目录

1 概率统计 回归教材训练 1

1. 四名同学各抛骰子 5 次，分别记录每次骰子出现的点数。根据四名同学的统计结果，可以判断出一定没有出现点数 6 的是

   A. 平均数为 3，中位数为 2　　B. 中位数为 3，众数为 2

   C. 平均数为 2，方差为 2.4　　D. 中位数为 3，方差为 2.8

2. 已知总体划分为 3 层，通过分层随机抽样，各层抽取的样本、样本均值和样本方差分别为：$l, \bar{x}, s_1^2; m, \bar{y}, s_2^2; n, \bar{z}, s_3^2$，记总体的样本均值为 $\bar{w}$，样本方差为 s^2，证明：

$$\bar{w} = \frac{l}{l+m+n}\bar{x} + \frac{m}{l+m+n}\bar{y} + \frac{n}{l+m+n}\bar{z},$$

$$s^2 = \frac{1}{l+m+n}\left\{l[s_1^2 + (\bar{x}-\bar{w})^2] + m[s_2^2 + (\bar{y}-\bar{w})^2] + n[s_3^2 + (\bar{z}-\bar{w})^2]\right\}.$$

3. 在对树人中学高一年级学生身高的调查中，采用样本量比例分配的分层随机抽样。如果不知道样本数值，只知道抽取了男生 25 人，均值和方差分别为 170 和 10，抽取了女生 25 人，均值和方差分别为 160 和 40。你能由这些数据计算出总样本的方差，并对高一年级全体学生的身高方差作出估计吗？

4. 从两名男生（记为 B_1 和 B_2）、两名女生（记为 G_1 和 G_2）中抽取两人。

   (1) 分别计算有放回简单随机抽样、不放回简单随机抽样和按性别等比例分层随机抽样下，抽到的两人都是男生的概率；

   (2) 比较这三种抽样方式在避免极端样本（例如全是男生的样本）上的优劣。

5. 从 1～20 这 20 个整数中随机选择一个数，设事件 A 表示选到的数能被 2 整除，事件 B 表示选到的数能被 3 整除。求下列事件的概率：

   (1) 这个数既能被 2 整除也能被 3 整除；

   (2) 这个数能被 2 整除或能被 3 整除；

(3) 这个数既不能被 2 整除也不能被 3 整除。

6. 互为对立的两个事件是非常特殊的一种事件关系。请分别证明如果事件 A 与事件 B 相互独立，那么 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 是独立的。

7. 一个均匀的正八面体，八个面分别标以数字 1 到 8，任意拨捏一次这个正八面体，观察它与地面接触的面上的数字，得到样本空间为 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$。构造适当的事件 A, B, C，使得 $P(A)P(B)P(C) = P(ABC)$ 成立，但不满足 A, B, C 三个事件是**两两独立**的。

8. “用事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 估计概率 $P(A)$，重复试验次数 n 越大，估计的就越精确”，判断这种说法是否正确，并举例说明。

9. 有两个盒子，其中 1 号盒子中有 95 个红球，5 个白球；2 号盒子中有 5 个红球，95 个白球。现从两个盒子中任意选择一个，再从中任意摸出一个球。如果摸到的是红球，你认为选择的是哪个盒子？做出你的推断，你的推断犯错误的概率是多少？

10. (1) 4 名同学分别报名参加学校的足球队、篮球队、乒乓球队，每人限报其中的一个运动队，不同报法的种数是 3^4 还是 4^3？

(2) 3 个班分别从 5 个景点中选择一处游览，不同选择的种数是 3^5 还是 5^3？

11. 在国庆长假期间，要从 7 人中选择若干人在 7 天假期值班（每天只需 1 人值班），不出现同一人连续值班 2 天，有多少种可能的安排方法？

12. 2160 有多少个不同的正因数？这些正因数的和是多少？

13. 用 0 ～ 9 这 10 个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

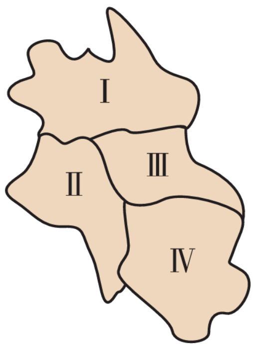
14. 求证：

(1) $1+\sum_{k=1}^{n} k \cdot A_k^k = A_{k+1}^{k+1}$;

(2) $\dfrac{(n+1)!}{k!} - \dfrac{n!}{(k-1)!} = \dfrac{(n-k+1)\cdot n!}{k!} \quad (k \le n)$.

