1. 现在有基因型为 DD 的高茎豌豆和基因型为 dd 的矮茎豌豆，让其杂交后得到基因型为 Dd 的高茎豌豆。将其视作亲本 P，自交后产生子一代 F_1，F_1 中基因型 DD, Dd, dd 的比例为 $1:2:1$. 现在让 F_1 继续自交，**每株豌豆产生的后代数量相同**。设连续自交 n 次得到子代 F_{n+1}.

   (1) 在 F_3 中任取一株豌豆，发现为高茎豌豆 (D__)，问其**亲本**豌豆为**杂合子** (Dd) 的概率是多少？

   (2) 在 F_n 中任取一株豌豆，问其为**纯合子** (DD, dd) 的概率是多少？

2. **(抽彩模型)** 已知有 n 张奖券，其中 m $(m \leq n)$ 张有奖， n 名同学依次**不放回**抽奖。

   (1) 记事件 $A_k =$ “第 k 个抽奖的同学获奖”，其中 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$. 下面给出了若干种求解 $P(A_k)$ 的方法，指出哪些是正确的，哪些是错误的。再问：错误的原因在于何处？

   $$\boxed{\text{(a) } P(A_k) = \frac{C_m^1 A_{n-1}^{k-1} \cdot 1}{A_n^k} = \frac{m}{n}. \qquad \text{(b) } P(A_k) = \frac{C_m^1 C_{n-1}^{k-1} \cdot 1}{C_n^k} = \frac{km}{n}. \qquad \text{(c) } P(A_k) = \frac{C_m^1 C_{n-1}^{k-1} \cdot 1}{C_n^{k-1} C_{n-k+1}^1} = \frac{m}{n}.}$$

   (2) 当 $m = 1$ 时，事实上，$A_k = \overline{A_1 A_2} \cdots \overline{A_{k-1}} A_k$. 注意到 $P(A_s \mid \overline{A_{s-1} A_{s-2}} \cdots \overline{A_1}) = 1/(n-s+1)$ $(1 \leq s \leq k, s \in \mathbb{N}^*)$, 请你利用这一点通过**乘法公式**求解出 $P(A_k)$.

   (3) 当 $m > 1$ 时，上述思路有一些困难了。请你用**第一数学归纳法**证明 $\{P(A_k)\}$ 为**常数列**。注意到 $P(A_1) = m/n$ 完成归纳奠基。对 $k = p$ 的情形我们假设结论成立，当 $k = p + 1$ 时，利用全概率公式有

   $$P(A_{p+1}) = P(A_{p+1} \mid A_1)P(A_1) + P(A_{p+1} \mid \overline{A_1})P(\overline{A_1}).$$

   对 $P(A_{p+1} \mid A_1)$ 你可以将其视为初始条件为有 $n-1$ 张奖券，其中 $m-1$ 张有奖的情形，第 p 个抽奖的同学获奖的概率，**这就利用上了归纳假设**。

3. **(Polya 罐子)** 设罐子中有 b 个红球， r 个黑球，每次随机取出一个球，取出后将原球放回，再加入 c 个同色球，设 a_k 为第 k 次取出黑球的概率，证明：

   (1) **(传染病模型)** 若 $c > 0$， $\{a_k\}$ 为常数列；

   (2) **(不放回抽样)** 若 $c = -1$， $\{a_k\}$ 为常数列. $\rightsquigarrow$ 即上述抽彩模型

随机变量的数字特征

4. 设 $E(X)=\mu$， $a\neq\mu$，证明 X 相对于 μ 的偏离程度 $E\left[(X-\mu)^2\right]$ 与 X 相对于 a 的偏离程度 $E\left[(X-a)^2\right]$ 满足

$$E\left[(X-\mu)^2\right]<E\left[(X-a)^2\right]\rightsquigarrow \mu=E(X)=\arg\min_{a\in\mathbb{R}}E\left[(X-a)^2\right].$$

5. 设 $X(\omega):\Omega\to\{0,1,2,\cdots,n\}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$，证明：

(1) $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(X\geq k)$;

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n}kP(X>k)=1/2[E(X^2)-E(X)]$.

