Lecture 4 随机变量的数字特征

1. 现在有基因型为 DD 的高茎豌豆和基因型为 dd 的矮茎豌豆，让其杂交后得到基因型为 Dd 的高茎豌豆。将其视作亲本 P，自交后产生子一代 F_1，F_1 中基因型 DD, Dd, dd 的比例为 1 : 2 : 1. 现在让 F_1 继续自交，**每株豌豆产生的后代数量相同**。设连续自交 n 次得到子代 F_{n+1}.

(1) 在 F_3 中任取一株豌豆，发现为高茎豌豆 (D__)，问其亲本豌豆为杂合子 (Dd) 的概率是多少？

(2) 在 F_n 中任取一株豌豆，问其为纯合子 (DD, dd) 的概率是多少？

F_3 A (D_)

F_2 DD B_1

F_2 Dd B_2

F_2 dd B_3

完备事件组

P_n

F_1: $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

F_2: $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$

DD Dd dd

Bayes公式

(1) $$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)}=\frac{\boxed{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}\ \text{Dd}}{\boxed{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}+1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{3}{8}}$$

Dd DD dd

$$=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{16}+\frac{6}{16}}=\frac{1}{3}$$

(2) DD. dd

F_{n-1} $\boxed{\text{DD. dd}}$ $\boxed{\text{Dd}}$

全概率公式

$$P_n=\boxed{1}\cdot P_{n-1}+\boxed{\frac{1}{2}}\cdot(1-P_{n-1})$$

$$\Rightarrow p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_{n-1}\qquad x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\Rightarrow x=1$$

$$\Rightarrow p_n-1=\frac{1}{2}(p_{n-1}-1)$$

$$\boxed{p_1=\frac{1}{2}}\Rightarrow p_1-1=-\frac{1}{2}\neq0\Rightarrow p_n-1\neq0\Rightarrow\frac{p_n-1}{p_{n-1}-1}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p_n=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ 四.

2. **(抽彩模型)** 已知有 n 张奖券，其中 $m\ (m \le n)$ 张有奖， n 名同学依次**不放回**抽奖。

(1) 记事件 $A_k =$ “第 k 个抽奖的同学获奖”，其中 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$. 下面给出了若干种求解 $P(A_k)$ 的方法，指出哪些是正确的，哪些是错误的。再问：错误的原因在于何处？

(a) $P(A_k) = \dfrac{C_m^1 A_{n-1}^{k-1} \cdot 1}{A_n^k} = \dfrac{m}{n}$. ✓	(b) $P(A_k) = \dfrac{C_m^1 C_{n-1}^{k-1} \cdot 1}{\boxed{C_k^1 C_n^k}} = \dfrac{km}{n} \cdot \dfrac{1}{k} = \dfrac{m}{n}$.	(c) $P(A_k) = \dfrac{C_m^1 C_{n-1}^{k-1} \cdot 1}{\boxed{C_n^{k-1} C_{n-k+1}^1}} = \dfrac{m}{n}$. ✓

$k-1$　C_m^1　无序　$n-1$　中

差一个分组　k

实化 $k-1:1$ 分组.

(2) 当 $m = 1$ 时，事实上，$A_k = \overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_{k-1}} A_k$. 注意到 $P(A_s \mid \overline{A_{s-1}}\,\overline{A_{s-2}} \cdots \overline{A_1}) = 1/(n-s+1)\ (1 \le s \le k, s \in \mathbb{N}^*)$, 请你利用这一点通过**乘法公式**求解出 $P(A_k)$.

$$P(A_k) = P(A_k \mid \overline{A_{k-1}} \cdots \overline{A_1})\, P(\overline{A_{k-1}} \mid \overline{A_{k-2}} \cdots \overline{A_1}) \cdots P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})\, P(\overline{A_1})$$

$$\left(1 - \frac{1}{n-k+1+1}\right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\cancel{n-k+1}} = \frac{\cancel{n-k+1}}{\cancel{n-k+2}} \cdot \frac{\cancel{n-k+2}}{\cancel{n-k+3}} \cdots \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{\cancel{n-1}}{n}$$

(3) 当 $m > 1$ 时，上述思路有一些困难了。请你用**第一数学归纳法**证明 $\{P(A_k)\}$ 为**常数列**。注意到 $P(A_1) = m/n$ 完成归纳奠基。对 $k = p$ 的情形我们假设结论成立，当 $k = p + 1$ 时，利用全概率公式有

