1. 证明：当 $P(AB)>0$ 时，$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$. 进一步，你能归纳出 $P(A_1A_2\cdots A_n)$ 的公式吗？

2. 已知 3 张奖券中只有 1 张有奖，甲、乙、丙 3 名同学**依次**不放回地各随机抽取 1 张。

   (1) 他们中奖的概率与抽奖的顺序有关吗？

   (2) 推广到 n 张奖券和 n 名同学，请你验证 (1) 的结论是否仍然成立。

3. 已知 $P(A)>0, P(B)>0$ 证明：$P(B|A)=P(B)$ 的**充要条件**是 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$. 其中一式成立的情况下，还有 $P(B|\overline{A})=P(B), P(A|\overline{B})=P(A)$.

4. 在 A,B,C 三个地区暴发了流感，这三个地区分别有 6%、5%、4% 的人患了流感。假设这三个地区的人数的比例为 5:7:8，现从这三个地区中任意选取一个人。

   (1) 求这个人患流感的概率；

   (2) 如果此人患流感，求此人选自 A 地区的概率。

5. 甲、乙、丙三人相互做乒乓球训练，第 1 次由甲将乒乓球传出，每次传球时，传球者都可能地将球传给两人中的任何一人。求第 n 次乒乓球在甲手中的概率。

6. (**Markov Chain**) 假设只考虑天气的两种情况：有雨或无雨。若已知今天的天气情况，明天天气保持不变的概率为 p，变的概率为 $1-p$ $(0<p<1)$. 设第一天无雨，试求第 n 天也无雨的概率。

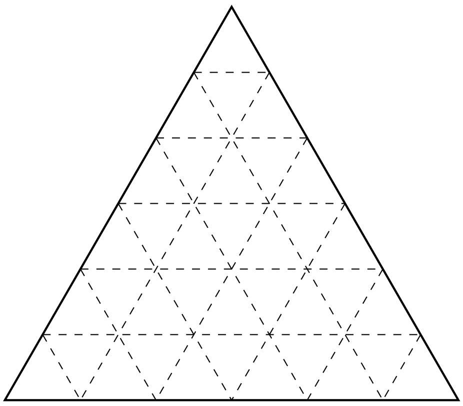
7. 甲、乙、丙三人进行比赛，规定每局两个人比赛，胜者与第三人比赛，依次循环，直至有一人**连续两次胜利**为止，此人即为冠军。而每次比赛双方取胜的概率都是 $1/2$，现假定甲、乙两人先比，试求各人得冠军的概率。

8. (**Polya 罐子**) 设罐子中有 b 个红球，r 个黑球，每次随机取出一个球，取出后将原球放回，再加入 c 个同色球，设 a_k 为第 k 次取出黑球的概率，证明：

   (1) (**传染病模型**) 若 $c>0$，$\{a_k\}$ 为常数列；

   (2) (**不放回抽样**) 若 $c=-1$，$\{a_k\}$ 为常数列.

1. 把一个等边三角形 ABC 的各边 2025 等分，过各分点在三角形内部作各边的平行线，得到的图案中一共有多少个平行四边形？



2. 2160 有多少个不同的正因数？这些正因数的和是多少？

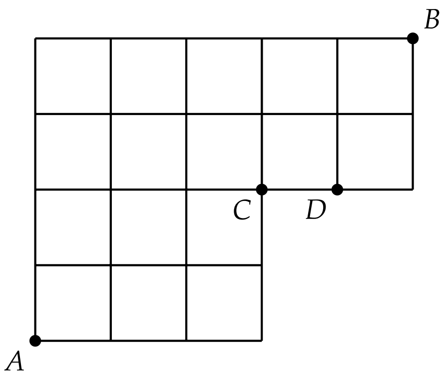
3. 从排成一排的 9 位同学中，随机选出 3 位同学，这 3 位同学互不相邻的概率是 ____.

4. 15 个人围坐在圆桌旁，从其中任选 4 人，两两不相邻的概率是 ____.