6. 对一批产品进行检查，如检查到第 a 件全部都为合格品，就认为这批产品合格；若在前 a 件中发现不合格品**即停止检查**，并认为这批产品不合格。设产品的不合格率是 p $(0<p<1)$。问每批产品所查的件数为 X，求 $E(X),D(X)$.

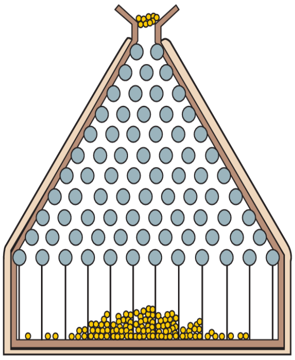
二项分布和超几何分布

7. 一个袋子中有 10 个大小相同的球，其中有 4 个黄色球，6 个白球，从中随机地抽出 5 个球作为样本。用 X 表示样本中黄色球的个数。

   (1) 分别对有放回摸球和不放回摸球，求 X 的分布列；

   (2) 若用样本中黄色球的比例估计总体黄色球的比例，为了使得估计**尽可能准确**，应该采用哪种摸球方式？

8. 下图是一块高尔顿板的示意图。在一块木板上钉着与排列相互平行但相互错开的圆柱形小木钉，小木钉之间留有适当的空隙作为通道，前面挡有一块玻璃。将小球从顶端放入，小球下落的过程中，每次碰到小木钉后都会等概率地向左或向右落下，最后落入底部的格子中。格子从左到右分别编号为 0，1，2，. . .，10，用 X 表示小球最后落入格子的编号，求 X 的分布列。



9. 甲、乙两人选手进行象棋比赛，如果每局比赛甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，那么采用 3 局 2 胜制还是采用 5 局 3 胜制对甲更有利？

引例

10. 甲、乙、丙三人进行比赛，规定每局两个人比赛，胜者与第三人比赛，依次循环，直至有一人**连续两次胜利**为止，此人即为冠军。而每次比赛双方取胜的概率都是 1/2，现假定甲、乙两人先比，试求各人得冠军的概率。

期望递推

11. 小明下飞行棋，现在离终点还有 3 步距离，他需要**恰好**掷骰子掷出 3 点才能胜利，若超过 3 点，则剩余的点数用于倒退。已知骰子是均匀的，且有 6 个面，标注着 $1 \sim 6$ 的点数。求小明从此刻到胜利还需投掷骰子的次数 X 的数学期望 $E(X)$.

12. 甲、乙两人进行象棋比赛，每局甲胜的概率为 $p\ (0 < p < 1)$，乙胜的概率为 $q = 1 - p$。比赛进行到有一人**连续胜两局**为止，设比赛局数为随机变量 X，求 $E(X)$.

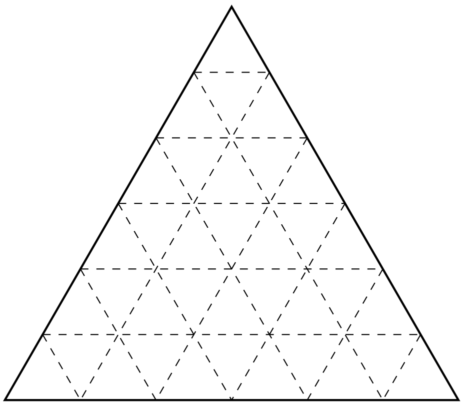
13. 甲、乙两口袋中各装有 1 个黑球和 2 个白球，现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复进行 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 次这样的操作，记甲口袋中黑球的个数为 X_n，恰有 1 个黑球的概率为 p_n，恰有 2 个黑球的概率为 q_n，恰有 0 个黑球的概率为 r_n.

