

1. 证明：当 $P(AB) > 0$ 时， $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$. 进一步，你能归纳出 $P(A_1A_2 \cdots A_n)$ 的公式吗？
2. 已知 3 张奖券中只有 1 张有奖，甲、乙、丙 3 名同学依次不放回地各随机抽取 1 张。
 - (1) 他们中奖的概率与抽奖的顺序有关吗？
 - (2) 推广到 n 张奖券和 n 名同学，请你验证 (1) 的结论是否仍然成立。
3. 已知 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 证明： $P(B|A) = P(B)$ 的充要条件是 $P(A|B) = P(A|\bar{B})$. 其中一式成立的情况下，还有 $P(B|\bar{A}) = P(B), P(A|\bar{B}) = P(A)$.
4. 在 A, B, C 三个地区暴发了流感，这三个地区分别有 6%、5%、4% 的人患了流感。假设这三个地区的人数的比例为 5:7:8，现从这三个地区中任意选取一个人。
 - (1) 求这个人患流感的概率；
 - (2) 如果此人患流感，求此人选自 A 地区的概率。
5. 甲、乙、丙三人相互做乒乓球训练，第 1 次由甲将乒乓球传出，每次传球时，传球者都可能地将球传给两人中的任何一人。求第 n 次乒乓球在甲手中的概率。
6. (Markov Chain) 假设只考虑天气的两种情况：有雨或无雨。若已知今天的天气情况，明天天气保持不变的概率为 p ，变的概率为 $1 - p$ ($0 < p < 1$). 设第一天无雨，试求第 n 天也无雨的概率。
7. 甲、乙、丙三人进行比赛，规定每局两个人比赛，胜者与第三人比赛，依次循环，直至有一人连续两次胜利为止，此人即为冠军。而每次比赛双方取胜的概率都是 $1/2$ ，现假定甲、乙两人先比，试求各人得冠军的概率。
8. (Polya 罐子) 设罐子中有 b 个红球， r 个黑球，每次随机取出一个球，取出后将原球放回，再加入 c 个同色球，设 a_k 为第 k 次取出黑球的概率，证明：
 - (1) (传染病模型) 若 $c > 0$ ， $\{a_k\}$ 为常数列；
 - (2) (不放回抽样) 若 $c = -1$ ， $\{a_k\}$ 为常数列。

9. 设 $E(X) = \mu$, $a \neq \mu$, 证明 X 相对于 μ 的偏离程度 $E[(X - \mu)^2]$ 与 X 相对于 a 的偏离程度 $E[(X - a)^2]$ 满足

$$E[(X - \mu)^2] < E[(X - a)^2] \rightsquigarrow \mu = E(X) = \arg \min_{a \in \mathbb{R}} E[(X - a)^2].$$

10. 对一批产品进行检查, 如检查到第 a 件全部都为合格品, 就认为这批产品合格; 若在前 a 件中发现不合格品即停止检查, 并认为这批产品不合格。设产品的不合格率是 p ($0 < p < 1$)。问每批产品所查的件数为 X , 求 $E(X)$ 。

11. 甲、乙两人进行象棋比赛, 每局甲胜的概率为 p ($0 < p < 1$), 乙胜的概率为 $q = 1 - p$ 。比赛进行到有一人连续胜两局为止, 设比赛局数为随机变量 X , 求 $E(X)$ 。

12. 设 $X(\omega) : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 证明:

$$(1) E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k);$$

$$(2) \sum_{k=0}^n kP(X > k) = 1/2[E(X^2) - E(X)].$$

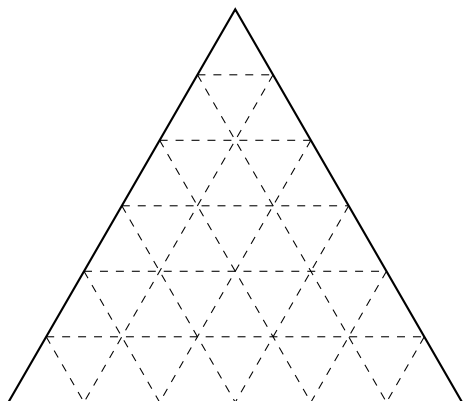
13. 甲、乙两口袋中各装有 1 个黑球和 2 个白球, 现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋, 重复进行 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 次这样的操作, 记甲口袋中黑球的个数为 X_n , 恰有 1 个黑球的概率为 p_n , 恰有 2 个黑球的概率为 q_n , 恰有 0 个黑球的概率为 r_n 。

