1. 绝大多数比赛都使用“$(2n-1)$ 局 n 胜制”的规则，这种比赛往往可以假定赛满 $2n-1$ 局来处理。如果甲，乙两人比赛，甲每局比赛获胜的概率均为 p $(0<p<1)$ 且各局比赛的结果相互独立。求甲获胜的概率 $p_{\text{甲}}$.

Case I 如果正常求解，一旦甲累计胜利 n 局则停止比赛，那么停止比赛前的最后一局**肯定是甲胜利**。得到

$$p_{\text{甲}}=C_{n-1}^{n-1}(1-p)^0p^n+C_n^{n-1}(1-p)^1p^n+\cdots+C_{2n-2}^{n-1}(1-p)^{n-1}p^n=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1+k}^{n-1}(1-p)^kp^n. \tag{1}$$

Case II 如果**假定赛满** $2n-1$ **局**，那么此时设甲胜利的总次数为随机变量 $X\sim B(2n-1,p)$，那么

$$p_{\text{甲}}=P\{X\geq n\}=\sum_{k=n}^{2n-1}C_{2n-1}^kp^k(1-p)^{2n-1-k}. \tag{2}$$

为了说明上述两种解法的**等价性**，也即证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1+k}^{n-1}(1-p)^kp^n=\sum_{k=n}^{2n-1}C_{2n-1}^kp^k(1-p)^{2n-1-k}.$$

下面用数学归纳法，首先 $n=1$ 时，所证结论等价为

$$\sum_{k=0}^{0}C_k^0(1-p)^kp^1=\sum_{k=1}^{1}C_1^kp^k(1-p)^{1-k}=p.$$

假设结论对 $n\in\mathrm{N}^*$ 成立，那么对 $n+1$ 的情形有

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n+1}C_{2n+1}^kp^k(1-p)^{2n+1-k}&=\sum_{k=n+1}^{2n+1}(C_{2n-1}^k+2C_{2n-1}^{k-1}+C_{2n-1}^{k-2})p^k(1-p)^{2n+1-k}\\&=\sum_{k=n+1}^{2n-1}C_{2n-1}^kp^k(1-p)^{2n+1-k}+2\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{2n+1-k}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}C_{2n-1}^{k-2}p^k(1-p)^{2n+1-k}\end{aligned}$$

分别求这三项:

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n-1} C_{2n-1}^{k} p^{k}(1-p)^{2n+1-k} &= (1-p)^2\left\{\sum_{k=n}^{2n-1} C_{2n-1}^{k} p^{k}(1-p)^{2n-1-k} - C_{2n-1}^{n} p^{n}(1-p)^{n-1}\right\}\\ &= (1-p)^2\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1+k}^{n-1}(1-p)^{k}p^{n} - C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n+1}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n-1}^{k-1} p^{k}(1-p)^{2n+1-k} &= p(1-p)\left\{\sum_{k-1=n}^{k-1=2n-1} C_{2n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{2n-1-(k-1)}\right\}\\ &= p(1-p)\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1+k}^{n-1}(1-p)^{k}p^{n}.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n+1} C_{2n-1}^{k-2} p^{k}(1-p)^{2n+1-k} &= p^2\left\{\sum_{k-2=n}^{k-2=2n-1} C_{2n-1}^{k-2} p^{k-2}(1-p)^{2n-1-(k-2)} + C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^{n}\right\}\\ &= p^2\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1+k}^{n-1}(1-p)^{k}p^{n} + C_{2n-1}^{n-1}p^{n+1}(1-p)^{n}.\end{aligned}$$

现在只需证明

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1+k}^{n-1}(1-p)^{k}p^{n} + C_{2n-1}^{n-1}p^{n+1}(1-p)^{n} - C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{n}(1-p)^{k}p^{n+1}\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1+k}^{n-1}(1-p)^{k} + C_{2n-1}^{n-1}p(1-p)^{n} - C_{2n-1}^{n}(1-p)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{n}(1-p)^{k}p\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1+k}^{n-1}(1-p)^{k} + 2C_{2n-1}^{n-1}p(1-p)^{n} - C_{2n-1}^{n}(1-p)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{n}(1-p)^{k}p\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1+k}^{n-1}(1-p)^{k} - C_{2n-1}^{n}(1-p)^{n} = -\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n}(1-p)^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n}(1-p)^{k}\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=0}^{n-1}\left\{C_{n-1+k}^{n-1}(1-p)^{k} - C_{n+k}^{n}(1-p)^{k}\right\} = -\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n}(1-p)^{k+1} + C_{2n-1}^{n}(1-p)^{n}.\\
\Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{n-1} -C_{n+k-1}^{n}(1-p)^{k} = -\sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k}^{n}(1-p)^{k+1}.\\
\Leftrightarrow &\sum_{k-1=0}^{k-1=n-2} C_{n+(k-1)}^{n}(1-p)^{(k-1)+1} = \sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k}^{n}(1-p)^{k+1}.\end{aligned}$$

