

## 山河·大联考 2026 届限时训练试题(二)

## 数 学

选题:王良涛,宋旻越 排版、校对:山河文化试题研究中心

## 注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题所给的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 将 10 个相同的小球放入 6 个不同的盒子,每个盒子可空,一共的安排方法数目为  
A.  $C_{10}^6$       B.  $C_{16}^{10}$       C.  $C_{15}^5$       D.  $C_{15}^6$
2.  $(x^3 + x^2 + 1)^5$  的展开式中  $x^{11}$  的系数为  
A. 25      B. 30      C. 31      D. 35
3. 若函数  $f(x) = e^{x+1} + e^{a-x} + (x+b)^2$  关于直线  $x=2$  对称,则  $a+b =$   
A. 1      B. 3      C. 5      D. 7
4. 小红举办生日派对,来参加的 7 位好友都送上了一份独一无二的礼物,但是他们却忘记在礼物上写下自己的姓名。在派对结束后,小红凭借记忆给礼物标上名字,那么她恰好标注错 3 个礼物的概率是  
A.  $\frac{1}{72}$       B.  $\frac{1}{64}$       C.  $\frac{1}{93}$       D.  $\frac{1}{52}$
5. 把一个等边三角形  $ABC$  的各边 2025 等分,过各等分点在三角形内部作各边的平行线,得到的图案一共有 ( ) 个平行四边形  
A.  $3(C_{2025}^2)^2$       B.  $(C_{2025}^2)^2$       C.  $C_{2027}^4$       D.  $3C_{2027}^4$
6. 设随机变量  $X(\omega): \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, 2025\}$ , 满足

$$P(X \geq k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, 2025$$

则  $E(2X - 2025) =$

- A.  $\frac{2025}{1013}$       B.  $\frac{2024}{1013}$       C.  $\frac{2024}{2025}$       D.  $\frac{2026}{2025}$

7. 已知函数  $f(x) = \tan(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$  在区间  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$  上有定义, 则  $f(\frac{\pi}{6})$  的值不可能是

- A. -4                      B. -2                      C. 2                      D. 4

8. 在市面上的小浣熊干脆面中均匀分布着 6 名球员的球星卡, 为了收集所有球员的球星卡, 小明购买的干脆面数量  $X$  的数学期望  $E(X) =$

- A.  $\frac{197}{10}$                       B.  $\frac{147}{10}$                       C.  $\frac{237}{20}$                       D.  $\frac{69}{5}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题所给的四个选项中, 有多项是符合题目要求的。全部选对得 6 分, 部分选对得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 平行六面体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 底面四边形  $ABCD$  为边长为 1 的正方形,  $AA_1 \perp CA_1$ , 则

- A.  $BA_1$  一定与  $DA_1$  垂直                      B.  $\angle CC_1A_1$  可能为  $45^\circ$   
C. 六面体的体积一定小于等于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D. 六面体的各面面积可能相等

10. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左顶点为  $A$ , 右焦点为  $F$ , 点  $M$  在线段  $AO$  ( $O$  为坐标原点) 上, 且  $C$  与圆  $M$  有且只有一个公共点  $A$ , 设点  $P(x_0, y_0)$ ,  $Q$  分别为  $C$  和圆  $M$  上的动点, 则

- A.  $|OP|$  的最大值为 2                      B.  $|\frac{PF}{4-x_0}|$  为定值  
C. 圆  $M$  半径的最大值为 1                      D.  $|PQ| + 2|PF|$  的最小值为 3

11. 已知  $A_1, A_2$  为样本空间  $\Omega$  的非空子集, 设随机变量

$$X_i: \Omega \rightarrow \{0, 1\}, X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_i \\ 0, & \omega \notin A_i \end{cases}, i=1, 2$$

若  $P(A_1 | A_2) = P(A_1 | \overline{A_2})$ ,  $P(A_i) = p_i (i=1, 2)$ , 则

- A.  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$                       B.  $P(\overline{A_2} | A_1) + P(A_2) = 1$   
C.  $E[(X_1 - p_1)^2] \leq E[(X_1 - p_2)^2]$                       D.  $D(|X_1 - X_2|) > D(X_1 + X_2)$  可能成立

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 过点  $(2, 0)$  且被圆  $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$  截得的弦长为  $\sqrt{2}$  的一条直线方程为\_\_\_\_\_.

13. 中国救援力量在国际自然灾害中为救生做出了重要贡献, 广受地震灾区国家赞誉。

现有 5 支救援队前往  $A, B, C$  三个受灾点执行救援任务, 若每支救援队只能去其中一个受灾点, 每个受灾点至少安排一支救援队, 其中甲救援队只能去  $B, C$  两个受灾点, 则符合条件的不同安排方法有\_\_\_\_\_种.