15. 证明等式 $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$ 并构造一个实际背景，说明这个等式的意义。

16. 如图，现要用 5 种不同的颜色对某市的 4 个区县地图进行着色，要要求有公共边的两个地区不能用同一种颜色，共有几种不同的着色方法？



17. (1) 平面内有两组平行线，一组有 m 条，另一组有 n 条，这两组平行线相交，可以构成多少个平行四边形？

(2) 空间有三组平行平面，第一组有 m 个，第二组有 n 个，第三组有 l 个，不同两组的平面都相交，且交线不都平行，可以构成多少个平行六面体？

18. 移动互联网给人们的沟通交流带来了方便。某种移动社交软件平台，既可以供用户彼此添加“好友”单独交流，又可以供多个用户建立一个“群”（“群里”的人彼此不一定是“好友”关系）共同交流。如果某人在平台上发了信息，其他的“好友”都可以看到，但“群”里的非“好友”不能看到。现在这个“群”里有一个 10 人的“群”，其中 1 人在平台上发了一条信息，“群”里有 3 人说看到，不能看到的有 7 人。那么这个“群”里与信息发送人是“好友”关系的情况可能有多少种？

19. 证明：

(1) $(n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除；

(2) $99^{10}-1$ 能被 1000 整除；

(3) 55^{55} 除以 8 所得的余数是 7。

20. 求证：

$$2^n-C_n^1\times 2^{n-1}+C_n^2\times 2^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\times 2+(-1)^n=1.$$

21. (1) 求 $\left(9x+\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式的常数项；

(2) 已知 $(1+\sqrt{x})^n$ 的展开式中第 9 项、第 10 项、第 11 项的二项式系数构成等差数列，求 n；

(3) 求 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数；

(4) 求 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数。

22. 在 $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 的展开式中，含 x^2 项的系数是多少？

2 概率统计 回归教材训练 2

1. 证明：当 $P(AB)>0$ 时，$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$。进一步，你能归纳出 $P(A_1A_2\cdots A_n)$ 的公式吗？

2. 已知 3 张奖券中只有 1 张有奖，甲、乙、丙 3 名同学依次不放回地各随机抽取 1 张。

   (1) 他们中奖的概率与抽奖的顺序有关吗？

   (2) 推广到 n 张奖券和 n 名同学，请你验证 (1) 的结论是否仍然成立。

3. 已知 $P(A)>0, P(B)>0, P(B|A)=P(B)$ 等价于 $P(A|B)=P(A)$. 其中一式成立的情况下，还有 $P(B|\overline{A})=P(B), P(A|\overline{B})=P(A)$. $\rightsquigarrow$ 概率统计回归教材训练 1 Ex.6

4. 在 A、B、C 三个地区暴发了流感，这三个地区分别有 6%、5%、4% 的人患了流感。假设这三个地区的人数的比例为 5:7:8，现从这三个地区中任意选取一个人。

   (1) 求这个人患流感的概率；

   (2) 如果此人患流感，求此人选自 A 地区的概率。

5. 甲、乙、丙三人相互做乒乓球训练，第 1 次由甲将乒乓球传出，每次传球时，传球者都可能地将球传给两人中的任何一人。求 n 次乒乓球在甲手中的概率。

6. 证明： $E(aX+b)=aE(X)+b,\ D(aX+b)=a^2D(X)$.

7. 设 $E(X)=\mu$， $a\neq\mu$，证明 X 相对于 μ 的偏离程度 $E\left[(X-\mu)^2\right]$ 与 X 相对于 a 的偏离程度 $E\left[(X-a)^2\right]$ 满足

$$E\left[(X-\mu)^2\right]<E\left[(X-a)^2\right]\rightsquigarrow \mu=E(X)=\arg\min_{a\in\mathbb{R}} E\left[(X-a)^2\right].$$

8. 某种资格证考试，每位考生一年内最多有 3 次考试机会。一旦某次考试通过，便可领取资格证书，不再参加以后的考试，否则继续参加考试，直到用完 3 次机会。李明决定参加考试，如他每次参加考试通过的概率依次为 0.6，0.7，0.8，且每次考试是否通过相互独立，试求：

   (1) 李明在一年内参加考试数 X 的分布列；

   (2) 李明在一年内领取到资格证书的概率。

9. 一个数轴上的质点在随机外力的作用下，从原点 O 出发，每隔 1 秒等可能地向左或向右移动一个单位，共移动 6 次。求下列事件的概率：

   (1) 质点回到原点；

   (2) 质点位于 4 的位置。

10. 设 $X \sim B(n, p)$，求证：

   (1) $\sum_{k=0}^{n} P\{X=k\} = 1$;

   (2) 先证明组合恒等式 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$，再证明

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP\{X=k\} = np.$$

   (3) $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P\{X=k\} - n^2p^2 = np(1-p)$ (Hint: $k^2 = (k+1)k - k$.)

