Lecture 3 条件概率和全概率公式

9. 在 $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 的展开式中，含 x^2 项的系数是多少？

$$-C_3^3+\underbrace{C_3^3+C_3^2}_{=C_4^3}+C_4^2+\cdots+C_{n+2}^2$$

$C_5^3 \quad \cdots \quad C_{n+3}^3.$

$$=C_{n+3}^3-C_3^3=C_{n+3}^3-1$$

11. 已知 $(x^2+1)(4x-3)^8=a_0+a_1(2x-1)+a_2(2x-1)^2+\cdots+a_{10}(2x-1)^{10}$，则

(a) $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=$ __2__; 令 $2x-1=1 \Rightarrow x=1$

(b) $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=$ __$\frac{1-3^8}{2}$__; 令 $2x-1=-1 \Rightarrow x=0$

(c) $a_3=$ ____.

(d) $a_0=\frac{5}{4}$ $\quad \boxed{2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}}$

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9+a_{10}=3^8$ ①

$a_0+a_1+\cdots+a_{10}=2$ ②

①-② $\Rightarrow 2(\underbrace{a_1+\cdots+a_9}_{\frac{2-3^8}{2}})=2-3^8$

令 $2x-1=t \Rightarrow x=\frac{t+1}{2}$

$$\left[\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1\right](2t-1)^8=a_0+\sum a_i t^i$$

$$\left[\frac{t^2+2t+5}{4}\right](2t-1)^8 \qquad t^3$$

$$\frac{1}{4}\left[C_8^1 2^1\cdot(-1)^7+2\cdot C_8^2\cdot 2^2\cdot(-1)^6+5C_8^3 2^3\cdot(-1)^5\right]=a_3.$$

12. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = q^n + p$ 且 $a_3 = 4$.

$S_n = Aq^n - A$ $\quad A = \dfrac{a_1}{1-q}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：$S_n < \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$；

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k a_k$，求 b_n 的前 n 项和 T_n.

(1) $p=-1$ $\quad a_1 = q+p = q-1$

$a_n = S_n - S_{n-1} = q^n - q^{n-1} = (q-1)q^{n-1}$ $\quad (n \geqslant 2)$

$a_1 = q+p$ 满足上式 $\Rightarrow q+p = (q-1)q^0 = q-1 \Rightarrow p=-1$

$f(q) = a_3 = (q-1)q^2 = 4 \Rightarrow q=2$

Notice: $q=2$ 适合上式，下证 $q=2$ 为上式唯一解

又 $q \leq 1$ 时，$f(q) \leq 0$ 不符合，下证 $f(q)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为 $\nearrow$ 的.

$\forall q_1 > q_2 \in (1,+\infty)$，$f(q_1) - f(q_2) = (q_1-1)q_1^2 - (q_2-1)q_2^2$

$= q_1^3 - q_2^3 + q_2^2 - q_1^2$

$= (q_1-q_2)(q_1^2+q_1q_2+q_2^2) + (q_2-q_1)(q_2+q_1)$

$= \underbrace{(q_1-q_2)}_{>0}\left[q_1^2+q_1q_2+q_2^2-q_2-q_1\right] > 0$

?

$q_1(q_1-1)+q_2(q_2-1)+q_1q_2$

>0

12. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = q^n + p$ 且 $a_3 = 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：$S_n < \boxed{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$；→ 倒序.

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k a_k$，求 b_n 的前 n 项和 T_n.

(2) $a_n = 2^{n-1}$

$$\left.\begin{aligned} S_n &= 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} \\ S_n &= 2^{n-1} + \cdots + 2^0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2S_n = \underbrace{(2^0 + 2^{n-1})}_{a_1+a_n} + (2^1 + 2^{n-2}) + \cdots + \underbrace{(2^{n-1} + 2^0)}_{a_n+a_1}$$

$$\boxed{2^i + 2^{n-1-i} \leqslant 2^0 + 2^{n-1}} \quad \forall i \in [0, n-1]$$

积为定值

$< n(a_1 + a_n)$

$2^i + 2^{n-1-i} \geqslant 2^{\frac{n-1}{2}}$

$$2^i + 2^{n-1-i} = \boxed{2^i + \frac{2^{n-1}}{2^i}}$$

对于 $i \in \left[0, \frac{n-1}{2}\right]$ ↓

$\left[\frac{n-1}{2}, n-1\right]$ ↑.

