

1. (多选) 已知  $P$  是棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  表面上的动点,  $M, N$  分别是线段  $B_1C$  和  $C_1C$  的中点, 点  $Q$  满足  $\overrightarrow{MQ} = \lambda \overrightarrow{MN}$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), 且  $A_1P \perp DQ$ , 设  $P$  的轨迹围成的图形为多边形  $\Omega$ , 则

A.  $\Omega$  为平行四边形

B. 存在  $\lambda$ , 使得  $\Omega$  的面积为  $\sqrt{22}$

C. 存在  $\lambda$ , 使得  $\Omega$  和底面  $ABCD$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$

D. 点  $B$  和  $\Omega$  形成的多面体的体积不变

设  $P(x, y, z)$  在正方体表面上,  $A_1(0, 0, 2)$ ,  $D(0, 2, 0)$ ,  $Q(\mu, 2, 1)$ ,  $\mu \in [0, 1]$ .

$\overrightarrow{DQ} = (\mu, 0, 1)$

$\overrightarrow{A_1P} = (x, y, z-2)$

由  $\overrightarrow{A_1P} \perp \overrightarrow{DQ}$  得  $\mu x + (z-2) = 0$

讨论  $P$  的位置:

- 若  $P$  在左侧面  $ADD_1A_1$  上, 则  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z \in [0, 2]$ . 方程变为  $z-2=0 \Rightarrow z=2$ . 轨迹为点  $A_1$ .
- 若  $P$  在右侧面  $BCC_1B_1$  上, 则  $x=2$ ,  $y \in [0, 2]$ ,  $z \in [0, 2]$ . 方程变为  $2\mu + (z-2) = 0 \Rightarrow z = 2-2\mu$ . 轨迹为线段  $A_1B_1$ .
- 若  $P$  在底面  $ABCD$  上, 则  $x \in [0, 2]$ ,  $y \in [0, 2]$ ,  $z=0$ . 方程变为  $\mu x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\mu}$ . 当  $\mu=1$  时,  $x=2$  (点  $B$ ); 当  $\mu \rightarrow 0$  时,  $x \rightarrow \infty$  (无轨迹).
- 若  $P$  在顶面  $A_1B_1C_1D_1$  上, 则  $x \in [0, 2]$ ,  $y \in [0, 2]$ ,  $z=2$ . 方程变为  $\mu x = 0 \Rightarrow x=0$  (点  $A_1$ ) 或  $\mu=0$  (点  $D$ ).

综上,  $P$  的轨迹围成的图形  $\Omega$  为平行四边形  $A_1BD$ .

2. 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $A_1B = A_1C = A_1A$ ;  $BA \perp BC$ ,  $BA = BC$ .

(1) 证明: 平面  $ABC \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ;

(2) 若直线  $A_1B$  与平面  $ABC$  所成角为  $60^\circ$ , 求平面  $A_1B_1C$  与平面  $ABC$  夹角的余弦值.

(1) 证明:  $A_1O \perp$  平面  $ABC \Rightarrow O$  为  $\triangle ABC$  外心.  $\Rightarrow O$  为  $AB$  中点  $\Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow$  平面  $ACC_1A_1 \perp$  平面  $ABC$ .

(2) 求平面  $A_1B_1C$  与平面  $ABC$  夹角的余弦值.

设  $AB=BC=2$ , 则  $AO=1$ . 由  $\angle A_1BO = 60^\circ$ , 得  $A_1O = \sqrt{3}$ . 平面  $A_1B_1C$  与平面  $ABC$  的夹角为  $\theta$ , 则  $\cos \theta = \frac{AO}{A_1O} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

1. (多选) 已知  $P$  是棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  表面上的动点,  $M, N$  分别是线段  $B_1C$  和  $C_1C$  的中点,