11. 一般地，假设一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品。从 N 件产品中随机抽取 n 件（不放回），用 X 表示抽取的 n 件产品中的次品数，则 X 的分布列为：

$$P(X=k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = m, m+1, m+2, \ldots, r.$$

其中，$n, N, M \in \mathbb{N}^*, M \leq N, n \leq N, m = \max(0, n-N+M), r = \min(n, M)$。即 X 服从超几何分布，求证：

(1) $\sum\limits_{k=m}^{r} C_M^k C_{N-M}^{n-k} = C_N^n$;

(2) 利用组合恒等式 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ 和 (1) 所证明结论证明

$$E(X) = \sum_{k=m}^{r} kP\{X=k\} = \frac{nM}{N}.$$

(3) $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 P\{X=k\} - \dfrac{n^2M^2}{N^2} = \dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$. (Hint: $k^2 = (k+1)k - k$.)

(4) 可以看出，当 $N >> n$ 时，不放回抽取几乎没有影响每次抽到次品的概率，于是可以用二项分布近似超几何分布，也即

$$D(X) \approx n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

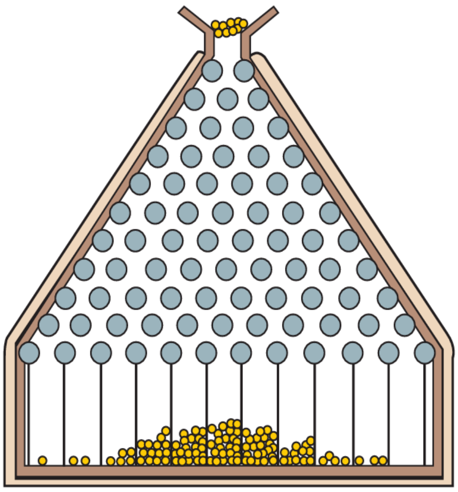
12. 一个袋子中有 10 个大小相同的球，其中有 4 个黄色球，6 个白球，从中随机地抽出 5 个球作为样本。用 X 表示样本中黄色球的个数。

(1) 分别求有放回摸球和不放回摸球，求 X 的分布列；

(2) 分别求有放回摸球和不放回摸球，用样本中黄色球的比例估计总体黄色球的比例，求误差的绝对值不超过 0.1 的概率。

(3) 为了使得用样本中黄色球的比例估计总体黄色球的比例尽可能准确，应该采用哪种摸球方式？

13. 下图是一块高尔顿板的示意图。在一块木板上钉着与排列相互平行但相互错开的圆柱形小木钉，小木钉之间留有适当的空隙作为通道，前面挡有一块玻璃。将小球从顶端放入，小球下落的过程中，每次碰到小木钉后都会等概率地向左或向右落下，最后落入底部的格子中。格子从左到右分别编号为 0，1，2，...，10，用 X 表示小球最后落入格子的编号，求 X 的分布列。



14. 甲、乙两人选手进行象棋比赛，如果每局比赛甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，那么采用 3 局 2 胜制还是采用 5 局 3 胜制对甲更有利？

15. 设 $X \sim B(n, p)$，求出使得 $P\{n = k\}$ 最大的 k 的值。

16. 某单位有 10000 名职工，想通过检测的方法筛查乙肝病毒携带者。如果对每个人的血样采一化验，就需要化验 10000 次。统计专家提出了一种化验方法：随机地按 5 人一组分组，然后将各组 5 人的血样混合再化验。如果混合血样是阴性，说明这 5 个人全部阴性；如果混合血样是阳性，说明其中至少有一人的血样是阳性，需要再分别化验一次。

(1) 按照这种化验方法能减少化验次数吗？

(2) 如果携带病毒的人只有 2%，按照 k 个人一组，k 取多大时化验次数最少？

17. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据，计算得到 $\chi^2 = 2.974$。依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验 $P\{\chi^2 \geq 3.841 = x_\alpha\} = 0.05 = \alpha$，结论为：