$2^0 + 2^{n-1} > 2^1 + 2^{n-1-1} > 2^2 + 2^{n-1-2}$

$> \cdots$

12. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=q^n+p$ 且 $a_3=4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：$S_n<\frac{n}{2}(a_1+a_n)$；

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2C_n^ka_k$，求 b_n 的前 n 项和 T_n.

(3) $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[k(k-1)+k\right]C_n^k\,2^{k-1}$

$$=\sum_{k=2}^{n}n(n-1)C_{n-2}^{k-2}\cdot 2^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}\,2^{k-1}$$

$$=2n(n-1)\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}\,2^{k-2}\cdot 1^{n-2-(k-2)}+n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}\,2^{k-1}\cdot 1^{n-1-(k-1)}$$

$$=2n(n-1)\cdot 3^{n-2}+n\cdot 3^{n-1}$$

$$=\left[2n^2-2n+3n\right]3^{n-2}=\left[2n^2+n\right]3^{n-2}$$

$$=\left[a(n+1)^2+b(n+1)+c\right]3^{n-1}-\left[an^2+bn+c\right]3^{n-2}$$

$$=\left[3a(n^2+2n+1)+3\cancel{bn}+3b+3c-\cancel{an^2}-\cancel{bn}-c\right]3^{n-2}$$

$$=\left[2an^2+(6a+2b)n+3a+3b+2c\right]3^{n-2}$$

$$\begin{cases}a=1\\ b=1-6a/2=-\frac{5}{2}\\ c=-3a-3b/2=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{15}{4}=\frac{9}{4}\end{cases}$$

$$T_n=\left[(n+1)^2-\frac{5}{2}(n+1)+\frac{9}{4}\right]3^{n-1}-\left[1^2-\frac{5}{2}\cdot1+\frac{9}{4}\right]3^{-1}$$

$P(AB)=P(A)P(B) \Leftrightarrow$ A.B独立

↓

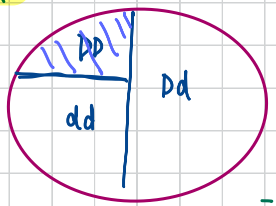
条件概率　　　A.B不独立.

引例

$$DD \times dd$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$D \qquad d$$
$$Dd$$
$$\downarrow \otimes$$
$$F_1 \quad \boxed{DD} : Dd : dd$$
$$1 : 2 : 1$$

$\frac{1}{4}$

让子一代不同基因分别求子二代的F_2中出现显性性状的概率



$$P\{``F_2=D\_",``F_1=DD"\} = P\{AB\}$$
$$=\frac{n(``F_2=D\_",``F_1=DD")}{n(\Omega)}$$
$$=\boxed{\frac{n(``F_1=DD")}{n(\Omega)}}\cdot\frac{n(``F_2=D\_",``F_1=DD")}{n(``F_1=DD")}$$
$$P\{``F_1=DD"\} \qquad 1$$

$$P\{``F_2=D\_",``F_1=dd"\}=$$
$$P\{``F_1=dd"\}\cdot P\{``F_2=D\_" \,|\, ``F_1=dd"\}=0.$$
$$\| \\ 0$$

乘法公式:

$$P\{``F_2=D\_",``F_1=Dd"\}$$
$$=P\{``F_1=Dd"\}\,P\{\underbrace{``F_2=D\_" \,|\, ``F_1=Dd"}\}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

$$P\{AB\}=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}\cdot\frac{n(AB)}{\boxed{n(A)}}$$

→A发生后,B发生.