(1) 求 p_1, p_2 的值；

(2) 容易看出第 n 次甲口袋中黑球个数只受到 $n-1$ 次操作后口袋中黑球数量这一状态的影响，与先前的操作无关。记 $p_n = a \cdot p_{n-1} + b \cdot q_{n-1} + c \cdot r_{n-1}$，其中 $a, b, c \in [0, 1]$ 为常数，同时 $p_n + q_n + r_n = 1$，请求出 p_n；

(3) 证明：X_n 的数学期望 $E(X_n)$ 为定值。

1. 把一个等边三角形 ABC 的各边 2025 等分，过各分点在三角形内部作各边的平行线，得到的图案中一共有多少个平行四边形？



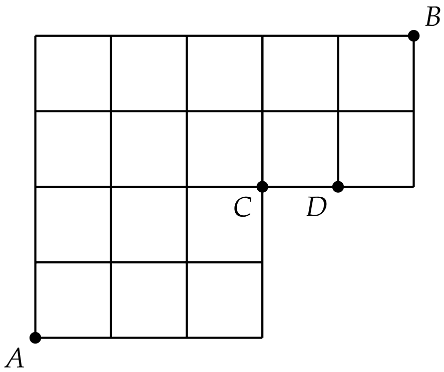
2. 从排成一排的 9 位同学中，随机选出 3 位同学，这 3 位同学互不相邻的概率是 ____.

3. 15 个人围坐在圆桌旁，从其中任选 4 人，两两不相邻的概率是 ____.

A. $\dfrac{30}{91}$　　B. $\dfrac{25}{91}$　　C. $\dfrac{10}{91}$　　D. $\dfrac{31}{90}$

4. 安排 6 个班的班主任监考 6 个班，则其中**恰好**有两个班的班主任监考自己班的安排总数有多少种？

5. 在某城市中，A、B 两地之间有如图所示的道路网，甲沿道路随机关选一条最短路径，从 A 地出发去往 B 地，若甲途经 C 地，且不经过 D 地，则不同的路径共有 ____条。



6. 将一个圆环分成 n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ 个区域，用 m $(m \in \mathbb{N}, m \geq 3)$ 种颜色给这个 n 个区域染色，要求相邻区域不使用同一种颜色，但同一种颜色可重复使用，则不同的染色方案有多少种？

7. 已知 $n \geq 2$，且平面内有 n 条直线，其中任意两条不平行，任意三条不共点，证明：这些直线的交点的个数为

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

8. 求证：平面上 n 个圆最多把平面划分成 $n^2 - n + 2$ 个区域，其中 $n \geq 1$.

9. 在 $n \times n$ 网格上从点 0 走到点 n，要求每一步只能走 $\nearrow$ 或者 $\searrow$，称为长为 $2n$ 的格路。不走到 x 轴下方的格路称为迪克路 (Dyck Path)。图 1 就展示了一个长度为 12 的迪克路。编号为 $1, 2, 3, \cdots, 2n$ 的点按顺序组成一个圈，用直线段将他们连接且线段不能出现交叉，这样连接的方法总数称为 Catalan 数，记作 C_n。图 2 展示了一个 $n = 6$ 的连接方法。