最后一项是显然成立的。 □

2. 但也有一些项目，比如冰壶运动，其整个比赛通常是进行偶数局。现在有甲、乙两名同学进行一项趣味项目的比赛，两人约定比赛规则为：共进行 $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 局，谁赢的局数大于 n，谁就获得最终胜利。已知每局比赛中，甲的获胜概率均为 p ($0 < p < 1/2$)，乙获胜的概率均为 $1-p$，记甲赢得比赛的概率为 P_{2n}，讨论数列 $\{P_{2n}\}$ 的单调性。

我们考虑建立 P_{2n+2} 与 P_{2n} 之间的**递推关系**，设甲在共进行 $2(n+1)$ 局的比赛中前 $2n$ 局胜利的局数为 X，最后两局胜利的局数为 Y，自然有

$$P_{2n+2} = P\{Y \geq 1\}P\{X = n+1\} + 1 \cdot P\{X > n+1\} + P\{Y = 2\}P\{X = n\}.$$

带入即

$$P_{2n+2} = [1-(1-p)^2] \cdot C_{2n}^{n+1}p^{n+1}(1-p)^{n-1} + [P_{2n} - C_{2n}^{n+1}p^{n+1}(1-p)^{n-1}] + p^2 \cdot C_{2n}^{n}p^n(1-p)^n.$$

化简得到

$$\begin{aligned}
P_{2n+2} - P_{2n} &= C_{2n}^{n}p^{n+2}(1-p)^n - C_{2n}^{n+1}p^{n+1}(1-p)^{n+1} \\
&= p^{n+1}(1-p)^n[C_{2n}^{n}p - C_{2n}^{n+1}(1-p)] \\
&= \frac{p^{n+1}(1-p)^n C_{2n}^{n}}{n+1}\{[2p-1]n + p\}.
\end{aligned}$$

由于 $2p-1<0$ 从而上式在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上有根 $n_0 = p/(1-2p)$. 若 $n_0 \in \mathbb{Z}$，那么 $\{P_{2n}\}$ 满足

$$P_2 < P_4 < \cdots < P_{2n_0} = P_{2n_0+2} > P_{2n_0+4} > \cdots$$

如果 $n_0 \notin \mathbb{Z}$，那么取 $n_1 = [n_0]$，此处 $[\cdot]$ 表示整数部分，$\{P_{2n}\}$ 满足

$$P_2 < P_4 < \cdots < P_{2n_1} < P_{2n_1+2} > P_{2n_1+4} > \cdots$$

□

3. 一个袋子中有 10 个大小相同的球，其中有 4 个黄色球，6 个白球，从中随机地抽出 5 个球作为样本。用 X 表示样本中黄色球的个数。

   (1) 分别对有放回摸球和不放回摸球，求 X 的分布列；

   (2) 若用样本中黄色球的比例估计总体黄色球的比例，为了使得估计**尽可能准确**，应该采用哪种摸球方式？

4. 在概率统计中，我们常常通过观察到的实验结果应用**极大似然估计法**来估计参数的取值。设 X 为其分布列与未知参数 m 有关的离散型随机变量，其中 m 的取值范围为 S. 若对已知结果 $X=k$，有 $m_0 \in S$ 满足

$$\forall\, m_1 \in S,\ P\{X=k \mid m=m_0\} \geq P\{X=k \mid m=m_1\},$$

   则称 m_0 为 m 在 $X=k$ 下的一个极大似然估计。

   (1) 分别对下列情况求 m 在 $X=3$ 下的极大似然估计：

      i. $X \sim B(2,m)$;

      ii. $X \sim B(m,1/2)$.

