Lecture 2 二项式定理

插空. 捆绑. 分组分配. 隔板 (递推. 错排. 涂色)

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Z 满足 $ab=ba$！ 交换代数

矩阵 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

→ 一般不满足.

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

分步乘法

$$= (a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 ab^2 + C_3^3 a^0 b^3$

(C_3^3) (C_3^2)

$$(a+b)^4 = C_4^4 a^4 + C_4^3 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^1 ab^3 + C_4^0 b^4$$

↓ 推广 $(n \in N^*)$

二项式定理
$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \cdots + C_n^k a^k b^{n-k} + \cdots + C_n^n a^n b^0$$

Note:

1° 上述一共有 $n+1$ 项

2° 一般项通项公式 $T_{k+1} = C_n^k a^k b^{n-k}$ → 第 $k+1$ 项.

3° a.b 不一定是数，也可以为代数式子.

eg. 已知 $x^{10} = \sum_{k=0}^{10} a_k (2x-1)^k$ 求 a_5

令 $t = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{2}$.

$$\Rightarrow x^{10} = \frac{1}{2^{10}} \boxed{(t+1)^{10}} = \sum_{k=0}^{10} a_k t^k \qquad t^5$$

$$T_{5+1} = C_{10}^{5} \, 1^{10-5} \cdot t^5$$

$$= C_{10}^5 t^5$$

$$a_5 = \frac{C_{10}^5}{2^{10}}$$

eg. $(1+x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad (n \in N^*)$ $(x>0)$

$$(1+x)^n = C_n^0 \cdot 1^n \cdot x^0 + C_n^1 1^{n-1} \cdot x^1 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot x^2$$

$$+ \underbrace{C_n^3 \cdot 1^{n-3} \cdot x^3 + \cdots + C_n^n \cdot 1^0 \cdot x^n}_{\geqslant 0}$$

$$\geqslant 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

12. (1) 求 $\left(9x+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式的常数项；

(2) 已知 $(1+\sqrt{x})^n$ 的展开式中第 9 项、第 10 项、第 11 项的二项式系数构成等差数列，求 n；

(3) 求 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数；

(4) 求 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数。

(1) $T_{r+1} = C_{18}^r (9x)^r \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18-r} = \boxed{C_{18}^r \, 9^r \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{18-r}} \cdot x^{r - \frac{18-r}{2}}$

$r = \frac{18-r}{2} \Rightarrow 3r = 18 \Rightarrow r = 6$

$C_{18}^6 \cdot 9^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} = C_{18}^6 \cdot 3^{12-12} = C_{18}^6$

(2) $2C_n^9 = C_n^8 + C_n^{10} \Rightarrow 2 \cdot \frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{8!(n-8)!} + \frac{n!}{10!(n-10)!}$

$9 \quad (n-9) \qquad (n-8)(n-9) \qquad 9 \cdot 10$

$$\Rightarrow \frac{2}{9(n-9)} - \frac{1}{(n-8)(n-9)} = \frac{1}{90}$$

$$\Rightarrow \frac{\underbrace{2(n-8)-9}_{}}{9(n-8)(n-9)} = \frac{1}{90} \quad 2n-25$$

$$(2n-25)\cdot 10 = n^2-17n+72$$

$$\Rightarrow n^2-17n-20n+250+72$$

$$= n^2-37n+322=0.$$

2×161

7×23

14×23

$$\Rightarrow (n-14)(n-23)=0$$

$$\Rightarrow n=14 \text{ or } 23$$

12. (1) 求 $\left(9x+\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式的常数项；

(2) 已知 $(1+\sqrt{x})^n$ 的展开式中第 9 项、第 10 项、第 11 项的二项式系数构成等差数列，求 n；

(3) 求 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数；

(4) 求 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数。

(3) $(1-x)^{10} + x(1-x)^{10} + x^2(1-x)^{10}$

$x^4 \quad x^3 \quad x^2$

$$C_{10}^4(-1)^4 + C_{10}^3(-1)^3 + C_{10}^2(-1)^2 = \underbrace{C_{10}^4 + C_{10}^2 - C_{10}^3}$$

