1. 设随机变量 $X(\omega):\Omega\to\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，称 X 服从几何分布，若

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\ (k=1,2,\cdots,n,\cdots,\ 0<p<1).$$

同时记 $X\sim\mathrm{Ge}(p)$. 对这种随机变量的取值有可列个整数的情形，定义 $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$.

(1) 验证这是一个合法的分布列，即 $\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P\{X=k\}=1$;

(2) 先待定 a,b 满足 $k(1-p)^{k-1}=[a(k+1)+b](1-p)^k-[ak+b](1-p)^{k-1}$，再证明 $\mathrm{E}(X)=1/p$;

(3) 用 $\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}^2(X)$ 来证明 $\mathrm{D}(X)=(1-p)/p^2$;

(4) 几何分布有一个重要的性质：**无记忆性**。也就是对 $m,n\in\mathbb{N}^*$ 有

$$\boxed{P\{X=m+n\mid X>n\}=P\{X=m\}.\rightsquigarrow P\{X>m+n\mid X>n\}=P\{X>m\}.}$$

为了证明上述性质你需要一点准备工作，先验证几何级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_1q^{k-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_1q^{k-1}=a_1/(1-q)\ (|q|<1)$. 这一点在你求解 $P\{X>n\}=\sum_{k=n+1}^{\infty}P\{X=k\}$ 时会使用到。

(5) 求解几何分布的期望还可以使用下面的方法：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}&=1\cdot P\{X=1\}+\sum_{k=2}^{\infty}kP\{X=k\}\\
&=1\cdot P\{X=1\}+\sum_{k=2}^{\infty}kP\{X=k\mid X>1\}P\{X>1\}\\
&=1\cdot P\{X=1\}+P\{X>1\}\sum_{k=2}^{\infty}kP\{X=k\mid X>1\}\\
&=1\cdot P\{X=1\}+P\{X>1\}\sum_{k=2}^{\infty}(k-1+1)P\{X=k-1\}\\
&=1\cdot P\{X=1\}+P\{X>1\}\left[\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)P\{X=k-1\}+\sum_{k=2}^{\infty}P(X=k-1)\right] \quad (1)\\
&=1\cdot P\{X=1\}+P\{X>1\}\left[\sum_{m=1}^{\infty}mP\{X=m\}+1\right] \quad (2)\\
&=1\cdot P\{X=1\}+P\{X>1\}(\mathrm{E}(X)+1)=1\cdot P\{X=1\}+(1-P\{X=1\})(\mathrm{E}(X)+1).
\end{aligned}$$

这种方法巧妙利用无记忆性得到一个关于 $\mathrm{E}(X)$ 的方程，化简问题，请你验证其中的每一步，并指出从式 (1) 到式 (2) 利用了**分布列的什么性质**？

2. 设 $X_1(\omega), X_2(\omega)$ 都是定义在样本空间 Ω 上的随机变量，且 $X_i : \Omega \to \{1, 2, \cdots, n\}$. 我们称

$$P\{X_1 = i, X_2 = j\} = p_{ij}\ (1 \le i, j \le n,\ p_{ij} \ge 0).$$

为二维随机变量 (X_1, X_2) 的**联合分布列**，自然有 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = P(\Omega) = 1$.

(1) 验证

$$P\{X_1 = i\} = \sum_{j=1}^{n} P\{X_1 = i, X_2 = j\},\ P\{X_2 = j\} = \sum_{i=1}^{n} P\{X_1 = i, X_2 = j\}.$$

并利用这个结论证明 $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ **恒成立**。

(2) 我们称 X_1, X_2 这两个**随机变量是独立的**，若

$$P\{X_1 = i, X_2 = j\} = P\{X_1 = i\} \cdot P\{X_2 = j\}\ (\forall\, 1 \le i, j \le n).$$

请验证在 X_1, X_2 独立的情况下有，$E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2)$.

(3) 利用 $D(X) = E[(X - E(X))^2]$ 验证在 X_1, X_2 独立的情况下有

$$D(X_1 \pm X_2) = D(X_1) + D(X_2).$$