→A已发生

$\overset{def}{=}$

$$\boxed{\text{要}\ P(A)>0} = P(A)\cdot P(B|A)$$

$$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{\frac{n(AB)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

$$P\{\text{"}F_2=D\_\text{"}\} = P\{\text{"}F_2=D\_\text{"} \cap \Omega\}$$

$$= P\{\text{"}F_2=D\_\text{"} \cap \{\text{"}F_1=DD\text{"} \cup \text{"}F_1=Dd\text{"} \cup \text{"}F_1=dd\text{"}\}\}$$

$$B \cap \{A_1 \cup A_2 \cup A_3\} = BA_1 \cup BA_2 \cup BA_3$$

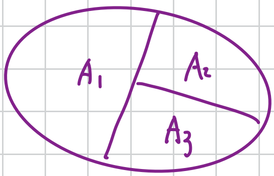
$$= P\{\text{"}F_2=D\_,\ F_1=DD\text{"} \cup \text{"}F_2=D\_,\ F_1=Dd\text{"} \cup \text{"}F_2=D\_,\ F_1=dd\text{"}\}$$

互斥

$$= P\{\text{"}F_2=D\_,\ F_1=DD\text{"}\} + P\{\text{"}F_2=D\_,\ F_1=Dd\text{"}\} + P\{\text{"}F_2=D\_,\ F_1=dd\text{"}\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + 0 = \boxed{\frac{5}{8}}$$

$P(B)$



$$= P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)) = P(BA_1 \cup BA_2 \cup BA_3)$$

$$= P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3)$$

$\boxed{\text{全概率公式}}$

$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

$A_1, A_2 \cdots A_n$ 两两互斥，且 $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$. $\Rightarrow$ 完备事件组.

且 $P(A_i) > 0$. 那么对任意随机事件 $B \subseteq \Omega$.

$\Downarrow$

$\boxed{A,\ \bar{A}}$ 对立.

一般.

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)$$

4. 在 A,B,C 三个地区暴发了流感，这三个地区分别有 6%、5%、4% 的人患了流感。假设这三个地区的人数的比例为 5:7:8，现从这三个地区中任意选取一个人。

(1) 求这个人患流感的概率；~ "执因求果"

(2) 如果此人患流感，求此人选自 A 地区的概率。

"执果寻因" ~ 求一个条件概率

记患流感为事件 D

(1)

$$P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)$$

$$=6\%\times\frac{5}{20}+5\%\times\frac{7}{20}+4\%\times\frac{8}{20}$$

(2) $$P(A|D)=\frac{P(AD)}{P(D)}=\frac{P(D|A)P(A)}{\checkmark}=\frac{6\%\times\frac{5}{20}}{6\%\times\frac{5}{20}+5\%\times\frac{7}{20}+4\%\times\frac{8}{20}}$$

Bayes公式（贝叶斯）

$A_1 \cdots A_n$ 两两互斥 且 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，$P(A_i)>0$

则对任意随机事件 $B\subseteq\Omega$ 有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B|A_j)P(A_j)}$$

3. 已知 $P(A)>0, P(B)>0$ 证明：$P(B|A)=P(B)$ 的**充要条件**是 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$. 其中一式成立的情况下，还有 $P(B|\overline{A})=P(B), P(A|\overline{B})=P(A)$.

Note: 条件概率也是概率

$0 \le p(A) \le 1$

$p(\phi)=0, \quad p(\Omega)=1$

$A_1 \cdots A_n$ 两两互斥, $p(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = p(A_1)+\cdots+p(A_n)$

$A, \bar{A}$ 对立 $\quad p(\Omega)=1=p(A)+p(\bar{A})$

$\Rightarrow \quad p(AB)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)$

$p(A\bar{B})=p(A)-p(AB)$

$p(A)=p(A\Omega)=p(A\cap(B\cup\bar{B}))$

$=p(AB\cup A\bar{B})$

$=p(AB)+p(A\bar{B})$

依然有

$p(\Omega|A)=1, \quad p(A|A)=1.$

$0 \le p(B|A) \le 1 \quad \rightarrow \quad \underbrace{p(BA) \le p(A)}$ 单调性. $\Uparrow$ $\boxed{BA \subseteq A}$

B. C互斥 $\quad p(B\cup C|A) = \dfrac{p((B\cup C)\cap A)}{p(A)} = \dfrac{p(BA\cup CA)}{p(A)} = \dfrac{p(BA)+p(CA)}{p(A)}$

$= p(B|A)+p(C|A).$

对立. $\quad p(\Omega|A)=1=p(B|A)+p(\bar{B}|A).$

3. 已知 $P(A)>0, P(B)>0$ 证明：$P(B|A)=P(B)$ 的**充要条件**是 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$. 其中一式成立的情况下，还有 $P(B|\overline{A})=P(B), P(A|\overline{B})=P(A)$. $p(A|B)=p(A)$ $\quad p(B|A)=p(B|\bar{A})$ ✓

