1 每日练习 1 (Due: 2025/1/11 22:00)

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x\le 0,\\ -\ln x, & x>0\end{cases}$。若函数 $g(x)=f(x)-a$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $[0,4]$　　B. $[0,2]$　　C. $(-\infty,4]$　　D. $(-\infty,2]$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，则使得 $S_m=b_m$ 成立的正整数 m 的个数的最大值是（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. (多选) 已知圆 $O_1:(x-1)^2+y^2=4$，圆 $O_2:(x-5)^2+y^2=4m$，下列说法正确的是（　）

A. 若 $m=4$，则圆 O_1 与圆 O_2 相交

B. 若 $m=4$，则圆 O_1 与圆 O_2 外离

C. 若直线 $x-y=0$ 与圆 O_2 相交，则 $m>\dfrac{25}{8}$

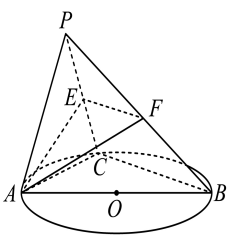
D. 若直线 $x-y=0$ 与圆 O_1 相交于 M,N 两点，则 $|MN|=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

4. 袋中有 6 个大小相同的球，其中 1 个红球，m 个白球，n 个黑球，现依次取球，每次取出一个，取出不放回，直到取出的球中有两种不同颜色的球时结束。已知取到 1 个红球 1 个白球的概率为 $\dfrac{1}{5}$，则 $m=$____，用 X 表示终止时取球的次数，则随机变量 X 的数学期望 $E(X)=$____。

5. 如图，C 是以 AB 为直径的圆 O 上异于 A,B 的点，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$\triangle PAC$ 中，$PA=PC=AC=2$，$BC=4$，E,F 分别是 PC,PB 的中点：

(1) 证明：$BC\perp$ 平面 PAC；

(2) 记平面 AEF 与平面 ABC 的交线为直线 l，点 Q 为直线上动点，求直线 PQ 与平面 AEF 所成的角的取值范围。



2 每日练习 2 (Due: 2025/1/12 22:00)

1. 已知 $a \in \mathbb{R}$，若不等式 $\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) - a\right]\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) - a - 1\right] < 0$ 在 $(0, 2025)$ 中整数解有 m 个，则 m 的个数不可能是（ ）

   A. 0　　B. 338　　C. 674　　D. 1012

2. 已知函数 $f(x) = x|x-a| - 2a^2$。若当 $x > 2$ 时，$f(x) > 0$，则 a 的取值范围是（ ）

   A. $(-\infty, 1]$　　B. $[-2, 1]$　　C. $[-1, 2]$　　D. $[-1, +\infty)$

3. (多选) 已知 $F(2,0)$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点，M 是 C 上的点，O 为坐标原点。则

   A. $p = 4$

   B. $|MF| \geq |OF|$

   C. 以 M 为圆心且过 F 的圆与 C 的准线相切

   D. 当 $\angle OFM = 120^\circ$ 时，$\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6-a^2} = 1\ (a > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2。通过 F_2 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与双曲线交于第一象限的点 A，延长 AF_2 至 B 使得 $AB = AF_1$。若 $\triangle BF_1F_2$ 的面积为 $3\sqrt{6}$，则 a 的值为________。

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 3$，$a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$.

   (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

   (2) 令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$，证明：$b_n < b_{n+1} < 1$.

3 每日练习 3 (Due: 2025/1/13 22:00)

1. 设 $a>0$，函数 $y=\sin x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最小值为 s_a，在 $[2a,3a]$ 上的最小值为 t_a。当 a 变化时，以下不可能的情形是

   A. $s_a>0$ 且 $t_a>0$　　B. $s_a<0$ 且 $t_a<0$　　C. $s_a>0$ 且 $t_a<0$　　D. $s_a<0$ 且 $t_a>0$

2. 已知抛物线 $x^2=2py\,(p>0)$ 上两点 A,B 满足 $|AB|=12$，若线段 AB 的中点 M 的纵坐标的最小值为 4，则 $p=$

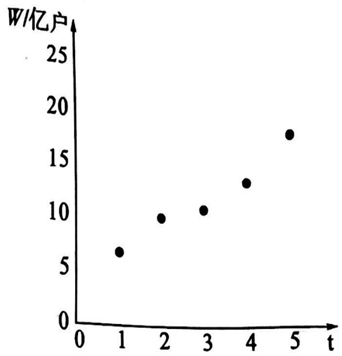
   A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 6

3. (多选) 若函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}\,(a\neq 0)$ 既有极大值也有极小值，则

   A. $bc>0$　　B. $ab>0$　　C. $b^2+8ac>0$　　D. $ac<0$

4. 现有 7 张卡片，分别写上数字 $1,2,2,3,4,5,6$。从这 7 张卡片中随机抽取 3 张，记所抽取卡片上数字的最小值为 ξ，则 $P(\xi=2)=$ ________，$E(\xi)=$ ________。

