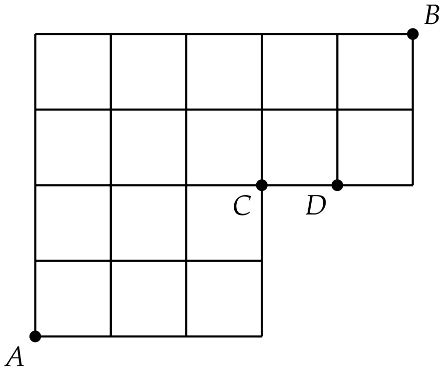
1. 2160 有多少个不同的正因数？这些正因数的和是多少？

2. 在某城市中，A、B 两地之间有如图所示的道路网，甲沿道路随机选一条最短路径，从 A 地出发去往 B 地，若甲途经 C 地，且不经过 D 地，则不同的路径共有 ____条。



3. 已知

$$\frac{1}{(n+1)C_n^r} + \frac{1}{(n+1)C_n^{r+1}} = \frac{1}{nC_n^{r-1}},$$

其中 n, r 是使组合数有意义的正整数。且 n 为奇数，则 x 的值是 ____. (用含有 n, r 的代数式表示)

4. 在 $n \times n$ 网格上从点 0 走到点 n，要求每一步只能走 $\nearrow$ 或者 $\searrow$，称为长为 $2n$ 的格路。不走到 x 轴下方的格路称为迪克路 (Dyck Path)。图 1 就展示了一个长度为 12 的迪克路。编号为 $1, 2, 3, \cdots, 2n$ 的点按顺序组成一个圈，用直线段将他们连接且线段不能出现交叉，这样连接的方法总数称为 Catalan 数，记作 C_n。图 2 展示了一个 $n = 6$ 的连接方法。

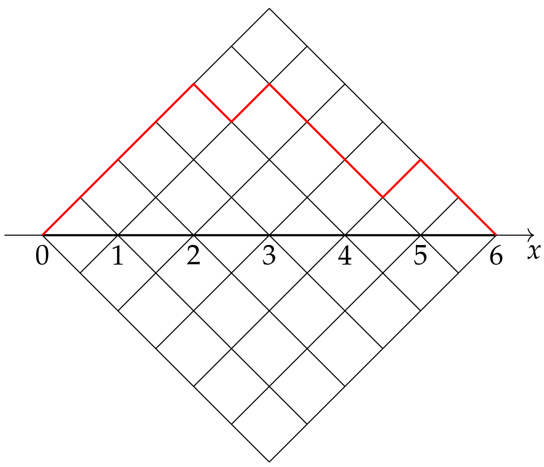


图 1: Dyck Path

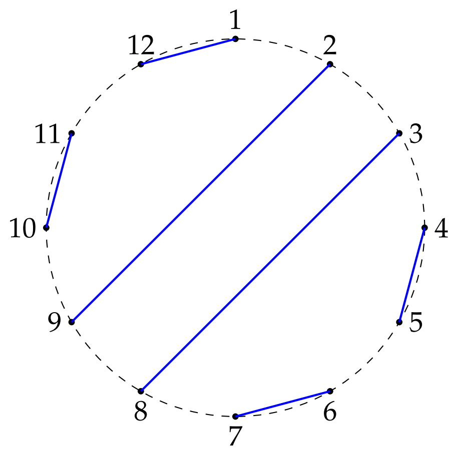
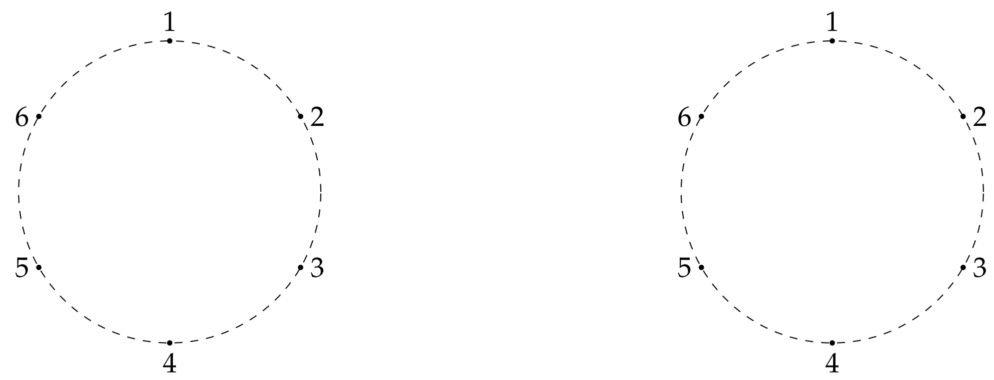


图 2: Catalan 配对

(1) 求 C_3 并在下面的图中绘制你找到的其中两种连接方法。



(2) 为了不出现交叉，其实相互配对的两个点的奇偶性必定相反，请你依据这一点，证明下列恒等式：

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_iC_{n-1-i}.$$

(3) 为了求解 C_n 的通项公式，用一一对应原理，请你尝试建立 Dyck Path 和 Catalan 配对之间的一一对应关系。事实上，图 1 和图 2 在这种对应关系下是等价的。

(4) 长度为 $2n$ 的 Dyck Path 的数目可以通过下列思路求解。利用"正难则反"的思想，对于每一个走到 x 轴下方的格路，都可以将其转化为**起点在 A 点，只在绿色阴影区域内走到点 n 的格路**。请你建立上述一一对应关系并得到

$$C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n.$$

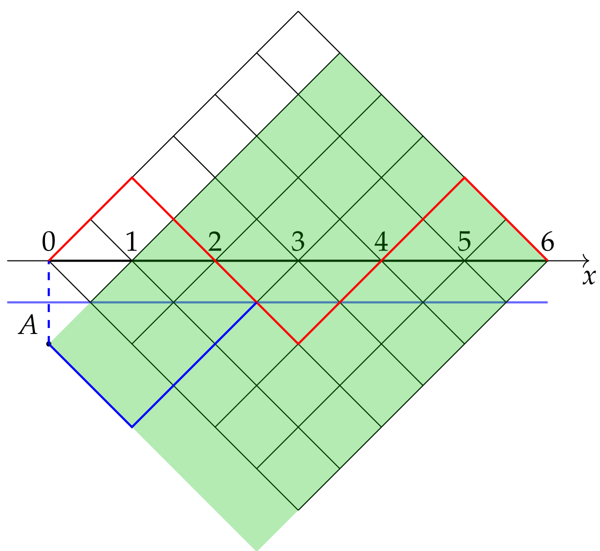


图 3: 一个非 Dyck Path 的示例