$\boxed{A.B独立}$

$p(B|A)=p(B) \Leftrightarrow A.B独立$

$p(A|B)=p(A)$

$p(A|B)=p(A|\bar{B}) \Leftrightarrow \dfrac{p(AB)}{p(B)} = \dfrac{p(A\bar{B})}{p(\bar{B})} = \dfrac{p(A)-p(AB)}{1-p(B)}$

$\Leftrightarrow p(AB)[1-p(B)] = p(B)[p(A)-p(AB)]$

$\Leftrightarrow p(AB)=p(A)p(B)$

必修 ☆ $\boxed{A、B独立 \Leftrightarrow A、\bar{B}独立} \Leftrightarrow \bar{A}、B独立 \Leftrightarrow \bar{A}、\bar{B}独立.$

$$P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) \Leftrightarrow P(A) - P(AB) = P(A)[1-P(B)]$$

$$\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) \Leftrightarrow \bar{A}、(\bar{B})独立 \Leftrightarrow \bar{A}、B独立.$$

$$\Leftrightarrow (\bar{A}).B独立$$

$$\Leftrightarrow A.B独立.$$

1. 证明：当 $P(AB) > 0$ 时，$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$. 进一步，你能归纳出 $P(A_1A_2\cdots A_n)$ 的公式吗？

$$P(ABC) = P(AB)P(C|AB) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$ ✓

Note: $AB \subseteq A$ $\quad P(A) \geq P(AB) > 0$ ✓

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1|A_2 \cdots A_n)P(A_2|A_3 \cdots A_n)P(A_3|A_4 \cdots A_n) \cdots P(A_{n-1}|A_n)P(A_n).$$

($P(A_2 \cdots A_n) > 0$ 即可).

抽奖模型.

2. 已知 3 张奖券中只有 1 张有奖，甲、乙、丙 3 名同学**依次**不放回地各随机抽取 1 张。
$A_1 \quad A_2 \quad A_3$

(1) 他们中奖的概率与抽奖的顺序有关吗？

(2) 推广到 n 张奖券和 n 名同学，请你验证 (1) 的结论是否仍然成立。

$$P(A_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2) = P(\bar{A_1}A_2) + P(A_1A_2) = \underbrace{P(A_2|\bar{A_1})}_{1/2}\underbrace{P(\bar{A_1})}_{2/3} + \underbrace{P(A_2|A_1)P(A_1)}_{0} = 1/3$$

$$P(A_3) = P(A_3A_2) + P(A_3\bar{A_2}) = \underbrace{P(A_3|A_2)P(A_2)}_{0} + P(A_3\bar{A_2}\bar{A_1}) + \underbrace{P(A_3\bar{A_2}A_1)}_{0}$$

$$= 0 + P(A_3\bar{A_2}\bar{A_1})$$

$$= p(A_3 | \bar{A_2}\bar{A_1})\; p(\bar{A_2}|\bar{A_1})\; p(\bar{A_1})$$

$$= 1\cdot(1-p(A_2|\bar{A_1}))\cdot \tfrac{2}{3} = 1\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}.$$

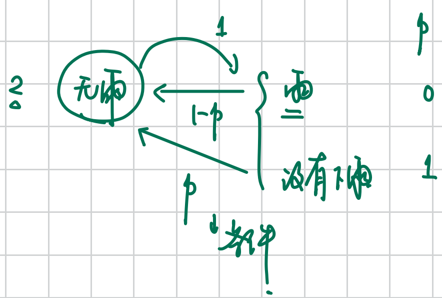
(2) n个人　1张中奖

$$(k\le n)\quad P(A_k) = \frac{A_{n-1}^{k-1}\cdot 1}{A_n^{k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(n-k)!}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{1}{n}$$

6. **(Markov Chain)** 假设只考虑天气的两种情况：有雨或无雨。若已知今天的天气情况，明天天气保持不变的概率为 p，变的概率为 $1-p$ $(0<p<1)$. 设第一天无雨，试求第 n 天也无雨的概率。