$P(A_{p+1} \mid A_p)$

[illegible]非Markov chain

$$P(A_{p+1}) = \boxed{P(A_{p+1} \mid A_1)}\, P(A_1) + P(A_{p+1} \mid \overline{A_1})\, P(\overline{A_1}).$$

对 $P(A_{p+1} \mid A_1)$ 你可以将其视为初始条件为有 $n-1$ 张奖券，其中 $m-1$ 张有奖的情形，第 p 个抽奖的同学获奖的概率，**这就利用上了归纳假设。**

第p次中奖

$$\frac{m-1}{n-1} \cdot \frac{m}{n} + \frac{m}{n-1} \cdot \frac{n-m}{n}$$

$$= \frac{\cancel{m^2} - m + nm - \cancel{m^2}}{(n-1)n} = \frac{m(n-1)}{(n-1)n} = \frac{m}{n}$$ ✓

成立.

3. **(Polya 罐子)** 设罐子中有 b 个红球， r 个黑球，每次随机取出一个球，取出后将原球放回，再加入 c 个同色球，设 a_k 为第 k 次取出黑球的概率，证明：

$a_k = \frac{r}{b+r}$.

(1) **(传染病模型)** 若 $c > 0$， $\{a_k\}$ 为常数列；

(2) **(不放回抽样)** 若 $c = -1$， $\{a_k\}$ 为常数列. ⇝ 即上述抽彩模型

$a_k = \frac{r}{b+r}$ ☆

(1) 归纳假设 $a_{k-1} = \frac{r}{b+r}$

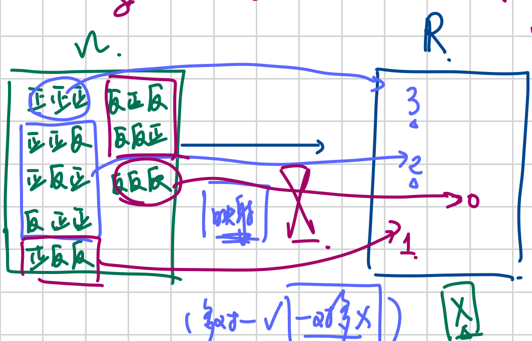
$$P(A_k) = P(A_k|A_1)P(A_1) + P(A_k|\bar{A_1})P(\bar{A_1})$$

$$\frac{r+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r} + \frac{r}{b+r+c}\cdot\frac{b}{b+r} = \frac{r^2+cr+br}{(b+r+c)(b+r)} = \frac{r}{b+r} \quad \square.$$

随机变量 (random variable)

引例 掷一枚均匀的硬币3次，每次实验结果相互独立，求其中两次及以上得到正面的P.

· 古典 $\frac{C_3^2+1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ · 独立性 $(C_3^2+1)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.



记正面出现的次数为 X.

$X(\omega): \Omega \to \mathbb{R}$, 正面出现的次数 N.
$\mapsto x$.

X的可能取值 0, 1, 2, 3

P(正面至少出现两次) $= P\{(X=2)\cup(X=3)\}$

$= P\{X=2\} + P\{X=3\}$

$\omega_i \in \Omega \longrightarrow x_i \in \mathbb{R}$.

def 样本空间 Ω 中每个样本点 ω，都有唯一一个 $X(\omega)$ 与 ω 对应

称 X 为随机变量. $(X: \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto X(\omega))$

- 离散型 → $X(\omega)$ 的取值为有限个或 $\boxed{\text{可列个}}$
- 连续型 → $X(\omega)$ 的取值在一个区间上

正态分布

$1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n, \cdots$

$a_1, a_2, \cdots \cdots, a_n = \_\_, \cdots$

$\mathbb{Q}$ 可列集.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3		p_n.

- 上述表格称为 X 的分布列 $\quad P\{X = x_i\} = p_i \qquad P\{X=k\} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad (k=0,1,2,\cdots,n)$

二项分布列

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = P(\Omega) = 1.$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \underline{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k}}$$

check

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (1+1)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^n = 1.$$

- $p_i = P(A) \overset{\sum}{=} P(\omega_i) \geq 0$

e.g. $P(X=k) = C_n^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$ $\quad (k=0,1,2,\cdots,n)$. $\quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^n = 1$

引例. 2个人甲、乙在赌博，本金1000元，赌博暂停，此时，

甲赢的概率 p，乙 $1-p$，赌金如何分配？ 乙 $\underline{1000(1-p)}$

$p:1-p$ 分配.

