1. 证明：当 $P(AB) > 0$ 时，$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$. 进一步，你能归纳出 $P(A_1A_2\cdots A_n)$ 的公式吗？

2. 已知 3 张奖券中只有 1 张有奖，甲、乙、丙 3 名同学**依次**不放回地各随机抽取 1 张。

    (1) 他们中奖的概率与抽奖的顺序有关吗？

    (2) 推广到 n 张奖券和 n 名同学，请你验证 (1) 的结论是否仍然成立。

3. 已知 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 证明：$P(B|A) = P(B)$ 的**充要条件**是 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$. 其中一式成立的情况下，还有 $P(B|\overline{A}) = P(B), P(A|\overline{B}) = P(A)$.

4. 在 A, B, C 三个地区暴发了流感，这三个地区分别有 6%、5%、4% 的人患了流感。假设这三个地区的人数的比例为 5:7:8，现从这三个地区中任意选取一个人。

    (1) 求这个人患流感的概率；

    (2) 如果此人患流感，求此人选自 A 地区的概率。

5. 甲、乙、丙三人相互做乒乓球训练，第 1 次由甲将乒乓球传出，每次传球时，传球者都可能地将球传给两人中的任何一人。求第 n 次乒乓球在甲手中的概率。

6. (**Markov Chain**) 假设只考虑天气的两种情况：有雨或无雨。若已知今天的天气情况，明天天气保持不变的概率为 p，变的概率为 $1-p$ $(0 < p < 1)$. 设第一天无雨，试求第 n 天也无雨的概率。

7. 甲、乙、丙三人进行比赛，规定每局两个人比赛，胜者与第三人比赛，依次循环，直至有一人**连续两次胜利**为止，此人即为冠军。而每次比赛双方取胜的概率都是 $1/2$，现假定甲、乙两人先比，试求各人得冠军的概率。

8. (**Polya 罐子**) 设罐子中有 b 个红球，r 个黑球，每次随机取出一个球，取出后将原球放回，再加入 c 个同色球，设 a_k 为第 k 次取出黑球的概率，证明：

    (1) (**传染病模型**) 若 $c > 0$，$\{a_k\}$ 为常数列；

    (2) (**不放回抽样**) 若 $c = -1$，$\{a_k\}$ 为常数列.

9. 设 $E(X)=\mu$， $a\neq\mu$，证明 X 相对于 μ 的偏离程度 $E\left[(X-\mu)^2\right]$ 与 X 相对于 a 的偏离程度 $E\left[(X-a)^2\right]$ 满足

$$E\left[(X-\mu)^2\right]<E\left[(X-a)^2\right]\rightsquigarrow\mu=E(X)=\arg\min_{a\in\mathbb{R}}E\left[(X-a)^2\right].$$

10. 对一批产品进行检查，如检查到第 a 件全部都为合格品，就认为这批产品合格；若在前 a 件中发现不合格品**即停止检查**，并认为这批产品不合格。设产品的不合格率是 p $(0<p<1)$。问每批产品所查的件数为 X，求 $E(X)$.

11. 甲、乙两人进行象棋比赛，每局甲胜的概率为 p $(0<p<1)$，乙胜的概率为 $q=1-p$。比赛进行到有一人**连续胜两局**为止，设比赛局数为随机变量 X，求 $E(X)$.

12. 设 $X(\omega):\Omega\to\{0,1,2,\cdots,n\}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ ，证明：

    (1) $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(X\geq k)$;

    (2) $\sum\limits_{k=0}^{n}kP(X>k)=1/2[E(X^2)-E(X)]$.

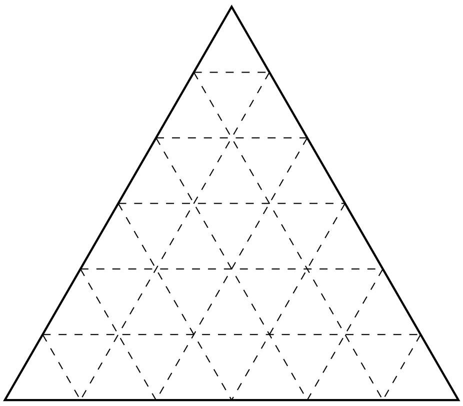
13. 甲、乙两口袋中各装有 1 个黑球和 2 个白球，现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复进行 $n(n\in\mathbb{N}^*)$ 次这样的操作，记口袋中黑球的个数为 X_n，恰有 1 个黑球的概率为 p_n，恰有 2 个黑球的概率为 q_n，恰有 0 个黑球的概率为 r_n.