A_n

3天雨



$$P\{A_3 | A_2 A_1\} = P\{A_3 | A_2\} = p.$$

$$P(A_2) = (1-p)\cdot 0 + p\cdot 1 = p$$

$$P(A_3) = (1-p)\,P(\bar{A_2}) + p\,P(A_2)$$

$$\vdots$$

$$P(A_n) = (1-p)\,P(\bar{A}_{n-1}) + p\,P(A_{n-1}).$$

$$(1-p)[1-P(A_{n-1})] + p\,P(A_{n-1})$$

$$P\{A_n | \bar{A}_{n-1} \cdots A_1\} = P\{A_n | \bar{A}_{n-1}\} = 1-p$$

$$P(A_n) - \tfrac{1}{2} = (2p-1)\left[P(A_{n-1}) - \tfrac{1}{2}\right]$$

$$P(A_1) - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \ne 0,\quad 2p-1 > 0.$$

$$P(A_n) = (1-p) + (2p-1)\,P(A_{n-1})$$

$$P(A_1) = 1 \Rightarrow P(A_n) = ?$$

$$\Rightarrow \frac{P(A_n) - \frac{1}{2}}{P(A_{n-1}) - \frac{1}{2}} = 2p-1$$

$$P(A_n) + k = (2p-1)[P(A_{n-1}) + k] \Rightarrow (2p-1-1)k = (1-p) \Rightarrow k = -\tfrac{1}{2}.$$

$\{p(A_n)-\frac{1}{2}\}$ 以 $\frac{1}{2}$ 为首项，$q=2p-1$ 的等比数列

$p(A_n)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(2p-1)^{n-1}$

$\Rightarrow p(A_n)=\frac{1}{2}\left[1+(2p-1)^{n-1}\right]$

$p=\frac{1}{2}$ 时，$p(A_n)\equiv\frac{1}{2}$

5. 甲、乙、丙三人相互做乒乓球训练，第 1 次由甲将乒乓球传出，每次传球时，传球者都可能地将球传给两人中的任何一人。求第 n 次乒乓球在甲手中的概率。

其他

p_n

$$p_n=\frac{1}{2}\underbrace{(1-p_{n-1})}_{p_乙.\ p_丙}+0\cdot p_{n-1}=\frac{1}{2}(1-p_{n-1})$$

$2x=1-x\Rightarrow x=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_{n-1}-\frac{1}{3}\right)$

$\frac{2}{3}=$

$\because p_1-\frac{1}{3}\neq 0\Rightarrow p_n-\frac{1}{3}\neq 0.$

则 $\boxed{\frac{p_n-\frac{1}{3}}{p_{n-1}-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2}}$ ☆ def $\Rightarrow\{p_n-\frac{1}{3}\}$ 公比 $q=-\frac{1}{2}$，

$p_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 为首项……

$\Rightarrow p_n-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow p_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

13. 甲、乙两口袋中各装有 1 个黑球和 2 个白球，现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复进行 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 次这样的操作，记口袋中黑球的个数为 X_n，恰有 1 个黑球的概率为 p_n，恰有 2 个黑球的概率为 q_n，恰有 0 个黑球的概率为 r_n.

(1) 求 p_1, p_2 的值；

(2) 容易看出第 n 次口袋中黑球个数只受到 $n-1$ 次操作后口袋中黑球数量这一状态的影响，与先前的操作无关。记 $p_n = a \cdot p_{n-1} + b \cdot q_{n-1} + c \cdot r_{n-1}$，其中 $a, b, c \in [0,1]$ 为常数，同时 $p_n + q_n + r_n = 1$，请求出 p_n；

$p_1 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

$q_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$r_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$p_2 = \frac{5}{9} p_1 + \frac{2}{9} q_1 + \frac{2}{9} r_1 = \left(\frac{5}{9}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2$

(2) $p_n = \frac{5}{9} p_{n-1} + \frac{2}{9}(q_{n-1} + r_{n-1})$

$= \frac{5}{9} p_{n-1} + \frac{2}{9}(1 - p_{n-1}) = \frac{3}{9} p_{n-1} + \frac{2}{9}.$

$\frac{5}{9}x = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

$a_n = p\, a_{n-1} + q$ $\quad \{a_n - x\}$ 为等比，公比为 p

$x = px + q$ 不动点方程.

$\Rightarrow p_n - \frac{2}{5} = \frac{3}{9}\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) \Rightarrow p_n = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{5}\right)$