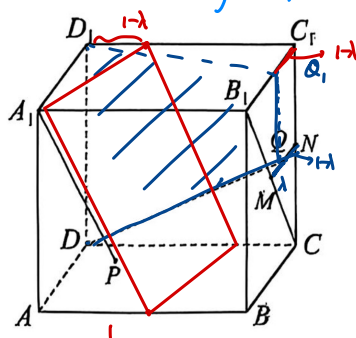
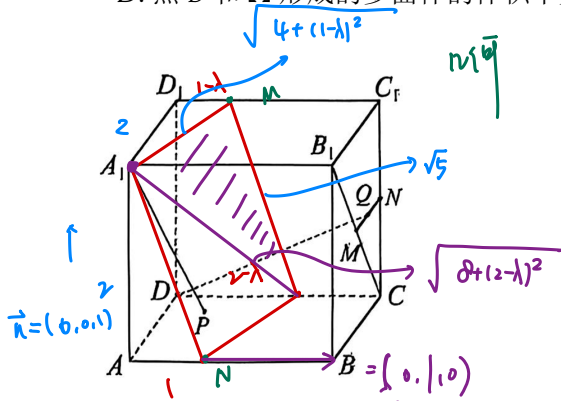
点  $Q$  满足  $\overrightarrow{MQ} = \lambda \overrightarrow{MN}$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), 且  $A_1P \perp DQ$ , 设  $P$  的轨迹围成的图形为多边形  $\Omega$ , 则

A.  $\Omega$  为平行四边形  $\checkmark$

B. 存在  $\lambda$ , 使得  $\Omega$  的面积为  $\sqrt{22}$   $\checkmark$

C. 存在  $\lambda$ , 使得  $\Omega$  和底面  $ABCD$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$

D. 点  $B$  和  $\Omega$  形成的多面体的体积不变



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= (-2, 1-\lambda, 0) = (-2, \mu, 0) \\ \overrightarrow{AN} &= (0, 1, -2) \\ \vec{n} &= (\mu, 2, 1) \\ -2x + 2y + z &= 0 \\ x &= y \\ \mu &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2+5}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$V = S \cdot \frac{1}{3} \cdot d = \frac{2}{\sqrt{\mu^2+5}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{\mu^2+5} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 5} \\ &= \sqrt{\mu^2 + 4} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 10 - \lambda^2 + 4\lambda - 12}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 5}} = \frac{2\lambda - 2}{2\sqrt{5} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 5}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{20(\lambda^2 - 2\lambda + 5) - 4(1 - \lambda)^2}}{2\sqrt{5} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 5} = 2\sqrt{2}$$

$$20(\lambda^2 - 2\lambda + 5) - 4(1 - \lambda)^2 = 4 \cdot 22$$

2. 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $A_1B = A_1C = A_1A = 2$ ,  $BA \perp BC$ ,  $BA = BC$ .

(1) 证明: 平面  $A_1B_1C$   $\perp$  平面  $ACC_1A$ ;

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 5\lambda^2 - 10\lambda + 5 - \lambda^2 + 2\lambda = 22 \\ &4\lambda^2 - 8\lambda + 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \end{aligned}$$

(2) 若直线  $A_1B$  与平面  $ABC$  所成角为  $60^\circ$ , 求平面  $A_1B_1C$  与平面  $ABC$  夹角的余弦值。

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{\mu^2+5}}{\sqrt{5}\sqrt{\mu^2+4}}$$

3. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ , 则  $\{a_n\}$  的前 25 项和为

A. 2

B. 12

C. 13

D. 14

Handwritten solution for problem 3:

$$a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1} + p} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu}$$

$$\mu(a_{n+1} + p) = \lambda + \gamma$$

$$\mu a_{n+1} + \mu p = \lambda + \gamma$$

$$\mu \frac{1}{1-a_n} + \mu p = \lambda + \gamma$$

$$\mu = \lambda p = -p$$

$$\mu p - p^2 - \gamma p = 1 = -\gamma p \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{p}$$

$$\lambda = -1$$

$$\lambda p + \gamma = 1 = \gamma - p$$

$$\frac{1}{p} + p = -1 \Rightarrow 1 + p^2 + p = 0 \Rightarrow p = -1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$$

$$a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -1, \dots$$

$$S_{25} = 12.5$$

4. (多选) 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = 2$ , 且对任意正整数  $n$ ,  $a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$  成等比数列,  $a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$  成等差数列, 则

