机密★考试结束前

（在本试卷上答题无效）

山河·大联考 2025届新高考限时训练试题（二）

数 学

选题：王良涛　排版、校对：山河文化试题研究中心

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题所给的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x\mid 0<x\le 3\}$，$B=\{x\mid x^2\le 4\}$，则 $A\cap B=$

A．$\varnothing$　　B. $\{x\mid -2\le x\le 3\}$　　C. $\{x\mid 0<x\le 2\}$　　D. $\{x\mid -2\le x<0\}$

2．已知 $x\log_2 3=1$，则 $3^x+3^{-x}=$

A．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{5}{2}$　　C．$\frac{10}{3}$　　D．$\frac{17}{4}$

3．设严格单调递减数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_{n+1}=a_n+1$，则 a_1 的值可以为

A. 0　　B．-1　　C．1　　D．2

4．设 $X\sim B(99,0.7)$，若对任意的 $k\in\{0,1,2...99\}$ 都有 $P(X=k)\le P(X=k_0)$，则 $k_0=$

A. 64 或 65　　B. 69 或 70　　C. 67　　D. 72

5．已知向量 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ 满足 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$，且 $|\mathbf{a}|=1, |\mathbf{b}|=2, |\mathbf{c}|=\sqrt{3}$，则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{5\pi}{6}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

6．已知 $\tan\alpha=2$，则 $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$

A．$-\frac{1}{3}$　　B．-3　　C．3　　D．± 3

7．已知 P 为圆 $O: x^2+y^2=1$ 上的动点（不在坐标轴上），过 P 作 $PQ\perp x$ 轴，垂足为 Q，将△OPQ 绕 y 轴旋转一周，所得几何体的体积最大时，线段 OQ 的长度为

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

8．函数 $f(x)=|\sin 2x|+2\sin x$ 的值域为

A．$[-2,3]$　　B．$\left[-2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$　　C．$\left[-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$　　D．$\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题所给的四个选项中，有多项是符合题目要求的。全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分。

9．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是棱 C_1D_1 上的动点（不含端点），则

A. DC // 平面 BPD_1　　B. $B_1C \perp BP$

C. 四面体 PAB_1C 的体积为定值　　D. 存在点 P，使得平面 $BB_1P \perp$ 平面 AA_1P

10. 已知 A_1，A_2 为样本空间 Ω 的非空子集，设随机变量

$$X_i:\Omega\to\{0,1\},\ X_i(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A_i\\ 0, & \omega\notin A_i\end{cases},\ i=1,2$$

若 $P(A_1\mid A_2)=P(A_1\mid\overline{A_2})$，$P(A_i)=p_i(i=1,2)$，则

A. $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$　　B. $P(\overline{A_2}\mid A_1)+P(A_2)=1$

C. $E[(X_1-p_1)^2]\le E[(X_1-p_2)^2]$　　D. $D(|X_1-X_2|)>D(X_1+X_2)$ 可能成立

11. 我们把既有对称中心又有对称轴的曲线称为“优美曲线”，“优美曲线”与其对称轴的交点称为“优美曲线”的顶点，已知“优美曲线” $C:x^2+25x^2y^2+y^2-9=0$，则

A. 曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称

B. 曲线 C 有 4 个顶点

C. 曲线 C 与直线 $y=-x+3$ 有 4 个交点

D. 曲线 C 上的点到原点距离的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{5}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．在 $(1-2x)^5$ 的展开式中，x^3 的系数为________.（用数字作答）

13. 设复平面的上半平面内有一菱形 $OABC$，且 $\angle AOC=\dfrac{2\pi}{3}$.若 A 对应的复数为 $2+i$，则 B 对应的复数为________.

14. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l. 过 F 的直线交 C 于 A，B 两点，过 A，B 分别作 l 的垂线，垂足分别为 M，N，若 $\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}\overrightarrow{FB}$，则 $\dfrac{S_{\triangle MNF}}{S_{\triangle NBF}}=$ ________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知. $a+b=2c\cos B$.

（1）求证：$C=2B$；

（2）若△ABC 为锐角三角形，求 $\dfrac{c}{b\sin B}$的取值范围.

16.（15 分）

已知在正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=6$，$A_1B_1=4$.

（1）若 $CC_1=\sqrt{2}$，求证：$CC_1\perp$ 平面 AA_1B_1B；

（2）若三棱台的高为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$，求平面 AA_1B_1B 与平面 BB_1C_1C 夹角的余弦值.

17.（15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-\frac{1}{x})$，其中 $a>0$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求证：

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_1+x_2)>\ln 2-\frac{3}{4}.$$

18.（17 分）

已知 A，B 为椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上，下顶点，点 $M(2\lambda,0)$，$N(2,\lambda-1)$，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$ 且 $\lambda\neq 1$，直线 AM 与 BN 交于点 P.

（1）求证：点 P 在 C 上；

（2）若直线 MN 交 C 于 S，T 两点，且 $|MS|\cdot|MT|=\frac{15}{8}$，求 $|ST|$.

19.（17 分）

正整数的划分在置换群及其表示理论研究中有着重要应用.设 k，n 为正整数，正整数序列 $(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_k)$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k=n$，且 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge...\ge\lambda_k\ge 1$，$1\le k\le n$.则称 $(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_k)$ 为 n 的一个 k 部划分.记 $p_k(n)$ 为 n 的所有 k 部划分的个数.

（1）求 $p_3(6)$，$p_2(5)$；

（2）求证：$p_k(n)=p_{k-1}(n-1)+p_k(n-k)\,(k\ge 2)$；

（3）求证：$p_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(n-k)$.