$$T_{r+1} = C_{10}^r \cdot 1^{10-r} \cdot (-x)^r = \boxed{C_{10}^r(-1)^r} x^r = \frac{10\times \cancel{9}^{3}\times \cancel{8}\times 7}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1} + \frac{\cancel{10}^{5}\times 9}{\cancel{2}\times 1} - \frac{10\times \cancel{9}^{3}\times \cancel{8}^{4}}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1}$$

$$= 210 + 45 - 120 = 90 + 45 = 135.$$

12. (1) 求 $\left(9x+\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式的常数项；

(2) 已知 $(1+\sqrt{x})^n$ 的展开式中第 9 项、第 10 项、第 11 项的二项式系数构成等差数列，求 n；

(3) 求 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数；

(4) 求 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数。

[法一] $[(x^2+x)+y]^5 \longrightarrow x^5y^2$

$C_5^2\, y^2 (x^2+x)^3$

$\boxed{y^2x^3}(x+1)^3$ $\quad T_{r+1}=C_3^r x^r\cdot 1$

$C_3^2\boxed{x^2}$

答 $C_5^2 C_3^2$.

[法二] $(x^2+x+y)^5$

排列组合：

$=(x^2+x+y)(x^2+x+y)(x^2+x+y)(x^2+x+y)(x^2+x+y)$

x^5y^2.

$y^2 \to$ 选2个括号

$x^5 \Rightarrow$ 3个括号中选 把5拆成2和1相加

$C_5^2\cdot C_3^2\cdot C_1^1$ $\quad \boxed{5=2+2+1}$

$\Rightarrow$ 2个括号选2，1个选1

$y\cdot y \quad x^2\cdot x^2 \quad x$

$=x^5y^2$.

eg. $[x^3+x^2+2]^6$ x^{10} 系数

[法一] $[(x^3+x^2)+1]^6$ $T_{r+1}=C_6^r\cdot(x^3+x^2)^r\cdot 2^{6-r}$

展开 $\sum_{r,s} C_6^r \cdot \left[\underbrace{C_r^s\cdot x^{3s}\cdot x^{2(r-s)}}_{T_{s+1}}\right]\cdot 2^{6-r}$

$C_6^r C_r^s x^{\boxed{3s+2r-2s}} 2^{6-r}$ $(6\geq r\geq s\geq 0)$

$3s+2r-2s=10$

$s+2r=10$

$r=5$	$s=0$
$r=4$	$s=2$
$r=3$	$s=4$ ✗

$\Rightarrow [C_6^5 C_5^0\cdot 2^{6-5}+C_6^4 C_4^2\cdot 2^{6-4}]x^{10}$

[法二] $(x^3+x^2+2)^6$ x^{10}

$10=m\times 3+n\times 2$ $m+n\leq 6$.

$6=m=2+n=2+2$ (x^3, x^2, 2)

$2\times 3+2\times 2=10$

$6=m=0+n=5+1$

$(C_6^2 C_4^2\cdot 2^2+C_6^0\cdot C_6^5\cdot C_1^1\cdot 2^1)x^{10}$

2. 二项式定理的严格证明：数学归纳法

T_{k+1}

命题 $(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \cdots + C_n^k a^k b^{n-k} + \cdots + C_n^n a^n b^0$

· 归纳奠基　$n=1$ 时，$(a+b)^1 = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a+b$ ✓

· 归纳递推　$n=k$ 时，假设命题成立

$n=k+1$ 时，$(a+b)^{k+1} = (a+b)\cdot(a+b)^k$

$$= (a+b)\left[C_k^0 a^0 b^k + \cdots + C_k^r a^r b^{k-r} + \cdots + C_k^k a^k b^0\right]$$

$$= \left[\boxed{C_k^0} a^1 b^k + \cdots + C_k^{k-1} \cdots + C_k^k a^{k+1} b^0\right] + \left[C_k^0 a^0 b^{k+1} + \cdots + C_k^k a^k b^1\right]$$

$\boxed{C_k^1} a^1 b^k$

$$= \boxed{C_k^0} a^0 b^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1)\boxed{a^1 b^k} + (C_k^1 + C_k^2) a^2 b^{k-1} + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^k b^1 + C_k^k a^{k+1} b^0$$

$C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1}$

$$C_{k+1}^0 a^0 b^{k+1} + C_{k+1}^1 a^1 b^k + C_{k+1}^2 a^2 b^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^{k+1} a^{k+1} b^0$$

成立.