A. 变量 X 与 Y 不独立

B. 变量 X 与 Y 不独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.05

C. 变量 X 与 Y 独立

D. 变量 X 与 Y 独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.05

18. 根据变量 Y 和 x 的成对样本数据，由一元线性回归模型

$$\hat{y} = bx + a + e, \quad E(e) = 0, \quad D(e) = \sigma^2$$

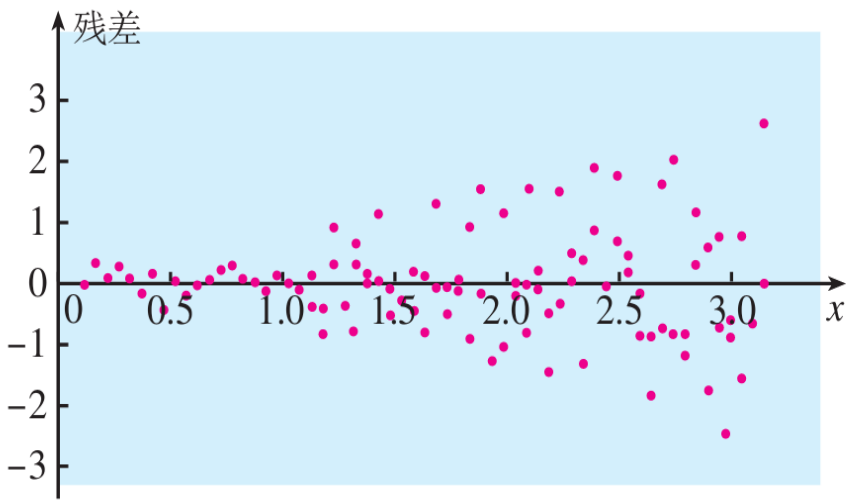
得到经验回归模型，模型误差如图所示。模型误差

A. 满足一元线性回归模型的所有假设

B. 不满足一元线性回归模型的 $E(e) = 0$ 的假设

C. 不满足一元线性回归模型的 $D(e) = \sigma^2$ 的假设

D. 不满足一元线性回归模型的 $E(e) = 0$ 和 $D(e) = \sigma^2$ 的假设



19. 如果散点图中所有的散点都落在一条斜率为非 0 的直线上，请回答下列问题：

(1) 解释变量和响应变量的关系是什么？

(2) R^2 是多少？

20. 设变量 Y 与 x 之间高度线性相关，且满足一元线性回归模型

$$\begin{cases} Y = bx + a + e \\ E(e) = 0,\ D(e) = \sigma^2 \end{cases}$$

$(x_i, y_i)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为已知样本数据。用使得残差平方和 $Q(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - bx_i - a)^2$ 取得最小值时的 $\hat{a}, \hat{b}$ 作为 a, b 的估计值，称为 a, b 的最小二乘估计值。证明：

(1) 对任意实数 k 都有 $\sum\limits_{i=1}^{n}[(y_i - \bar{y}) - k(x_i - \bar{x})] = 0$;

(2) $(\bar{x}, \bar{y})$ 在经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上；

(3) $\hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

21. 设 X 和 Y 为定义在样本空间 Ω 上取值于 $\{0, 1\}$ 的成对分类变量。$\{X = 0\}$ 和 $\{X = 1\}$，$\{Y = 0\}$ 和 $\{Y = 1\}$ 都是互为对立事件。记零假设 $H_0 : P(Y = 1 \mid X = 0) = P(Y = 1 \mid X = 1)$，这里，$P(Y = 1 \mid X = 0)$ 表示从 $X = 0$ 的条件下判断 $Y = 1$ 的概率。

(1) 叙述分类变量 X 与 Y 独立的定义；

(2) 证明 H_0 成立等价于分类变量 X 与 Y 独立。

22. 为比较甲、乙两所学校学生的数学水平，采用简单随机抽样的方法抽取88名学生．通过测验得到了如下数据。分别记学校和数学成绩为分类变量 X 与 Y。

学校	数学成绩		合计
	不优秀 ($Y=0$)	优秀 ($Y=1$)	
甲校 ($X=0$)	33	10	43
乙校 ($X=1$)	38	7	45
合计	71	17	88

(1) 若利用频率稳定于概率的原理，分类变量 X 与 Y 是否独立？

(2) 依据 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，证明：学校和数学成绩独立；

(3) 如果上表中所有数据都扩大的原来的 10 倍，在相同的检验标准下，再用 $\alpha=0.1$ 的独立性检验推断学校和数学成绩之间的关系，结论还一样吗？请你试着解释其中的原因。

