

目录

1	概率统计 回归教材训练 1	2
2	概率统计 回归教材训练 2	6
3	数列 回归教材训练	13
4	函数与导数 回归教材训练	21

1 概率统计 回归教材训练 1

1. 四名同学各抛骰子 5 次，分别记录每次骰子出现的点数。根据四名同学的统计结果，可以判断出一定没有出现点数 6 的是
- A. 平均数为 3，中位数为 2
B. 中位数为 3，众数为 2
C. 平均数为 2，方差为 2.4
D. 中位数为 3，方差为 2.8

2. 已知总体划分为 3 层，通过分层随机抽样，各层抽取的样本、样本均值和样本方差分别为： $l, \bar{x}, s_1^2; m, \bar{y}, s_2^2; n, \bar{z}, s_3^2$ ，记总体的样本均值为 \bar{w} ，样本方差为 s^2 ，证明：

$$\bar{w} = \frac{l}{l+m+n} \bar{x} + \frac{m}{l+m+n} \bar{y} + \frac{n}{l+m+n} \bar{z},$$

$$s^2 = \frac{1}{l+m+n} \{l[s_1^2 + (\bar{x} - \bar{w})^2] + m[s_2^2 + (\bar{y} - \bar{w})^2] + n[s_3^2 + (\bar{z} - \bar{w})^2]\}.$$

3. 在对树人中学高一年级学生身高的调查中，采用样本量比例分配的分层随机抽样。如果不知道样本数值，只知道抽取了男生 25 人，均值和方差分别为 170 和 10，抽取了女生 25 人，均值和方差分别为 160 和 40。你能由这些数据计算出总样本的方差，并对高一年级全体学生的身高方差作出估计吗？
4. 从两名男生（记为 B_1 和 B_2 ）、两名女生（记为 G_1 和 G_2 ）中抽取两人。
- (1) 分别计算有放回简单随机抽样、不放回简单随机抽样和按性别等比例分层随机抽样下，抽到的两人都是男生的概率；
- (2) 比较这三种抽样方式在避免极端样本（例如全是男生的样本）上的优劣。
5. 从 1~20 这 20 个整数中随机选择一个数，设事件 A 表示选到的数能被 2 整除，事件 B 表示选到的数能被 3 整除。求下列事件的概率：
- (1) 这个数既能被 2 整除也能被 3 整除；
- (2) 这个数能被 2 整除或能被 3 整除；

- (3) 这个数既不能被 2 整除也不能被 3 整除。
6. 互为对立的两个事件是非常特殊的一种事件关系。请分别证明如果事件 A 与事件 B 相互独立, 那么 A 与 \bar{B} , \bar{A} 与 B , \bar{A} 与 \bar{B} 是独立的。
7. 一个均匀的正八面体, 八个面分别标以数字 1 到 8, 任意拨捏一次这个正八面体, 观察它与地面接触的面上的数字, 得到样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 。构造适当的事件 A, B, C , 使得 $P(A)P(B)P(C) = P(ABC)$ 成立, 但不满足 A, B, C 三个事件是两两独立的。
8. “用事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 估计概率 $P(A)$, 重复试验次数 n 越大, 估计的就越精确”, 判断这种说法是否正确, 并举例说明。
9. 有两个盒子, 其中 1 号盒子中有 95 个红球, 5 个白球; 2 号盒子中有 5 个红球, 95 个白球。现从两个盒子中任意选择一个, 再从中任意摸出一个球。如果摸到的是红球, 你认为选择的是哪个盒子? 做出你的推断, 你的推断犯错误的概率是多少?
10. (1) 4 名同学分别报名参加学校的足球队、篮球队、乒乓球队, 每人限报其中的一个运动队, 不同报法的种数是 3^4 还是 4^3 ?
- (2) 3 个班分别从 5 个景点中选择一处游览, 不同选择的种数是 3^5 还是 5^3 ?
11. 在国庆长假期间, 要从 7 人中选择若干人在 7 天假期值班 (每天只需 1 人值班), 不出现同一人连续值班 2 天, 有多少种可能的安排方法?
12. 2160 有多少个不同的正因数? 这些正因数的和是多少?