A. $\frac{30}{91}$ B. $\frac{25}{91}$ C. $\frac{10}{91}$ D. $\frac{31}{90}$

5. 安排 6 个班的班主任监考 6 个班，则其中恰好有两个班的班主任监考自己班的安排总数有多少种？

6. 在某城市中，A、B 两地之间有如图所示的道路网，甲沿道路随机关选一条最短路径，从 A 地出发去往 B 地，若甲途经 C 地，且不经过 D 地，则不同的路径共有 ____条。



7. 将一个圆环分成 n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ 个区域，用 m $(m \in \mathbb{N}, m \geq 3)$ 种颜色给这个 n 个区域染色，要求相邻区域不使用同一种颜色，但同一种颜色可重复使用，则不同的染色方案有多少种？

8. 已知 $n \geq 2$，且平面内有 n 条直线，其中任意两条不平行，任意三条不共点，证明：这些直线的交点的个数为

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

9. 求证：平面上 n 个圆最多把平面划分成 $n^2 - n + 2$ 个区域，其中 $n \geq 1$.

10. 已知

$$\frac{1}{(n+1)C_n^r} + \frac{1}{(n+1)C_n^x} = \frac{1}{nC_{n-1}^r},$$

其中 n, r 是使组合数有意义的正整数。且 n 为奇数，则 x 的值是 ____. (用含有 n, r 的代数式表示)

11. 设数列 $\{y_k\}$ 的通项公式为 $y_k = C_n^k$，其中 $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

    (1) 讨论数列 $\{y_k\}$ 的单调性；

    (2) 证明：

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2};$$

    (3) 已知 $x_1 = 1$，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$.

        (a) 若 $\{x_n\}$ 为 6 为公比的等比数列，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

        (b) 若 $\{x_n\}$ 为 1 为公差的等差数列，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

        (c) 若 $x_n = (-1)^n n$，证明：$\{a_n\}$ 是常数列。

12. (1) 求 $\left(9x + \dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式的常数项；

    (2) 已知 $(1 + \sqrt{x})^n$ 的展开式中第 9 项、第 10 项、第 11 项的二项式系数构成等差数列，求 n；

    (3) 求 $(1 + x + x^2)(1 - x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数；

    (4) 求 $(x^2 + x + y)^5$ 的展开式中 $x^5 y^2$ 的系数。

13. 在 $(1+x)^3 + (1+x)^4 + \cdots + (1+x)^{n+2}$ 的展开式中，含 x^2 项的系数是多少？

14. 求 $1-90C_{10}^1+90^2C_{10}^2-90^3C_{10}^3+\cdots+(-1)^k90^kC_{10}^k+\cdots+90^{10}C_{10}^{10}$ 除以 88 的余数。

15. 已知 $(x^2+1)(4x-3)^8=a_0+a_1(2x-1)+a_2(2x-1)^2+\cdots+a_{10}(2x-1)^{10}$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=$____; $a_3=$____.

16. 假设今天是星期六，则 2^{2025} 天后是星期几？2025^{2025} 天后是星期几？

17. 求证：任意无穷等差数列中均存在无穷等比子列，即若 $\{a_n\}$ 为无穷等差数列，那么可以取出无穷子列 $\{a_{n_k}\}$ 是等比数列。

18. 在 $n \times n$ 网格上从点 0 走到点 n，要求每一步只能走 $\nearrow$ 或者 $\searrow$，称为长为 $2n$ 的格路。不走到 x 轴下方的格路称为迪克路 (Dyck Path)。图 1 就展示了一个长度为 12 的迪克路。编号为 $1, 2, 3, \cdots, 2n$ 的点按顺序组成一个圈，用直线段将他们连接且线段不能出现交叉，这样连接的方法总数称为 Catalan 数，记作 C_n。图 2 展示了一个 $n = 6$ 的连接方法。