14. 随机将  $1, 2, \dots, 2n (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$  这  $2n$  个连续正整数分为  $A, B$  两组, 每组  $n$  个数,  $A$  组最大数为  $a$ ,  $B$  组最大数为  $b$ , 记  $\xi = |a - b|$ , 当  $n = 3$  时,  $\xi$  的数学期望  $E(\xi) =$  \_\_\_\_\_; 若对任意  $n \geq 2$ ,  $E(\xi) < c$  恒成立, 则  $c$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

一个数轴上的质点在外力的作用下, 从原点  $O$  出发, 每隔 1 秒随机向左或向右移动一个单位, 设向右移动的概率为  $p (0 < p < 1)$ , 移动  $n$  次后位于位置  $X_n$ .

(1) 若  $p = \frac{1}{2}$ , 求  $P(X_6 = 4)$ ;

(2) 求  $E(X_n), D(X_n)$ .

16. (15 分)

设点  $A, B$  是平面  $\alpha$  上不同的两点, 点  $C, D$  不在平面  $\alpha$  上, 已知  $AC \perp \alpha, BD \perp \alpha$ , 且  $AC = BD$ .

一名同学对上述条件展开思考, 认为  $CD \parallel \alpha$ , 他的证明过程如下:

因为  $AC \perp \alpha, BD \perp \alpha$ , 所以  $AC \parallel BD$   
 又  $AC = BD$ , 所以四边形  $ABCD$  是平行四边形, 所以  $AB \parallel CD$ .  
 而  $CD \not\subset \alpha, AB \subset \alpha$ , 所以  $CD \parallel \alpha$ .

(1) 判断该同学的结论和证明过程是否正确, 若正确, 写出证明过程中使用的依据, 否则请找出错误的原因;

(2) 若  $AC = AB$ , 是否存在平面  $\alpha$  上的点  $P$ , 使得  $\angle CDP = 90^\circ, \angle DCP = 60^\circ$ ? 若存在, 求平面  $\alpha$  与平面  $CDP$  的夹角, 若不存在请说明理由.

17. (15 分)

已知有两个袋子:  $A$  袋和  $B$  袋.  $A$  袋装有 1 个红球和 10 个黑球,  $B$  袋装有 10 个红球和 1 个黑球.

(1) 不放回地从  $A$  袋中抽取 3 次, 求第 3 次抽到红球的概率;

(2) 等可能的选择其中一个袋子, 从中取出一球发现是黑球, 求选择的袋子是  $A$  袋的概率;

(3) 同时从两袋中分别独立选取一个球, 若两球异色, 则交换袋子, 若同色, 则放回原袋. 这样操作  $n (n \in \mathbf{N}^*)$  次后, 求从  $A$  袋中抽出红球的概率  $p_n$ .

18. (17 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ , 已知 $a^2 - ab \cos C = 2bc \cos A$ ,  $B = 45^\circ$ .  
 $\triangle ABC$ 外一点 $E$ 满足 $BE = 2AE$ ,  $\angle AEB$ 的平分线交 $AB$ 于点 $D$ .

- (1) 求 $\cos A$ ;
- (2) 求证:  $CD \perp AB$ ;
- (3) 若 $c = 3$ ,  $DE = 2$ , 求 $CE$ .

19. (17 分)

已知 $P, Q$ 分别为直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 和 $x - \sqrt{2}y = 0$ 上的动点, 且满足 $|PQ| = \sqrt{2}$ ,  $W$ 是平面上一点, 满足 $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ , 记点 $W$ 的轨迹为曲线 $C$ .

- (1) 求 $C$ 的方程;
- (2) 设 $C$ 与 $x$ 轴交于点 $A_1, A_2$  ( $A_1$ 在 $A_2$ 左侧), 与 $y$ 轴交于点 $B_1, B_2$  ( $B_1$ 在 $B_2$ 下方). 点 $T$ 在线段 $A_2B_2$ 上, 过点 $A_1$ 作直线 $l \parallel OT$ , 交 $C$ 于点 $A$  (异于点 $A_1, B_2$ ), 交 $y$ 轴于点 $B$ . 直线 $AT$ 交 $C$ 于点 $M$  (异于点 $A$ ), 直线 $BT$ 交 $x$ 轴于点 $N$ .
  - (i) 求直线 $l$ 斜率的取值范围;
  - (ii) 求证:  $\triangle ATN$ 和 $\triangle BTM$ 的面积相等.