

1. 设随机变量 $X(\omega) : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, 称 X 服从几何分布, 若

$$P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1}p \quad (k = 1, 2, \dots, n, \dots, 0 < p < 1).$$

同时记 $X \sim \text{Ge}(p)$. 对这种随机变量的取值有可列个整数的情形, 定义 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k p_k$.

(1) 验证这是一个合法的分布列, 即 $\sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P\{X = k\} = 1$;

(2) 先待定 a, b 满足 $k(1 - p)^{k-1} = [a(k + 1) + b](1 - p)^k - [ak + b](1 - p)^{k-1}$, 再证明 $E(X) = 1/p$;

(3) 用 $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$ 来证明 $D(X) = (1 - p)/p^2$;

(4) 几何分布有一个重要的性质: **无记忆性**. 也就是对 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 有

$$P\{X = m + n \mid X > n\} = P\{X = m\}. \rightsquigarrow P\{X > m + n \mid X > n\} = P\{X > m\}.$$

为了证明上述性质你需要一点准备工作, 先验证几何级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_1 q^{n-1} = a_1/(1 - q) \quad (|q| < 1)$.

这一点在你求解 $P\{X > n\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} P\{X = k\}$ 时会使用到。

(5) 求解几何分布的期望还可以使用下面的方法:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP\{X = k\} = 1 \cdot P\{X = 1\} + \sum_{k=2}^{\infty} kP\{X = k\} \\ &= 1 \cdot P\{X = 1\} + \sum_{k=2}^{\infty} kP\{X = k \mid X > 1\}P\{X > 1\} \\ &= 1 \cdot P\{X = 1\} + P\{X > 1\} \sum_{k=2}^{\infty} kP\{X = k \mid X > 1\} \\ &= 1 \cdot P\{X = 1\} + P\{X > 1\} \sum_{k=2}^{\infty} (k - 1 + 1)P\{X = k - 1\} \\ &= 1 \cdot P\{X = 1\} + P\{X > 1\} \left[\sum_{k=2}^{\infty} (k - 1)P\{X = k - 1\} + \sum_{k=2}^{\infty} P\{X = k - 1\} \right] \quad (1) \end{aligned}$$

$$= 1 \cdot P\{X = 1\} + P\{X > 1\} \left[\sum_{m=1}^{\infty} mP\{X = m\} + 1 \right] \quad (2)$$

$$= 1 \cdot P\{X = 1\} + P\{X > 1\}(E(X) + 1) = 1 \cdot P\{X = 1\} + (1 - P\{X = 1\})(E(X) + 1).$$

这种方法巧妙利用无记忆性得到一个关于 $E(X)$ 的方程, 化简问题, 请你验证其中的每一步, 并指出从式 (1)

到式 (2) 利用了分布列的什么性质?

2. 设 $X_1(\omega), X_2(\omega)$ 都是定义在样本空间 Ω 上的随机变量, 且 $X_i: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. 我们称

$$P\{X_1 = i, X_2 = j\} = p_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n, p_{ij} \geq 0).$$

为二维随机变量 (X_1, X_2) 的联合分布列, 自然有 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} = P(\Omega) = 1$.

(1) 验证

$$P\{X_1 = i\} = \sum_{j=1}^n P\{X_1 = i, X_2 = j\}, \quad P\{X_2 = j\} = \sum_{i=1}^n P\{X_1 = i, X_2 = j\}.$$

并利用这个结论证明 $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ 恒成立。

(2) 我们称 X_1, X_2 这两个随机变量是独立的, 若

$$P\{X_1 = i, X_2 = j\} = P\{X_1 = i\} \cdot P\{X_2 = j\} \quad (\forall 1 \leq i, j \leq n).$$

请验证在 X_1, X_2 独立的情况下有, $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2)$.

(3) 利用 $D(X) = E[(X - E(X))^2]$ 验证在 X_1, X_2 独立的情况下有

$$D(X_1 \pm X_2) = D(X_1) + D(X_2).$$