A.  $a_n \in \mathbb{N}^*$ B.  $\sqrt{a_{2n-1}} \in \mathbb{Q}$ C.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} < 3$ D.  $\sum_{k=1}^9 a_{2k} = 330$ 

Handwritten solution for problem 4:

$$a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 1 \Rightarrow a_n = n$$

$$a_2 = a_1 + 1 = 2, a_3 = a_2 + 1 = 3$$

$$a_4 = a_3 + 1 = 4$$

$$a_5 = a_4 + 1 = 5$$

$$a_6 = a_5 + 1 = 6$$

$$a_7 = a_6 + 1 = 7$$

$$a_8 = a_7 + 1 = 8$$

$$a_9 = a_8 + 1 = 9$$

$$a_{10} = a_9 + 1 = 10$$

$$a_{11} = a_{10} + 1 = 11$$

$$a_{12} = a_{11} + 1 = 12$$

$$a_{13} = a_{12} + 1 = 13$$

$$a_{14} = a_{13} + 1 = 14$$

$$a_{15} = a_{14} + 1 = 15$$

$$a_{16} = a_{15} + 1 = 16$$

$$a_{17} = a_{16} + 1 = 17$$

$$a_{18} = a_{17} + 1 = 18$$

$$a_{19} = a_{18} + 1 = 19$$

$$a_{20} = a_{19} + 1 = 20$$

$$a_{21} = a_{20} + 1 = 21$$

$$a_{22} = a_{21} + 1 = 22$$

$$a_{23} = a_{22} + 1 = 23$$

$$a_{24} = a_{23} + 1 = 24$$

$$a_{25} = a_{24} + 1 = 25$$

$$a_{26} = a_{25} + 1 = 26$$

$$a_{27} = a_{26} + 1 = 27$$

$$a_{28} = a_{27} + 1 = 28$$

$$a_{29} = a_{28} + 1 = 29$$

$$a_{30} = a_{29} + 1 = 30$$

$$a_{31} = a_{30} + 1 = 31$$

$$a_{32} = a_{31} + 1 = 32$$

$$a_{33} = a_{32} + 1 = 33$$

$$a_{34} = a_{33} + 1 = 34$$

$$a_{35} = a_{34} + 1 = 35$$

$$a_{36} = a_{35} + 1 = 36$$

$$a_{37} = a_{36} + 1 = 37$$

$$a_{38} = a_{37} + 1 = 38$$

$$a_{39} = a_{38} + 1 = 39$$

$$a_{40} = a_{39} + 1 = 40$$

$$a_{41} = a_{40} + 1 = 41$$

$$a_{42} = a_{41} + 1 = 42$$

$$a_{43} = a_{42} + 1 = 43$$

$$a_{44} = a_{43} + 1 = 44$$

$$a_{45} = a_{44} + 1 = 45$$

$$a_{46} = a_{45} + 1 = 46$$

$$a_{47} = a_{46} + 1 = 47$$

$$a_{48} = a_{47} + 1 = 48$$

$$a_{49} = a_{48} + 1 = 49$$

$$a_{50} = a_{49} + 1 = 50$$

$$a_{51} = a_{50} + 1 = 51$$

$$a_{52} = a_{51} + 1 = 52$$

$$a_{53} = a_{52} + 1 = 53$$

$$a_{54} = a_{53} + 1 = 54$$

$$a_{55} = a_{54} + 1 = 55$$

$$a_{56} = a_{55} + 1 = 56$$

$$a_{57} = a_{56} + 1 = 57$$

$$a_{58} = a_{57} + 1 = 58$$

$$a_{59} = a_{58} + 1 = 59$$

$$a_{60} = a_{59} + 1 = 60$$

$$a_{61} = a_{60} + 1 = 61$$

$$a_{62} = a_{61} + 1 = 62$$

$$a_{63} = a_{62} + 1 = 63$$

$$a_{64} = a_{63} + 1 = 64$$

$$a_{65} = a_{64} + 1 = 65$$

$$a_{66} = a_{65} + 1 = 66$$

$$a_{67} = a_{66} + 1 = 67$$

$$a_{68} = a_{67} + 1 = 68$$

$$a_{69} = a_{68} + 1 = 69$$

