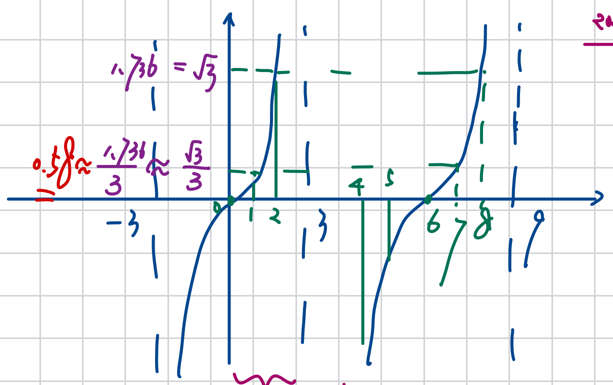
1. 已知 $a \in \mathbb{R}$，若不等式 $\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)-a\right]\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)-a-1\right]<0$ 在 $(0,2025)$ 中整数解有 m 个，则 m 的个数不可能是（ D ）

A. 0　　　B. 338　　　C. 674　　　D. 1012 ✓

$a < \tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) < a+1$

$T=\frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|}=6$

$\frac{2025-3}{6}=\frac{2022}{6}=337$



A. $a>\sqrt{3}$ 无整解 0

$a\sim a+1$

338个 [0,1] → 1整 ⇒ 338个

337个 [1,2] only → 1整

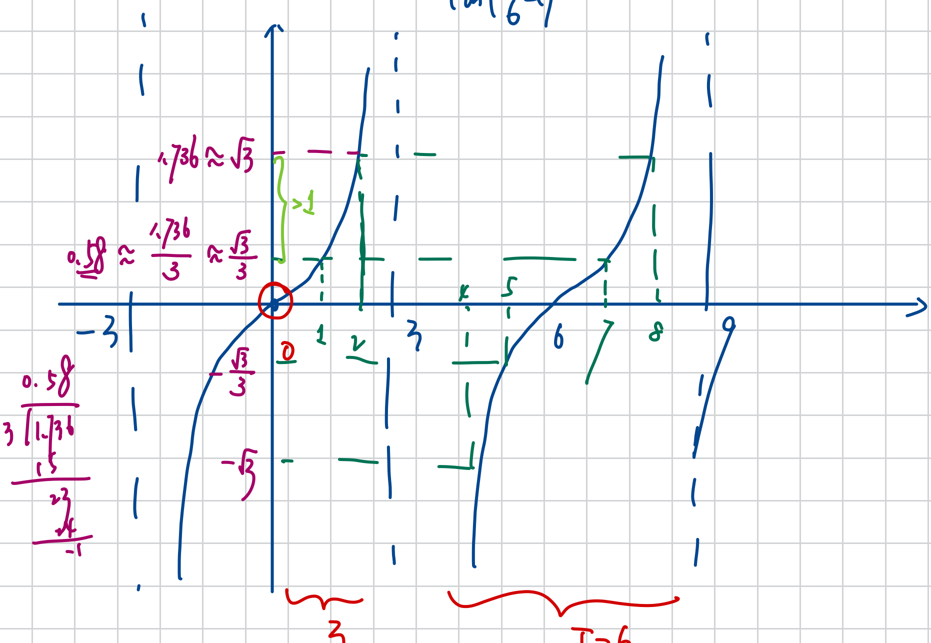
1个 + 337个 √ → 2整

0个2 + 337个 √ → 2整

$337\times2+0,1$

$=675\,\cancel{或}\,674$

$\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)$



$3\overline{)1.736}$ 商 0.58

0 √

337 √　338 √

674 √　675 √

0

2025

$6\overline{)2022}$ 商 337

$\frac{2025-3}{6}=\frac{2022}{6}=337$

2. 已知函数 $f(x)=x|x-a|-2a^2$。若当 $x>2$ 时，$f(x)>0$，则 a 的取值范围是（ B ）

A. $(-\infty,1]$　　B. $[-2,1]$ ✓　　C. $[-1,2]$　　D. $[-1,+\infty)$

[法一]

$a\le 2$ 时，$x>2$，$f(x)=x^2-ax-2a^2$ 在 $(2,+\infty)\uparrow$

$f(x)>f(2)=4-2a-2a^2=-2(a^2+a-2)=-2(a+2)(a-1)\underset{\Delta}{\ge} 0$

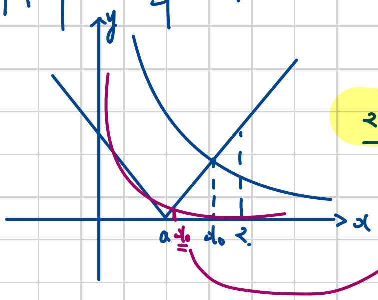
$\Rightarrow \boxed{-2\le a\le 1}$

$a>2$ 时，$x>2$，$f(x)=\begin{cases}x^2-ax-2a^2, & x>a\\ -x^2+ax-2a^2, & x\le a\end{cases} \Rightarrow f(a)=-a^2+a^2-2a^2<0$

矛盾！

[法二]

