Lecture 1 组合计数

引例 n个元素的集合一共有多少子集?

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

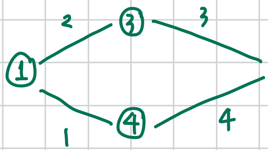
出现 / 不出现　2种状态.

分步 $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n$

$2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$

分步乘法计数原理. n步完成 第i步有N_i种选择

$$N = \prod_{i=1}^{n} N_i$$



$① \to ②$

$① \xrightarrow{2} ③ \xrightarrow{3} ②$　2×3

$① \to ④ \to ②$　1×4

$N = 2\times 3 + 1 \times 4$

分类加法 完成一件事情有n种方案，每种方案中有N_i种办法

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

一一对应. A, B 若存在从A到B的双射 f (单射. 满射)

bijection.

则 $|A| = |B|$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ 则称 f 为单射. injective.

满射 $f: A \to B$　$\forall a \in B,\ \exists b \in A,\ s.t.\ f(b) = a.$

surjective.

排列　　A.　B.　C.　D　人　　　　组合

$\frac{1}{\triangle}$　$\frac{2}{\triangle}$　$\frac{3}{\triangle}$　项目.

每个人都要选1个项目

$A \to B \to C \to D$　　$3\times3\times3\times3=3^4$

1选人 → 2选人 → 3选人.　　$4\times4\times4=4^3$? ×

1. (1) 4 名同学分别报名参加学校的足球队、篮球队、乒乓球队，每人限报其中的一个运动队，不同报法的种数是 3^4 还是 4^3？

(2) 3 个班分别从 5 个景点中选择一处游览，不同选择的种数是 3^5 还是 5^3？

A　B　C　人

1　2　3　座位

$A_3^3 = 3\times2\times1 = 3!$

def $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1,\ n\in N^*$.

A　B　C　D

1　2　3

$A_4^3 = 4\times3\times2$

$$A_m^n = \underbrace{m\times(m-1)\times\cdots\times[m-(n-1)]}_{n\text{个}} = m(m-1)\cdots(m-n+1)$$

$(m \geq n)$

$$= \frac{m(m-1)\cdots2\cdot1}{(m-n)\cdots2\cdot1}$$

$$= \frac{m!}{(m-n)!}$$

A　B　C　D　E　F　G　7门课

选3门考试

分步和多　　选3门 → 3门排序 (全排列)

7门中选3门排序

$A_7^3 = A_3^3 \cdot N$

$\Rightarrow N = \frac{A_7^3}{A_3^3}$ (除序)　def $\triangleq C_7^3$

$= \binom{3}{7}$

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{A_n^n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$C_5^2 = \frac{A_5^2}{A_2^2} = \frac{5\times4}{2} = 10$　　$C_{10}^2 = \frac{10\times9}{2} = 45$

$C_7^2 = \frac{A_7^2}{A_2^2} = \frac{7\times6}{2} = 21$　　$C_5^3 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$

Notice: $C_5^2 = C_5^3$?

规定: $C_n^0 = 1$

Properties: 1° $C_m^n = C_m^{m-n}$? ✓

pf: $LHS = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \frac{m!}{[m-(m-n)]!\,(m-n)!} = RHS$ ∎

$C_7^6 = C_7^1 = 7$

2° $nC_m^n = mC_{m-1}^{n-1}$ ☆

check: $n\cdot\frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \frac{m!}{(m-n)!\,(n-1)!} = \frac{m\cdot(m-1)!}{[(m-1)-(n-1)]!\,(n-1)!} = m\,C_{m-1}^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$? $\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k$

3° $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

n个人 → 1个特殊
→ n-1个同学

分类加法 $\begin{cases} \text{选到特殊} & C_{n-1}^{m-1} \\ \text{没选到} & C_{n-1}^{m} \end{cases}$ 组合论证法！

$$\text{RHS} = \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!\,m!} + \frac{(n-1)!}{(n-m)!\,(m-1)!} = \frac{(n-1)!\,[n-m+m]}{(n-m)!\,m!} = \frac{(n-1)!\,n}{(n-m)!\,m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$
$$= C_n^m$$
$$= \text{LHS}$$

eg. $C_3^2 + C_4^2 + \cdots\cdots + C_n^2 \quad (n \geq 3)$

$$= -C_3^3 + \underbrace{C_3^3 + C_3^2}_{= C_4^3} + C_4^2 + \cdots = \cdots = C_n^3 + C_n^2 - C_3^3$$
$$= C_{n+1}^3 - 1 \quad \blacksquare$$

