目录

1 每日练习 1 (Due: 2025/1/11 22:00)

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x\le 0,\\ -\ln x, & x>0\end{cases}$。若函数 $g(x)=f(x)-a$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $[0,4]$　　B. $[0,2]$　　C. $(-\infty,4]$　　D. $(-\infty,2]$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，则使得 $S_m=b_m$ 成立的正整数 m 的个数的最大值是（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. (多选) 已知圆 $O_1:(x-1)^2+y^2=4$，圆 $O_2:(x-5)^2+y^2=4m$，下列说法正确的是（　）

A. 若 $m=4$，则圆 O_1 与圆 O_2 相交

B. 若 $m=4$，则圆 O_1 与圆 O_2 外离

C. 若直线 $x-y=0$ 与圆 O_2 相交，则 $m>\dfrac{25}{8}$

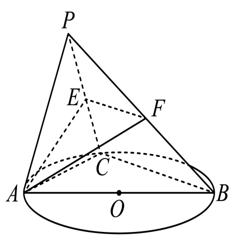
D. 若直线 $x-y=0$ 与圆 O_1 相交于 M,N 两点，则 $|MN|=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

4. 袋中有 6 个大小相同的球，其中 1 个红球，m 个白球，n 个黑球，现依次取球，每次取出一个，取出不放回，直到取出的球中有两种不同颜色的球时结束。已知取到 1 个红球 1 个白球的概率为 $\dfrac{1}{5}$，则 $m=$____，用 X 表示终止时取球的次数，则随机变量 X 的数学期望 $E(X)=$____。

5. 如图，C 是以 AB 为直径的圆 O 上异于 A,B 的点，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$\triangle PAC$ 中，$PA=PC=AC=2$，$BC=4$，E,F 分别是 PC,PB 的中点：

(1) 证明：$BC\perp$ 平面 PAC；

(2) 记平面 AEF 与平面 ABC 的交线为直线 l，点 Q 为直线上动点，求直线 PQ 与平面 AEF 所成的角的取值范围。



2 每日练习 2 (Due: 2025/1/12 22:00)

1. 已知 $a \in \mathbb{R}$，若不等式 $\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) - a\right]\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) - a - 1\right] < 0$ 在 $(0, 2025)$ 中整数解有 m 个，则 m 的个数不可能是（　）

   A. 0　　B. 338　　C. 674　　D. 1012

2. 已知函数 $f(x) = x|x-a| - 2a^2$。若当 $x > 2$ 时，$f(x) > 0$，则 a 的取值范围是（　）

   A. $(-\infty, 1]$　　B. $[-2, 1]$　　C. $[-1, 2]$　　D. $[-1, +\infty)$

3. (多选) 已知 $F(2, 0)$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点，M 是 C 上的点，O 为坐标原点。则

   A. $p = 4$

   B. $|MF| \geq |OF|$

   C. 以 M 为圆心且过 F 的圆与 C 的准线相切

   D. 当 $\angle OFM = 120^\circ$ 时，$\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6-a^2} = 1\ (a > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2。通过 F_2 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与双曲线交于第一象限的点 A，延长 AF_2 至 B 使得 $AB = AF_1$。若 $\triangle BF_1F_2$ 的面积为 $3\sqrt{6}$，则 a 的值为________。

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 3$，$a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$.

   (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

   (2) 令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$，证明：$b_n < b_{n+1} < 1$.

