

1. (多选) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{n^2}{3^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则

A. $a_n > 1$

B. $S_n \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

C. $n = 2$ 时, a_n 取最大值

D. $S_n > n$

2. (多选) 已知 $M = \{k \mid a_k = b_k\}$, a_n, b_n 不为常数列且各项均不相同, 下列说法正确的有

A. a_n, b_n 均为等差数列, 则 M 中最多一个元素

B. a_n, b_n 均为等比数列, 则 M 中最多三个元素

C. a_n 为等差数列, b_n 为等比数列, 则 M 中最多三个元素

D. a_n 单调递增, b_n 单调递减, 则 M 中最多一个元素

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列。其前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1, S_2 = a_3 - 1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n ;

(2) 设 $b_n = \begin{cases} k, & n = a_k \\ b_{n-1} + 2k, & a_k < n < a_{k+1} \end{cases}$, 其中 $k > 1, k \in \mathbb{Z}$.

(i) 当 $n = a_{k+1}$ 时, 求证: $b_{n-1} \geq a_k \cdot b_n$;

(ii) 求 $\sum_{i=1}^{S_n} b_i$.