附：

(a) $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$;

(b) χ^2 独立性检验中可能用到的小概率值 α 与对应的临界值 x_α 如下，即 $P\{\chi^2\geq x_\alpha\}=\alpha$:

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

3 数列 回归教材训练

1. 已知数列 S_n 是等比数列 a_n 的前 n 项和，S_3, S_9, S_6 成等差数列。求证：a_2, a_8, a_5 成等差数列。

2. 求该数列的一个通项公式和一个前 n 项和公式： $6, 66, 666, 6666, 66666, \ldots$.

3. 是否存在一个各项都小于 5 的无穷递增数列？如果存在，写出一个满足条件的数列的通项公式；如果不存在，说明理由。

4. 已知两个等比数列的公比不相等，但第 5 项相等，这两个等比数列中除第 5 项外，还有可能出现序号与数值都相等的项吗？

5. 如果等比数列 $\{a_n\}$ 中公比 $q > 1$，那么 $\{a_n\}$ 一定是递增数列吗？为什么？

6. 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式是
$$S_n = An^2 + Bn + C,$$
其中 A, B, C 都是常数，那么数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列吗？为什么？

7. 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式是
$$S_n = Aq^n + B,$$
其中 A, B 都是常数，且 $A \neq 0, q \neq 0$，那么数列 $\{a_n\}$ 一定是等比数列吗？为什么？

8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n = m, a_m = n$, 且 $n \neq m$, 求 a_{m+n}.

9. 已知等差数列 $-4.2, -3.7, -3.2, \ldots$ 的前 n 项和为 S_n, S_n 是否存在最大（小）值？如果存在，求出取最值时 n 的值。

10. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_9 < 0, S_{10} > 0$，则此等差数列的前多少项和最小？

11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_3 + a_{11} = 6$，求 S_{13}。

12. 已知函数 $f(n) = |n-1| + |n-2| + \cdots + |n-20|$，其中 n 是自然数。当 n 为何值时，$f(n)$ 取得最小值？最小值是多少？

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_1 = 1024$，公比 $q = \dfrac{1}{2}$。若 T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积，求 T_n 的最大值。

14. 已知两个等差数列 $2, 6, 10, \cdots, 190$ 及 $2, 8, 14, \cdots, 200$，将这两个等差数列的公共项按从小到大的顺序组成一个新数列。求这个新数列的各项之和。

15. 数列 $\{a_n\}$ 共有 5 项，前三项成等比数列，后三项成等差数列，第 3 项等于 80，第 2 项与第 4 项的和等于 136，第 1 项与第 5 项的和等于 132。求这个数列。

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 A_n，等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n，且

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{2n+3}{3n+2},$$

求 a_8/b_8 的值。

17. 已知等比数列的首项为 1，前 n 项和为 S_n. 若 $\dfrac{S_{10}}{S_5} = \dfrac{31}{32}$，求公比 q.

18. 已知 $a \neq b$，且 $ab \neq 0$. 对于 $n \in \mathbb{N}^*$，证明：

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

19. 已知数列 $\{a_n\}$，$S_n + S_m = S_{n+m}$，$a_1 = 1$，求 a_{10} 的值。

20. 已知数列 $\{a_n\}$，$a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$，求 S_8 的值。

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n = n^2$，求 a_n。

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n = 3n^2$，求 a_n。

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$, 求它的通项公式。(Hint: focus on $\left\{\dfrac{1}{1-a_n}\right\}$) .

24. 除数函数（divisor function）$y = d(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ 的函数值等于 n 的正因数的个数，例如 $d(1) = 1$，$d(4) = 3$. 求 $\sum\limits_{n=1}^{k} d(2^{n-1}5^n)$.

25. 已知数列 a_n 的通项公式为 $a_n = \dfrac{n-2}{2n-15}$，前 n 项和为 S_n。求 S_n 取最小值时 n 的值。

26. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \dfrac{n^3}{3^n}$，求使得 a_n 取得最大值时的 n 的值。

27. 已知 $n \geq 2$，且平面内有 n 条直线，其中任意两条不平行，任意三条不共点，证明：这些直线的交点的个数为

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

28. a, b, c 不全相等.