$$a_{70} = a_{69} + 1 = 70$$

$$a_{71} = a_{70} + 1 = 71$$

$$a_{72} = a_{71} + 1 = 72$$

$$a_{73} = a_{72} + 1 = 73$$

$$a_{74} = a_{73} + 1 = 74$$

$$a_{75} = a_{74} + 1 = 75$$

$$a_{76} = a_{75} + 1 = 76$$

$$a_{77} = a_{76} + 1 = 77$$

$$a_{78} = a_{77} + 1 = 78$$

$$a_{79} = a_{78} + 1 = 79$$

$$a_{80} = a_{79} + 1 = 80$$

$$a_{81} = a_{80} + 1 = 81$$

$$a_{82} = a_{81} + 1 = 82$$

$$a_{83} = a_{82} + 1 = 83$$

$$a_{84} = a_{83} + 1 = 84$$

$$a_{85} = a_{84} + 1 = 85$$

$$a_{86} = a_{85} + 1 = 86$$

$$a_{87} = a_{86} + 1 = 87$$

$$a_{88} = a_{87} + 1 = 88$$

$$a_{89} = a_{88} + 1 = 89$$

$$a_{90} = a_{89} + 1 = 90$$

$$a_{91} = a_{90} + 1 = 91$$

$$a_{92} = a_{91} + 1 = 92$$

$$a_{93} = a_{92} + 1 = 93$$

$$a_{94} = a_{93} + 1 = 94$$

$$a_{95} = a_{94} + 1 = 95$$

$$a_{96} = a_{95} + 1 = 96$$

$$a_{97} = a_{96} + 1 = 97$$

$$a_{98} = a_{97} + 1 = 98$$

$$a_{99} = a_{98} + 1 = 99$$

$$a_{100} = a_{99} + 1 = 100$$

5. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$ . 令  $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , 证明:  $b_n < b_{n+1} < 1$ .

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \Rightarrow \left( \frac{1}{a_{n+2}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_{n+1}}$$

6. 若对任意的  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{k \cdot 2^n} < 1$ , 求  $k$  的取值范围.

3. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ , 则  $\{a_n\}$  的前 25 项和为

A. 2

B. 12

C. 13

D. 14

4. (多选) 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = 2$ , 且对任意正整数  $n$ ,  $a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$  成等比数列,  $a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$  成等差数列, 则

A.  $a_n \in \mathbb{N}^*$ B.  $\sqrt{a_{2n-1}} \in \mathbb{Q}$ C.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} < 3$ D.  $\sum_{k=1}^9 a_{2k} = 330$ 

$$a_{2n-1} = n^2 \quad a_{2n} = n(n+1)$$

$$a_2^2 = a_1 a_3$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k(k+1)} \right) < \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left[ (k+2) - (k-1) \right] k(k+1)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1} - a_k}{(k+1)k(k-1) - (k+1)k(k-1)}$$

5. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$ . 令  $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , 证明:  $b_n < b_{n+1} < 1$ .