13. 用 0 ~ 9 这 10 个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

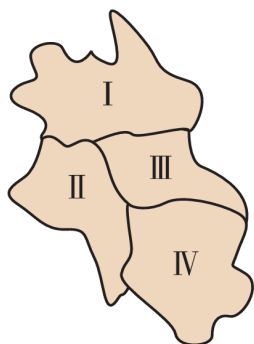
14. 求证：

$$(1) 1 + \sum_{k=1}^n k \cdot A_k^k = A_{k+1}^{k+1};$$

$$(2) \frac{(n+1)!}{k!} - \frac{n!}{(k-1)!} = \frac{(n-k+1) \cdot n!}{k!} \quad (k \leq n).$$

15. 证明等式 $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$ 并构造一个实际背景，说明这个等式的意义。

16. 如图，现要用 5 种不同的颜色对某市的 4 个区县地图进行着色，要要求有公共边的两个地区不能用同一种颜色，共有几种不同的着色方法？



17. (1) 平面内有两组平行线，一组有 m 条，另一组有 n 条，这两组平行线相交，可以构成多少个平行四边形？

(2) 空间有三组平行平面，第一组有 m 个，第二组有 n 个，第三组有 l 个，不同两组的平面都相交，且交线不都平行，可以构成多少个平行六面体？

18. 移动互联网给人们的沟通交流带来了方便。某种移动社交软件平台，既可以供用户彼此添加“好友”单独交流，又可以供多个用户建立一个“群”（“群里”的人彼此不一定是“好友”关系）共同交流。如果某人在平台上发了信息，其他的“好友”都可以看到，但“群”里的非“好友”不能看到。现在这个“群”里有一个 10 人的“群”，其中 1 人在平台上发了一条信息，“群”里有 3 人说看到，不能看到的有 7 人。那么这个“群”里与信息发送人是“好友”关系的情况可能有多少种？

19. 证明:

- (1) $(n+1)^n - 1$ 能被 n^2 整除;
- (2) $99^{10} - 1$ 能被 1000 整除;
- (3) 55^{55} 除以 8 所得的余数是 7。

20. 求证:

$$2^n - C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \times 2 + (-1)^n = 1.$$

21. (1) 求 $\left(9x + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式的常数项;

(2) 已知 $(1 + \sqrt{x})^n$ 的展开式中第 9 项、第 10 项、第 11 项的二项式系数构成等差数列, 求 n ;

(3) 求 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数;

(4) 求 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数。

22. 在 $(1+x)^3 + (1+x)^4 + \cdots + (1+x)^{n+2}$ 的展开式中, 含 x^2 项的系数是多少?

2 概率统计 回归教材训练 2

1. 证明：当 $P(AB) > 0$ 时， $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$ 。进一步，你能归纳出 $P(A_1A_2 \cdots A_n)$ 的公式吗？
2. 已知 3 张奖券中只有 1 张有奖，甲、乙、丙 3 名同学依次不放回地各随机抽取 1 张。
 - (1) 他们中奖的概率与抽奖的顺序有关吗？
 - (2) 推广到 n 张奖券和 n 名同学，请你验证 (1) 的结论是否仍然成立。
3. 已知 $P(A) > 0, P(B) > 0, P(B|A) = P(B)$ 等价于 $P(A|B) = P(A)$ 。其中一式成立的情况下，还有 $P(B|\bar{A}) = P(B), P(A|\bar{B}) = P(A)$ 。↔ [概率统计回归教材训练 1 Ex.6](#)
4. 在 A、B、C 三个地区暴发了流感，这三个地区分别有 6%、5%、4% 的人患了流感。假设这三个地区的人数的比例为 5:7:8，现从这三个地区中任意选取一个人。
 - (1) 求这个人患流感的概率；
 - (2) 如果此人患流感，求此人选自 A 地区的概率。
5. 甲、乙、丙三人相互做乒乓球训练，第 1 次由甲将乒乓球传出，每次传球时，传球者都可能地将球传给两人中的任何一人。求 n 次乒乓球在甲手中的概率。
6. 证明： $E(aX + b) = aE(X) + b, D(aX + b) = a^2D(X)$ 。
7. 设 $E(X) = \mu, a \neq \mu$ ，证明 X 相对于 μ 的偏离程度 $E[(X - \mu)^2]$ 与 X 相对于 a 的偏离程度 $E[(X - a)^2]$ 满足

$$E[(X - \mu)^2] < E[(X - a)^2] \rightsquigarrow \mu = E(X) = \arg \min_{a \in \mathbb{R}} E[(X - a)^2].$$

8. 某种资格证考试，每位考生一年内最多有 3 次考试机会。一旦某次考试通过，便可领取资格证书，不再参加以后的考试，否则继续参加考试，直到用完 3 次机会。李明决定参加考试，如他每次参加考试通过的概率依次为 0.6, 0.7, 0.8，且每次考试是否通过相互独立，试求：