(1) 若 a, b, c 成等差数列，$\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ 能构成等差数列吗？你能用函数图像解释一下吗？

(2) 若 a, b, c 成等比数列，$\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ 能构成等比数列吗？为什么？

29. 已知函数 $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x} \quad (x \in \mathbb{R})$, 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = f(n) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求证 $a_n \geq \dfrac{1}{2}$.

(2) $\{a_n\}$ 是递增数列还是递减数列？为什么？

30. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 3$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d=2$，证明数列 $\{3^{a_n}\}$ 为等比数列；

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比 $q=\frac{1}{9}$，证明数列 $\{\log_3 a_n\}$ 为等差数列.

31. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。

(1) 证明 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列；

(2) 设 T_n 为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=12$，$S_8=40$，求 T_n.

32. 已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=2^n, b_n=n^4$，其中 $n\in\mathbb{N}^*$。试推断 $a_n>b_n$ 对哪些正整数 n 成立。

33. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1, x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})\ (n\in\mathbb{N})$。试用数学归纳法证明 $x_n>0$，并比较 x_n 与 x_{n+1} 的大小关系。

34. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n=3^{n-1}$，令 $c_n=a_nb_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

35. 在数列 a_n 中，已知 $a_{n+1}+a_n=3\cdot 2^n, a_1=1$.

(1) 求证：$\{a_n-2^n\}$ 是等比数列；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

36. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1}=2S_n+2$ （$n\in\mathbb{N}^*$）。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入一个数，使得 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列，在数列 $\{d_n\}$ 中是否存在 3 项 d_m, d_k, d_p（其中 m, k, p 成等差数列）成等比数列？若存在，请说明理由。

37. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1 = 1$，$a_3 = 2\sqrt{2} + 1$，前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \dfrac{S_n}{n}$.

(1) 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中的任意三个项不能构成等比数列。

38. 有理数都能表示成 $\dfrac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}$，且 $n \neq 0, m$ 与 n 互质的形式，进而有理数集

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,\ \gcd(m, n) = 1 \right\}.$$

任何有理数 $\dfrac{m}{n}$ 都可以化为有限小数或无限循环小数。反之，任何有限小数也可以化为有理数；那么无限循环小数是否为有理数？

(1) $1.\dot{2}$ 是有理数吗？请说明理由。

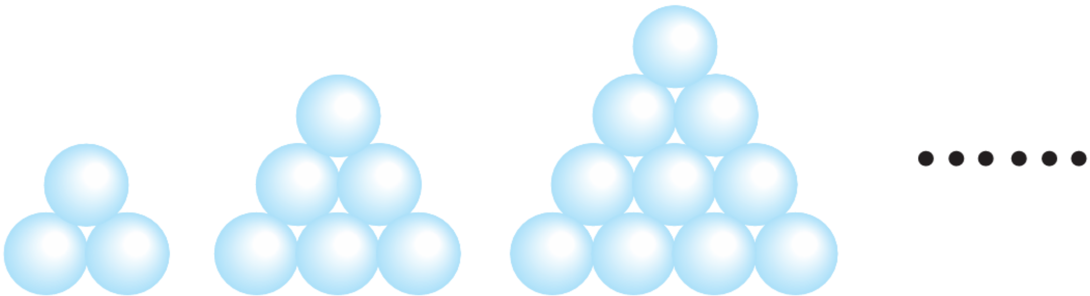
(2) $1.\dot{2}\dot{4}$ 是有理数吗？请说明理由。

39. 在 2015 年苏州世兵赛期间，某景点用乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的装饰品，其中第 1 堆只有 1 层，就是一个球；第 2、3、4、... 堆是底层（第一层）分别按图中所示方式固定摆放，从第二层开始，每层的小球自然堆放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球。记第 n 堆的乒乓球总数为 $f(n)$。

(1) 求 $f(3)$；

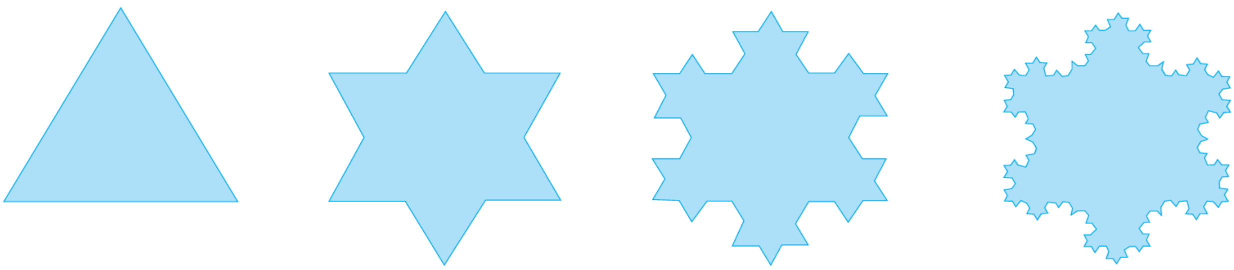
(2) 试归纳出 $f(n+1)$ 与 $f(n)$ 的关系式，并根据你得到的关系式探求 $f(n)$ 的表达式。

参考公式：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.