    (1) 求 p_1,p_2 的值；

    (2) 容易看出第 n 次口袋中黑球个数只受到 $n-1$ 次操作后口袋中黑球数量这一状态的影响，与先前的操作无关。记 $p_n=a\cdot p_{n-1}+b\cdot q_{n-1}+c\cdot r_{n-1}$，其中 $a,b,c\in[0,1]$ 为常数，同时 $p_n+q_n+r_n=1$，请求出 p_n；

    (3) 证明：X_n 的数学期望 $E(X_n)$ 为定值。

1. 把一个等边三角形 ABC 的各边 2025 等分，过各分点在三角形内部作各边的平行线，得到的图案中一共有多少个平行四边形？



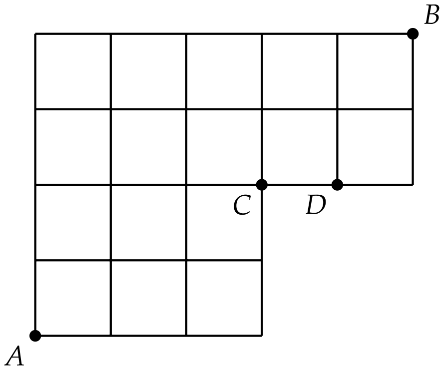
2. 从排成一排的 9 位同学中，随机选出 3 位同学，这 3 位同学互不相邻的概率是 ____.

3. 15 个人围坐在圆桌旁，从其中任选 4 人，两两不相邻的概率是 ____.

A. $\dfrac{30}{91}$ B. $\dfrac{25}{91}$ C. $\dfrac{10}{91}$ D. $\dfrac{31}{90}$

4. 安排 6 个班的班主任监考 6 个班，则其中**恰好**有两个班的班主任监考自己班的安排总数有多少种？

5. 在某城市中，A、B 两地之间有如图所示的道路网，甲沿道路随机关选一条最短路径，从 A 地出发去往 B 地，若甲途经 C 地，且不经过 D 地，则不同的路径共有 ____条。



6. 将一个圆环分成 n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ 个区域，用 m $(m \in \mathbb{N}, m \geq 3)$ 种颜色给这个 n 个区域染色，要求相邻区域不使用同一种颜色，但同一种颜色可重复使用，则不同的染色方案有多少种？

7. 已知 $n \geq 2$，且平面内有 n 条直线，其中任意两条不平行，任意三条不共点，证明：这些直线的交点的个数为

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

8. 求证：平面上 n 个圆最多把平面划分成 $n^2 - n + 2$ 个区域，其中 $n \geq 1$.

9. 在 $(1+x)^3 + (1+x)^4 + \cdots + (1+x)^{n+2}$ 的展开式中，含 x^2 项的系数是多少？

10. 求 $1 - 90C_{10}^1 + 90^2C_{10}^2 - 90^3C_{10}^3 + \cdots + (-1)^k 90^k C_{10}^k + \cdots + 90^{10}C_{10}^{10}$ 除以 88 的余数。

11. 已知 $(x^2+1)(4x-3)^8 = a_0 + a_1(2x-1) + a_2(2x-1)^2 + \cdots + a_{10}(2x-1)^{10}$，则

    (a) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} =$____;

    (b) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 =$____;

    (c) $a_3 =$____.

12. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = q^n + p$ 且 $a_3 = 4$.

    (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

    (2) 证明：$S_n < \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$；

    (3) 若数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k a_k$，求 b_n 的前 n 项和 T_n.