$$= \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3a_n}{a_n + 2} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{3}{1 + \frac{2}{a_n}}$$

$$= \frac{3}{1 + \frac{2}{a_n}} = \frac{3}{1 + \frac{2}{a_n}}$$

$$= \frac{3}{1 + \frac{2}{a_n}}$$

$$1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} < 2$$

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{4k^2 - 1}$$

$$= \frac{4}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \cdot 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{n!} = \frac{1}{n!} \left[ \frac{1}{n(n+2)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n!} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

6. 若对任意的  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{k \cdot 2^n} < 1$ , 求  $k$  的取值范围.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 3^n = \left[ a(n+1)^2 + b(n+1) + c \right] 3^n - \left[ a n^2 + b n + c \right] 3^n$$

$$\frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} \right)$$

$$\approx \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 3^n = \left[ a(n+1)^2 + b(n+1) + c \right] 3^n - \left[ a n^2 + b n + c \right] 3^n$$

$$= \left[ 2a n + a + b \right] 3^n$$

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{3}{2} \quad c = -\frac{3}{4}$$

$$= \left[ \frac{1}{2}(n+1) - \frac{3}{2} \right] 3^n - \left[ \frac{1}{2}n - \frac{3}{2} \right] 3^n$$

7. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $\Omega$  的两个焦点,  $P$  是椭圆  $\Omega$  上一点,  $\triangle PF_1F_2$  的内切圆的圆心为  $Q$ 。若  $5\overrightarrow{QF_1} + 3\overrightarrow{QF_2} + 3\overrightarrow{QP} = \vec{0}$ , 则椭圆  $\Omega$  的离心率为

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{2}{5}$

C.  $\frac{3}{7}$

D.  $\frac{3}{8}$  ✓

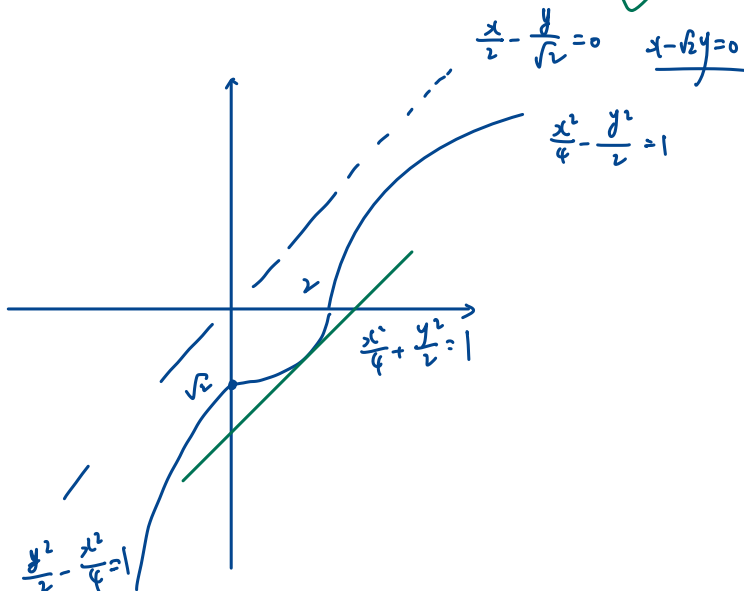
8. (多选) 已知曲线  $G: \frac{x|x|}{4} - \frac{y|y|}{2} = 1$ , 则:

A. 点  $(\sqrt{2}, -1)$  在曲线  $G$  上 ✓

B. 曲线  $G$  关于  $x$  轴对称 ✗

C. 直线  $\sqrt{2}x - 2y = 0$  与曲线  $G$  无交点 ✓

D. 当直线  $\sqrt{2}x - 2y + m = 0$  与曲线  $G$  有两个公共点时,  $m$  的取值范围为  $(-4, 0)$  ✓



9. 已知  $\triangle DEF$  的顶点  $E$  在  $x$  轴上,  $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ ,  $|DF| = |EF|$ , 且边  $DE$  的中点  $M$  在  $y$  轴上, 设  $D$  的轨迹为曲线  $\Gamma$ .

