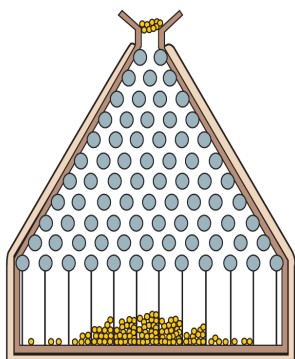


1. 一个袋子中有 10 个大小相同的球，其中有 4 个黄色球，6 个白球，从中随机地抽出 5 个球作为样本。用  $X$  表示样本中黄色球的个数。
  - (1) 分别对有放回摸球和不放回摸球，求  $X$  的分布列；
  - (2) 若用样本中黄色球的比例估计总体黄色球的比例，为了使得估计尽可能准确，应该采用哪种摸球方式？
2. 下图是一块高尔顿板的示意图。在一块木板上钉着与排列相互平行但相互错开的圆柱形小木钉，小木钉之间留有适当的空隙作为通道，前面挡有一块玻璃。将小球从顶端放入，小球下落的过程中，每次碰到小木钉后都会等概率地向左或向右落下，最后落入底部的格子中。格子从左到右分别编号为 0, 1, 2, ..., 10，用  $X$  表示小球最后落入格子的编号，求  $X$  的分布列。



3. 甲、乙两人选手进行象棋比赛，如果每局比赛甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，那么采用 3 局 2 胜制还是采用 5 局 3 胜制对甲更有利？

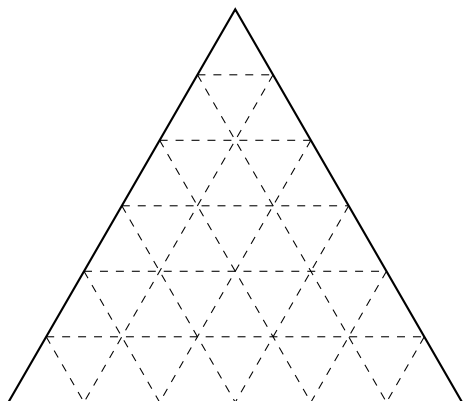
## 引例

4. 甲、乙、丙三人进行比赛，规定每局两个人比赛，胜者与第三人比赛，依次循环，直至有一人连续两次胜利为止，此人即为冠军。而每次比赛双方取胜的概率都是  $1/2$ ，现假定甲、乙两人先比，试求各人得冠军的概率。

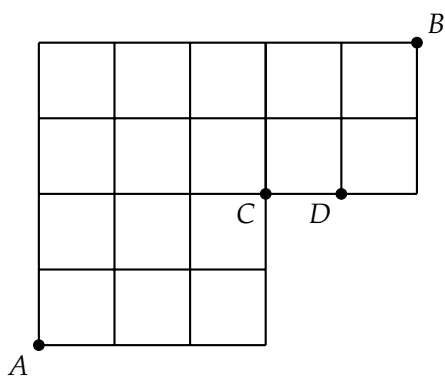
## 期望递推

5. 甲、乙两人进行象棋比赛，每局甲胜的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ )，乙胜的概率为  $q = 1 - p$ 。比赛进行到有一人连续胜两局为止，设比赛局数为随机变量  $X$ ，求  $E(X)$ 。
6. 甲、乙两口袋中各装有 1 个黑球和 2 个白球，现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复进行  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 次这样的操作，记甲口袋中黑球的个数为  $X_n$ ，恰有 1 个黑球的概率为  $p_n$ ，恰有 2 个黑球的概率为  $q_n$ ，恰有 0 个黑球的概率为  $r_n$ 。
- (1) 求  $p_1, p_2$  的值；
- (2) 容易看出第  $n$  次甲口袋中黑球个数只受到  $n - 1$  次操作后口袋中黑球数量这一状态的影响，与先前的操作无关。记  $p_n = a \cdot p_{n-1} + b \cdot q_{n-1} + c \cdot r_{n-1}$ ，其中  $a, b, c \in [0, 1]$  为常数，同时  $p_n + q_n + r_n = 1$ ，请求出  $p_n$ ；
- (3) 证明： $X_n$  的数学期望  $E(X_n)$  为定值。

1. 把一个等边三角形  $ABC$  的各边 2025 等分，过各分点在三角形内部作各边的平行线，得到的图案中一共有多少个平行四边形？



2. 从排成一排的 9 位同学中，随机选出 3 位同学，这 3 位同学互不相邻的概率是 \_\_\_\_.
3. 15 个人围坐在圆桌旁，从其中任选 4 人，两两不相邻的概率是 \_\_\_\_.
- A.  $\frac{30}{91}$                       B.  $\frac{25}{91}$                       C.  $\frac{10}{91}$                       D.  $\frac{31}{90}$
4. 安排 6 个班的班主任监考 6 个班，则其中恰好有两个班的班主任监考自己班的安排总数有多少种？
5. 在某城市中， $A$ 、 $B$  两地之间有如图所示的道路网，甲沿道路随机关选一条最短路径，从  $A$  地出发去往  $B$  地，若甲途经  $C$  地，且不经  $D$  地，则不同的路径共有 \_\_\_\_ 条。



6. 将一个圆环分成  $n$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ) 个区域，用  $m$  ( $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$ ) 种颜色给这个  $n$  个区域染色，要求相邻区域不使用同一种颜色，但同一种颜色可重复使用，则不同的染色方案有多少种？

7. 已知  $n \geq 2$ , 且平面内有  $n$  条直线, 其中任意两条不平行, 任意三条不共点, 证明: 这些直线的交点的个数为

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

8. 求证: 平面上  $n$  个圆最多把平面划分成  $n^2 - n + 2$  个区域, 其中  $n \geq 1$ .