3° 二项式系数的性质（杨氏三角）

（组合数）

☆ $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=\boxed{2^n}$? 组合论证！

一种组合计数方法.

n个元素子集

$\{a_1,\dots,a_n\}$ 分类加法 $0\to C_n^0$, $1\to C_n^1$, $2\to C_n^2$, $\dots$, $n\to C_n^n$

$(a+b)^0$ 　 1 　 C_0^0

$(a+b)^1$ 　 $1+1=2$ 　 ☆ C_1^0 　 C_1^1

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 　 $1+2+1=4=2^2$ 　 C_2^0 　 $\boxed{C_2^1}$ 　 C_2^2

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 　 $1+3+3+1=8$ ☆ 2^3 　 C_3^0 　 $\boxed{C_3^1 \quad C_3^2}$ 　 C_3^3

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ 　 $1+4+6+4+1=16=2^4$ 　 C_4^0 　 C_4^1 　 $\boxed{C_4^2}$ 　 C_4^3 　 C_4^4

$C_n^k=y_k$（固定n）

1° 最大值. 单调性.

$$y_k-y_{k-1}=C_n^k-C_n^{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}-\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}$$

$$=n!\,\frac{(n-k+1)-k}{(n-k+1)!\,k!}=\frac{n!}{(n-k+1)!\,k!}\,[n+1-2k] \quad (>0)$$

$n+1-2k>0$时，$y_k>y_{k-1}$，$n+1-2k<0$时，$y_k<y_{k-1}$

n奇：$k=\frac{n+1}{2}$时，$y_k=y_{k-1}$ $\Rightarrow$ $y_{\frac{n+1}{2}}=y_{\frac{n-1}{2}}$

$k<\frac{n+1}{2}$ $\Rightarrow$ $n+1-2k>0$ $\Rightarrow$ $y_k>y_{k-1}$ 　 $\{y_k\}\uparrow$

$y_1<y_2<\cdots<y_{\frac{n+1}{2}}=y_{\frac{n-1}{2}}$

$k>\frac{n+1}{2}$时 $\Rightarrow$ $n+1-2k<0$ $\Rightarrow$ $y_k<y_{k-1}$ 　 $\{y_k\}\downarrow$.

$$y_1<y_2<\cdots<y_{\frac{n-1}{2}}=y_{\frac{n+1}{2}}>y_{\frac{n+1}{2}+1}>\cdots$$

n偶

$$y_k-y_{k-1}=C_n^k-C_n^{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}-\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}$$

$$=n!\,\frac{(n-k+1)-k}{(n-k+1)!\,k!}=\frac{n!}{(n-k+1)!\,k!}\,[n+1-2k] \quad (>0)$$

$n+1-2k>0$时，$y_k>y_{k-1}$，$n+1-2k<0$时，$y_k<y_{k-1}$

两个max.

$y_k - y_{k-1}$ $\boxed{k=\frac{n}{2}+1}$ $n+1-2k=0$ $k=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow n+1-2k=n+1-n-2=-1<0$ 可以得到 $y_{\frac{n}{2}}$ 与 $y_{\frac{n}{2}+1}$

$y_{\frac{n}{2}+1}-y_{\frac{n}{2}}<0$

$\cdot\ k\le\frac{n}{2} \Rightarrow n\ge 2k \Rightarrow n+1-2k>0$ $y_k>y_{k-1}$ $\{y_k\}\uparrow$

$y_1<\cdots<y_{\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow y_{\frac{n}{2}+1}<y_{\frac{n}{2}}$

$\cdot\ k\ge\frac{n}{2}+1 \Rightarrow n\le 2k-2 \Rightarrow n+1-2k\le -2+1=-1<0$, $y_k<y_{k-1}$ $\{y_k\}\downarrow$

$y_{\frac{n}{2}+1}>\cdots>y_{\frac{n}{2}+p}$, $\forall p\ge 1$.

$\Rightarrow y_1<\cdots<y_{\frac{n}{2}}>y_{\frac{n}{2}+1}>y_{\frac{n}{2}+2}>\cdots$

唯一最大.