(1) 求  $\Gamma$  的方程;

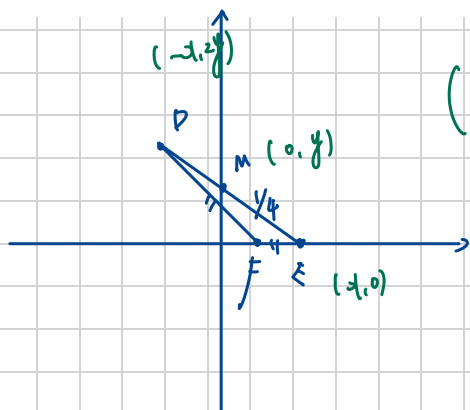
(2) 若正三角形  $ABC$  的三个顶点都在  $\Gamma$  上, 且直线  $AB$  的倾斜角为  $45^\circ$ , 求  $|AB|$ .

10. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . 设  $l: x - 2y = 0$ . 过点  $P(2, 1)$  的直线与椭圆  $E$  交于  $C, D$  两点, 问直线  $l$  上是否存在定点  $Q$ , 使得  $k_{QC} \cdot k_{QD}$  为定值. 若存在, 求出  $Q$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

9. 已知  $\triangle DEF$  的顶点  $E$  在  $x$  轴上,  $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ ,  $|DF| = |EF|$ , 且边  $DE$  的中点  $M$  在  $y$  轴上, 设  $D$  的轨迹为曲线  $\Gamma$ .

(1) 求  $\Gamma$  的方程;

(2) 若正三角形  $ABC$  的三个顶点都在  $\Gamma$  上, 且直线  $AB$  的倾斜角为  $45^\circ$ , 求  $|AB|$ .

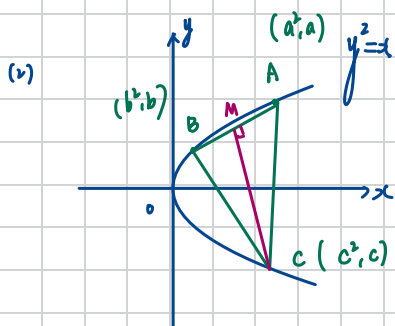


$$\left(-x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y)^2 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$4y^2 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(x\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -x$$

$$y^2 = -2x \Rightarrow D: y^2 = -2x$$



$$|AB| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (a - b)^2} = |a - b| \sqrt{(a + b)^2 + 1} = \sqrt{2} |a - b| = t$$

$$k = \frac{a - b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a + b} = 1$$

$$= \sqrt{2} b$$

$$\begin{cases} a - b > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t = a - b$$

$$\vec{MC} \text{ 与 } \vec{MA} \text{ 垂直 } 90^\circ \text{ 则 } \vec{MC} \cdot \vec{MA} = 0$$

$$M\left(\frac{a^2 + b^2}{2}, \frac{a + b}{2}\right) \quad C(c^2, c)$$

$$\vec{MC} = \left(\frac{a - b}{2}, \frac{-a^2 + b^2}{2}\right) \cdot \sqrt{2}$$

$$\vec{MA} = \left(\frac{a^2 - b^2}{2}, \frac{a - b}{2}\right)$$

$$a + b = 1$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow C \left( \frac{\sqrt{3}(a - b)}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2}, \frac{\sqrt{3}(b^2 - a^2)}{2} + \frac{a + b}{2} \right)$$

$$\frac{\sqrt{3}(a - b)}{2} + \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}(b - a)}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x = y^2 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{2} t^2 + 1$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{2} t^2 + 1 \right) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{3}$$

11. 线段  $MN$  的长度为 3, 端点  $M, N$  分别在  $y$  轴和  $x$  轴上运动, 点  $E$  满足  $\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{EN}$ , 记点  $E$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求曲线  $C$  的方程;