40. 如图是瑞典数学家赫尔在 1904 年构造的能够描述雪花形状的图案。图形的作法是：从一个正三角形开始，把每条边分成三等份，然后以各边的中点为底向外作正三角形，再去掉底边。反复进行这一过程，就得到一条“雪花”状的曲线。设原正三角形（图①）的边长为 1，把图①、图②、图③、图④中图形的周长依次记为 C_1,C_2,C_3,C_4，则 $C_4=$

A. $\frac{128}{9}$ B. $\frac{64}{9}$ C. $\frac{64}{27}$ D. $\frac{128}{27}$



① ② ③ ④

41. 任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘 3 再加上 1；若是偶数，就将该数除以 2。反复进行上述两种运算，经由有限步跃后，必进入循环圈 $1 \to 4 \to 2 \to 1$。这是数学史上著名的“冰雹猜想”（又称“角谷猜想”）等。如取正整数 $m = 6$，根据上述运算则得出 $6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$，共需经过 8 个步骤变成 1（简称为 8步“电程”）。

已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1 = m$ (m 为整数)，$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数时,} \\ 3a_n + 1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$

(1) 当 $m = 17$ 时，试确定使得 $a_n = 1$ 需要多少步电程；

(2) 若 $a_8 = 1$，求所有可能的取值集合 M。

4 函数与导数 回归教材训练

1. (1) 如果 $y=f(x)$ 存在反函数，则 $y=f(x)$ 一定是单调函数吗？

   (2) 如果 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，写出 $f[f^{-1}(x)]$ 与 $f^{-1}[f(x)]$ 的值。

2. 研究函数 $f(x)=x^2-2|x|-1$ 的性质，并作出函数图像。

3. 已知 $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}$，已知 $f(x)\geq m$ 恒成立，求自然数 m 的值。

4. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，区间 $D\subseteq I$，记 $\Delta x=x_1-x_2$，$\Delta y=f(x_1)-f(x_2)$。证明：

   (1) 函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上单调递增的充要条件是：对 $x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$；

   (2) 函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上单调递减的充要条件是：对 $x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$.

5. 判断 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性，并证明：$y'\sqrt{1+x^2}=1$.

6. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，$f(2)=0$，求不等式 $f(x)<0$ 的解集。

7. 我们知道，函数 $y=f(x)$ 的图像关于坐标原点中心对称图形的充要条件是 $y=f(x)$ 为奇函数。有同学发现可以将其推广为：函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a,b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数。

   (1) 求函数 $f(x)=x^3-3x^2$ 图像的对称中心 (Note: 最好不要使用导数来完成本题)；

   (2) 类比上述推导，写出“函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴成对称图形的充要条件是函数 $y=f(x)$ 为偶函数”的一个推导结论。

8. 当 $f(\cdot)$ 为下列函数，对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，比较 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 与 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 的大小关系。

(1) $f(x) = x^2 + 2x + 3$;

(2) $f(x) = 3^x$;

(3) $f(x) = \log_3 x$.

9. 设 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，求证：

(1) $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$；

(2) $f(2x) = 2f(x)g(x)$；

(3) $g(2x) = [g(x)]^2 + [f(x)]^2$。

10. 已知 $a^{2x} = 3$，求 $\dfrac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 的值。

11. 设函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = 2^{x+a}$ 的图像关于直线 $y = -x$ 对称，并且 $f(-2) + f(-4) = 1$，求 a 的值。

12. 已知函数 $y = f(x), x \in \mathbb{R}$，且 $f(0) = 3, \dfrac{f(0.5)}{f(0)} = 2, \dfrac{f(1)}{f(0.5)} = 2, \ldots, \dfrac{f(0.5n)}{f(0.5(n-1))} = 2, n \in \mathbb{N}^*$，求函数 $y = f(x)$ 的一个解析式。

13. 当 n 越来越大时，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的底数越来越小，而指数越来越大，那么 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 是否也会越来越大？有没有最大值？ (Hint: 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调递增的，数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是单调递减的)