甲获得的金额 X	0	1000
P	$1-p$	p

$1000p$

$$E(X) \overset{def}{=} 0(1-p)+1000p$$
$$=1000p$$

掷骰子

X	1	2	— —	6
P	p_1	p_2		p_6
	n_1	n_2	— — —	n_6

出现的点数

$\boxed{模拟实验N次}$ → $\boxed{样本}$

1 — — — 6 出现的频率

n_1 — — — n_6

N足够大，$P\left\{\left|n_i-\frac{1}{6}\right|<\varepsilon\right\}=1$.

样本均值 $\sum n_i x_i$ 频率 $\approx \sum p_i x_i = E(X)$

X	x_1	x_2	— — —	x_n
P	p_1	p_2	— — —	p_n

1° X平均取值水平 $E(X)$

2° 重复实验，样本均值会逼近于 $E(X)$ 的概率1.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

· 平移、伸缩 $E(aX+b)=aE(X)+b$.

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i = a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i + b\sum_{i=1}^{n}p_i = a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b = aE(X)+b.$$

· 多随机变量 $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ 均为定义在 Ω 上的随机变量.

$$\boxed{E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)}$$

硬币 正面 $\to 1$，反面 $\to 0$ 第1次结果 X_1，第2次 X_2.

$E(X_1+X_2) \overset{?}{=} E(X_1)+E(X_2)$

(X_2)

X_1	0	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X_1)=\frac{1}{2}=E(X_2)$

X_1+X_2 可能取值	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X_1+X_2)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=E(X_1)+E(X_2)$

X_2 前两次出现的正面数.

X_2	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

X_1+X_2	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X)=\frac{1+2+3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$

X_1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X_1)=\frac{1}{2}$

$P\{X_1+X_2=0\}$

$=P\{X_2=0,\ X_1=0\}=P\{两次反面\}=\frac{1}{4}$

$P\{X_1+X_2=1\}=P\{X_1=1,\ X_2=0\}+P\{X_1=0,\ X_2=1\}$

$=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$P\{X_1+X_2=2\}=P\{X_1=1,\ X_2=1\}+P\{X_1=0,\ X_2=2\}$

$=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

$P\{X_1+X_2=3\}=P\{X_1=1,\ X_2=2\}=\frac{1}{4}$

$X \quad x_1 \cdots x_n$

$Y \quad y_1 \cdots y_n$

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$$

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i+y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} P\{X=x_i, Y=y_j\}}_{=P\{X=x_i\}} + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} P\{X=x_i, Y=y_j\}$$

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

$$P\{X=x_i\} = P\{\{X=x_i\}\cap\Omega\} = P\{\{X=x_i\}\cap\{\{Y=y_1\}\cup\{Y=y_2\}\cup\cdots\cup\{Y=y_n\}\}\}$$

$$= P\{X=x_i, Y=y_1\} + \cdots + P\{X=x_i, Y=y_n\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i P\{X=x_i\} + \sum_{j=1}^{n} y_j P\{Y=y_j\} = E(X) + E(Y).$$

方差

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$X \sim E(X)$ 偏离程度.

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = E\left[(X-E(X))^2\right].$$

· 为什么不用 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - E(X)\sum_{i=1}^{n} p_i = E(X) - E(X) \equiv 0$

· 平移不变性 $D(X+b) = D(X)$. $\rightsquigarrow$ $D(aX+b) = a^2 D(X)$.

$$LHS = E\left[(X+b-E(X+b))^2\right] = E\left[(X+b-E(X)-b)^2\right] = E\left[(X-E(X))^2\right] = RHS.$$

· 伸缩 $D(aX)=a^2D(X)$

$$LHS=E\left[\left(aX-E(aX)\right)^2\right]=E\left[\left(aX-aE(X)\right)^2\right]=E\left[a^2\left(X-E(X)\right)^2\right]$$

$$=a^2E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=a^2D(X).$$

· $\boxed{S^2=\frac{1}{n}\left[\sum x_i^2-n\bar{x}^2\right]}$ ✓ $=\frac{1}{n}\sum x_i^2-\bar{x}^2$

↓ 类比.

$$D(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=E\left[X^2-2E(X)X+E^2(X)\right]=E(X^2)-2E(X)E(X)+E^2(X)$$

$$=E(X^2)-E^2(X).$$ ✓

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2p_i\geq 0$$

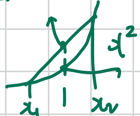
$\left(x_i-E(X)\right)^2\geq 0$, $p_i\geq 0$.