3 每日练习 3 (Due: 2025/1/13 22:00)

1. 设 $a>0$，函数 $y=\sin x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最小值为 s_a，在 $[2a,3a]$ 上的最小值为 t_a。当 a 变化时，以下不可能的情形是

A. $s_a>0$ 且 $t_a>0$ B. $s_a<0$ 且 $t_a<0$ C. $s_a>0$ 且 $t_a<0$ D. $s_a<0$ 且 $t_a>0$

2. 已知抛物线 $x^2=2py\,(p>0)$ 上两点 A,B 满足 $|AB|=12$，若线段 AB 的中点 M 的纵坐标的最小值为 4，则 $p=$

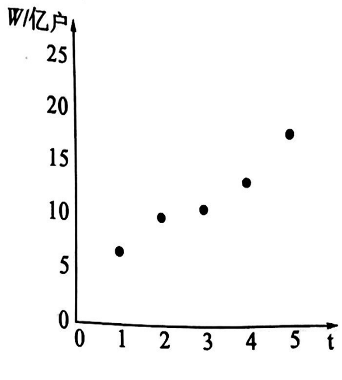
A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

3. (多选) 若函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}\,(a\neq 0)$ 既有极大值也有极小值，则

A. $bc>0$ B. $ab>0$ C. $b^2+8ac>0$ D. $ac<0$

4. 现有 7 张卡片，分别写上数字 $1,2,2,3,4,5,6$。从这 7 张卡片中随机抽取 3 张，记所抽取卡片上数字的最小值为 ξ，则 $P(\xi=2)=$ ________，$E(\xi)=$ ________。

5. 移动物联网广泛应用于生产制造、公共服务、个人消费等领域。截至 2022 年底，我国移动物联网连接数达 18.45 亿，成为全球主要经济体中首个实现“物超人”的国家。下图是 2018–2022 年移动物联网连接数 w 与年份代码 t 的散点图，其中年份 2018–2022 对应的 t 分别为 1–5。



(1) 根据散点图判断两个变量是否具有线性相关性，计算样本相关系数（精确到 0.01），并判断它们的相关性强度；

(2) (i) 假设变量 x 与变量 Y 的 n 对观测数据为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$，两个变量满足一元线性回归模型：

$$\begin{cases} Y=bx+e, \\ E(e)=0,\ D(e)=\sigma^2. \end{cases}$$

请推导：当随机误差平方和 $Q=\sum_{i=1}^{n}e_i^2$ 取得最小值时，参数 b 的最小二乘估计。$(e_i=y_i-bx_i)$

(ii) 令变量 $x=t-\bar{t}$, $y=w-\bar{w}$，求 y 关于 x 的经验回归方程，并预测 2024 年移动物联网连接数。

附：样本相关系数

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(w_i-\bar{w})^2}},$$

$$\sum_{i=1}^{5}(w_i-\bar{w})^2=76.9,\quad \sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})=27.2,\quad \sum_{i=1}^{5}w_i=60.8,\quad \sqrt{769}\approx 27.7.$$

4　每日练习 4 (Due: 2025/1/14 22:00)

1. 在平面四边形 $ABCD$ 中，E, F 分别为 AD, BC 的中点。若 $AB = 2$，$CD = 3$，且 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$, 则 $|EF| =$

   A. $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{42}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

2. 已知直线 m 与平面 α 所成的角为 θ_0，若直线 $n \subseteq \alpha$，直线 $m \subseteq \beta$，设 m 与 n 的夹角为 θ_1，α 与 β 的夹角为 θ_2，则

   A. $\theta_1 \geq \theta_0,\ \theta_2 \geq \theta_0$　　B. $\theta_1 \geq \theta_0,\ \theta_2 \leq \theta_0$　　C. $\theta_1 \leq \theta_0,\ \theta_2 \geq \theta_0$　　D. $\theta_1 \leq \theta_0,\ \theta_2 \leq \theta_0$

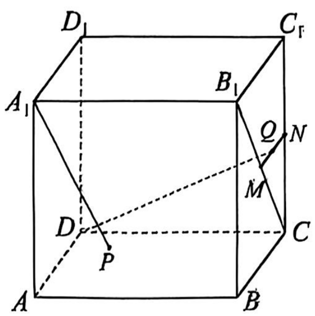
3. (多选) 已知 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 表面上的动点，M, N 分别是线段 B_1C 和 C_1C 的中点，点 Q 满足 $\overrightarrow{MQ} = \lambda\overrightarrow{MN}$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$, 且 $A_1P \perp DQ$，设 P 的轨迹围成的图形为多边形 Ω，则