(1) 李明在一年内参加考试数 X 的分布列；

(2) 李明在一年内领取到资格证书的概率。

9. 一个数轴上的质点在随机外力的作用下，从原点 O 出发，每隔 1 秒等可能地向左或向右移动一个单位，共移动 6 次。求下列事件的概率：

(1) 质点回到原点；

(2) 质点位于 4 的位置。

10. 设 $X \sim B(n, p)$ ，求证：

$$(1) \sum_{k=0}^n P\{X = k\} = 1;$$

(2) 先证明组合恒等式 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ，再证明

$$E(X) = \sum_{k=0}^n kP\{X = k\} = np.$$

$$(3) D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{k=0}^n k^2 P\{X = k\} - n^2 p^2 = np(1-p) \text{ (Hint: } k^2 = (k+1)k - k.)$$

11. 一般地，假设一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品。从 N 件产品中随机抽取 n 件（不放回），用 X 表示抽取的 n 件产品中的次品数，则 X 的分布列为：

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = m, m+1, m+2, \dots, r.$$

其中， $n, N, M \in \mathbb{N}^*, M \leq N, n \leq N, m = \max(0, n - N + M), r = \min(n, M)$ 。即 X 服从超几何分布，求证：

$$(1) \sum_{k=m}^r C_M^k C_{N-M}^{n-k} = C_N^n;$$

(2) 利用组合恒等式 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ 和 (1) 所证明结论证明

$$E(X) = \sum_{k=m}^r kP\{X=k\} = \frac{nM}{N}.$$

$$(3) D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{k=0}^n k^2 P\{X=k\} - \frac{n^2 M^2}{N^2} = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}. \text{ (Hint: } k^2 = (k+1)k - k.)$$

(4) 可以看出, 当 $N \gg n$ 时, 不放回抽取几乎没有影响每次抽到次品的概率, 于是可以用二项分布近似超几何分布, 也即

$$D(X) \approx n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

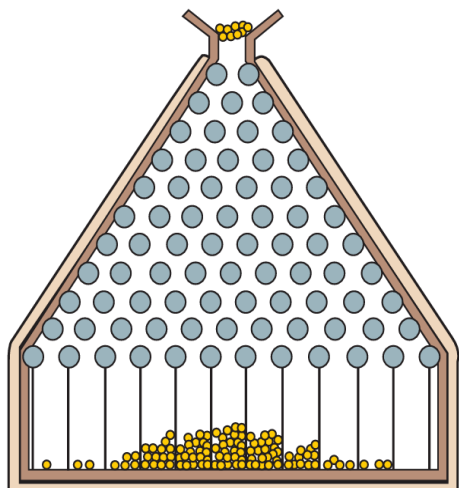
12. 一个袋子中有 10 个大小相同的球, 其中有 4 个黄色球, 6 个白球, 从中随机地抽出 5 个球作为样本。用 X 表示样本中黄色球的个数。

(1) 分别求有放回摸球和不放回摸球, 求 X 的分布列;

(2) 分别求有放回摸球和不放回摸球, 用样本中黄色球的比例估计总体黄色球的比例, 求误差的绝对值不超过 0.1 的概率。

(3) 为了使得用样本中黄色球的比例估计总体黄色球的比例尽可能准确, 应该采用哪种摸球方式?

13. 下图是一块高尔顿板的示意图。在一块木板上钉着与排列相互平行但相互错开的圆柱形小木钉, 小木钉之间留有适当的空隙作为通道, 前面挡有一块玻璃。将小球从顶端放入, 小球下落的过程中, 每次碰到小木钉后都会等概率地向左或向右落下, 最后落入底部的格子中。格子从左到右分别编号为 0, 1, 2, ..., 10, 用 X 表示小球最后落入格子的编号, 求 X 的分布列。



14. 甲、乙两人选手进行象棋比赛，如果每局比赛甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，那么采用 3 局 2 胜制还是采用 5 局 3 胜制对甲更有利？
15. 设 $X \sim B(n, p)$ ，求出使得 $P\{X = k\}$ 最大的 k 的值。
16. 某单位有 10000 名职工，想通过检测的方法筛查乙肝病毒携带者。如果对每个人的血样采一化验，就需要化验 10000 次。统计专家提出了一种化验方法：随机地按 5 人一组分组，然后将各组 5 人的血样混合再化验。如果混合血样是阴性，说明这 5 个人全部阴性；如果混合血样是阳性，说明其中至少有一人的血样是阳性，需要再分别化验一次。
- (1) 按照这种化验方法能减少化验次数吗？
- (2) 如果携带病毒的人只有 2%，按照 k 个人一组， k 取多大时化验次数最少？
17. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据，计算得到 $\chi^2 = 2.974$ 。依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验 $P\{\chi^2 \geq 3.841 = x_\alpha\} = 0.05 = \alpha$ ，结论为：