$|x-a|>\dfrac{2a^2}{x}$ 在 $x>2$ 恒成立



$\underset{\Delta}{\underline{2\ge x_0}}$

$\boxed{|x_0-a|}=\dfrac{2a^2}{x_0} \Rightarrow x_0^2-ax_0-2a^2=0$

[注] $x_0-a>0$ 恒成立

$\Delta=a^2+8a^2=9a^2.$

$\dfrac{+a\pm 3a}{2}=\dfrac{-2a}{2}\to -a$

$\dfrac{+4a}{2}\to +2a$

• $a\ge 0$ 时，$x_0=2a>0$ 又 $2a\le 2 \Rightarrow a\le 1$

• $a<0$ 时，$x_0=-a>0$ 又 $-a\le 2 \Rightarrow a\ge -2$

=8√

3. (多选) 已知 $F(2,0)$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点，M 是 C 上的点，O 为坐标原点。则

A. $p = 4$ 　 $\frac{p}{2}=2$ √

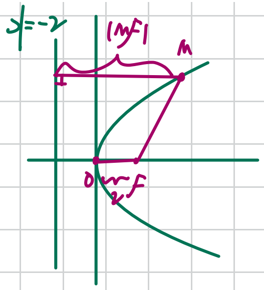
B. $|MF| \geq |OF|$ 　 √

C. 以 M 为圆心且过 F 的圆与 C 的准线相切 　 √

D. 当 $\angle OFM = 120°$ 时，$\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ 　 ×2 ×

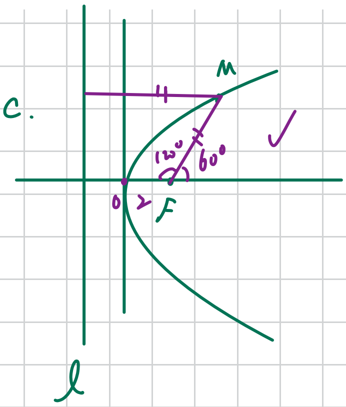
ABC

B



$x_M+2 \geq 2$

C.

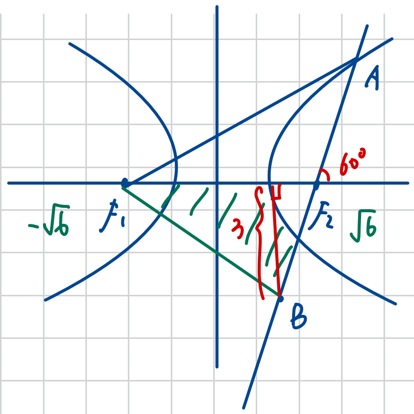


√

$$|MF| = \frac{p}{1-\cos 60°} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

$$S_{\triangle OFM} = \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot 2 \cdot \sin 120° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6-a^2} = 1\ (a > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2。通过 F_2 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与双曲线交于第一象限的点 A，延长 AF_2 至 B 使得 $AB = AF_1$。若 $\triangle BF_1F_2$ 的面积为 $3\sqrt{6}$，则 a 的值为 $\underline{\sqrt{3}}$。



$$S_{\triangle BF_1F_2} = \frac{1}{2}\cdot |y_B| \cdot |F_1F_2|$$

$$= \sqrt{6}\,|y_B| = 3\sqrt{6}$$

$$|BF_2| = \frac{|y_B|}{\sin 60°} = \frac{3}{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{3}$$

而 $AF_1 - AF_2 = BA - AF_2 = BF_2 = 2a = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{a_n+2}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，证明：$b_n<b_{n+1}<1$.

1. 定义 ⇝ 构造[illegible]
2. $a_{n+1}=pa_n+q$
3. $a_{n+1}=pa_n+kn+q$.
4. $a_{n+1}=pa_n+q^n$
5. [illegible] $a_{n+1}=\dfrac{ka_n}{pa_n+q}$. $a_{n+1}a_n=ka_{n+1}+qa_n$
6. $a_{n+1}=ca_n^{\,q}$.
7. $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ ，$a_{n+1}=\dfrac{ka_n+s}{pa_n+q}$

(1) $$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{3a_n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a_n}$$

⇝ 令 $c_n=\dfrac{1}{a_n}$ 即 $c_{n+1}=\dfrac{2}{3}c_n+\dfrac{1}{3}$ 设 $(c_{n+1}+p)=\dfrac{2}{3}(c_n+p)$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}p-p=-\dfrac{1}{3}p=\dfrac{1}{3}\Rightarrow p=-1$

即 $(c_{n+1}-1)=\dfrac{2}{3}(c_n-1)$ ⇝ $c_1=1$，$c_n=1$

又 $c_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow c_1-1=-\dfrac{2}{3}\neq 0\Rightarrow c_n-1\neq 0\Rightarrow \dfrac{c_{n+1}-1}{c_n-1}=\dfrac{2}{3}$

即 $\{c_n-1\}$ 是以 $c_1-1=-\dfrac{2}{3}$ 为首项，$q=\dfrac{2}{3}$ 为公比的等比数列

$\Rightarrow c_n-1=-1\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\Rightarrow \dfrac{1}{a_n}=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

(2) 由 $a_{n+1}<a_n \Leftrightarrow 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}>1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)<1$ ✓

$\Rightarrow \{a_n\}\downarrow$ 即 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$

再证 $b_n<b_{n+1}$ $$b_n=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}=\frac{1-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}=\frac{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}$$

则 $b_n<b_{n+1}\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ ✓

另解 $b_n<b_{n+1}\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\Leftrightarrow a_{n+1}^2<a_na_{n+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)^2}<\frac{1}{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 1-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}>1-\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}$$ ✓

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}>2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=2\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}$$