5. 移动物联网广泛应用于生产制造、公共服务、个人消费等领域。截至 2022 年底，我国移动物联网连接数达 18.45 亿，成为全球主要经济体中首个实现“物超人”的国家。下图是 2018–2022 年移动物联网连接数 w 与年份代码 t 的散点图，其中年份 2018–2022 对应的 t 分别为 1–5。



   (1) 根据散点图判断两个变量是否具有线性相关性，计算样本相关系数（精确到 0.01），并判断它们的相关性强度；

   (2) (i) 假设变量 x 与变量 Y 的 n 对观测数据为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$，两个变量满足一元线性回归模型：

$$\begin{cases} Y=bx+e, \\ E(e)=0,\ D(e)=\sigma^2. \end{cases}$$

请推导：当随机误差平方和 $Q=\sum\limits_{i=1}^{n}e_i^2$ 取得最小值时，参数 b 的最小二乘估计。$(e_i=y_i-bx_i)$

(ii) 令变量 $x=t-\bar{t}$, $y=w-\bar{w}$，求 y 关于 x 的经验回归方程，并预测 2024 年移动物联网连接数。

附：样本相关系数

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(w_i-\bar{w})^2}},$$

$$\sum_{i=1}^{5}(w_i-\bar{w})^2=76.9,\quad \sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})=27.2,\quad \sum_{i=1}^{5}w_i=60.8,\quad \sqrt{769}\approx 27.7.$$

4 每日练习 4 (Due: 2025/1/14 22:00)

1. 在平面四边形 $ABCD$ 中，E, F 分别为 AD, BC 的中点。若 $AB=2$，$CD=3$，且 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB}=4$, 则 $|EF|=$

   A. $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{42}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

2. 已知直线 m 与平面 α 所成的角为 θ_0，若直线 $n\subseteq\alpha$，直线 $m\subseteq\beta$，设 m 与 n 的夹角为 θ_1，α 与 β 的夹角为 θ_2，则

   A. $\theta_1\ge\theta_0,\ \theta_2\ge\theta_0$　　B. $\theta_1\ge\theta_0,\ \theta_2\le\theta_0$　　C. $\theta_1\le\theta_0,\ \theta_2\ge\theta_0$　　D. $\theta_1\le\theta_0,\ \theta_2\le\theta_0$

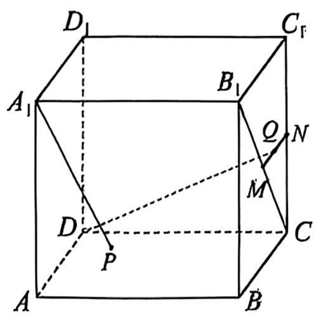
3. (多选) 已知 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面上的动点，M, N 分别是线段 B_1C 和 C_1C 的中点，点 Q 满足 $\overrightarrow{MQ}=\lambda\overrightarrow{MN}$ $(0\le\lambda\le1)$, 且 $A_1P\perp DQ$，设 P 的轨迹围成的图形为多边形 Ω，则

   A. Ω 为平行四边形

   B. 存在 λ，使得 Ω 的面积为 $\sqrt{22}$

   C. 存在 λ，使得 Ω 和底面 $ABCD$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$

   D. 点 B 和 Ω 形成的多面体的体积不变



4. 已知实数 $a>0$，i 是虚数单位。设集合

$$A=\left\{z\mid z=w+\frac{1}{w},\ |w|>1,\ w\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{C}\right\},$$

   集合 $B=\{z\mid |z-1+i|=a,\ z\in\mathbb{C}\}$, 如果 $B\subseteq A$，则 a 的取值范围为 ________。

5. 已知函数 $f(x)=e^{ax}\ln x$，其中 $a>0$。

   (1) 若 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线与两坐标轴所围成三角形的面积为 $\dfrac{e}{2}$，求 a 的值。

   (2) 若 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，证明：$f(x_0)<-e$.

5 每日练习 5 (Due: 2025/1/16 22:00)

1. 若 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 在区间 $[-\theta,\theta]$ 上是增函数，则 $\tan\theta$ 的最大值是

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

2. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且

$$\frac{S_2}{2}=\frac{S_6}{6}=2,$$

则 $a_{2025}=$

A. $\dfrac{1}{2^{2024}}$　　B. 2　　C. 2025　　D. 2^{2024}

3. (多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，若存在常数 T 与 H，且 $T>0$，使得任意 $x\in\mathbb{R}$ 恒有

$$f(x+T)=f(x)+H,$$

则称函数 $f(x)$ 是广义周期函数。下列说法正确的是：

A. 一次函数 $f(x)=kx+b$ (k,b 为常数) 是广义周期函数

B. 若 $f(x)$ 是广义周期函数，则存在实数 k，使得 $f(x)-kx$ 是周期函数

C. 若 $f(x)$ 有两个不同的对称中心，则 $f(x)$ 是广义周期函数

D. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是广义周期函数，则 $f(x)+g(x)$ 也是广义周期函数

4. 已知长为 2 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，则线段 AB 的中点的轨迹方程是 ____________________。

5. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，且 $c=5$。

(1) 若 $\dfrac{a}{4b}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$, $C=\dfrac{\pi}{2}$，求 a 的值；

(2) 若 $ab=20$，求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值。