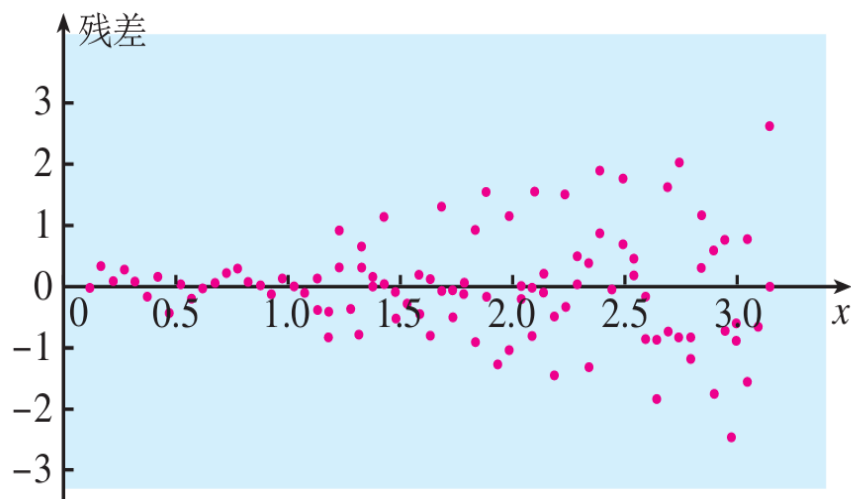
- A. 变量 X 与 Y 不独立
- B. 变量 X 与 Y 不独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.05
- C. 变量 X 与 Y 独立
- D. 变量 X 与 Y 独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.05

18. 根据变量 Y 和 x 的成对样本数据，由一元线性回归模型

$$\hat{y} = bx + a + e, \quad E(e) = 0, \quad D(e) = \sigma^2$$

得到经验回归模型，模型误差如图所示。模型误差

- A. 满足一元线性回归模型的所有假设
- B. 不满足一元线性回归模型的 $E(e) = 0$ 的假设
- C. 不满足一元线性回归模型的 $D(e) = \sigma^2$ 的假设
- D. 不满足一元线性回归模型的 $E(e) = 0$ 和 $D(e) = \sigma^2$ 的假设



19. 如果散点图中所有的散点都落在一条斜率为非 0 的直线上，请回答下列问题：

- (1) 解释变量和响应变量的关系是什么？
- (2) R^2 是多少？

20. 设变量 Y 与 x 之间高度线性相关，且满足一元线性回归模型

$$\begin{cases} Y = bx + a + e \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2 \end{cases}$$

$(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 为已知样本数据。用使得残差平方和 $Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i - a)^2$ 取得最小值时的 \hat{a}, \hat{b} 作为 a, b 的估计值，称为 a, b 的最小二乘估计值。证明：

(1) 对任意实数 k 都有 $\sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}) - k(x_i - \bar{x})] = 0$;

(2) (\bar{x}, \bar{y}) 在经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上；

(3) $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.

21. 设 X 和 Y 为定义在样本空间 Ω 上取值于 $\{0, 1\}$ 的成对分类变量。 $\{X = 0\}$ 和 $\{X = 1\}$ ， $\{Y = 0\}$ 和 $\{Y = 1\}$ 都是互为对立事件。记零假设 $H_0 : P(Y = 1 | X = 0) = P(Y = 1 | X = 1)$ ，这里， $P(Y = 1 | X = 0)$ 表示从 $X = 0$ 的条件下判断 $Y = 1$ 的概率。

(1) 叙述分类变量 X 与 Y 独立的定义；

(2) 证明 H_0 成立等价于分类变量 X 与 Y 独立。

22. 为比较甲、乙两所学校学生的数学水平，采用简单随机抽样的方法抽取88名学生．通过测验得到了如下数据。分别记学校和数学成绩为分类变量 X 与 Y 。

学校	数学成绩		合计
	不优秀 ($Y = 0$)	优秀 ($Y = 1$)	
甲校 ($X = 0$)	33	10	43
乙校 ($X = 1$)	38	7	45
合计	71	17	88