$\rightsquigarrow$ $E(X^2)\geq E^2(X)$ → 取等?

$x_i\equiv E(X)$

即随机变量only一个取值.

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

$g(\cdot)$ 凸函数

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)\quad(\text{取}=\Leftrightarrow x_1=x_2)$$

詹森.

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\leq\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n)\quad(\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1)$$ Jensen不等式

$$g\left(E(X)\right)\geq E\left(g(X)\right)$$ g为凸函数.

$$g\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}p_i\,g(x_i)$$

令 $p_i=\lambda_i$ ⇒ $g\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,g(x_i)$

6. 对一批产品进行检查，如检查到第 a 件全部都为合格品，就认为这批产品合格；若在前 a 件中发现不合格品**即停止检查**，并认为这批产品不合格。设产品的不合格率是 p $(0 < p < 1)$。问每批产品所查的件数为 X，求 $E(X), D(X)$.

X	1	2	3	---	a
P	p	$(1-p)^1 p$	$(1-p)^2 p$		$(1-p)^{a-1}p + (1-p)^a$

$= (1-p)^{a-1}$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{a-1} k(1-p)^{k-1}p + a(1-p)^{a-1}$$

$$= p\boxed{\sum_{k=1}^{a-1} k(1-p)^{k-1}} + a(1-p)^{a-1} = \frac{1-(1-p)^a}{p}$$

$D(X) \rightsquigarrow$ 求 $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{a-1} k^2(1-p)^{k-1}p + \boxed{a^2(1-p)^{a-1}}$$

$$\left[a(k+1)^2+b(k+1)+c\right](1-p)^k - \left[ak^2+bk+c\right](1-p)^{k-1}$$

4. 设 $E(X)=\mu$，$a \neq \mu$，证明 X 相对于 μ 的偏离程度 $E\left[(X-\mu)^2\right]$ 与 X 相对于 a 的偏离程度 $E\left[(X-a)^2\right]$ 满足

Note:

$$E\left[(X-\mu)^2\right] < E\left[(X-a)^2\right] \rightsquigarrow \mu = E(X) = \arg\min_{a\in\mathbb{R}} E\left[(X-a)^2\right].$$

$f(x)_{min} = f(a) \Rightarrow a = \arg\min f(x)$

$E(X)=1 \rightsquigarrow E\left[(X-1)^2\right] < E\left[(X-2)^2\right]$

[1法] $E\left[(X-a)^2\right] = E\left[X^2 - 2aX + a^2\right] = a^2 - 2E(X)a + E(X^2)$ $\quad \underline{a = E(X)}$

[2法] $E\left[(X-E(X)+E(X)-a)^2\right] = E\left[(X-E(X))^2 + 2(X-E(X))(E(X)-a) + (E(X)-a)^2\right]$

$$= E\left[(X-E(X))^2\right] + \underbrace{2(E(X)-a)E\left[(X-E(X))\right]}_{0} + \underbrace{(E(X)-a)^2}_{\geq 0}$$

$E(X)-E(X)=0$

$$\geq E\left[(X-E(X))^2\right].$$

5. 设 $X(\omega):\Omega\to\{0,1,2,\cdots,n\}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$，证明：

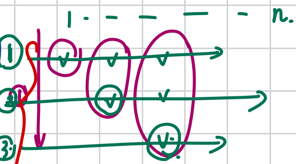
(1) $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(X\geq k)$;

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n}kP(X>k)=1/2[E(X^2)-E(X)]$.