2° ~~赋值法~~

$(1+x)^n=C_n^0 1^n x^0+C_n^1\cdot 1^{n-1}x^1+\cdots+C_n^k 1^{n-k}x^k+\cdots+C_n^n\cdot 1^0\cdot x^n$

$=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$, $\forall x$ 成立.

令 $x=1$, $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ ①

$x=-1$, $C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$ ②

①+② $2C_n^0+2C_n^2+\cdots+2C_n^{\text{偶max}}=2^n$.

$\Rightarrow C_n^0+C_n^2+\cdots+C_n^{\text{偶max}}=2^{n-1}$ ③

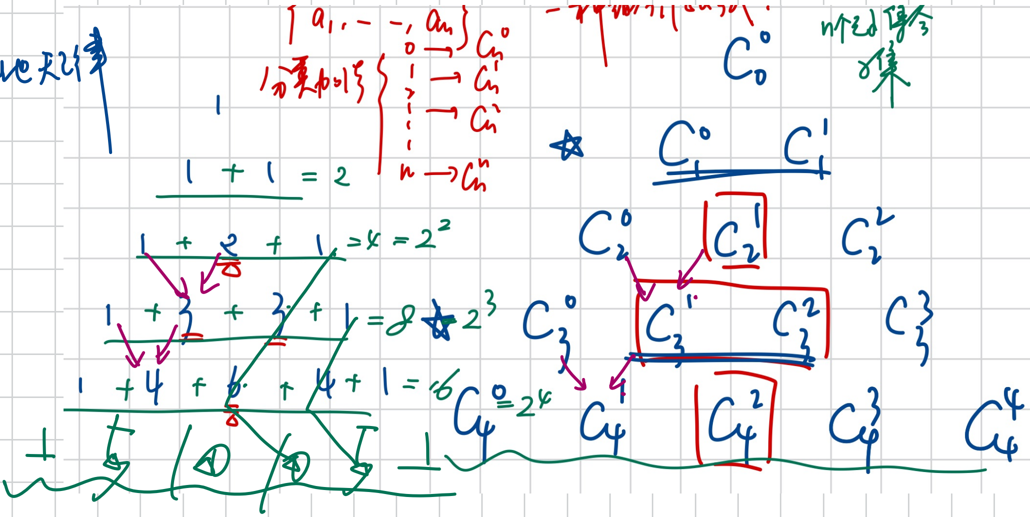
①−③ $C_n^1+C_n^3+\cdots+C_n^{\text{奇max}}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$

$$\Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}$$

$$= 2^{n-1}$$

奇 = 偶

3° 其他规律



1° $C_3^0 + C_3^1 = C_4^1$, $C_3^1 + C_3^2 = C_4^2$ ……

$$\boxed{C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m}$$ ☆

2° $1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$ $(C_2^0)^2 + (C_2^1)^2 + (C_2^2)^2$

$$= C_4^2$$

$$\boxed{(C_n^0)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n}$$

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \cdots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k \quad \{k \le \min\{n, m\}\}$$

3° $C_1^1+C_2^1+C_3^1+C_4^1=C_5^2$?

$$\boxed{C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{n+p}^n=C_{n+p+1}^{n+1}}$$

$\| $

C_{n+1}^{n+1} C_{n+2}^{n+1} - - -

11. 设数列 $\{y_k\}$ 的通项公式为 $y_k=C_n^k$，其中 $k=0,1,2,\ldots,n$.

(1) 讨论数列 $\{y_k\}$ 的单调性；

(2) 证明：

$$y_0^2+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2};$$

(3) 已知 $x_1=1$，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.

(a) 若 $\{x_n\}$ 为 6 为公比的等比数列，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

(b) 若 $\{x_n\}$ 为 1 为公差的等差数列，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

(c) 若 $x_n=(-1)^n n$，证明：$\{a_n\}$ 是常数列。

(d) $x_n=n^2$.