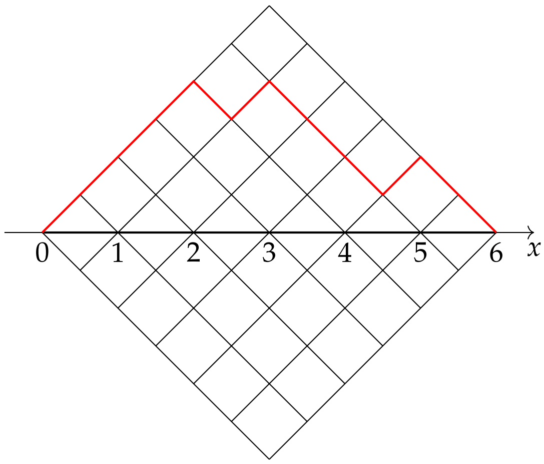


图 1: Dyck Path

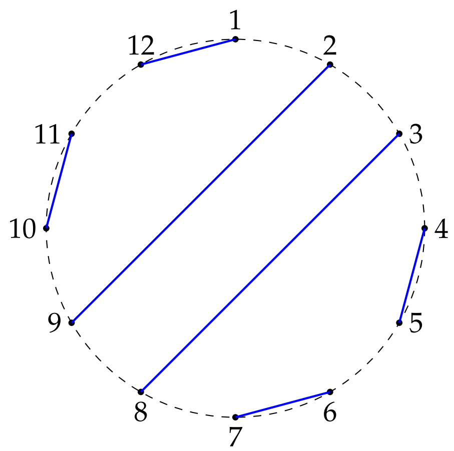
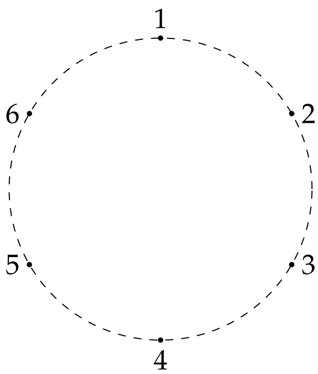
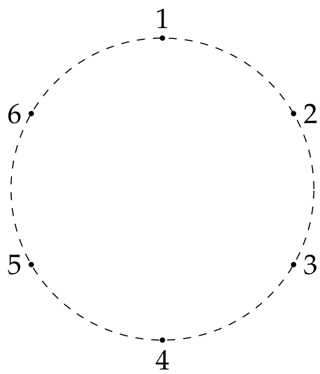


图 2: Catalan 配对

(1) 求 C_3 并在下面的图中绘制你找到的其中两种连接方法。





(2) 为了不出现交叉，其实相互配对的两个点的奇偶性必定相反，请你依据这一点，证明下列恒等式：

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_iC_{n-1-i}.$$

(3) 为了求解 C_n 的通项公式，用一一对应原理，请你尝试建立 Dyck Path 和 Catalan 配对之间的一一对应关系。事实上，图 1 和图 2 在这种对应关系下是等价的。

(4) 长度为 $2n$ 的 Dyck Path 的数目可以通过下列思路求解。利用“正难则反”的思想，对于每一个走到 x 轴下方的格路，都可以将其转化为**起点在 A 点，只在绿色阴影区域内走到点 n 的格路**。请你建立上述一一对应关系并得到

$$C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n.$$

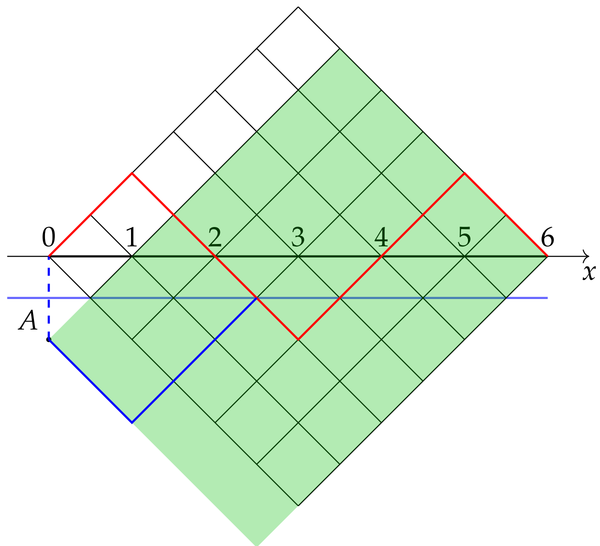


图 3: 一个非 Dyck Path 的示例