13. 在 $n \times n$ 网格上从点 0 走到点 n，要求每一步只能走 $\nearrow$ 或者 $\searrow$，称为长为 $2n$ 的格路。不走到 x 轴下方的格路称为迪克路 (Dyck Path)。图 1 就展示了一个长度为 12 的迪克路。编号为 $1, 2, 3, \cdots, 2n$ 的点按顺序组成一个圈，用直线段将他们连接且线段不能出现交叉，这样连接的方法总数称为 Catalan 数，记作 C_n。图 2 展示了一个 $n = 6$ 的连接方法。

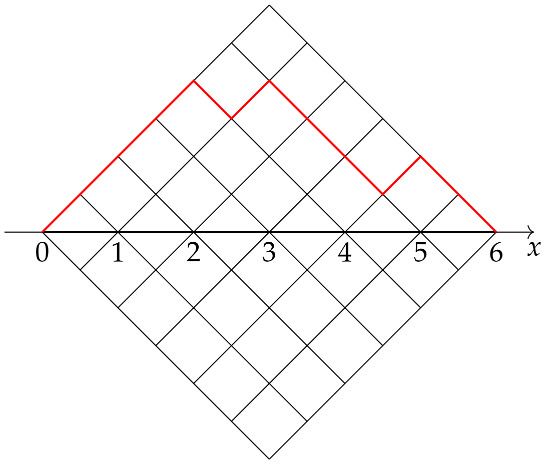


图 1: Dyck Path

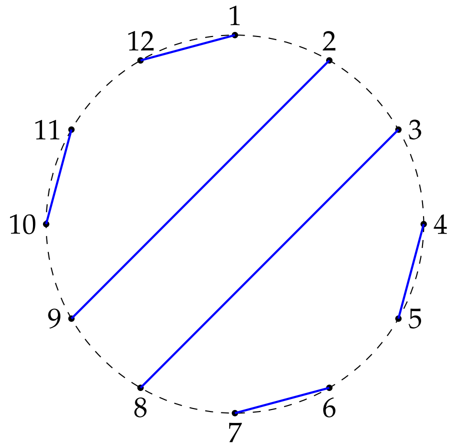
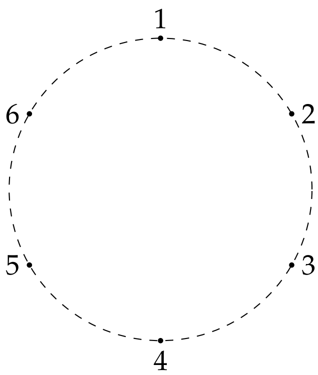
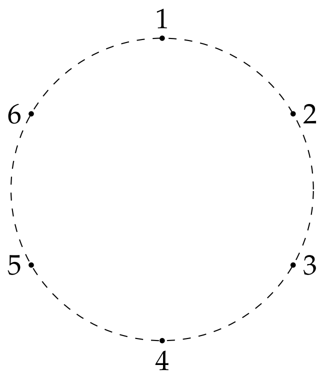


图 2: Catalan 配对

(1) 求 C_3 并在下面的图中绘制你找到的其中两种连接方法。





(2) 为了不出现交叉，其实相互配对的两个点的奇偶性必定相反，请你依据这一点，证明下列恒等式：

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}.$$

(3) 为了求解 C_n 的通项公式，用一一对应原理，请你尝试建立 Dyck Path 和 Catalan 配对之间的一一对应关系。事实上，图 1 和图 2 在这种对应关系下是等价的。

(4) 长度为 $2n$ 的 Dyck Path 的数目可以通过下列思路求解。利用“正难则反”的思想，对于每一个走到 x 轴下方的格路，都可以将其转化为**起点在 A 点，只在绿色阴影区域内走到点 n 的格路**。请你建立上述一一对应

关系并得到

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

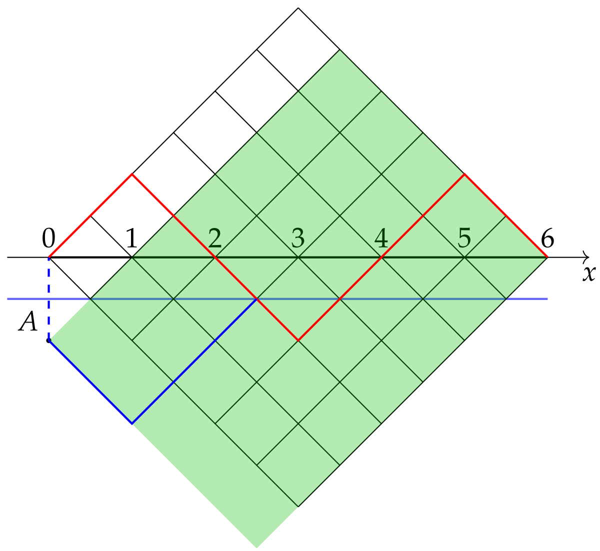


图 3: 一个非 Dyck Path 的示例