(1) 求 p_1, p_2 的值;

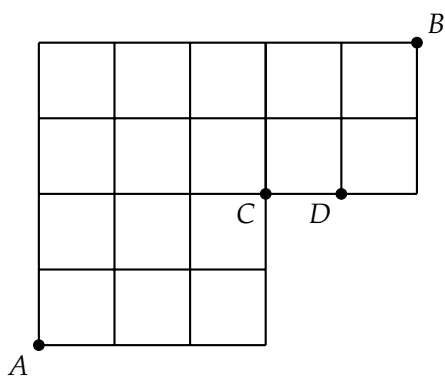
(2) 容易看出第 n 次甲口袋中黑球个数只受到 $n - 1$ 次操作后口袋中黑球数量这一状态的影响, 与先前的操作无关。记 $p_n = a \cdot p_{n-1} + b \cdot q_{n-1} + c \cdot r_{n-1}$, 其中 $a, b, c \in [0, 1]$ 为常数, 同时 $p_n + q_n + r_n = 1$, 请求出 p_n ;

(3) 证明: X_n 的数学期望 $E(X_n)$ 为定值。

1. 把一个等边三角形 ABC 的各边 2025 等分，过各分点在三角形内部作各边的平行线，得到的图案中一共有多少个平行四边形？



2. 从排成一排的 9 位同学中，随机选出 3 位同学，这 3 位同学互不相邻的概率是 ____.
3. 15 个人围坐在圆桌旁，从其中任选 4 人，两两不相邻的概率是 ____.
- A. $\frac{30}{91}$ B. $\frac{25}{91}$ C. $\frac{10}{91}$ D. $\frac{31}{90}$
4. 安排 6 个班的班主任监考 6 个班，则其中恰好有两个班的班主任监考自己班的安排总数有多少种？
5. 在某城市中， A 、 B 两地之间有如图所示的道路网，甲沿道路随机关选一条最短路径，从 A 地出发去往 B 地，若甲途经 C 地，且不经 D 地，则不同的路径共有 ____ 条。



6. 将一个圆环分成 n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) 个区域，用 m ($m \in \mathbb{N}, m \geq 3$) 种颜色给这个 n 个区域染色，要求相邻区域不使用同一种颜色，但同一种颜色可重复使用，则不同的染色方案有多少种？

7. 已知 $n \geq 2$, 且平面内有 n 条直线, 其中任意两条不平行, 任意三条不共点, 证明: 这些直线的交点的个数为

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

8. 求证: 平面上 n 个圆最多把平面划分成 $n^2 - n + 2$ 个区域, 其中 $n \geq 1$.

9. 在 $(1+x)^3 + (1+x)^4 + \cdots + (1+x)^{n+2}$ 的展开式中, 含 x^2 项的系数是多少?

10. 求 $1 - 90C_{10}^1 + 90^2C_{10}^2 - 90^3C_{10}^3 + \cdots + (-1)^k 90^k C_{10}^k + \cdots + 90^{10}C_{10}^{10}$ 除以 88 的余数。

11. 已知 $(x^2 + 1)(4x - 3)^8 = a_0 + a_1(2x - 1) + a_2(2x - 1)^2 + \cdots + a_{10}(2x - 1)^{10}$, 则

(a) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = \underline{\hspace{2cm}};$

(b) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \underline{\hspace{2cm}};$

(c) $a_3 = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = q^n + p$ 且 $a_3 = 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $S_n < \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$;

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k a_k$, 求 b_n 的前 n 项和 T_n .