(2) 曲线  $C$  与  $x$  轴的左右两个交点分别为  $A, B$ ,  $P$  为  $C$  上异于  $A, B$  的点, 过点  $D(1,0)$  分别作直线  $l_1 \parallel AP$ , 直线  $l_2 \parallel BP$ , 其中  $l_1$  与曲线  $C$  交于点  $G, H$  两点,  $l_2$  交直线  $x = -1$  于点  $R$ , 点  $I$  满足  $|\overrightarrow{DG}| \cdot |\overrightarrow{IH}| = |\overrightarrow{DH}| \cdot |\overrightarrow{IG}|$ .

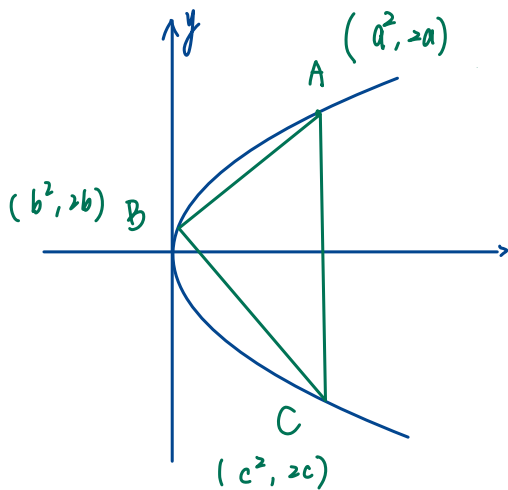
(i) 求点  $I$  的轨迹方程;

(ii)  $\triangle IDR$  的面积是否有最小值? 若存在, 求出最小值; 若不存在, 请说明理由.

12. 设抛物线  $E: y^2 = 4x$  上有三点  $A, B, C$ , 且  $\triangle ABC$  的垂心为  $E$  的焦点  $F$ .

(1) 若  $A(0,0)$ , 求  $\triangle ABC$  的面积;

(2) 证明:  $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB}$  为定值.



$$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$(a^2-1)(c^2-b^2) + 2a \cdot 2(c-b) = 0$$

$$\Rightarrow (a^2-1)(c+b) + 4a = 0 \Rightarrow \underline{a^2c + a^2b - b + 4a = 0}$$

$$\text{同理 } (b^2-1)(a+c) + 4b = 0 \Rightarrow \underline{b^2c + b^2a - c + 4b = 0}$$

$$\begin{aligned} & 5a - 5b + a^2c + a^2b - ab^2 - cb^2 = 0 \\ & 5(a-b) + c(a-b)(a+b) + ab(a-b) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2(a+b+c) + a^2c + a^2b + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 4(a+b+c) = 0 \\ & \Rightarrow 5 + c(a+b) + ab = 0 \\ & \Rightarrow \underline{ac + cb + ab = -5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{FA} \\ & = (a^2-1)(b^2-1) + 4ab + (b^2-1)(c^2-1) + 4bc + (c^2-1)(a^2-1) + 4ac \end{aligned}$$

$$= 3 + 4(ab+bc+ac) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2(a^2+b^2+c^2)$$

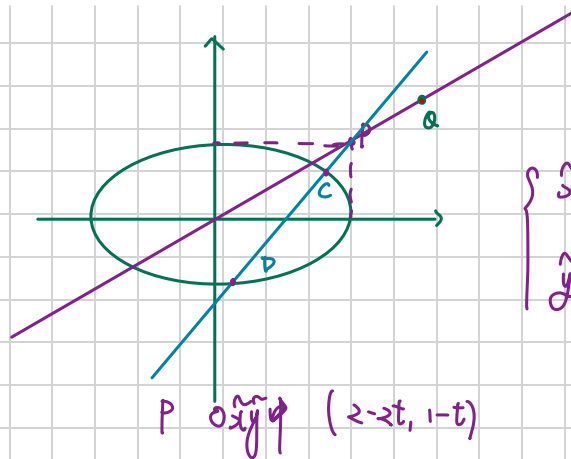
$$\begin{aligned} & \underline{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)} - \underline{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac)} \\ & \Rightarrow \underline{abc + (a+b+c) = 0} \end{aligned}$$

