k\in\mathbb{N}^+\}$，利用三角变换，估计 $f(\alpha)$ 在 $x=2,4,6$ 时的取值情况，进而猜想 x 取一般值时 $f(\alpha)$ 的取值范围。

16. 证明：

(1) $\dfrac{\tan\alpha\tan 2\alpha}{\tan 2\alpha-\tan\alpha}+\sqrt{3}\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)=2\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

(2) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}=\dfrac{1}{2}\tan\alpha+\dfrac{1}{2}$;

(3) $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

17. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，向量 $\vec{b}-t\vec{a}$，$\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}$ 共线，求实数 t 的值。

18. 若平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两的夹角相等，且 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=3$，则 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=$

A. 2 B. 5 C. 2 或 5 D. $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{5}$

19. 已知 $\triangle ABC$ 中，BC 边上的高 AD 的长度为 3，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}$.

20. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆心为 O，且 $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $|OA|=|AB|$，则向量 $\overrightarrow{BA}$ 在向量 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为

A. $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\overrightarrow{BC}$　　C. $-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\overrightarrow{BC}$

21. 若非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$，则 $\triangle ABC$ 为

A. 三边均不相等的三角形　　B. 直角三角形

C. 底边和腰不等的等腰三角形　　D. 等边三角形

22. 已知 O,N,P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内，满足 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$, $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=0$ 且 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则点 O,N,P 依次是 $\triangle ABC$ 的

A. 重心, 外心, 垂心　　B. 外心, 重心, 垂心　　C. 外心, 重心, 内心　　D. 重心, 外心, 内心

23. 已知向量 $\vec{a}\neq\vec{e},|\vec{e}|=1$，对任意 $t\in\mathbb{R}$，恒有 $|\vec{a}-t\vec{e}|\geq|\vec{a}-\vec{e}|$，则

A. $\vec{a}\perp\vec{e}$　　B. $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{e})$　　C. $\vec{e}\perp(\vec{a}-\vec{e})$　　D. $(\vec{a}+\vec{e})\perp(\vec{a}-\vec{e})$

24. 若非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{b}|$，则

A. $|2a|>|2a+b|$　　B. $|2a|<|2a+b|$　　C. $|2b|>|a+2b|$　　D. $|2b|<|a+2b|$

25. 在平面**直角**坐标系中，线段 P_1P_2 的端点 P_1,P_2 的坐标分别是 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，点 P 是直线 P_1P_2 上的一点。当 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 时，求点 P 的坐标。

26. 证明**极化恒等式** $(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 O 为对角线交点，则自然有

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AO}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2.$$

27. 用**向量方法**证明 **Cauchy-Schwarz 不等式**的二维情形：对于任意的 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，恒有不等式：

$$(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

28. 在平行四边形 $ABCD$ 中，证明四边长的平方和等于对角线的平方和，即 $2(|AB|^2+|AD|^2)=|AC|^2+|BD|^2$. 设对角线 AC 与 BD 交于点 O，导出**中线长公式**

$$|AB|^2+|AD|^2=|AO|^2+|OA|^2.$$

29. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$c(a\cos B-b\cos A)=a^2-b^2$. 在此基础上利用正弦定理进一步证明**三角形中的正弦平方差公式**

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B.$$

30. 设 Ox,Oy 是平面内相交成 $60°$ 角的两条数轴，$\vec{e_1},\vec{e_2}$ 分别是与 x 轴、y 轴正方向同向的单位向量。若向量 $\overrightarrow{OP}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$，则有序数对 (x,y) 叫做向量 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标系 Oxy 中的坐标，记为 $\overrightarrow{OP}=(\vec{e_1},\vec{e_2})(x,y)'$。

(1) 计算 $|\overrightarrow{OP}|$ 的大小；

(2) 探究在 Oxy 中向量 $\vec{a}=(\vec{e_1},\vec{e_2})(x_1,y_1)'$ 和 $\vec{b}=(\vec{e_1},\vec{e_2})(x_2,y_2)'$ 满足 $\vec{a}\mathrel{/\!/}\vec{b}$ 与 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充分必要条件。

31. 在平面直角坐标系中，把点 B 绕点 A 顺时针旋转角度 θ 得到点 P。记向量 $\overrightarrow{AB}=(x,y)$，证明下列**旋转变换公式**

$$\overrightarrow{AP}=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta).$$

32. 在平面直角坐标系中，设 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$，记与 $\overrightarrow{AB}$ **正交**的**一个**向量为 $\vec{n}=(y_1,-x_1)$，证明：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

33. 在 $\triangle ABC$ 中，D,E,F 分别是 BC,CA,AB 的中点，设 BE,CF 交于一点 O，连接 AO,OD。证明：$\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$. 这也说明**三角形的三条中线交于一点且重心分每条中线为 $2:1$ 的两条线段**。

34. 在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E,F 分别是 AD,DC 边的中点，BE,BF 分别与 AC 交于 R,T 两点，探究 AR,RT,TC 之间的关系并用向量方法证明你的结论。

35. 在 $\triangle ABC$ 中，证明下列恒等式：

(1) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$;

(2) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;

(3) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

36. 在 $\triangle ABC$ 中，直线 l 与 $\triangle ABC$ 的边 AB 成角 θ，l 的方向量为 $\vec{i}$，设 $AB=c, BC=a, CA=b$。

(1) 计算 $\vec{i}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$，并由此证明一个对任意角 θ 均成立的恒等式

$$c\cos\theta=b\cos(A+\theta)+a\cos(B-\theta);$$

(2) 用上述恒等式证明 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

37. 已知 D 是 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点，$AB=AD$，记 $\angle CAD=\alpha$，$\angle ABC=\beta$.

(1) 求证：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$;

(2) 若 $AC=\sqrt{3}DC$，求 β 的值.

38. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中，$\sin(A+B)=\dfrac{3}{5},\sin(A-B)=\dfrac{1}{5}$.

(1) 求证：$\tan A=2\tan B$;

(2) 若 $AB=3$，求 AB 边上的高.

39. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=\sqrt{3},BC=1,P$ 为 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle BPC=90^\circ$.

(1) 若 $PB=\dfrac{1}{2}$，求 PA;

(2) 若 $\angle APB=150^\circ$，求 $\tan\angle PBA$.

40. 已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$，且 $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍。

(1) 求 $\dfrac{\sin B}{\sin C}$;

(2) 若 $AD=1,DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长.