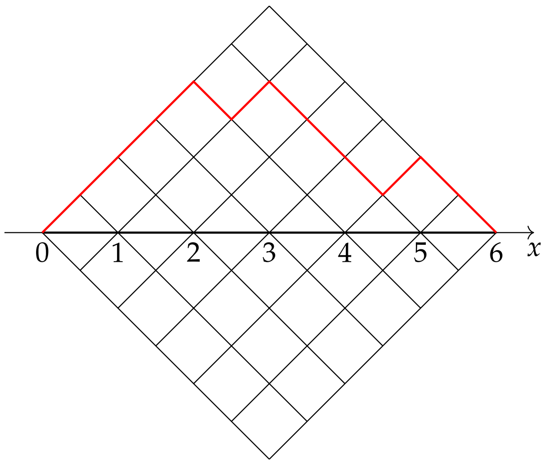


图 1: Dyck Path

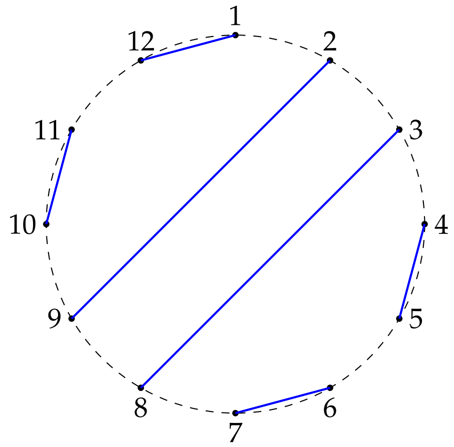
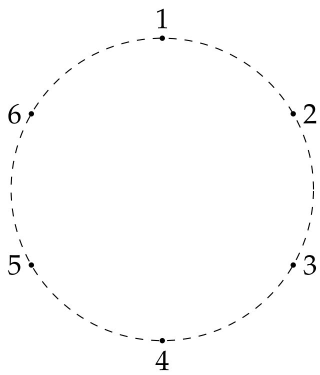
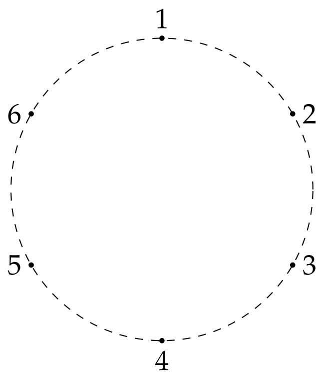


图 2: Catalan 配对

(1) 求 C_3 并在下面的图中绘制你找到的其中两种连接方法。





(2) 为了不出现交叉，其实相互配对的两个点的奇偶性必定相反，请你依据这一点，证明下列恒等式：

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}.$$

(3) 为了求解 C_n 的通项公式，用一一对应原理，请你尝试建立 Dyck Path 和 Catalan 配对之间的一一对应关系。事实上，图 1 和图 2 在这种对应关系下是等价的。

(4) 长度为 $2n$ 的 Dyck Path 的数目可以通过下列思路求解。利用“正难则反”的思想，对于每一个走到 x 轴下方的格路，都可以将其转化为**起点在 A 点，只在绿色阴影区域内走到点 n 的格路**。请你建立上述一一对应

关系并得到

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

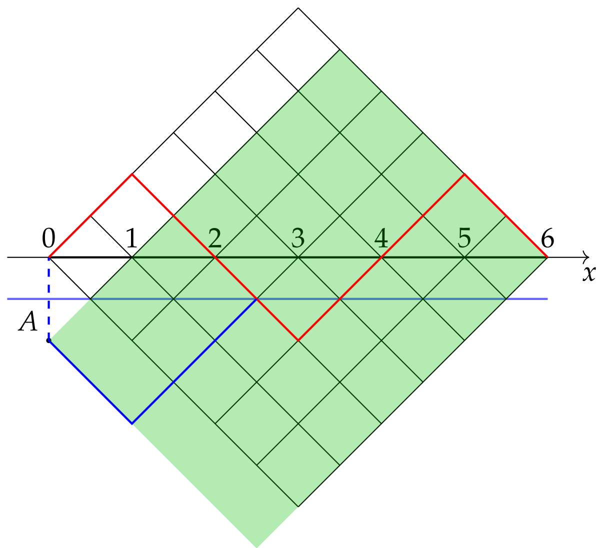


图 3: 一个非 Dyck Path 的示例