$$-2(a+b+c) = a^2c + a^2b + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \Rightarrow$$

$$= \underline{(ab+bc+ac)(a+b+c)} - \underline{3abc}$$

$$\Rightarrow \underline{abc + (a+b+c) = 0}$$

10. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . 设  $l: x - 2y = 0$ . 过点  $P(2, 1)$  的直线与椭圆  $E$  交于  $C, D$  两点, 问直线  $l$  上是否存在定点  $Q$ , 使得  $k_{QC} \cdot k_{QD}$  为定值. 若存在, 求出  $Q$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



$P(2, 1)$   $Q(x, y)$   $(2-2t, 1-t)$

$$\vec{m}(x-2+2t) + n(y-1+t) = 0$$

$$\Rightarrow mx + ny = m(2-2t) + n(1-t) = (2m+n)(1-t)$$

$Q(2t, t)$

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 2t \\ \tilde{y} = y - t \end{cases} \begin{cases} (\tilde{x}+t)^2 + 4(\tilde{y}+t)^2 = 4 \\ mx + ny = (2m+n)(1-t) \end{cases}$$

$$\left( x + \frac{2t}{(2m+n)(1-t)} (mx + ny) \right)^2 + 4 \left( y + \frac{t}{(2m+n)(1-t)} (mx + ny) \right)^2 = 4 \left( \frac{mx + ny}{(2m+n)(1-t)} \right)^2$$

$$[Ax^2 + Bxy + Cy^2] = 0$$

$$A + Bk + Ck^2 = 0$$

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{A}{C}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( 1 + \frac{2tm}{(2m+n)(1-t)} \right)^2 + \left( \frac{nt}{(2m+n)(1-t)} \right)^2 \cdot 4 - \frac{m^2 4}{(2m+n)(1-t)^2} = \frac{[(2m+n)(1-t) + 2tm]^2 + 4m^2 t^2 - 4m^2}{(2m+n)(1-t)^2}$$

$$\frac{[(2m+n)(1-t) + 2tm]^2 + 4m^2 t^2 - 4m^2}{4[(2m+n)(1-t) + nt]^2 + 4t^2 n^2 - 4n^2}$$

$$\frac{[(2p+1)(1-t) + 2pt]^2 + 4p^2 t^2 - 4p^2}{4[(2p+1)(1-t) + pt]^2 + 4t^2 p^2 - 4p^2}$$

$$\frac{[(2p+1)(1-t) + 2pt]^2 + 4p^2 t^2 - 4p^2}{4[(2p+1)(1-t) + pt]^2 + 4t^2 p^2 - 4p^2}$$

$$\frac{[(2p+1)(1-t) + 2pt]^2 + 4p^2 t^2 - 4p^2}{4[(2p+1)(1-t) + pt]^2 + 4t^2 p^2 - 4p^2}$$

$$[2(1-t) + t]p + (1-t)$$

$$4(2-t)^2 p^2 + 8(2-t)(1-t)p + 4(1-t)^2 + 4t^2 - 4$$

$$\frac{(1-t)^2}{(2-t)^2} = \frac{4+4t^2}{4(2-t)^2} = \frac{4(1-t)}{8(2-t)(1-t)} = \frac{4t^2-4}{(1-t)^2-4}$$

$$= \frac{1}{2(2-t)} = \frac{4(t^2-1)}{(1-t^2)(1-t-2)} = \frac{4(t+1)}{(t-3)(t+1)}$$

$$\delta(2-t)(t+1) = t-3$$

$$\delta(-t^2+t+2) = t-3$$

$$-8t^2+7t+19=0$$

$$8t^2-7t-19=0$$