- (1) 若利用频率稳定于概率的原理，分类变量 X 与 Y 是否独立？
- (2) 依据 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验，证明：学校和数学成绩独立；
- (3) 如果上表中所有数据都扩大的原来的 10 倍，在相同的检验标准下，再用 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验推断学校和数学成绩之间的关系，结论还一样吗？请你试着解释其中的原因。

附：

$$(a) \chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)};$$

- (b) χ^2 独立性检验中可能用到的小概率值 α 与对应的临界值 x_α 如下，即 $P\{\chi^2 \geq x_\alpha\} = \alpha$:

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

3 数列 回归教材训练

1. 已知数列 S_n 是等比数列 a_n 的前 n 项和, S_3, S_9, S_6 成等差数列。求证: a_2, a_8, a_5 成等差数列。
2. 求该数列的一个通项公式和一个前 n 项和公式: $6, 66, 666, 6666, 66666, \dots$
3. 是否存在一个各项都小于 5 的无穷递增数列? 如果存在, 写出一个满足条件的数列的通项公式; 如果不存在, 说明理由。
4. 已知两个等比数列的公比不相等, 但第 5 项相等, 这两个等比数列中除第 5 项外, 还有可能出现序号与数值都相等的项吗?
5. 如果等比数列 $\{a_n\}$ 中公比 $q > 1$, 那么 $\{a_n\}$ 一定是递增数列吗? 为什么?
6. 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式是

$$S_n = An^2 + Bn + C,$$

其中 A, B, C 都是常数, 那么数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列吗? 为什么?

7. 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式是

$$S_n = Aq^n + B,$$

其中 A, B 都是常数, 且 $A \neq 0, q \neq 0$, 那么数列 $\{a_n\}$ 一定是等比数列吗? 为什么?

8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = m, a_m = n$, 且 $n \neq m$, 求 a_{m+n} .
9. 已知等差数列 $-4.2, -3.7, -3.2, \dots$ 的前 n 项和为 S_n , S_n 是否存在最大 (小) 值? 如果存在, 求出取最值时 n 的值。
10. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_9 < 0, S_{10} > 0$, 则此等差数列的前多少项和最小?
11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 + a_{11} = 6$, 求 S_{13} 。
12. 已知函数 $f(n) = |n-1| + |n-2| + \dots + |n-20|$, 其中 n 是自然数。当 n 为何值时, $f(n)$ 取得最小值? 最小值是多少?
13. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_1 = 1024$, 公比 $q = \frac{1}{2}$ 。若 T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 求 T_n 的最大值。
14. 已知两个等差数列 $2, 6, 10, \dots, 190$ 及 $2, 8, 14, \dots, 200$, 将这两个等差数列的公共项按从小到大的顺序组成一个新数列。求这个新数列的各项之和。
15. 数列 $\{a_n\}$ 共有 5 项, 前三项成等比数列, 后三项成等差数列, 第 3 项等于 80, 第 2 项与第 4 项的和等于 136, 第 1 项与第 5 项的和等于 132。求这个数列。

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 A_n , 等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n , 且

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{2n+3}{3n+2},$$

求 a_8/b_8 的值。

17. 已知等比数列的首项为 1, 前 n 项和为 S_n . 若 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$, 求公比 q .

18. 已知 $a \neq b$, 且 $ab \neq 0$. 对于 $n \in \mathbb{N}^*$, 证明:

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

19. 已知数列 $\{a_n\}$, $S_n + S_m = S_{n+m}$, $a_1 = 1$, 求 a_{10} 的值。

20. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$, 求 S_8 的值。

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n = n^2$, 求 a_n 。

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n = 3n^2$, 求 a_n 。

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$ ($n \geq 2$), 求它的通项公式。(Hint: focus on $\left\{ \frac{1}{1-a_n} \right\}$).

24. 除数函数 (divisor function) $y = d(n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的函数值等于 n 的正因数的个数, 例如 $d(1) = 1$, $d(4) = 3$.
求 $\sum_{n=1}^k d(2^{n-1}5^n)$.

25. 已知数列 a_n 的通项公式为 $a_n = \frac{n-2}{2n-15}$, 前 n 项和为 S_n . 求 S_n 取最小值时 n 的值。

26. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n^3}{3^n}$, 求使得 a_n 取得最大值时的 n 的值。

27. 已知 $n \geq 2$, 且平面内有 n 条直线, 其中任意两条不平行, 任意三条不共点, 证明: 这些直线的交点的个数为

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

28. a, b, c 不全相等.

(1) 若 a, b, c 成等差数列, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 能构成等差数列吗? 你能用函数图像解释一下吗?

(2) 若 a, b, c 成等比数列, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 能构成等比数列吗? 为什么?

29. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x}$ ($x \in \mathbb{R}$), 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = f(n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求证 $a_n \geq \frac{1}{2}$.

(2) $\{a_n\}$ 是递增数列还是递减数列? 为什么?

30. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 3$.

- (1) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差 $d = 2$, 证明数列 $\{3^{a_n}\}$ 为等比数列;
(2) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比 $q = \frac{1}{9}$, 证明数列 $\{\log_3 a_n\}$ 为等差数列.

31. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。

- (1) 证明 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列;
(2) 设 T_n 为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = 12$, $S_8 = 40$, 求 T_n .

32. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 2^n$, $b_n = n^4$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$ 。试推断 $a_n > b_n$ 对哪些正整数 n 成立。

33. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 1$, $x_n = x_{n+1} + \ln(1 + x_{n+1})$ ($n \in \mathbb{N}$)。试用数学归纳法证明 $x_n > 0$, 并比较 x_n 与 x_{n+1} 的大小关系。

34. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = 4S_2$, $a_{2n} = 2a_n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 $b_n = 3^{n-1}$, 令 $c_n = a_n b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

35. 在数列 a_n 中, 已知 $a_{n+1} + a_n = 3 \cdot 2^n$, $a_1 = 1$.

- (1) 求证: $\{a_n - 2^n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

36. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = 2S_n + 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。
- (2) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入一个数, 使得 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列, 在数列 $\{d_n\}$ 中是否存在 3 项 d_m, d_k, d_p (其中 m, k, p 成等差数列) 成等比数列? 若存在, 请说明理由。

37. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1 = 1$, $a_3 = 2\sqrt{2} + 1$, 前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{S_n}{n}$.

- (1) 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列;
- (2) 数列 $\{a_n\}$ 中的任意三个项不能构成等比数列。

38. 有理数都能表示成 $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, 且 $n \neq 0$, m 与 n 互质的形式, 进而有理数集

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \gcd(m, n) = 1 \right\}.$$

任何有理数 $\frac{m}{n}$ 都可以化为有限小数或无限循环小数。反之, 任何有限小数也可以化为有理数; 那么无限循环小数是否为有理数?

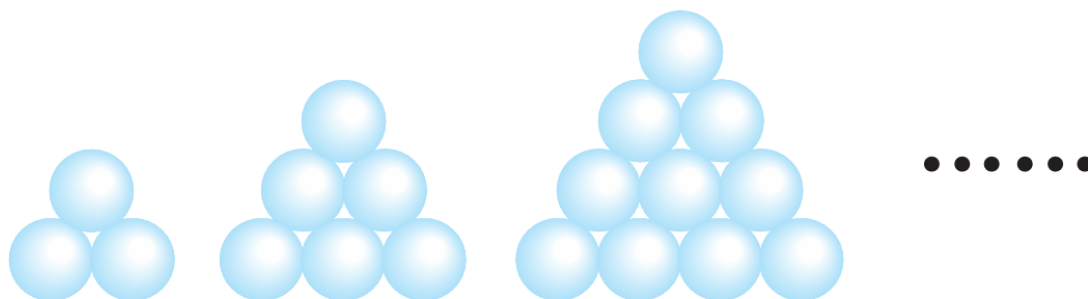
- (1) $1.\dot{2}$ 是有理数吗? 请说明理由。
- (2) $1.2\dot{4}$ 是有理数吗? 请说明理由。

39. 在 2015 年苏州世乒赛期间，某景点用乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的装饰品，其中第 1 堆只有 1 层，就是一个球；第 2、3、4、...堆是底层（第一层）分别按图中所示方式固定摆放，从第二层开始，每层的小球自然堆放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球。记第 n 堆的乒乓球总数为 $f(n)$ 。

(1) 求 $f(3)$ ；

(2) 试归纳出 $f(n+1)$ 与 $f(n)$ 的关系式，并根据你得到的关系式探求 $f(n)$ 的表达式。

参考公式： $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 。



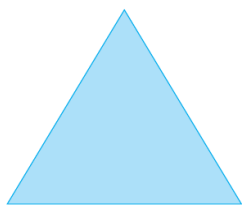
40. 如图是瑞典数学家赫尔在 1904 年构造的能够描述雪花形状的图案。图形的作法是：从一个正三角形开始，把每条边分成三等份，然后以各边的中点为底向外作正三角形，再去掉底边。反复进行这一过程，就得到一条“雪花”状的曲线。设原正三角形（图①）的边长为 1，把图①、图②、图③、图④中图形的周长依次记为 C_1, C_2, C_3, C_4 ，则 $C_4 =$