4° $C_n^0C_m^r + C_n^1C_m^{r-1} + \cdots + C_n^rC_m^0 = C_{n+m}^r$ ☆

$(r \leq \min\{n, m\})$

分类加法 n+m中选r个

n中	m中	
0	r	$C_n^0\cdot C_m^r$ 分步乘法
1	r-1	$C_n^1C_m^{r-1}$
⋮		⋮
r	0	$C_n^rC_m^0$

推论: $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

pf: Notice: $C_n^r=C_n^{n-r}$

$LHS=C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+\cdots+C_n^nC_n^0=C_{2n}^n$ ∎

5° $\sum_{k=1}^{n} kA_k^k=\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)-1]k!=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]$

$=(n+1)!-1!=A_{n+1}^{n+1}-1$

6° $A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$

n+1 个书本 $\left\langle \begin{array}{l} 1 \quad \text{Top} \\ n \quad \text{Common.} \end{array} \right.$

分类 $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{1\ \text{Top}} + n \text{ Common 中选 } m-1 \\ A_m^1 (C_m^1)\cdot A_n^{m-1}=mA_n^{m-1} \\ \text{Top 没有被选上.} \quad A_n^m \end{array} \right.$

$RHS=\frac{n!}{(n-m)!}+\frac{n!}{(n-m+1)!}\cdot m$

$=\frac{n![n-m+1+m]}{(n-m+1)!}$

$=\frac{(n+1)!}{(n-m+1)!}=A_{n+1}^m=LHS.$

$A_{n+1}^m=A_n^m+mA_n^{m-1}$

eg. $A_m^m+A_{m+1}^m+\cdots+A_{2m}^m$ 求和.

[证一]. $A_m^m(1+C_{m+1}^m+C_{m+2}^m+\cdots+C_{2m}^m)$

C_{m+1}^{m+1}, C_{m+2}^{m+1}, C_{m+3}^{m+1} ...

$+=2m+1$

$=A_m^m\cdot C_{2m+1}^{m+1}=A_m^m\cdot C_{2m+1}^{m}=A_{2m+1}^m$

[证二] $A_m^m=\frac{1}{m+1}A_{m+1}^{m+1}$

$A_m^m+A_{m+1}^m=\frac{1}{m+1}[A_{m+1}^{m+1}+(m+1)A_{m+1}^m]$

$=\frac{1}{m+1}A_{m+2}^{m+1}$

以此类推. 原式 $=\frac{1}{m+1}A_{2m+1}^{m+1}=\frac{1}{m+1}\cdot\frac{(2m+1)!}{m!}$

$=\frac{(2m+1)!}{(m+1)!}=A_{2m+1}^m$

4. 用 0 ～ 9 这 10 个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

[法一] 特殊元素优先法

首位 → 后两位

$C_9^1 A_9^2$.

[法二] 正难则反.

$A_{10}^3 - A_9^2 = 10\times 9\times 8 - 9\times 8 = 9\times 9\times 8$

$= C_9^1 A_9^2$

5. 将 7 个人从左到右排成一排；若甲、乙、丙 3 人中至少有 2 人相邻，且甲不站在最右端，则不同的站法有 ____ 种.

甲、乙、丙相邻　甲、乙、丙 丁、戊 排列　相邻问题+捆绑法

[相邻] $A_3^3 \cdot A_3^3$ → 甲、乙、丙内部

[插空] $A_5^5 -$　$A_2^2 A_3^3$

甲乙丙

— 2个相邻，1个不相邻　$C_3^2 A_2^2 A_3^2 A_2^2$.