9. 在  $n \times n$  网格上从点 0 走到点  $n$ , 要求每一步只能走  $\nearrow$  或者  $\searrow$ , 称为长为  $2n$  的格路。不走到  $x$  轴下方的格路称为迪克路 (Dyck Path)。图 1 就展示了一个长度为 12 的迪克路。编号为  $1, 2, 3, \dots, 2n$  的点按顺序组成一个圈, 用直线段将他们连接且线段不能出现交叉, 这样连接的方法总数称为 Catalan 数, 记作  $C_n$ 。图 2 展示了一个  $n = 6$  的连接方法。

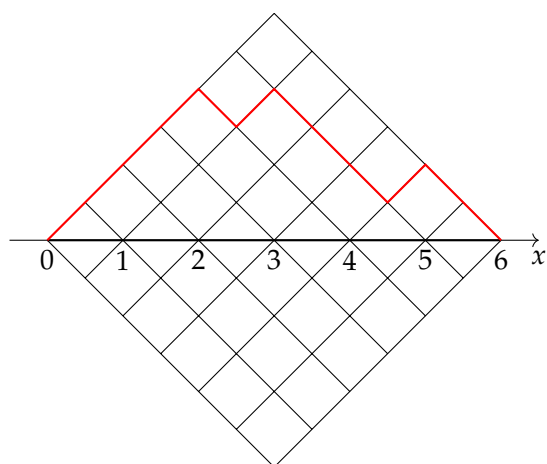


图 1: Dyck Path

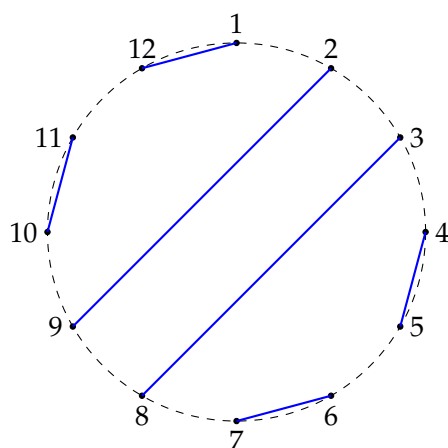
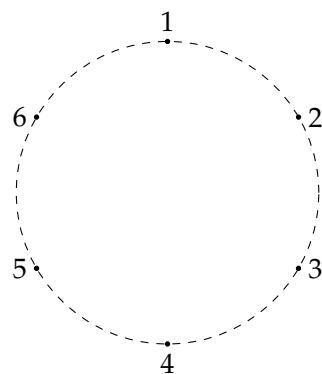
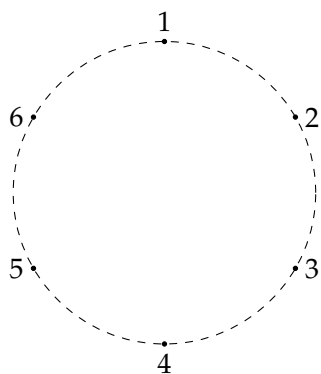


图 2: Catalan 配对

(1) 求  $C_3$  并在下面的图中绘制你找到的其中两种连接方法。



(2) 为了不出现交叉，其实相互配对的两个点的奇偶性必定相反，请你依据这一点，证明下列恒等式：

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}.$$

(3) 为了求解  $C_n$  的通项公式，用一一对应原理，请你尝试建立 Dyck Path 和 Catalan 配对之间的一一对应关系。

事实上，图 1 和图 2 在这种对应关系下是等价的。

(4) 长度为  $2n$  的 Dyck Path 的数目可以通过下列思路求解。利用“正难则反”的思想，对于每一个走到  $x$  轴下方的格路，都可以将其转化为起点在  $A$  点，只在绿色阴影区域内走到点  $n$  的格路。请你建立上述一一对应关系并得到

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

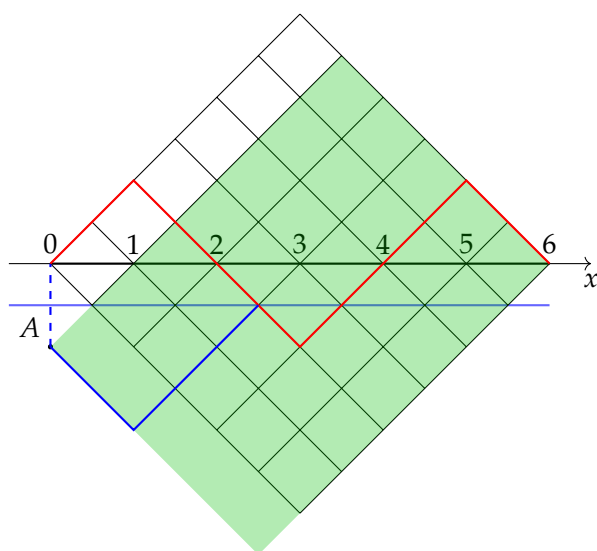


图 3: 一个非 Dyck Path 的示例