(a) $6^{n-1}=x_n$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot 6^{k-1}=\frac{1}{6}\boxed{\sum_{k=1}^{n}C_n^k 6^k\cdot 1^{n-k}}$$

$$=\frac{1}{6}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k 6^k\cdot 1^{n-k}-1\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[(6+1)^n-1\right]=\frac{1}{6}\left[7^n-1\right]$$

$$S_n=\frac{1}{6}\cdot\frac{7(1-7^n)}{1-7}-n.$$

(b) $x_n=n.$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}kC_n^k=\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}=\sum_{k-1=0}^{n-1}nC_{n-1}^{k-1}=\sum_{t=0}^{n-1}nC_{n-1}^{t}$$

$$= n\sum_{t=0}^{n-1} C_{n-1}^{t}\cdot \underset{\Delta}{1^{t}}\cdot \underset{\Delta}{1^{n-1-t}}$$

无中生有

$$= n\cdot(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1}$$

(c) $x_n = (-1)^n n$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k k = \sum_{k=1}^{n} n C_{n-1}^{k-1}(-1)^k = n\sum_{t=0}^{n-1} C_{n-1}^{t}(-1)^{t+1}$$

$t=k-1$

$$= -n\boxed{\sum_{t=0}^{n-1} C_{n-1}^{t}(-1)^{t}\cdot \underset{\Delta}{1^{n-1-t}}}$$

$$= -n\cdot(-1+1)^{n-1} = -n\cdot 0$$

$$= 0$$

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$$

(d) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \boxed{k^2} C_n^k$

$k^2 = k(k-1)+k.$

$$\frac{n! \to \boxed{n\cdot(n-1)}\cdot(n-2)\cdots}{k!(n-k)!}$$

$\downarrow$

$\cancel{k(k-1)}\cdots 2\cdot 1$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k + \boxed{\sum_{k=1}^{n} kC_n^k}\ \checkmark.\ \checkmark$$

$k=1$代入 0

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdot(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)C_{n-2}^{k-2} = n(n-1)\sum_{k-2=0}^{n-2} C_{n-2}^{k-2} = \boxed{n(n-1)\cdot 2^{n-2}}$$

验证

$\star$ $\boxed{k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}}$ $(n\geq 2)$.

待设 $= [a(n+1)^2+b(n+1)+c]2^{n+1} - [an^2+bn+c]2^n$

16. 假设今天是星期六，则 2^{2025} 天后是星期几？2025^{2025} 天后是星期几？

$$\boxed{2^{2025} \pmod 7}$$

$4 = 2\cdot 2 \Rightarrow$ 记为 $2 \mid 4$

if $a, b \in \mathbb{Z}$, $\exists\, q \in \mathbb{Z}$ s.t. $b = aq$.

we say a divides b 记作 $a \mid b$.

if $m \mid a-b$ we say $\boxed{a \equiv b \pmod m}$

a 与 b 除以 m 的余数相同

$a = b + km$, $k \in \mathbb{Z}$

$2^3 = 8 = 7 + 1$

$$2^{2025} = 8^{675} = (7+1)^{675}$$

$$= \underbrace{C_{675}^{0} \cdot 7^0 \cdot 1}_{\text{余数即 } 1} + \underbrace{C_{675}^{1} \cdot 7^1 \cdot 1 + \cdots + C_{675}^{675}\, 7^{675} \cdot 1}_{7 \mid}$$

$3 \overline{)2025}$: 675; 18, 22, 21, 15

$$2^{2025} \equiv 1 \pmod 7 \quad \text{即 } 2^{2025} \text{ 天 } \pmod 7 = \text{明天}.$$

$$\boxed{2025}^{2025} = (289 \times 7 + 2)^{2025}$$

$$\equiv 2^{2025} \pmod 7$$

$$\equiv 1 \pmod 7$$

$7 \overline{)2025}$: 289; 14, 62, 56, 65, 63, 2

17. 求证：任意无穷等差数列中均存在无穷等比子列，即若 $\{a_n\}$ 为无穷等差数列，那么可以取出无穷子列 $\{a_{n_k}\}$ 是等比数列。

$$a_n = a_1 + (n-1)d = [a_1 - d] + nd \overset{\text{def}}{=} m + nd \quad (\forall n \in N^*)$$

不妨设 $m > 0$, $d > 0$

$$a_n \equiv m \pmod{d}$$

$$(1+d)^s \equiv 1 \pmod{d}$$

$$\boxed{a_{n_k} = m(1+d)^k} \quad q = 1+d$$

$$\equiv m \pmod{d}$$