13. 在 $n \times n$ 网格上从点 0 走到点 n ，要求每一步只能走 \nearrow 或者 \searrow ，称为长为 $2n$ 的格路。不走到 x 轴下方的格路称为迪克路 (Dyck Path)。图 1 就展示了一个长度为 12 的迪克路。编号为 $1, 2, 3, \dots, 2n$ 的点按顺序组成一个圈，用直线段将他们连接且线段不能出现交叉，这样连接的方法总数称为 Catalan 数，记作 C_n 。图 2 展示了一个 $n = 6$ 的连接方法。

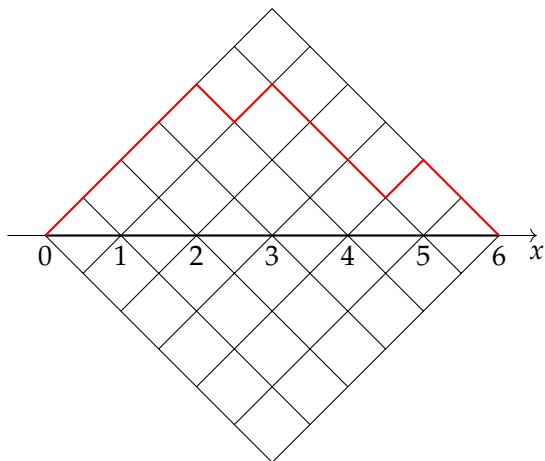


图 1: Dyck Path

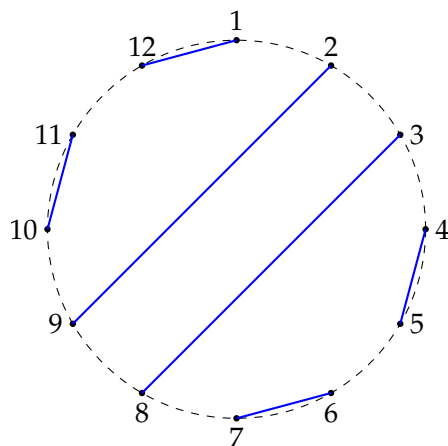
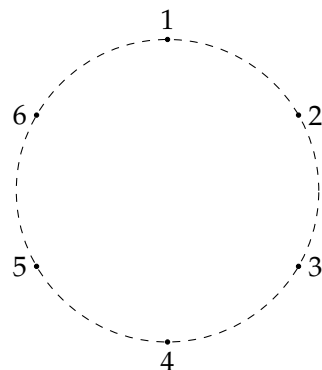
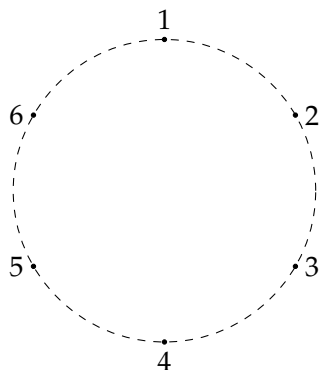


图 2: Catalan 配对

- (1) 求 C_3 并在下面的图中绘制你找到的其中两种连接方法。



- (2) 为了不出现交叉，其实相互配对的两个点的奇偶性必定相反，请你依据这一点，证明下列恒等式：

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}.$$

- (3) 为了求解 C_n 的通项公式，用一一对应原理，请你尝试建立 Dyck Path 和 Catalan 配对之间的一一对应关系。

事实上，图 1 和图 2 在这种对应关系下是等价的。

- (4) 长度为 $2n$ 的 Dyck Path 的数目可以通过下列思路求解。利用“正难则反”的思想，对于每一个走到 x 轴下方的格路，都可以将其转化为起点在 A 点，只在绿色阴影区域内走到点 n 的格路。请你建立上述一一对应

关系并得到

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

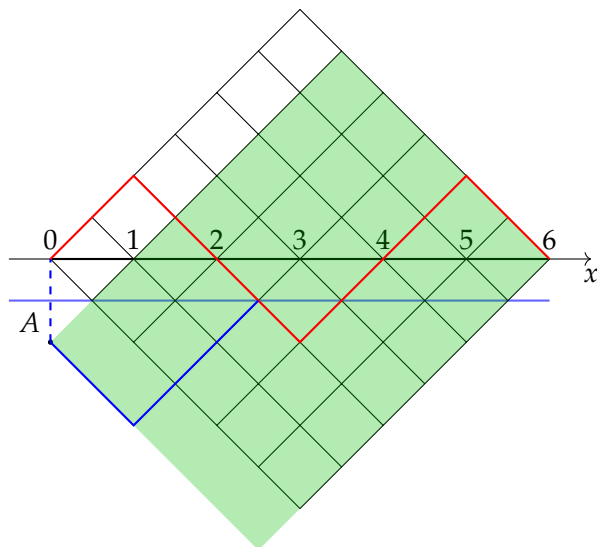


图 3: 一个非 Dyck Path 的示例