   (2) 某台抽奖机上有一个按钮，参与者需要连续快速点击按钮来累积积分换取奖品。已知每次点击按钮后，获得 1 积分的概率为 p $(0<p<1)$，不获得积分的概率为 $1-p$. 小丽参加这个抽奖活动后总共获得了 k 积分，用极大似然估计的方法估计她点击按钮的总次数 m 的取值为 m_0，证明：$m_0 \leq k/p$. 并指出等号成立的条件。

5. 随机游走在空气中的烟雾扩散，股票市场的价格波动等动态随机现象中有重要应用。在平面直角坐标系中，粒子从原点出发，每秒等可能选择向左，向右，向上或向下移动一个单位。例如在 1 s 后，粒子可能到达的位置有 $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$.

(1) 设粒子在第 2 秒将移动到 (x,y)，记随机变量 $X=x+y$，求 $E(X)$；

(2) 记在第 n 秒粒子回到原点的概率为 p_n.

(i) 求 p_{2n}；

(ii) 已知：

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/4}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

设 $b_n=p_{2n}$，记 S_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。**称粒子为常返的**，若对任意实数 $M>0$，都存在 $n\in\mathbb{N}^*$ 使得 $S_n>M$，证明：该粒子是常返的。

6. 在空间直角坐标系中，**原点处**有一只蚂蚁可以沿 x,y,z 轴的正方向和负方向共 6 个方向**等可能**爬行.设 $2n$ 次爬行后，蚂蚁回到原点的概率为 P_{2n}. 求证：

$$P_{2n}>(C_{2n}^n)^2/6^{2n}.$$

引例

7. 甲、乙、丙三人进行比赛，规定每局两个人比赛，胜者与第三人比赛，依次循环，直至有一人**连续两次胜利**为止，此人即为冠军。而每次比赛双方取胜的概率都是 $1/2$，现假定甲、乙两人先比，试求各人得冠军的概率。

期望递推

8. 甲、乙两人进行象棋比赛，每局甲胜的概率为 $p\ (0 < p < 1)$，乙胜的概率为 $q = 1 - p$。比赛进行到有一人**连续胜两局**为止，设比赛局数为随机变量 X，求 $E(X)$.

9. 甲、乙两口袋中各装有 1 个黑球和 2 个白球，现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复进行 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 次这样的操作，记甲口袋中黑球的个数为 X_n，恰有 1 个黑球的概率为 p_n，恰有 2 个黑球的概率为 q_n，恰有 0 个黑球的概率为 r_n.

   (1) 求 p_1, p_2 的值；

   (2) 容易看出第 n 次甲口袋中黑球个数只受到 $n-1$ 次操作后口袋中黑球数量这一状态的影响，与先前的操作无关。记 $p_n = a \cdot p_{n-1} + b \cdot q_{n-1} + c \cdot r_{n-1}$，其中 $a, b, c \in [0,1]$ 为常数，同时 $p_n + q_n + r_n = 1$，请求出 p_n；

   (3) 证明：X_n 的数学期望 $E(X_n)$ 为定值。

1. 在 $n \times n$ 网格上从点 0 走到点 n，要求每一步只能走 $\nearrow$ 或者 $\searrow$，称为长为 $2n$ 的格路。不走到 x 轴下方的格路称为迪克路 (Dyck Path)。图 1 就展示了一个长度为 12 的迪克路。编号为 $1, 2, 3, \cdots, 2n$ 的点按顺序组成一个圈，用直线段将他们连接且线段不能出现交叉，这样连接的方法总数称为 Catalan 数，记作 C_n。图 2 展示了一个 $n = 6$ 的连接方法。