   A. Ω 为平行四边形

   B. 存在 λ，使得 Ω 的面积为 $\sqrt{22}$

   C. 存在 λ，使得 Ω 和底面 $ABCD$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$

   D. 点 B 和 Ω 形成的多面体的体积不变



4. 已知实数 $a > 0$，i 是虚数单位。设集合

$$A = \left\{ z \mid z = w + \frac{1}{w},\ |w| > 1,\ w \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C} \right\},$$

   集合 $B = \{z \mid |z - 1 + i| = a,\ z \in \mathbb{C}\}$, 如果 $B \subseteq A$，则 a 的取值范围为 ________。

5. 已知函数 $f(x) = e^{ax} \ln x$，其中 $a > 0$。

   (1) 若 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线与两坐标轴所围成三角形的面积为 $\dfrac{e}{2}$，求 a 的值。

   (2) 若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，证明：$f(x_0) < -e$.

5 每日练习 5 (Due: 2025/1/17 22:00)

1. 若 $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ 在区间 $[-\theta, \theta]$ 上是增函数，则 $\tan\theta$ 的最大值是

   A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

2. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且

$$\frac{S_2}{2} = \frac{S_6}{6} = 2,$$

   则 $a_{2025} =$

   A. $\dfrac{1}{2^{2024}}$　　B. 2　　C. 2025　　D. 2^{2024}

3. (多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，若存在常数 T 与 H，且 $T > 0$，使得任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒有

$$f(x+T) = f(x) + H,$$

   则称函数 $f(x)$ 是广义周期函数。下列说法正确的是：

   A. 一次函数 $f(x) = kx + b$ (k, b 为常数) 是广义周期函数

   B. 若 $f(x)$ 是广义周期函数，则存在实数 k，使得 $f(x) - kx$ 是周期函数

   C. 若 $f(x)$ 有两个不同的对称中心，则 $f(x)$ 是广义周期函数

   D. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是广义周期函数，则 $f(x) + g(x)$ 也是广义周期函数

4. 已知长为 2 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，则线段 AB 的中点的轨迹方程是 ________ ____________。

5. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c，且 $c = 5$。

   (1) 若 $\dfrac{a}{4b} = \dfrac{\sin B}{\sin A}$, $C = \dfrac{\pi}{2}$，求 a 的值；

   (2) 若 $ab = 20$，求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值。

6 每日练习 6 (Due: 2025/1/18 22:00)

1. 已知函数 $f(x)=\ln\left(e^{ax-6}+1\right)-x$ 的图像关于直线 $x=3$ 对称，则 $f(x)$ 的值域为

   A. $[\ln 2-3,0)$　　B. $[\ln 2-3,+\infty)$　　C. $[\ln 3-2,0)$　　D. $[\ln 3-2,+\infty)$

2. (多选) 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$， E 为 CC_1 的中点，则

   A. $A_1C_1 \parallel$ 平面 ABE　　B. $AC_1 \parallel$ 平面 BDE　　C. $BE\perp$ 平面 A_1B_1E　　D. $BE\perp$ 平面 B_1D_1E

3. 已知 $x^8=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_8(x-1)^8$，则 a_2 的值为________

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是公差为 6 的等差数列，且 $\{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}\}$ 是公差为 9 的等差数列，且 $a_1=1$.

   (1) 证明：$\{a_n\}$ 是等差数列；

   (2) 设 b 是方程 $2x^3+3x-2=0$ 的根，数列 $\{b^{a_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$S_n<\dfrac{2}{3}$.