A. $\frac{128}{9}$

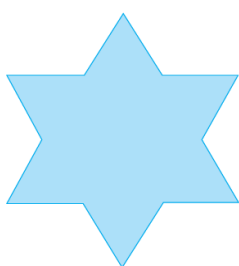
B. $\frac{64}{9}$

C. $\frac{64}{27}$

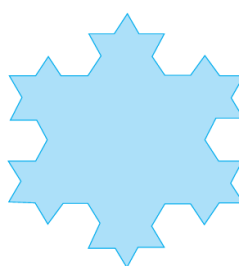
D. $\frac{128}{27}$



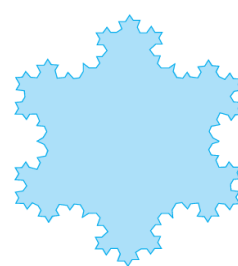
①



②



③



④

41. 任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘 3 再加上 1；若是偶数，就将该数除以 2。反复进行上述两种运算，经由有限步跃后，必进入循环圈 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 。这是数学史上著名的“冰雹猜想”（又称“角谷猜想”）等。如取正整数 $m = 6$ ，根据上述运算则得出 $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ，共需经过 8 个步骤变成 1（简称为 8 步“电程”）。

已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = m$ (m 为整数)， $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数时,} \\ 3a_n + 1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$

(1) 当 $m = 17$ 时，试确定使得 $a_n = 1$ 需要多少步电程；

(2) 若 $a_8 = 1$ ，求所有可能的取值集合 M 。

4 函数与导数 回归教材训练

1. (1) 如果 $y = f(x)$ 存在反函数, 则 $y = f(x)$ 一定是单调函数吗?
(2) 如果 $y = f(x)$ 存在反函数 $y = f^{-1}(x)$, 写出 $f[f^{-1}(x)]$ 与 $f^{-1}[f(x)]$ 的值。
2. 研究函数 $f(x) = x^2 - 2|x| - 1$ 的性质, 并作出函数图像。
3. 已知 $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}$, 已知 $f(x) \geq m$ 恒成立, 求自然数 m 的值。
4. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 区间 $D \subseteq I$, 记 $\Delta x = x_1 - x_2$, $\Delta y = f(x_1) - f(x_2)$ 。证明:
 - (1) 函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上单调递增的充要条件是: 对 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$;
 - (2) 函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上单调递减的充要条件是: 对 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ 。
5. 判断 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 的奇偶性, 并证明: $y' \sqrt{1 + x^2} = 1$ 。
6. 若函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, $f(2) = 0$, 求不等式 $f(x) < 0$ 的解集。
7. 我们知道, 函数 $y = f(x)$ 的图像关于坐标原点中心对称图形的充要条件是 $y = f(x)$ 为奇函数。有同学发现可以将其推广为: 函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $P(a, b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x + a) - b$ 为奇函数。
 - (1) 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 图像的对称中心 (Note: 最好不要使用导数来完成本题);
 - (2) 类比上述推导, 写出“函数 $y = f(x)$ 的图像关于 y 轴成对称图形的充要条件是函数 $y = f(x)$ 为偶函数”的一个推导结论。

8. 当 $f(\cdot)$ 为下列函数, 对任意 $x_1, x_2 \in D$, 比较 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 与 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 的大小关系。

(1) $f(x) = x^2 + 2x + 3, D = \mathbb{R};$

(2) $f(x) = 3^x, D = \mathbb{R};$

(3) $f(x) = \log_3 x, D = (0, +\infty).$

9. 设 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 求证:

(1) $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1;$

(2) $f(2x) = 2f(x)g(x);$

(3) $g(2x) = [g(x)]^2 + [f(x)]^2.$

10. 已知 $a^{2x} = 3$, 求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 的值。

11. 设函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = 2^{x+a}$ 的图像关于直线 $y = -x$ 对称, 并且 $f(-2) + f(-4) = 1$, 求 a 的值。

12. 已知函数 $y = f(x), x \in \mathbb{R}$, 且 $f(0) = 3, \frac{f(0.5)}{f(0)} = 2, \frac{f(1)}{f(0.5)} = 2, \dots, \frac{f(0.5n)}{f(0.5(n-1))} = 2, n \in \mathbb{N}^*$, 求函数 $y = f(x)$ 的一个解析式。

13. 当 n 越来越大时, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的底数越来越小, 而指数越来越大, 那么 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 是否也会越来越大? 有没有最大值? (Hint: 数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调递增的, 数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是单调递减的)