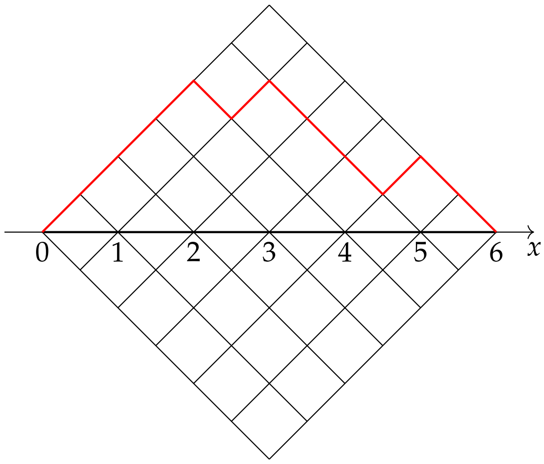


图 1: Dyck Path

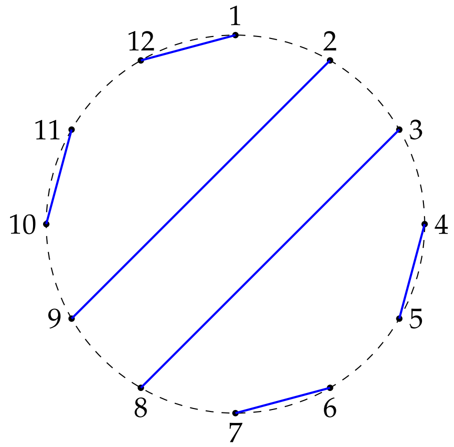
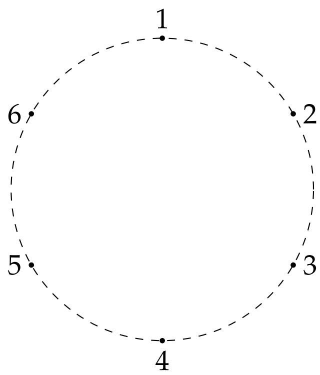
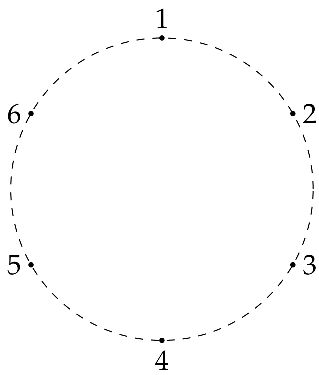


图 2: Catalan 配对

(1) 求 C_3 并在下面的图中绘制你找到的其中两种连接方法。





(2) 为了不出现交叉，其实相互配对的两个点的奇偶性必定相反，请你依据这一点，证明下列恒等式：

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}.$$

(3) 为了求解 C_n 的通项公式，用一一对应原理，请你尝试建立 Dyck Path 和 Catalan 配对之间的一一对应关系。事实上，图 1 和图 2 在这种对应关系下是等价的。

(4) 长度为 $2n$ 的 Dyck Path 的数目可以通过下列思路求解。利用“正难则反”的思想，对于每一个走到 x 轴下方的格路，都可以将其转化为**起点在 A 点，只在绿色阴影区域内走到点 n 的格路**。请你建立上述一一对应

关系并得到

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

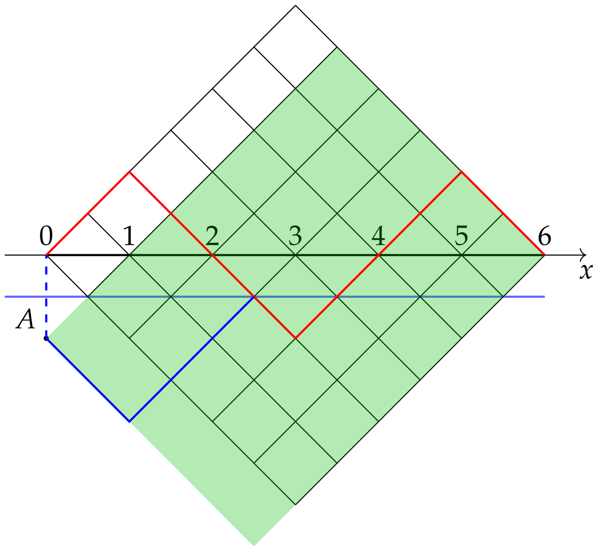


图 3: 一个非 Dyck Path 的示例

2. 将一个圆环分成 n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ 个区域，用 m $(m \in \mathbb{N}, m \geq 3)$ 种颜色给这个 n 个区域染色，要求相邻区域不使用同一种颜色，但同一种颜色可重复使用，则不同的染色方案有多少种？

3. 已知 $n \geq 2$，且平面内有 n 条直线，其中任意两条不平行，任意三条不共点，证明：这些直线的交点的个数为

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

4. 求证：平面上 n 个圆最多把平面划分成 $n^2 - n + 2$ 个区域，其中 $n \geq 1$.