

1. 已知有 n 张奖券，其中 m ($m \leq n$) 张有奖， n 名同学依次不放回抽奖。

- (1) 记事件 $A_k =$ “第 k 个抽奖的同学获奖”，其中 $k = 1, 2, 3, \dots, n$. 下面给出了若干种求解 $P(A_k)$ 的方法，指出哪些是正确的，哪些是错误的。再问：错误的原因在于何处？

$$(a) P(A_k) = \frac{C_m^1 A_{n-1}^{k-1} \cdot 1}{A_n^k} = \frac{m}{n}. \quad (b) P(A_k) = \frac{C_m^1 C_{n-1}^{k-1} \cdot 1}{C_n^k} = \frac{km}{n}. \quad (c) P(A_k) = \frac{C_m^1 C_{n-1}^{k-1} \cdot 1}{C_n^{k-1} C_{n-k+1}^1} = \frac{m}{n}.$$

- (2) 当 $m = 1$ 时，事实上， $A_k = \overline{A_1 A_2 \cdots A_{k-1}} A_k$. 注意到 $P(A_s | \overline{A_{s-1} A_{s-2} \cdots A_1}) = 1/(n - s + 1)$ ($1 \leq s \leq k, s \in \mathbb{N}^*$), 请你利用这一点通过乘法公式求解出 $P(A_k)$.
- (3) 当 $m > 1$ 时，上述思路有一些困难了。请你用第一数学归纳法证明 $\{P(A_k)\}$ 为常数列。注意到 $P(A_1) = m/n$ 完成归纳奠基。对 $k = p$ 的情形我们假设结论成立，当 $k = p + 1$ 时，利用全概率公式有

$$P(A_{p+1}) = P(A_{p+1} | A_1)P(A_1) + P(A_{p+1} | \overline{A_1})P(\overline{A_1}).$$

对 $P(A_{p+1} | A_1)$ 你可以将其视为初始条件为有 $n - 1$ 张奖券，其中 $m - 1$ 张有奖的情形，第 p 个抽奖的同学获奖的概率，这就利用上了归纳假设。

2. 现在有基因型为 DD 的高茎豌豆和基因型为 dd 的矮茎豌豆，让其杂交后得到基因型为 Dd 的高茎豌豆。将其视作亲本 P，自交后产生子一代 F_1 ， F_1 中基因型 DD, Dd, dd 的比例为 1 : 2 : 1. 现在让 F_1 继续自交，每株豌豆产生的后代数量相同。设连续自交 n 次得到子代 F_{n+1} .

- (1) 在 F_3 中任取一株豌豆，发现为高茎豌豆 (D__), 问其亲本豌豆为杂合子 (Dd) 的概率是多少？
- (2) 在 F_n 中任取一株豌豆，问其为纯合子 (DD, dd) 的概率是多少？