7 每日练习 7 (Due: 2025/1/19 22:00)

1. 记函数 $f(x)=\sin 2x, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的图像为曲线 C，直线 $y=m$ 与曲线 C 交于两点 A,B，直线 $y=6m$ 与曲线 C 交于两点 D,E，若 $|AB|=2|DE|$，则 $m=$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{4}$ C. $\dfrac{1}{8}$ D. $\dfrac{1}{16}$

2. (多选) 有一组成对样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$，设 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i, \bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，通过这些数据可以得到新成对样本数据 $(x_1-\bar{x},y_1-\bar{y}),(x_2-\bar{x},y_2-\bar{y}),\ldots,(x_n-\bar{x},y_n-\bar{y})$，接下来就这两个组数据分别先计算样本相关系数，再根据最小二乘法计算经验回归直线，最后计算残差平方和，则

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘计算公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\quad \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$.

A. 两组数据的残差平方和相同 B. 两组数据的相关系数相同

C. 两组经验回归直线的斜率相同 D. 两组经验回归直线的截距相同

3. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且

$$\frac{1}{\tan A}+\frac{2}{\tan B}=\frac{3}{\tan C},$$

则 $\dfrac{c^2}{a^2+2b^2}=$ ________.

4. 已知 $\triangle DEF$ 的顶点 E 在 x 轴上，$F\left(\dfrac{1}{4},0\right)$，$|DF|=|EF|$，且边 DE 的中点 M 在 y 轴上，设 D 的轨迹为曲线 Γ.

(1) 求 Γ 的方程；

(2) 若正三角形 ABC 的三个顶点都在 Γ 上，且直线 AB 的倾斜角为 45°，求 $|AB|$.

8 每日练习 8 (Due: 2025/1/20 22:00)

1. 已知三次函数 $f(x)=2ax(x-b)^2$ 的定义域和值域都为 $[a,b]\ (a\neq b)$，则 $b=$

   A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 0　　C. 1　　D. $\dfrac{3}{2}$

2. (多选) 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)+[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[1.9]=1, [3]=3$。当 $0<x\leq 1$ 时，$f(x)=x\ln x$，设 x_n 为 $f(x)$ 从小到大的第 n 个极小值点，则

   A. $f(2)=2$

   B. $f(n)=2^n-n-1\ (n\in\mathbb{N}^*)$

   C. 数列 $\{x_n\}$ 是等差数列

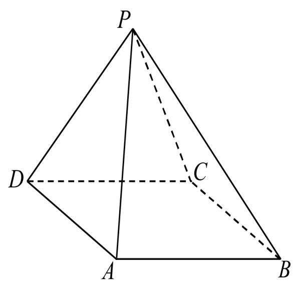
   D. $f(x_n)<0$ 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 恒成立

3. 从集合 $U=\{1,2,3,4\}$ 的所有非空子集中任选两个，若选中的两个子集的交集为空集的概率为 ________.

4. 四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ADC=60^\circ$，$PA=PD$。

   (1) 证明：$PC\perp AD$；

   (2) 若 $PA=AD=4, PB=2\sqrt{7}$，求平面 PAB 与平面 $ABCD$ 所成二面角的正弦值。



9 每日练习 9 (Due: 2025/1/22 22:00)

1. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$，$\sin 2\alpha = m \sin 2\beta$，$\tan(\alpha+\beta) = n \tan(\alpha-\beta)$，则

   A. $m = \frac{1-n}{1+n}$ B. $m = \frac{1+n}{1-n}$ C. $n = \frac{m-1}{m+1}$ D. $n = \frac{m+1}{m-1}$

2. (多选) 设 A, B 是一个随机试验中的两个事件，若 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{1}{4}$，则

   A. $P(\overline{B}) = \frac{2}{3}$ B. $P(B|A) = \frac{1}{2}$ C. $P(\overline{A}B) = \frac{1}{12}$ D. $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

3. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a>0, b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线 l 与圆 $O: x^2+y^2=a^2$ 相切于点 M，若 $|MF_1| = 3|OM|$，则双曲线的渐近线方程为 ____________________.

4. 已知函数 $f(x) = (a+2)e^x + ae^{-x} - 2x\ (a \in \mathbb{R})$.

   (1) 若 $a=0$，求 $f(x)$ 的极值；

   (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性。