② k

$1 \le i \le k \le n$

$$(1)\quad E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}1\right)P(X=k)$$



$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}P(X=k)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(P(X=i)+P(X=i+1)+P(X=i+2)+\cdots+P(X=n)\right)$$

$$\|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(X\geq i)$$

换序

$$=\sum_{k=1}^{n}P(X\geq k)$$

$1\le i\le j\le 3$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{j}a_{ij}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3}a_{ij}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & & j & \\ \hline i & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$i=j$

5. 设 $X(\omega):\Omega\to\{0,1,2,\cdots,n\}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$，证明：

(1) $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(X\geq k)$;

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n}kP(X>k)=1/2[E(X^2)-E(X)]$.

$$(2)\quad \sum_{k=0}^{n}k\left[P(X=k+1)+\cdots+P(X=n)\right]=\sum_{k=0}^{n}k\left(\sum_{j=k+1}^{n}P(X=j)\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}kP(X=j)$$

$1\le k+1\le j\le n$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(X=j) \boxed{\sum_{k=0}^{j-1} k}$$

$$= \frac{(1+j-1)(j-1)}{2}$$

$$= \frac{j(j-1)}{2}$$

$j=1$时 $=0$.

$\Uparrow$

$$\sum_{j=2}^{n} P(X=j)\frac{j^2-j}{2} = \sum_{j=1}^{n} P(X=j)\cdot\frac{j^2-j}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 P(X=j) - \sum_{j=1}^{n} j P(X=j)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[E(X^2) - E(X)\right]$$

11. 小明下飞行棋，现在离终点还有 3 步距离，他需要**恰好**掷骰子掷出 3 点才能胜利，若超过 3 点，则剩余的点数用于倒退。已知骰子是均匀的，且有 6 个面，标注着 $1 \sim 6$ 的点数。求小明从此刻到胜利还需投掷骰子的次数 X 的数学期望 $E(X)$.

Win

0

0

~~0~~ ✗

0

0

0

每次胜利 $p = 1/6$，问我到达第1次胜利的次数 X

$E(X) = ?$

X 1. 2. 3. 4. - - — — - - n - - — -

胜利 p $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$ $(k=1,2,\cdots,n\cdots)$ n个值

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = p \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{p}$$

$$[a(k+1)+b](1-p)^k - [ak+b](1-p)^{k-1}$$

$$= [(ak+a+b)(1-p) - ak - b](1-p)^{k-1}$$

$$= p \lim_{n\to\infty} \left\{ \left[\frac{1}{2-p}(n+1) + \frac{1-p}{(2-p)p}\right](1-p)^n - \left(\frac{1-p}{(2-p)p} + \frac{1}{2-p}\right)(1-p)^0 \right\}$$

$\to\infty$, $\to 0$, 指数>幂, $\to 0$

$$\frac{-1-p+p}{(2-p)p} = \frac{1}{(p-2)p}$$

$$\begin{cases} a(1-p) - a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2-p} \\ (a+b)(1-p) - b = 0 \Rightarrow b = \frac{-a(1-p)}{-p} \end{cases}$$

$$\frac{1-p}{(2-p)p} = \frac{a(1-p)}{p}$$

X	1	$1+E(X)$
	p	$1-p$

$$E(X) = p + (1-p)\left(1+E(X)\right)$$

$$\Rightarrow (1-(1-p))E(X) = 1 \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$$

$P(X=1)$ 概率 $P(X=2)$

$$E(X) = 1\cdot p + 2\cdot(1-p)p + 3\cdot(1-p)^2 p + 4(1-p)^3 p + \cdots$$

$P(X=2 \mid X>1)$ $P(X=3 \mid X>1)$

$$= 1\cdot p + (1-p)\left[(1+1)p + (1+2)(1-p)p + (1+3)(1-p)^2 p + \cdots\right]$$

$$\underbrace{\left(p + (1-p)p + (1-p)^2 p + \cdots\right)}_{\text{分布列之和}=1} + \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(1-p)^{k-1} p}$$

分布列之和 $= 1$ $+$ $E(X)$

无记忆性

$$\underbrace{\sum P(X=m+n \mid X>m)}_{} = \sum P(X=n) \Rightarrow P(X>m+n \mid X>m) = P(X>n)$$

$$\frac{P(X=m+n)}{P(X>m)} = \frac{P(X=m+n,\ X>m)}{P(X>m)} = P(X=n)$$

$$(1-p)^{n-1}p = \frac{(1-p)^{n+m-1}p}{(1-p)^m} \checkmark$$

$$P(X>m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p\cdot\frac{(1-p)^m}{1-(1-p)} = (1-p)^m$$