14. 比较大小:

(1) $\log_{0.2} 6, \log_{0.3} 6, \log_{0.4} 6;$

(2) $\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5$ 。

15. 求证：方程 $3^x + 4^x = 5^x$ 只有一个实数解。

16. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0, b, c \in \mathbb{R}$)，且 $f(1) = -\frac{a}{2}$ ，求证：函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内至少有一个零点。

17. 如果关于 x 的方程 $7x^2 - (a + 13)x + a^2 - a - 2 = 0$ 的两根分别在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 内，求实数 a 的取值范围。

18. 已知 α 是第一象限角，那么 $\frac{\alpha}{2}$ 是

A. 第一象限角

B. 第二象限角

C. 第一或第二象限角

D. 第一或第三象限角

19. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2 \sin x \cos x - \sin^4 x$,

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值以及取得最小值时 x 的集合。

20. 已知直线 $l_1 \parallel l_2$, A 是 l_1, l_2 之间的一点, 并且点 A 到 l_1, l_2 的距离分别为 h_1, h_2 . B 是直线 l_2 上一点, 作 $AC \perp AB$, 且使得直线 AC 与直线 l_1 交于点 C . 设 $\angle ABD = \alpha$.

(1) 写出 $\triangle ABC$ 面积 S 关于角 α 的函数解析式 $S(\alpha)$;

(2) 求 $S(\alpha)$ 的最小值。

21. 英国数学家泰勒发现了如下公式:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

这些公式被编入计算工具, 计算工具计算所够多的项就可以确保显示值的精准性。例如, 用前两项计算 $\cos 0.3$, 就得到 $\cos 0.3 \approx 1 - \frac{0.3^2}{2!} + \frac{0.3^4}{4!} = 0.9553375$.

(1) 令 $f_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, 记 $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$. 证明: $(\sin x)^{(k)} = f_5^{(k)}(x)$, $k = 1, \cdots, 5$.

(2) 比较 $\sin x$ 和 $f_5(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的大小关系。

22. 求下列函数的导数:

(1) $y = 3^x \log_4 x$;

(2) $y = x^{\tan x}$;

(3) $y = \ln \frac{1+x}{1-x} \cos(-x^2 + x)$.

23. 理解下列极限 (也被称为第一重要极限)

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sin x < x < \tan x \rightsquigarrow 1 < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

利用上式作为已知, 证明

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos x,$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\sin x.$$

(Hint: $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.)

24. 可导函数在闭区间内的最大值必在_____取得。

A. 极值点

B. 导数为 0 的点

C. 极值点或区间端点

D. 区间端点

25. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增, 那么在区间 (a, b) 内是否有 $f'(x) > 0$ 恒成立?

26. 用测量工具测量某物体的长度, 由于工具的精度以及测量技术的原因, 测得 n 个数据 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. 证明: 用 n 个数据的平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

表示这个物体的长度, 能使这 n 个数据的方差

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - a_i)^2$$

最小。

27. 已知曲线 $C_1: y = x^2 + 2x$ 和 $C_2: y = -x^2 + a$, 当 a 取什么值时, C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线?

28. 已知函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是增函数, 在 $[0, 2]$ 上是减函数, 且方程 $f(x) = 0$ 有 3 个实数根, 它们分别是 $\alpha, \beta, 2$ 。

(1) 求实数 c 的值;

(2) 求证: $f(1) \geq 2$;

(3) 求 $|\alpha - \beta|$ 的取值范围。

29. 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a = b = 4$, 若函数 $f(x)$ 有 3 个不同零点, 求实数 c 的取值范围;

(3) 证明: $a^2 - 3b > 0$ 是 $f(x)$ 有 3 个不同零点的必要不充分条件。

30. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 > 0$, 求实数 a 的取值范围。

31. 设函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$, 其中 $a > 0$, 若函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数, 试求实数 a 的取值范围。
32. 作函数 $f(x) = (x + 1)e^x$ 的大致图像。
33. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x + m)$. 当 $m \leq 2$ 时, 求证 $f(x) > 0$.
34. 求证: $x \geq 0$ 时, 有 $xe^{-x} \leq \ln(1 + x)$.
35. 若函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可导, 且满足 $f(x) - xf'(x) > 0$, 判断 $3f(1)$ 与 $f(3)$ 的大小。
36. 已知函数 $f(x) = e^x(2x - 1) - ax + a$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0) < 0$, 求实数 a 的取值范围。
37. 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a - 2)e^x - x$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
 - (2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围。