14. 比较大小：

(1) $\log_{0.2} 6, \log_{0.3} 6, \log_{0.4} 6$；

(2) $\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5$。

15. 求证：方程 $3^x + 4^x = 5^x$ 只有一个实数解。

16. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a > 0, b, c \in \mathbb{R})$，且 $f(1) = -\dfrac{a}{2}$，求证：函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内至少有一个零点。

17. 如果关于 x 的方程 $7x^2 - (a + 13)x + a^2 - a - 2 = 0$ 的两根分别在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 内，求实数 a 的取值范围。

18. (1) 已知 α 是锐角，那么 2α 是

A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 小于 $180°$ 的正角 D. 第一或第二象限角

(2) 已知 α 是第一象限角，那么 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是

A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第一或第二象限角 D. 第一或第三象限角

19. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2\sin x \cos x - \sin^4 x$，

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 当 $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的最小值以及取得最小值时 x 的集合。

20. 已知直线 $l_1 \parallel l_2$，A 是 l_1, l_2 之间的一点，并且点 A 到 l_1, l_2 的距离分别为 h_1, h_2. B 是直线 l_2 上一点，作 $AC \perp AB$，且使得直线 AC 与直线 l_1 交于点 C. 设 $\angle ABD = \alpha$.

(1) 写出 $\triangle ABC$ 面积 S 关于角 α 的函数解析式 $S(\alpha)$；

(2) 求 $S(\alpha)$ 的最小值。

21. 英国数学家泰勒发现了如下公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

这些公式被编入计算工具，计算工具计算所够多的项就可以确保显示值的精准性。例如，用前两项计算 $\cos 0.3$，就得到 $\cos 0.3 \approx 1 - \dfrac{0.3^2}{2!} + \dfrac{0.3^4}{4!} = 0.9553375.$

(1) 令 $f_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$，记 $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]', f^{(1)}(x) = f'(x)$. 证明：$(\sin x)^{(k)} = f_5^{(k)}(x),\ k = 1, \cdots, 5.$

(2) 比较 $\sin x$ 和 $f_5(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的大小关系。

22. 求下列函数的导数：

(1) $y = 2x\tan x$;

(2) $y = 3^x \log_4 x$;

(3) $y = e^{-2x+1}\cos(-x^2 + x)$;

(4) $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

23. 利用单位圆理解

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1,$$

利用上式作为已知，证明

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos x,$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\sin x.$$

24. 可导函数在闭区间内的最大值必在________取得。

A. 极值点　　B. 导数为 0 的点　　C. 极值点或区间端点　　D. 区间端点

25. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增，那么在区间 (a, b) 内是否有 $f'(x) > 0$ 恒成立？

26. 用测量工具测量某物体的长度，由于工具的精度以及测量技术的原因，测得 n 个数据 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. 证明：用 n 个数据的平均值

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

表示这个物体的长度，能使这 n 个数据的方差

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2$$

最小。

27. 已知物线 $C_1 : y = x^2 + 2x$ 和 $C_2 : y = -x^2 + a$ 的切线，称 l 是 C_1 和 C_2 的公切线，则 a 取什么值时，C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线？

28. 已知函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是增函数，在 $[0, 2]$ 上是减函数，且方程 $f(x) = 0$ 有 3 个实数根，它们分别是 $\alpha, \beta, 2$。

(1) 求实数 c 的值；

(2) 求证：$f(1) \geq 2$；

(3) 求 $|\alpha - \beta|$ 的取值范围。

29. 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$，

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(2) 设 $a = b = 4$，若函数 $f(x)$ 有 3 个不同零点，求实数 c 的取值范围；

(3) 证明：$a^2 - 3b > 0$ 是 $f(x)$ 有 3 个不同零点的必要不充分条件。

30. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0 > 0$，求实数 a 的取值范围。

31. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1-ax}$，其中 $a>0$，若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，试求实数 a 的取值范围。

32. 作函数 $f(x)=(x+1)e^x$ 的大致图像。

33. 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$. 当 $m\leq 2$ 时，求证 $f(x)>0$.

34. 求证：$x\geq 0$ 时，有 $xe^{-x}\leq \ln(1+x)$.

35. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且满足 $f(x)-xf'(x)>0$，判断 $3f(1)$ 与 $f(3)$ 的大小。

36. 已知函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，求实数 a 的取值范围。

37. 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

    (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

    (2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围。