相邻　甲、乙、丙　丁戊

乙、丙相邻　甲不相邻　$A_2^2(A_5^2 - A_4^1)A_4^4$

甲、x 相邻　2个　x 不相邻　$A_4^4(A_5^2 A_2^2 - A_4^1)\cdot 2$

甲、乙、丙相邻.　$A_4^4(C_4^1 A_3^3 + (A_3^3 - A_2^2))$

甲

8. 甲、乙、丙、丁、戊 5 名志愿者参加社区组织的志愿者活动，现有 A、B、C 三个小区可供选择，每个志愿者只能选择其中一个小区。则每个小区至少有一名志愿者，且甲不在 A 小区的概率为 ____.

A. $\frac{193}{243}$　　B. $\frac{100}{243}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{9}$

B ✓

总数：$3^5=243$

先分组后分配

相同组 除序 1, 1, 3：$\frac{C_5^1C_4^1C_3^3}{A_2^2} = C_5^3$

1, 2, 2：$\frac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}$

分配 $C_2^1A_2^2$

分子 $=\left(C_5^3+\frac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}\right)C_2^1A_2^2$

$\left(10+5\times\frac{6}{2}\right)\times 4$

$=25\times4=100.$

9. (1) 将 6 个不同小球放入三个不同盒子，有多少种安排方法？　3^6

$6 \Rightarrow$ 1.2.3　2.2.2　1.1.4

(2) 将 6 个不同小球放入三个不同盒子，每个盒子均非空，有多少种安排方法？

$\left(C_6^4+\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}+\right.$ 分组分配. $\left.C_6^1C_5^2C_3^3\right)\times A_3^3.$

(3) 将 6 个相同小球放入三个不同盒子，有多少种安排方法？

(4) 将 6 个相同小球放入三个不同盒子，每个盒子均非空，有多少种安排方法？

(5) 将 6 个不同小球放入三个相同盒子，有多少种安排方法？

3组：1.2.3　$1\times A_3^3$　6；1.1.4　$1\times C_3^1$　3；2.2.2　1×1　1　$=10$

2组：3+3　C_3^2；4+2　A_3^2；5+1　A_3^2　$3+6+6$　$=15$

1组：6　A_3^3　3　$=3$

$=28$

隔板法（相同元素）

n个元素　m　可空

2个隔板和6个球

0 | 0 | 0　0　0　0

组合

$C_{6+3-1}^{2}=C_8^2=\frac{7\times8}{2}=28$

C_{m+n-1}^{m}

(4) 插空

$$\circ \_ \circ \_ \circ \_ \circ \_ \circ \_ \circ$$

$C_5^2 = 10.$

(5)

3 $\begin{cases} 1.1.4 & C_6^4 & \times 1 \\ 2.2.2 & C_6^2C_4^2C_2^2/A_3^3 & \times 1 \\ 1.2.3 & C_6^1C_5^2C_3^3 & \times 1 \end{cases}$ 分配

1分组

2 $\begin{cases} 3\ 3 & C_6^3C_3^3/A_2^2 & \times 1 \\ 4\ 2 & C_6^4C_2^2 & \times 1 \\ 5\ 1 & C_6^5 & \times 1 \end{cases}$

1 6 1种

(6) 将 6 个不同小球放入三个相同盒子，每个盒子均非空，有多少种安排方法？

(7) 将 6 个相同小球放入三个相同盒子，有多少种安排方法？

(8) 将 6 个相同小球放入三个相同盒子，每个盒子均非空，有多少种安排方法？

3堆 $\begin{cases} 1.1.4 \\ 1.2.3 \\ 2.2.2 \end{cases}$

2堆 $\begin{cases} 3\ 3 \\ 4\ 2 \\ 5\ 1 \end{cases}$

1堆 6

(7) 7 △

(8) 3 △.

10. 给定不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{10} = 2025$. 当 $x_k > 2k+1$ $(k = 1, 2, \cdots, 10)$ 时，有多少组不同的整数解？

隔板法

Let $y_k = x_k - (2k-1)$

$y_1 + \cdots + y_{10} = 2025 - (3+5+\cdots+21)$ $y_i \geq 0$ ⇒ 可空.

$$C^{9}_{2025-(3+5+\cdots+21)+9}.$$